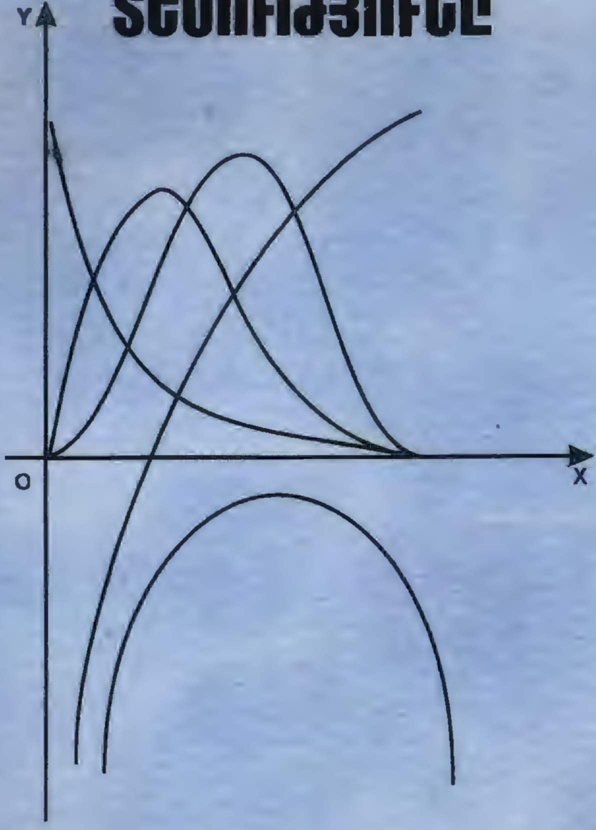
Գրիգորյան Ճ.Մ. Թարվերդյան Ա.Պ.
Խաչատրյան Ա.Ժ. Պետրոսյան Դ.Պ.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ ԵՎ ԳԻՏԱՓՈՐՁԵՐԻ ՊԼԱՆԱՎՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ



ԵՐԵՎԱՆ -2001

Գրիգորյան Շ. Մ., Թարվերդյան Ա. Պ.,
Խաչատրյան Ա. Ց., Պետրոսյան Դ. Պ.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ ԵՎ ԳԻՏԱՓՈՐՁԵՐԻ ՊԼԱՆԱՎՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՍՈՂԻԿ

«ԱՍՈՂԻԿ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2001

ՂՄՀ 5
ԳՄԴ 22.1
Մ 151

Մ 151 **Մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը և գիտափորձնական պլանավորման տեսությունը/ Շ. Մ. Գրիգորյան և ուրիշներ.-** Եր.:Աստղիկ, 2001.-211էջ.

Գրախոսողներ

տեխնիկական գիտությունների դոկտոր՝ Վ. Ս. Բաբայան
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու՝ Լ. Ե. Դանիելյան

Գիտափորձերի պլանավորման տեսության ուսումնական ձեռնարկում շարադրված են մաթեմատիկական վիճակագրության և գիտափորձերի պլանավորման կիրառումը գյուղատնտեսական և տեխնիկական գիտությունների բնագավառում:

Ձեռնարկը նախատեսված է գիտական աշխատողների, ասպիրանտների և մագիստրանտների համար:

Մ $\frac{1602010000}{0136(01)-2001}$ 2001

ԳՄԴ 22.1

ISBN 99930-74-02-O

Ներածություն

Գիտատեխնիկական առաջընթացին հատուկ է համակարգչային տեխնիկայի և մաթեմատիկական նորագույն մեթոդների լայնորեն ներդրումը արտադրությունում և հետազոտական աշխատանքներում: Նման մոտեցումը հատուկ է նաև գյուղատնտեսական գիտություններին: Այս բնագավառում բարդ հիմնախնդիրների լուծման ժամանակ գործ ունենք մաթեմատիկական գաղափարների համակարգված գիտական մոտեցումների հետ: Համակարգային վերլուծության առանցքային խնդիրներից մեկը մաթեմատիկական վիճակագրության կամ դինամիկական մոդելների կիրառությունն է, որոնք որոշակի հայտնի հավանականությամբ ներկայացնում են ուսումնասիրվող բազմագործոն գործընթացը: Ունենալով համապատասխան տեղեկություն, կարելի է ընտրել գիտափորձերի անհրաժեշտ պլան, կառուցել գործընթացի մաթեմատիկական մոդելը և, որ շատ կարևոր է, նպատակին հասնել ամենակարճ ճանապարհով՝ խնդրի օպտիմալացմամբ: Ընդ որում, միագործոն գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ տարափոխելով մեկ գործոնը և ընտրված մակարդակներում անփոփոխ թողնելով մնացած գործոնները, որոշվում է հետազոտվող մեծության կախվածությունը միայն մեկ գործոնից: Բազմագործոն համակարգի ուսումնասիրման ժամանակ մեծ թվով միագործոն գիտափորձեր կատարելով, գրաֆիկների տեսքով ստանում ենք բազմաթիվ կախվածություններ: Այս ձևով ստացված մասնակի կախվածությունները հնարավոր չէ միավորել մեկ ամբողջության մեջ: Բազմագործոն գործընթացի բազմակողմանի ուսումնասիրման նպատակով միագործոն գիտափորձեր կատարելիս պահանջվում է կատարել բազմաթիվ գիտափորձեր, որի համար պահանջվում է ոչ միայն երկար ժամանակ, այլև հնարավոր է, որ այդ ընթացքում որոշ գործոններ դառնան անկառավարելի, իսկ փորձերի արդյունքները նկատելի փոփոխվեն: Այդ է պատճառը, որ միագործոն գիտափորձերը պրակտիկ խնդիրներ լուծելու համար պիտանի չեն: Բազմագործոն համակարգի ուսումնասիրման համար առավել նպատակահարմար է գիտափորձերի պլանավորման վիճակագրական մեթոդների կիրառությունը: Գիտափորձերի պլանավորումը մաթեմատիկական վիճակագրության նոր բաժին է: Այս մեթոդները շատ դեպքերում հնարավորություն են տալիս նվազագույն քանակի փորձերով ստանալ բազմագործոն գործընթացների առավել իրական մոդելներ:

Գիտափորձերի պլանավորման վիճակագրական մեթոդների մշակման գաղափարը պատկանում է անգլիացի վիճակագիր Ռոնալդ Ֆիշերին (1920թ.), որն առաջինը ցույց տվեց տարածված միագործոն գիտափորձերի փոխարեն գործոնների խմբի միաժամանակյա տարափոխման կիրառման նպատակահարմարությունը:

Արտակարգ գիտափորձերի (գիտափորձեր, որոնք կատարվում են օպտիմալացման խնդրի լուծման համար) պլանավորմանը նվիրված առաջին գիրքը (Բոկս, Ուիլսոն- Անգլիա) լույս տեսավ միայն 1951թ.:

Գիտափորձերի պլանավորմամբ հնարավոր դարձավ արագ և բարձր արտադրողականությամբ հասնել դրված նպատակին՝ գործընթացի օպտիմալացմանը:

Գիտափորձերի պլանավորման զարգացումը կապված է նաև Կեմտորնի, Ֆինի Վալդի, Վաների, Խանտերի, Սատերզվայտի, Շաեֆի, Կիֆերի և այլոց անունների հետ:

ԱՊՀ երկրներում գիտափորձերի պլանավորման տեսությունը սկսել է զարգանալ 1960 թվականից՝ Վ. Վ. Նալիմովի ղեկավարությամբ: Գիտափորձերի պլանավորման մեթոդների հանրամատչելիության, կատարելագործման և մշակման գործում մեծ ծառայություն ունեն գիտնականներ Ե. Վ. Մարկովան, Գ. Կ. Կրուգը, Վ. Վ. Ֆեոդորովը, Յու. Պ. Ադլերը, Վ. Գ. Գորսկին, Ն. Ա. Չերնովան և ուրիշներ:

Այս մեթոդի նկատմամբ մեծ հետաքրքրությունը բացատրվում է նրանով, որ փորձերի թիվը կրճատվում է մի քանի անգամ, հնարավորություն է ստեղծվում գործոնների ազդեցության քանակական գնահատման համապատասխան մաթեմատիկական մոդելի ստացման, տվյալ գործընթացի լավագույն պայմանների որոշման և այլնի համար:

Գյուղատնտեսական գիտության բնագավառում գիտափորձերի պլանավորումը կարող է բացառիկ դեր խաղալ նոր տեխնիկայի ստեղծման և շահագործման տարբեր փուլերում:

Ներկա աշխատանքի նպատակն է օգնել գիտական աշխատողներին, ասպիրանտներին և բուհերի ուսանողներին՝ ծանոթանալու մաթեմատիկական վիճակագրության և գիտափորձերի պլանավորման առավել կիրառվող մեթոդներին:

1. Մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը

Մաթեմատիկական վիճակագրությունը հավանականության տեսությանը մոտ կիրառական մաթեմատիկական գիտություն է, որ հիմնված է այդ տեսության մեթոդների և հասկացությունների վրա, սակայն իր մեթոդներով լուծում է առանձնահատուկ խնդիրներ: Մաթեմատիկական վիճակագրության, որպես գիտության, առաջացումը և զարգացումը կապված են պրակտիկ պահանջների հետ: Այն լայն կիրառություն է գտել տնտեսագիտական, գյուղատնտեսական, բժշկական, կենսաբանական, տեխնիկական, հոգեբանական, սոցիալական և այլ գիտական հետազոտությունների բնագավառներում:

1.1. Վիճակագրական ամբողջության տարափոխման տեսակները

Վիճակագրական ամբողջությունը մաթեմատիկական վիճակագրության հիմնարար հասկացություններից մեկն է, որի տակ հասկանում են մեկ կամ մի քանի փոփոխական հատկանիշներով միասեռ միավորների որոշակի քանակություն:

Առաջին հայացքից թվում է, թե ամբողջության ուսումնասիրվող հատկանիշի փոփոխման մասին անհրաժեշտ տեղեկություններ ստանալու միակ հնարավոր եղանակը նրա բոլոր անդամների ուսումնասիրությունն է: Սակայն դա ոչ միշտ է այդպես, կան դեպքեր, երբ համատարած դիտարկումները նպատակահարմար չեն, իսկ որոշ դեպքերում պրակտիկապես անհնարին է: Նշանակում է ինչ-որ հատկանիշների ուսումնասիրման ժամանակ հանդիպում ենք երկու հասկացությունների՝ գլխավոր ամբողջություն և մասնակի ամբողջություն (ընտրանք): Գլխավոր ամբողջության տակ հասկացվում է ուսումնասիրվող ամբողջությունը կազմող տարրերի (օբյեկտների) բազմազանությունը: Ընտրովի, ստուգման ենթարկված օբյեկտների քանակը կոչվում է մասնակի ամբողջություն կամ պարզապես ընտրանք: Գլխավոր ամբողջության և ընտրանքի տարրերի քանակը կոչվում է ծավալ:

Գլխավոր ամբողջության ծավալը (N) հաճախ տեսականորեն սահմանափակված չէ: Սակայն պրակտիկայում այն միշտ սահմանափակ է: Ընտրանքի ծավալը (n) կարող է լինել $n \ge 2$:

Ընտրովի ամբողջությունը առանձին դեպքերում կազմվում է գլխավոր ամբողջության հատկանիշի միջին արժեքի գնահատման համար և որոշ դեպքերում գլխավոր ամբողջությունում այն ձևավորվում է որոշակի հատկանիշներով տարրերի քանակով: Այդ պատճառով կոնկրետ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է ճշտել, թե ինչ նպատակով է կազմվում ընտրանքը:

Որպեսզի ճիշտ գնահատվի գլխավոր ամբողջությունը, ընտրանքը պետք է կազմվի պատահականության սկզբունքով:

Ընտրանքները, կախված կազմավորման ձևերից, կարող են լինել պատահական, մեխանիկական, սովորական (տիպիկ), սերիական: Պրակտիկայում տրված ծավալով (n) պատահական ընտրանքը կատարվում է հիմնականում պատահական թվերի աղյուսակներով, որտեղ նշվում է N > n քանակության դեպք:

Գլխավոր ամբողջությունից որոշակի միջակայքում ընտրված n ծավալի ընտրանքը կոչվում է մեխանիկական:

Սովորական ընտրանքի ժամանակ գլխավոր ամբողջությունը բաժանվում է խմբերի, ապա յուրաքանչյուր խմբից կազմվում է պատահական ընտրանք: Սերիական ընտրանքի ժամանակ, ի տարբերություն սովորականի, ընտրվում են ոչ թե առանձին տարրեր, այլ միասեռ միավորների առանձին փոքր խմբեր:

Գլխավոր ամբողջության գնահատականը ընտրանքով կատարվում է ըստ որոշակի հատկանիշների, որոնք տարափոխվում են օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ պատճառներով: Կախված ուսումնասիրվող հատկանիշների բնույթից՝ տարբերում են տարափոխման երեք տեսակ՝ քանակական, որակական և կարգային:

Քանակական հատկանիշները լինում են անընդմեջ և ընդհատ: Պրակտիկ խնդիրների քննարկման ժամանակ ցանկալի է հիմնական ուշադրությունը դարձնել քանակական և որակական հատկանիշների վրա:

1.2. Վարիացիոն շարքեր

Գիտահետազոտական աշխատանքներ կատարելիս, մշտապես հնարավոր են պատահել այնպիսի իրավիճակներ, երբ մեզ հետաքրքրող մեծությունը, կախված պատահական հանգամանքներից, կարող է ընդունել տարբեր արժեքներ: Օրինակ՝ տրակտորի շահագործման ամբողջ ընթացքում քանի՞ խափանում կարող է տեղի ունենալ. այս հարցին չի կարելի տալ խիստ որոշակի պատասխան: Նմանատիպ իրավիճակներում գործ ունենք այնպիսի պատահական մեծությունների հետ, որոնց արժեքները կախված պատահարից, կարող են տարբեր լինել:

Որո՞նք են պատահական մեծության մասին սպառիչ տեղեկությունները: Ակնհայտ է, առաջին հերթին այն արժեքների ցուցակը, որը կարող է ընդունել պատահական մեծությունը: Սակայն դա բավարար չէ, քանի որ հեշտ է գտնել մեծություններ, որոնք ճշտությամբ ընդունում են նույն արժեքները, տարբեր հավանականությամբ:

Ընդունված է պատահական մեծությունը բնութագրել որպես բազմաթիվ ելքերով որոշվող թվային ֆունկցիա: Եթե բոլոր հնարավոր տվյալները

մտնում են $X_1, X_2, \ldots, X_n$ բազմության մեջ, ապա ցանկացած $\varphi(X_i)$ թվային ֆունկցիա համարվում է պատահական: Պատահական մեծությունների նման սահմանման դեպքում նրանց վրա են տարածվում սովորական ֆունկցիաների բոլոր կանոնները, այսինքն դրանք կարելի է հաշվել, գումարել, բազմապատկել և այլն:

Սահմանված օրինաչափություններին ենթարկվող զանգվածային պատահական երևույթները, որոնք հիմնված են վիճակագրական տվյալների ուսումնասիրման վրա, վկայում են այն մասին, թե ինչ արժեք է ընդունել ուսումնասիրվող հատկանիշը: Վիճակագրական տվյալների ուսումնասիրումը սկսվում է նրանց խմբավորումից, և ապա հատկանիշի դիտարկված արժեքները դասավորվում են ըստ աճման կարգի: Այս գործողությունը կոչվում է դիտարկման արդյունքների ռանգավորում: Այն թիվը, որը ցույց է տալիս դիտարկման շարքում տարբերակի հանդես գալու քանակը կոչվում է հաճախություն (m_i): Հաճախականությունը $W_i = \frac{m_i}{N}$ միջակայքի հանդես գալու հավանականությունն է:

Այն աղյուսակը, որը հնարավորություն է տալիս դատելու տարբերակների միջև հաճախությունների դասավորության մասին, կոչվում է ընդհատուն վարիացիոն շարք, իսկ այն աղյուսակը, որը հնարավորություն է տալիս դատելու տարափոխման միջակայքերի միջև հատկանիշի արժեքների հաճախությունների դասավորության մասին կոչվում է միջակայքային վարիացիոն շարք:

Միջակայքային վարիացիոն շարքը կազմվում է անընդմեջ և ընդհատուն, մեծ քանակի տարբերակների հատկանիշների դիտարկման արդյունքներով:

Միջակայքային վարիացիոն շարքի կառուցման համար անհրաժեշտ է որոշել միջակայքի մեծությունը, սահմանել միջակայքերի ամբողջ սանդղակը, ըստ որի խմբավորել դիտարկման արդյունքները:

Միջակայքի օպտիմալ մեծության (h) որոշման համար օգտվում ենք Ստերջեսի բանաձևից՝

$$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{K} \tag{1.1}$$

որտեղ՝ X_{max} –ը և X_{min} -ը համապատասխանորեն հատկանիշի առավելագույն և նվազագույն արժեքներն են, $K=1+3.2\ell g N$ միջակայքերի քանակն է, N-ը դիտարկումների քանակը:

Վարիացիոն շարքի գրաֆիկական պատկերումը հնարավորություն է տալիս դիտողական պատկերացում ստանալ հատկանիշի մեծության տարափոխման օրինաչափության մասին: Առավել լայն կիրառություն են գտել վարիացիոն շարքի գրաֆիկական պատկերման հետևյալ ձևերը՝ բազմանկյուն, հիստոգիր, կուտակային (կումուլյատիվ) և սլաքաձև կորերի:

Բազմանկյան ձևը, որպես կանոն, ծառայում է ընդհատ վարիացոն շարքի պատկերման համար: Հաճախ միջակայքային վարիացիոն շարքերը նույնպես պատկերվում են բազմանկյան տեսքով:

Հիստոգիրը ծառայում է միայն միջակայքային վարիացիոն շարքի պատկերման համար:

Կուտակային (կումուլյատիվ) կորով պատկերվում է գումարային հաճախությունը ($\sum m_i$) և գումարային հաճախականությունը ($\sum w_i = w_n$):

Կուտակային կորի առանցքների փոփոխությունից առաջացած պատկերը կոչվում է սլաքաձև կոր:

1.3. Ընտրանքի հիմնական վիճակագրական պարամետրերը

Մաթեմատիկական վիճակագրությունում տարբերում են միջին արժեքների մի քանի տեսակներ՝ միջին թվաբանական, միջին երկրաչափական, միջին ներդաշնակ (հարմոնիկ), միջին քառակուսային, միջին խորանարդային և այլն: Միջին արժեքի տեսակ ընտրելիս անհրաժեշտ է առաջին հերթին պատասխանել այն հարցին, թե այդ միջին արժեքով շարքին ինչպիսի՞ հատկություն է ներկայացվում, այլ կերպ ասած՝ միջին արժեքի հաշվարկը ինչ նպատակ է հետապնդում:

Ընդունենք, որ N-ը տարափոխվող փոփոխականի քանակությունն է և կազմենք այդ փոփոխականի n մեծությունների ընտրանքը՝ $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

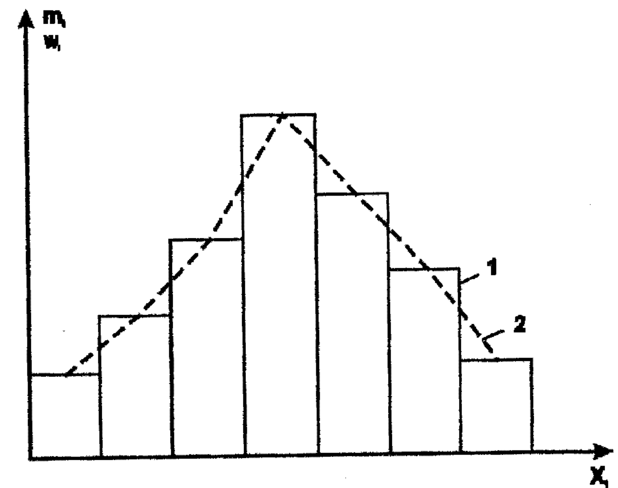
Ընտրանքի կարևորագույն բնութագիրը միջին թվաբանականն է.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}: \tag{1.2.}$$

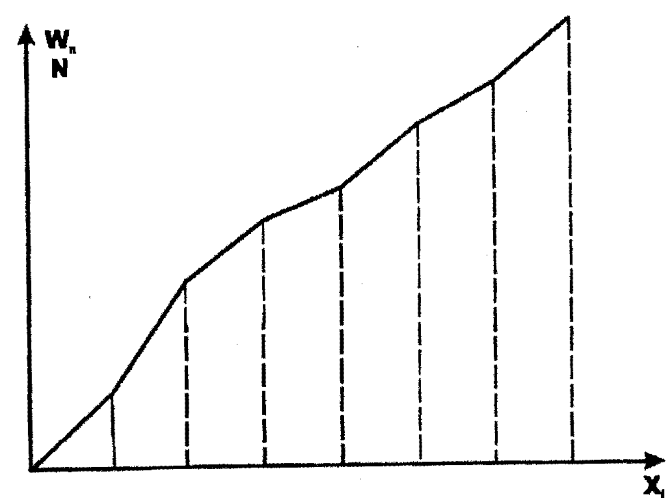
Եթե ըստ հետազոտության (դիտարկումների) կառուցվել է վարիացիոն շարք, այսինքն տարափոխվող յուրաքանչյուր փոփոխական ներկայացված է մի քանի դիտարկումներով, ապա միջին թվաբանականը, այս դեպքում կշռայինը, հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} \tag{1.3.}$$

որտեղ՝ X_i - ն միջակայքի միջին արժեքն է, m_i – ն՝ միջակայքի հաճախությունը:



Նկ. 1.1. Պատահական մեծությունների բաշխման բազմանկյունը (1) և հիստոգիրը (2):



Նկ. 1.2. Պատահական մեծության բաշխման կուտակային կոր:

Ունենք $\sum_{i=1}^{k} m_i = N$ (n), ուստի՝

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i m_i , \quad (1.4.)$$

երբ $N \le 25$, ապա որոշվում է

$$\overline{X} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k} X_i m_i \quad (1.5.)$$

արտահայտությամբ:

Պրակտիկ խնդիրներ լուծելիս կարող է անհրաժեշտություն առաջանալ հաշվելու

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^q = \sum_{i=1}^{N} (\overline{X_i})^q \text{ կամ } \overline{X}_q = \sqrt[q]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^q} , \quad (1.6.)$$

որտեղ՝ q -ն դրական կամ բացասական թիվ է,

$\overline{X}_q$ -ն կոչվում է q-րդ կարգի միջին աստիճանական:

Վարիացիոն շարքի ուսումնասիրման դեպքում բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{X_q} = \sqrt[q]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} X_i^q m_i} : \quad (1.7.)$$

Մինուս մեկ կարգի միջին աստիճանականը կոչվում է միջին ներդաշնակ.

$$\overline{X_{-1}} = \sqrt[-1]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} X_i^{-1} m_i} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{X_i} m_i} : \quad (1.8.)$$

Երկրորդ կարգի միջին աստիճանականը կոչվում է միջին քառակուսային, իսկ երրորդ կարգինը՝ միջին խորանարդային:

Դիսպերսիան (ցրվածքը) տվյալ հատկանիշի ընթացիկ արժեքի և նրա միջին թվաբանականի տարբերության քառակուսային շեղումների գումարն է.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} (X_i - \overline{X})^2 m_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i} : \quad (1.9.)$$

S^2 մեծությունը համարվում է ուսումնասիրվող հատկանիշի փոփոխության արտացոլող ընտրանքի ցրման կարևորագույն չափ: Գլխավոր ամբողջությունը գնահատվում է σ^2 դիսպերսիայով:

Դիսպերսիայի քառակուսի արմատի թվաբանական արժեքը կոչվում է միջին քառակուսային շեղում.

$$S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} (X_i - \overline{X})^2 m_i} : \quad (1.10.)$$

Ցրվածքի չափը պետք է արտահայտվի այն միավորներով, որոնցով հատկանիշի մեծությունը, այդ պատճառով դիսպերսիայի փոխարեն հաճախ օգտագործում են դիսպերսիայի քառակուսի արմատը՝ միջին քառակուսային շեղումը:

Թե որքանով է հատկանիշի միջին արժեքը ներկայացնում վարիացիոն շարքը, օգտագործվում է վարիացիոն գործակիցը: Հետազոտությունների արդյունքների մշակման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում համեմատել տարբեր բաշխումներ, ինչպես նաև տարասեռ մեծությունների ցրվածքներ, որոնց ուսումնասիրման համար չեն կարող օգտագործվել հատկանիշի միջին արժեքը և միջին քառակուսային շեղումը: Որպես համեմատման չափանիշ կարող է ծառայել չափողականություն չունեցող վարիացիոն գործակիցը: Խնդրի տեսական բաշխման վարիացիոն գործակիցը իրենից ներկայացնում է միջին քառակուսային շեղման և միջին արժեքի հարաբերություն.

$$v_x = \frac{S_x}{\overline{X}} : \quad (1.11.)$$

Վարիացիոն գործակիցը կարող է արտահայտվել նաև տոկոսներով: Վարիացիոն շարքի առաջին անդամի $X_1>0$ դեպքում, վարիացիոն գործակիցը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով.

$$v_x = \frac{S_x}{\overline{X} - X_{շղ}} , \quad (1.12.)$$

որտեղ՝ $X_{շղ}$ - ը հատկանիշի շեղման մեծությունն է, որն որոշվում է $X_{շղ} = X_1 - \frac{X_3 - X_1}{2}$ արտահայտությունից և որտեղ X_1 -ը և X_3 –ը համապատասխանաբար գնահատվող ցուցանիշի առաջին և երրորդ համարի արժեքներն են:

$X_{2\text{դ}} > X_1$ դեպքում ընդունվում է $X_{2\text{դ}} = X_1$, $X_{2\text{դ}} \leq 0$ -ի դեպքում՝ $X_{2\text{դ}} = 0$:

Կատարված հետազոտությունների միջին արժեքների սխալի մեծությունը կարելի է գնահատել միջին քառակուսային սխալով, որը հավասար է միջին քառակուսային շեղման և ընտրանքի քանակի քառակուսի արմատի հարաբերությանը.

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}}: \qquad (1.13.)$$

Հարաբերական միջին քառակուսային սխալը կարելի է որոշել.

$$P = \pm \frac{100.S_{\overline{X}}}{\overline{X}} \%$$ բանաձևով:

Հետազոտման ճշտությունը համարվում է բավարար, եթե $P \leq 5\%$:

95% հավանականությամբ կամ $\alpha = 5\% = 0,05$ նշանակալիության աստիճանով համապատասխան վստահելի միջակայքի մեծությունը որոշում են

$$(\overline{X} - t_{0,05}(f).S_{\overline{X}}, \overline{X} + t_{0,05}(f).S_{\overline{X}})$$ բանաձևով, (1.14.)

որտեղ $t_{0,05}(f)$ -ը 0,05 նշանակալիությամբ Ստյուդենտի գործակիցն է: $t_{0,05}(f)$ - ի արժեքը կախված է ազատության աստիճանների f թվից, $f = n-1$, որը վիճակագրական պարամետրերի որոշման անկախ փոփոխականների քանակն է (աղյուսակ 1.1):

Փորձնական տվյալների վիճակագրական մշակման ժամանակ պետք է նկատի ունենալ, որ գիտափորձերը k անգամ կրկնվում են:

Աղյուսակ 1.1

0,05 նշանակալիությամբ $t_{0,05}(f)$ Ստյուդենտի գործակիցների արժեքները

f	$t_{0,05}(f)$	f	$t_{0,05}(f)$	F	$t_{0,05}(f)$	f	$t_{0,05}(f)$
1	12,71	11	2,20	21	2,08	40	2,02
2	4,30	12	2,18	22	2,07	50	2,01
3	3,18	13	2,16	23	2,07	60	2,00
4	2,78	14	2,15	24	2,06	70	1,99
5	2,57	15	2,13	25	2,06	80	1,99
6	2,45	16	2,12	26	2,06	100	1,98
7	2,37	17	2,11	27	2,05	120	1,98
8	2,31	18	2,10	28	2,05	200	1,97
9	2,26	19	2,09	29	2,04	500	1,96
10	2,23	20	2,09	30	2,04	∞	1,96

1.4. Ընտրանքի նվազագույն քանակը

Ցանկացած գիտահետազոտական աշխատանքում ընտրանքի անհրաժեշտ ծավալի որոշումը կարևոր փուլ է համարվում: Չափազանց մեծ ծավալի ընտրանքները պահանջում են ավելացնել նյութական և աշխատանքային ծախսերը, իսկ անբավարար քանակը հնարավորություն չի տալիս հանգելու հավաստի եզրակացությունների: Այս խնդրի լուծման համար նախապես անհրաժեշտ է իմանալ (թեկուզև կողմնորոշվելու համար) վարիացիայի սպասվող գործակիցը, ինչպես նաև առավելագույն հարաբերական սխալը ε%, 95% հավանականության դեպքում: Ընտրանքի n ծավալը որոշում են ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$\Pi \geq \frac{1,96^2}{\varepsilon^2}.v^2: \qquad (1.15.)$$

95% հավանականությամբ միջին թվաբանական արժեքի գնահատման դեպքում առավելագույն հարաբերական սխալը չպետք է գերազանցի 10%-ի սահմանը ($\varepsilon \leq 10\%$):

1.5. Ընտրովի բաժիններով հիմնական վիճակագրական պարամետրերը

Հետազոտական աշխատանքներում ուսումնասիրվող հատկանիշը հաճախ որոշվում է կամ բաժիններով (մասերով) կամ տոկոսներով: Որպես կանոն, այստեղ մենք գործ ունենք հատկանիշի որոշակի ընտրանքի հետ, ըստ որի գնահատվում է այդ բաժինը (մասը): Այսպիսով, խնդիր է առաջանում վստահելի միջակայքի ճշտման ճանապարհով գնահատել գլխավոր ամբողջության ընտրովի բաժինը:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

N - գլխավոր ամբողջության ծավալը,

n - ընտրանքի ծավալը, p_0 - n ծավալից ուսումնասիրվող հատկանիշի դիտարկումների քանակը, q_0 - n ծավալից ուսումնասիրվող քանակ՝ ($p_0+q_0=n$), P - ուսումնասիրվող հատկանիշով օբյեկտների գլխավոր բաժինը:

Ընդունենք նաև, որ $p = \frac{p_0}{n}$ -ը հետազոտվող հատկանիշներով օբյեկտների բաժինն է (ընտրովի բաժին), $q = \frac{q_0}{n}$ -ը՝ այդ հատկանիշը չունեցող օբյեկտների բաժինը ($p+q=1$):

Ընտրովի բաժնի միջին քառակուսային սխալը հաշվարկում ենք հետևյալ արտահայտությամբ.

$$S_1 = \sqrt{\frac{pq}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}: \qquad (1.16.)$$

$N \to \infty$ արժեքի դեպքում բանաձևը ձեռք է բերում հետևյալ տեսքը.

$$S_p = \sqrt{\frac{qp}{n}}: \qquad (1.17.)$$

Այս արտահայտությունից կարելի է օգտվել, եթե $N>>n$, որի դեպքում P գլխավոր բաժնի համար 95% - ոց վստահելի միջակայքը կլինի.

$$p - t_{0,05}(f).S_p < P < p + t_{0,05}(f).S_p:$$

Նշենք, որ վերը նշված արտահայտությունից կարելի է օգտվել, երբ $0,25 < p < 0,75$: Մնացած դեպքերում ($0 \le p \le 0,25$; $0,75 \le p \le 1,0$) խորհուրդ է տրվում գլխավոր P բաժնի վստահելի միջակայքը հաշվել

$$\varphi = 2\arcsin\sqrt{p} \qquad (1.18.)$$

արտահայտությամբ:

$\varphi(p)$ - ի արժեքները բերված են հավելվածի թիվ 2 աղյուսակում:

φ - ի ստանդարտ սխալը հաշվարկում են $S_\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}$ արտահայտությամբ, որտեղ՝ n - ը ընտրանքի ծավալն է:

Նախապես Φ պարամետրի համար հաշվարկում ենք 95% վստահելի միջակայքի մեծությունը՝ $\varphi - 1,96.S_\varphi < \Phi < \varphi + 1,96S_\varphi$, այնուհետև հավելվածի 1.1 աղյուսակից գտնում $\varphi_ն$ և $\varphi_վ$ - ին համապատասխանող $p_ն$ և $p_վ$ արժեքները: Վերջում որոշում ենք, որ

$$P_ն < p < P_վ:$$

Ընտրովի բաժնեմասը որոշելիս ընտրանքի նվազագույն ծավալը հաշվելիս անհրաժեշտ է գիտենալ գլխավոր ամբողջության N ծավալը և սպասվելիք (մոտավոր) ընտրովի P բաժնեմասը:

Երբ բաժնեմասի մասին ոչինչ հայտնի չէ, ընդունում ենք $P = 0,5$:

n ընտրանքի նվազագույն ծավալը հաշվարկում ենք հետևյալ արտահայտություններով,

երբ $N \ne \infty$

$$n \ge \frac{10000.1,96^2(1-p)N}{\varepsilon^2 pN + 10000 \cdot 1,96^2(1-p)}, \qquad (1.19.)$$

$N \to \infty$ դեպքում

$$n \ge \frac{10000.1,96^2(1-p)}{\varepsilon^2 p} \qquad (1.20.)$$

(P –ն՝ միավորներով, ε -ը տոկոսներով):

1.6. Անկանոն արժեքների հայտնաբերումը

Հետազոտական աշխատանքներ կատարելիս հաճախ ի հայտ են գալիս ուսումնասիրվող հատկանիշի կտրուկ արտահայտված արժեքներ: Անկանոն արժեքները (չափումներ, դիտարկումներ և այլն) կարող են երևան գալ այդ պրոցեսի գործոնների ազդեցության կամ ինչ-որ սխալի հետևանքով: Այդպիսի արժեքները կարող են պարունակել կարևոր տեղեկություններ, որոնք պետք է արտաքսել զգուշորեն, չխախտելով հաշվարկվող վիճակագրական պարամետրերի արժեքները:

Այսպիսով, ինչպե՞ս որոշել կասկածելի արժեքը համարվու՞մ է, արդյոք, կոպիտ սխալ, այն պետք է արտաքսե՞լ, թե՞ առավել խոր հետազոտության կարիք ունի:

Անկանոն արժեքների հայտնաբերման համար անհրաժեշտ է հաշվել.

$$g = \frac{\left|X_e - \overline{X}\right|}{S_{\overline{X}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}}, \qquad (1.21.)$$

որտեղ՝ X_e - ն պարամետրի կասկածելի առավելագույն կամ նվազագույն արեքնէ, $\overline{X}$ - ը՝ միջին թվաբանականը, $S_{\overline{X}}$ -ը՝ ստանդարտ շեղման մեծությունը, n - ը փորձերի (չափումների) թիվը:

$\alpha = 0,05$ (95% հավանականություն) նշանակալիությամբ աստիճանով արժեքը ճանաչվում է անկանոն $g > g_{0,05}(f)$ պայմանի դեպքում, որտեղ՝ $f = n - 2$ -ը ազատության աստիճանների թիվն է: $g_{0,05}(f)$ - ի արժեքները բերված են հավելվածի թիվ 1.2 աղյուսակում:

Չնայած անկանոն արժեքների որոշման պարզությանը, այն շատ քիչ է կիրառվում: Հաճախ խիստ կասկածելի արժեքները որոշվում են ոչ կոռեկտ, սուբյեկտիվ մեթոդներով: Որպես կանոն, խիստ կասկածելի են համարվում մեծ թվով արժեքները, այդ պատճառով նպատակահարմար է g - վիճակագրի կիրառումը: Ոչ մեծ թվով ($n = 3,4$) չափումների դեպքում կարելի է հաշվարկները կրճատել:

Քննարկենք մեկ օրինակ. ենթադրենք երեք չափումներով արժեքները դասավորվել են ըստ աճման կարգի՝ $X_1 \le X_2 \le X_3$: Կազմվում է այդ արժեքների տարբերությունը՝ $X_2 - X_1$ և $X_3 - X_2$ և դրանցից մեծը նշանակում $R_մ$, փոքրը $R_փ$ տառերով: Կարելի է ապացուցել, որ X_e արժեքը համարվում է կասկածելի, եթե 95% հավանականության դեպքում բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը.

$$\frac{R_մ}{R_փ} > 12,6034,$$

կամ $R_փ < 0,0793$:

X_e կարող է լինել եզրային արժեքներից որևէ մեկը, որի տարբերությամբ ստացվել է $R_մ$ արժեքը: Անհավասարությանը չբավարարելու դեպքում արժեքը չի համարվում կասկածելի:

Քննարկենք n=4 դեպքը. $X_1 \le X_2 \le X_3 \le X_4$: Կազմում ենք $R_1 = X_2 - X_1$, $R_2 = X_3 - X_2$, $R_3 = X_4 - X_3$ և $R_1 + R_2 + R_3 = R$, $a_1 = \frac{R_1}{R}, a_2 = \frac{R_2}{R}$:

Կասկածելի արժեքները ստուգում ենք դիագրամի օգնությամբ:

1.7. Կենտրոնական և սկզբնական մոմենտներ

Վարիացիոն շարքի միջին արժեքը և միջին քառակուսային շեղումը համարվում են վարիացիոն շարքի առավել ընդհանուր հասկացությունների՝ մոմենտների մասնակի դեպքեր:

Կենտրոնական և սկզբնական մոմենտներով կարելի է հաշվել ուսումնասիրվող հատկանիշի ոչ միայն միջին արժեքն ու միջին քառակուսային շեղումը, այլև անհամաչափության (ասիմետրիայի) և էքսցեսի գործակիցները:

Սկզբնական մոմենտներ

q- կարգի սկզբնական մոմենտը (υ_q) կոչվում է տարբերակների q-րդ աստիճանի միջին թվաբանական.

$$\upsilon_q = \overline{X}^q = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^q m_i}{N}: \qquad (1.22.)$$

Զրոյական կարգի սկզբնական մոմենտը՝

$$\upsilon_0 = \overline{X}^0 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^0 m_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{N} = \frac{N}{N} = 1:$$

Առաջին կարգի սկզբնական մոմենտ՝ $\upsilon_1 = \overline{X}$:

Երկրորդ կարգի սկզբնական մոմենտ՝ $\upsilon_2 = \overline{X}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 m_i}{N}$:

Երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտ՝ $\upsilon_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i)^3 m_i}{N}$:

Չորրորդ կարգի սկզբնական մոմենտ՝ $\upsilon_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i)^4 m_i}{N}$:

q-րդ կարգի կենտրոնական մոմենտը կոչվում է տարբերակների (միջակայքերի) միջին թվաբանականի և միջին արժեքի տարբերության q-րդ աստիճան՝

$$\mu_q = (X_i - \overline{X})^q = \frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^q m_i}{N}: \qquad (1.23.)$$

Զրոյական կարգի կենտրոնական մոմենտ՝

$$\mu_0 = \overline{(X_i - \overline{X})}^0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} (X_i - X)^0 m_i = 0:$$

Առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտ՝

$$\mu_1 = \overline{(X_i - \overline{X})}^1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}) m_i = 0:$$

Երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտ՝

$$\mu_2 = \overline{(X_i - \overline{X})}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 m_i = S^2:$$

Նույն սկզբունքով կարելի է ներկայացնել նաև q=3, 4,..., n և այլ կարգի կենտրոնական մոմենտները: Տարբեր կարգի կենտրոնական մոմենտները սկզբնականով կարելի է արտահայտել հետևյալ բանաձևով.

$$\mu_q = \upsilon_q - C_q^1 \upsilon_1 \upsilon_{q-1} + C_q^2 \upsilon_1^2 \upsilon_{q-2} - C_q^3 \upsilon_1^3 \upsilon_{q-3} \ldots + (-1)^q \upsilon_1^q \ldots \qquad (1.24.)$$

Այսպիսով, կստանանք $\mu_0 = \upsilon_0 = 1; \mu_1 = \upsilon_1 - \upsilon_1 = 0$,

$$\mu_2 = \upsilon_2 - 2\upsilon_1\upsilon_1 + \upsilon_1^2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2;$$

$$\mu_3 = \upsilon_3 - 3\upsilon_1\upsilon_2 + 3\upsilon_1^2\upsilon_1 - \upsilon_1^3 = \upsilon_3 - 3\upsilon_1\upsilon_2 + 2\upsilon_1^3$$

$$\mu_4 = \upsilon_4 - 4\upsilon_1\upsilon_3 + 6\upsilon_1^2\upsilon_2 - 4\upsilon_1^3\upsilon_1 + \upsilon_1^4 = \upsilon_4 - 4\upsilon_1\upsilon_3 + 6\upsilon_1^2\upsilon_2 - 3\upsilon_1^4 :$$

Հատկանիշի վիճակագրական չափանիշները սկզբնական և կենտրոնական մոմենտներով կարելի է որոշել հետևյալ կերպ.

1. միջին թվաբանականը.

$$\overline{X} = X_0 + \upsilon_1 h, \qquad (1.25.)$$

2. միջին քառակուսային շեղումը.

$$\sigma = h\sqrt{\mu_2}, \qquad (1.26.)$$

որտեղ՝ h-ը միջակայքի մեծությունն է; Եթե վարիացիոն շարքի բազմանկյան մի գիծը, սկսած գագաթից, նկատելի է մյուսից, ապա այդպիսի շարքը կոչվում է ասիմետրիկ: Ասիմետրիայի գործակիցը կարելի է որոշել հետևյալ արտահայտությամբ.

$$A = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} : \qquad (1.27.)$$

Եթե A=0 կորը սիմետրիկ է, ապա $A > 0$ -ի դեպքում այն ունի դրական ասիմետրիա, իսկ $A < 0$ -ի դեպքում՝ բացասական ասիմետրիա (նկ. 1.3)

Վարիացիայի շարքի սկզբնական և կենտրոնական մոմենտների բացակայության դեպքում, n քանակի ընտրանքի համար ասիմետրիայի գործակիցը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$A = \sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right)^3} : \qquad (1.28)$$

Միջակայքային վարիացիայի շարքի դեպքում՝ k միջակայք ունեցող շարքի համար

$$A = \sqrt{k}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i - \overline{X})^3}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(X_i - \overline{X})^2}\right)^3} : \qquad (1.29.)$$

Ասիմետրիայի գործակիցը չունի ոչ վերին, ոչ էլ ներքևի սահման, որը, ինչ խոսք, նվազեցնում է ասիմետրիայի մեծությունը գնահատող նրա արժեքը:

Էքսցեսը կամ կորության գործակիցը որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$E = \frac{\mu_n}{\mu_2^2} - 3, \qquad (1.30.)$$

կամ

$$E = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^2} - 3 :$$

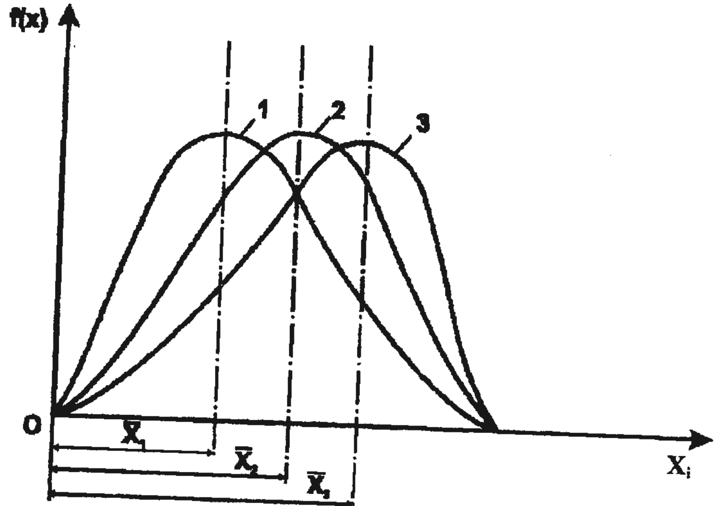
$E = 0$ -ի դեպքում կորն ունի նորմալ տեսք, $E > 0$ -ն դիտվում է դրական էքսցես, կորն ունի սրագագաթ տեսք, $E < 0$ –ն դիտվում է բացասական էքսցես, կորն ունի հարթագագաթ տեսք (նկ. 1.4):

1.8. Փորձնական և տեսական բաշխումներ

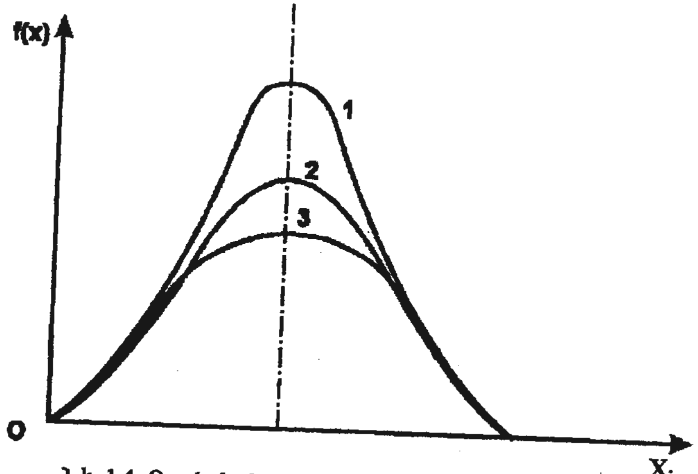
Վարիացիոն շարքի ցուցանիշների ուսումնասիրման ժամանակ անհրաժեշտություն է առաջանում հետազոտել նրանց բաշխման օրինաչափությունը, այսինքն հաստատել հատկանիշների մեծությունների և հաճախությունների փոխադարձ համապատասխանությունը: Այս դեպքում հետազոտողը համարյա միշտ գործ ունի գլխավոր ամբողջության մաս կազմող ընտրանքի հետ: Համապատասխան պայմաններում ուսումնասիրման արդյունքները տարածելով ամբողջ գլխավոր ամբողջության վրա, մեկ հատկանիշի ուսումնասիրման դեպքում գործ ունենք միաչափ, մեկից ավելի հատկանիշների դեպքում բազմաչափ բաշխումների հետ: Կախված նրանից թե ուսումնասիրվող հատկանիշը ընդունում է միայն ամբողջ թե ցանկացած իրական արժեք, բաշխումը կարող է լինել ընդհատոն և անընդմեջ:

Հաճախ փորձնական տվյալները հարմար է ներկայացնել գրաֆիկական տեսքով՝ կառուցելով հիստոգիրը և բաշխման կորը:

Մաթեմատիկական վիճակագրության կարևորագույն դրույթներից է **մեծ թվերի** օրենքը (Յա. Բերնուլիի թեորեմը)՝ մեծածավալ ընտրանքի դեպ**քում կարելի** է հայտնաբերել ցանկացած բաշխման օրինաչափությունները: **Անհրաժեշտ** է նշել, որ մեծ թվերի օրենքը և պատահական հատկանիշների **բաշխումը** կախված չեն փորձարարից:



Նկ. 1.3. Բաշխման կորեր 1 –A > 0, 2 – A = 0, 3 – A < 0:



Նկ. 1.4. Բաշխման կորեր 1 –E > 0, 2 – E = 0, 3 – E < 0:

Պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարող է տրված լինել աղյուսակի, բաշխման ֆունկցիայի և խտության բաշխման ձևով: Պատահական մեծության հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների աղյուսակը համարվում է պատահական մեծության բաշխման օրենքի տրման հասարակ ձև: Բաշխման օրենքի արտահայտման

աղյուսակային ձևը կարող է կիրառվել միայն վերջավոր թվով հնարավոր արժեքների ընդհատ պատահական մեծությունների համար: Անընդմեջ պատահական մեծությունն ունենում է անթիվ բազմությամբ հնարավոր արժեքներ, այդ պատճառով աղյուսակով դրանք ներկայացնելը անհնարին է: Պատահական մեծության յուրաքանչյուր առանձին արժեք ունի նաև զրոյական հավանականություն:

Յուրաքանչյուր տեսական բաշխման օրենք բնութագրվում է երկու ֆունկցիաներով՝ դիֆերենցիալ կամ հավանականության խտության ֆունկցիայով (նկ. 1.5) և ինտեգրալային կամ բաշխման ֆունկցիայով (նկ. 1.6):

Դիֆերենցիալ ֆունկցիայի կորով սահմանափակված կամ, որ նույնն է, հատկանիշի բոլոր հնարավոր մեծությունների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի:

Գծագրում նշված են հատկանիշի միջին $\bar{X}$ ամենահավանական (մոդալ) M_0 և միջնագծի M_e մեծությունները:

Ինտեգրալային ֆունկցիան (նկ. 1.6) ստացվում է դիֆերենցիալ ֆունկցիայի հատկանիշի արժեքների սահմաններով որոշվող մակերեսների հաջորդական գումարով:

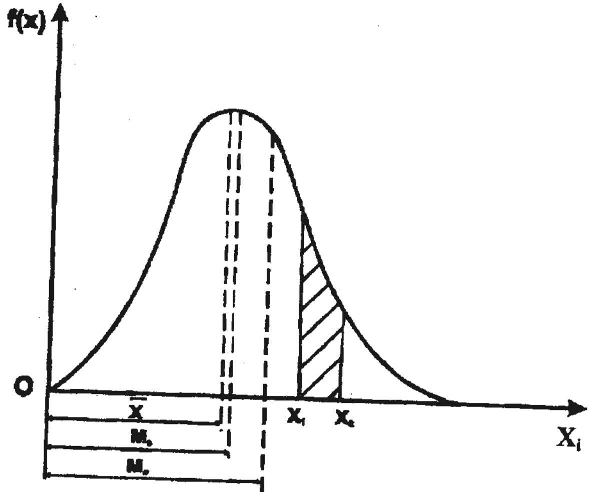
1.9. Պատահական մեծությունների թվային բնութագրերը

Պրակտիկ որոշ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտություն չկա իմանալու պատահական մեծությունների բոլոր հնարավոր արժեքները և նրանց համապատասխան հավանականությունները, այլ հարմար է օգտվել մի քանի քանակական ցուցանիշներից, որոնք սեղմ ձևով բավարար քանակությամբ տեղեկություններ կարող են տալ պատահական մեծության մասին: Նման ցուցանիշները կոչվում են պատահական մեծության թվային բնութագրեր: Դրանցից հիմնականներն են՝ մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան, տարբեր կարգի մոմենտները, ամենահավանական արժեքը և միջնագիծը:

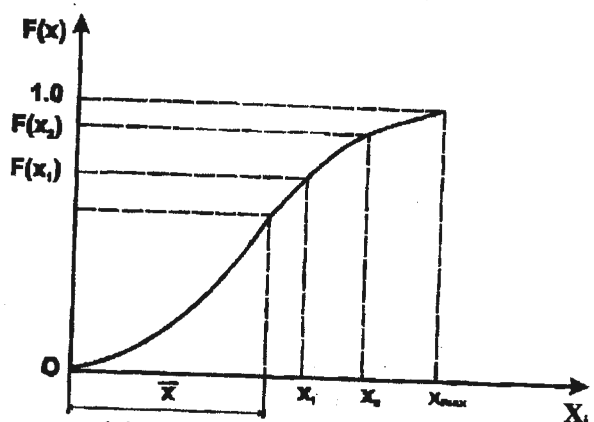
Մաթեմատիկական սպասումը պատահական մեծության դիրքն է թվային առանցքի վրա, ունի որոշակի միջին արժեք, որի շուրջ միախմբվում են պատահական մեծության բոլոր հնարավոր արժեքները: Այդ պատճառով, մաթեմատիկական սպասումը հաճախ անվանվում է պատահական մեծության միջին արժեք: Քննարկենք X_1, X_2, ..., X_n արժեքներ և P_1, P_2, ..., P_n հավանականություն ընդունող X ընդհատուն շարքը: Որոշենք պատահական մեծությունների միջին արժեքը կամ նրանց մաթեմատիկական սպասումը՝ M(X).

$$M(X)=\frac{X_1P_1+X_2P_2+\ldots+X_nP_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}=\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}X_iP_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}P_i}: \qquad (1.31.)$$

Քանի որ $\sum\limits_{i=1}^{n}P_i=1$, ուստի $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_iP_i$:



Նկ. 1.5. Դիֆերենցիալ ֆունկցիան:



Նկ. 1.6. Ինտեգրալային ֆունկցիան:

Միջակայքային վարիացիոն շարքի համար.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{k}X_i\frac{m_i}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}X_im_i :$$

Անընդմեջ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը կորոշվի հետևյալ բանաձևով.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}Xf(X)dX : \qquad (1.32.)$$

Ինտեգրալային F(X) ֆունկցիայի միջոցով մաթեմատիկական սպասումը կարտահայտվի

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}XdF(X): \qquad (1.33.)$$

Անընդմեջ պատահական մեծության ամենահավանական (մոդալ) է կոչվում նրա այն արժեքը M_0, որի դեպքում բաշխման խտությունը առավելագույնն է:

Պատահական մեծության միջնագիծ (M_e) է կոչվում նրա այն արժեքը, որի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարումը.

$$P(X<M_e)=P(X>M_e): \qquad (1.34.)$$

Այսինքն հավասարահավանական է միջնագծի արժեքից պատահական մեծության յուրաքանչյուր արժեքի մեծ կամ փոքր լինելը: Երկրաչափական տեսակետից միջնագիծը այն կետի աբսցիսն է, որով բաշխման կորի մակերեսը կիսվում է երկու հավասար մասերի:

Բաշխման կորի լրիվ մակերեսը հավասար է մեկի, ուստի միջնագծի աբսցիսի առանցքով և կորով սահմանափակված մակերեսը կհավասարվի 0,5-ի.

$$F(M_e)=P(X<M_e)=0,5: \qquad (1.35.)$$

Պետք է նշել, որ եթե բաշխումը սիմետրիկ է, ապա մաթեմատիկական սպասումը, մոդալ արժեքը և միջնագիծը համընկնում են:

Ընդհատուն պատահական մեծությունների համար մոդալ արժեքը և միջնագծի արժեքը կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ.

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= M(X)+3[M_e-M(X)] \\ M_e &= X_0+h\frac{\frac{N}{2}-S_n}{m_{ne}}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.36.)$$

որտեղ՝ X_e -ը միջնագծի միջակայքի սկիզբն է, m_{ne} -ն միջնագծի միջակայքի հաճախությունը, S_n -ը մինչ միջնագիծ հաճախությունների գումարը, $S_n \le \frac{N}{2}$, h -ը՝ միջակայքի մեծությունը, N -ը՝ դիտարկումների կամ փորձերի քանակը: Դիսպերսիայի և միջին քառակուսային շեղման միջոցով կարելի է դատել մաթեմատիկական սպասման շուրջը պատահական մեծության ցրվածության մասին:

Ընդհատվող պատահական մեծության համար դիսպերսիան որոշվում է այս բանաձևով.

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k}[X_i - M(X)]^2 P_i = \sum_{i=1}^{k}[X_i - M(X)]^2 \frac{m_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}[X_i - M(X)]^2 m_i : \quad (1.37.)$$

Անընդմեջ պատահական մեծությունների համար f(X) խտության հավանականության դեպքում դիսպերսիան կլինի՝

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}[X - M(X)]^2 f(X)dX : \quad (1.38.)$$

F(X) բաշխման ֆունկցիայի միջոցով դիսպերսիան կարելի է արտահայտել հետևյալ կերպ.

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}[X - M(X)]^2 dF(X) : \quad (1.39.)$$

Դիսպերսիայի թերությունն է համարվում այն, որ ունի պատահական մեծության քառակուսու չափողականություն, որը երկրաչափորեն մեկնաբանել անհնարին է:

1.10. Նորմալ բաշխման օրենքը

Նորմալ բաշխումը, բաշխման օրենքների ամենատարածված տեսակն է:

Նորմալ բաշխման օրենքի գլխավոր առանձնահատկությունն այն է, որ նրան են մոտենում բաշխման մնացած օրենքները:

Նորմալ բաշխման օրենքը հայտնագործել է Մուավրը 1733թ., սակայն այն հաճախ անվանում են նաև Գաուսի (1809) և Լապլասի (1912) անունով, որոնք Մուավրից անկախ են հայտնագործել այդ օրենքը:

«Նորմալ բաշխում» տերմինը կիրառվում է զուտ պայմանական իմաստով, որպես գրականությունում համընդհանուր ճանաչում գտած արտահայտություն, իհարկե, ոչ այնքան հաջող: Վերջինիս ապացույցն այն է, որ եթե որևէ հատկանիշ ենթարկվում է նորմալ բաշխման օրենքին, դա չի նշանակում թե այդ երևույթի հիմքում ընկած է մի ինչ-որ անփոփոխ նորմ, որի արտացոլանքն է համարվում այդ հատկանիշը: Մեկ այլ բաշխման օրենքին ենթարկվելը չի ապացուցում այդ երևույթի աննորմալ լինելը: Օրինակ՝ եթե որևէ ավտոմատ մետաղահատ հաստոցի վրա մշակվում են մեքենամասեր, ապա նոմինալ չափերից նրա շեղումները կարող են լինել միմյանցից անկախ, բազմաթիվ պատճառներով, դրանք են՝ մշակման ռեժիմների տատանումները, հարմարանքում մեքենամասի տեղակայման և բազայավորման անճշտությունը, մշակվող նյութի անհամասեռությունը, կտրող գործիքի անճշտությունը և մաշվածքը, մշակման պայմաններից կախված հաստոցի հանգույցների առաձգական դեֆորմացիաներն ու թրթռումները և այլն: Այս պատճառներից յուրաքանչյուրը ազդում է մեքենամասի չափսերի վրա, այնպես որ գրանցված իրական չափսը համարվում է մեծ թվով շեղումների գումար: Եթե գումարային շեղումները մոտավորապես նույն կարգի են, ապա շեղումները կարող են համարվել պատահական մեծություններ և, անկախ շեղումների պատճառների քանակից, կարող են ենթարկվել նորմալ բաշխման օրենքին:

Անընդմեջ պատահական մեծության նորմալ բաշխման խտությունը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

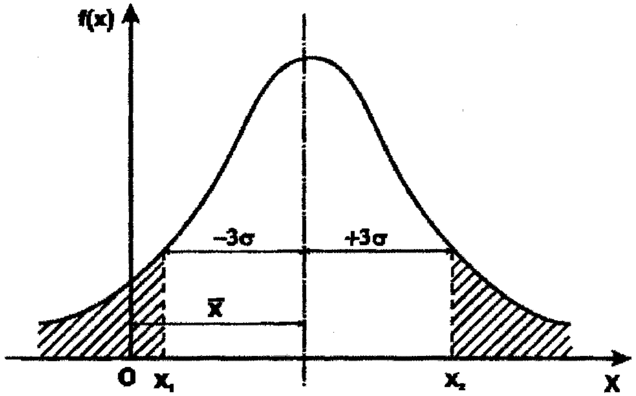
$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(X-\overline{X})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.40.)$$

որտեղ՝ σ -ն պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղումն է, X-ը պատահական մեծությունն է $(-\infty < X < +\infty)$, $\overline{X}$ -ը X պատահական մեծությունների միջին թվաբանականն է (մաթեմատիկական սպասումը):

Նորմալ բաշխման օրենքը բնութագրվում է դիֆերենցիալ f(X) և ինտեգրալ F(X) ֆունկցիաներով: Նորմալ բաշխման օրենքին համապատասխան դիֆերենցիալ կորը $X = \overline{X}$ կետի օրդինատի նկատմամբ սիմետրիկ (համաչափ) է, նրա թևերը $X \to \pm\infty$ անվերջ մոտենում են աբսցիսների առանցքին (նկ. 1.7):

Նորմալ բաշխման օրենքը կամ բաշխման ինտեգրալային ֆունկցիան ընդհանուր դեպքում կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$F(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(X-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2}\right)dX,$$
$$F(-\infty<X<+\infty)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(X-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2}\right)dX=1: \qquad (1.41.)$$



Նկ. 1.7. Նորմալ բաշխման օրենքի դիֆերենցիալ կամ հավանականությունների խտության ֆունկցիան:

Պրակտիկայում հաճախ անհրաժեշտ է հաշվել այն հավանականությունը, երբ նորմալ բաշխված պատահական մեծությունը գտնվում է որոշակի սահմաններում

$$F(X_1<X<X_2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(-\frac{\left(X-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2}\right)dX:$$

Երբ $\frac{X-\overline{X}}{\sigma}=t$, ապա $X=\sigma t+\overline{X}$,

այսինքն $dX=\sigma dt$ և

$$F(X_1<X<X_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt: \qquad (1.42.)$$

Կատարելով նոր նշանակումներ՝

$t_1=\frac{X_1-\overline{X}}{\sigma}$ և $t_2=\frac{X_2-\overline{X}}{\sigma}$,

կարող ենք հաշվել

$$F(X_1<X<X_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{t_1}^{0}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt+\int_{0}^{t_2}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{t_2}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt-\int_{0}^{t_1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\right):$$

Քանի որ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=\phi(t)$ Լապլասի նորմավորված ֆունկցիան է, ապա ստանում ենք

$$F(X_1<X<X_2)=\phi(t_2)-\phi(t_1)=\phi\left(\frac{X_2-\overline{X}}{2}\right)-\phi\left(\frac{X_1-\overline{X}}{2}\right): \qquad (1.43.)$$

Նորմալ բաշխման օրենքի բնութագրիչ առանձնահատկությունն կարելի է համարել այն, որ X մեծության հավանականությունը հիմնականում գտնվում է $\overline{X}-3\sigma\le X\le\overline{X}+3\sigma$ սահմաններում, որը հեշտությամբ արտացոլվում է

$X_a=\overline{X}-3\sigma, X_b=\overline{X}+3\sigma,$

$t_1=\frac{X_a-\overline{X}}{\sigma}=\frac{\overline{X}-3\sigma-\overline{X}}{\sigma}=-3,$

$t_2=\frac{X_b-\overline{X}}{\sigma}=\frac{\overline{X}+3\sigma-\overline{X}}{\sigma}=+3$ բանաձևերում :

Այսպիսով՝

$p\left(\overline{X}-3\sigma<X<\overline{X}+3\sigma\right)=\phi(3)-\phi(-3)=2\phi(3):$

Ըստ Լապլասի նորմավորված ֆունկցիայի աղյուսակից (հավելվածի աղ. 1.4) որոշվում է.

$2\phi(3)=0,9973:$

Ինչպես նշվեց վերևում, այն հավանականությունը, որի դեպքում X պատահական մեծությունը գտնվում է $\pm3\sigma$ - ի սահմաններում մոտ է 1-ի կամ 100% - ի և կոչվում է նաև երեք սիգմաների կանոն:

Նորմալ բաշխման օրենքի ինտեգրալային տեսքը կարելի է ներկայացնել այսպես.

$$F(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)^2dt+\int_{0}^{t}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\right),$$

որտեղ՝ $t=\frac{X-\overline{X}}{\sigma}$,

քանի որ՝ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)=\frac{1}{2}$,

իսկ՝ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\int\limits_{0}^{t}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=\phi(t)$,

ապա՝ $F(X)=\frac{1}{2}+\phi(t)$:

Ունենալով $t=\frac{X-\overline{X}}{\sigma}$ -ի արժեքները, հավելված թիվ 1.4 աղյուսակից կարող ենք ընտրել $\phi(t)$ -ի արժեքները և որոշել ինտեգրալային ֆունկցիայի F(X) մեծությունները:

1.11. Նորմալ լոգարիթմական բաշխման օրենքը

Նորմալ լոգարիթմական կոչվում է խիստ դրական X մեծության այնպիսի բաշխումը, որի $U = \ln X$ արտահայտության բաշխումը նորմալ է:

Պատահական մեծության U բաշխման խտությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$f(U)=\frac{1}{\sigma_u\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{[U-M(U)]^2}{2\sigma_u^2}\right]: \qquad (1.44.)$$

Պատահական X մեծության բաշխման խտությունը ցուցչային ֆունկցիայի դեպքում Ue^u մեծության բաշխման խտության հետ նրա կապը կարտահայտվի հետևյալ կերպ.

$$f(X)=\frac{dF(U)}{dX}=\frac{dF[X(U)]}{dU}\frac{dU}{dX}=f(U)\frac{dU}{dX}=\frac{1}{X}f(U): \qquad (1.45.)$$

Այստեղից հետևում է, որ եթե $X > 0$, ապա՝

$$f(X)=\frac{1}{X\sigma_u\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{[\ln X-M(X)]^2}{2\sigma_u^2}\right], \qquad (1.46.)$$

իսկ եթե $X \le 0$, ապա՝ $f(X) = 0$:

Լոգարիթմական նորմալ բաշխումը բավարար մոտարկելի է պատահական մեծության նկատելի աջակողմյան ասիմետրիա ունեցող փորձնական բաշխման հետ: Այս բաշխումը լայն կիրառություն է գտել տեխնիկական շատ գործընթացների ներկայացման և տնտեսական հետազոտությունների մեջ:

1.12. Վեյբուլի բաշխման օրենքը

Ի տարբերություն նորմալ բաշխման օրենքի, Վեյբուլի բաշխման դիֆերենցիալ կորը ունի խիստ արտահայտված աջակողմյան կամ ձախակողմյան ասիմետրիա: Այդ պատճառով ուսումնասիրվող հատկանիշի միջին, ամենահավանական (մոդալ) արժեքները և միջնագծի մեծությունը իրար հավասար չեն:

Վեյբուլի բաշխման օրենքի խտությունը կամ դիֆերենցիալ ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ հավասարումով.

$$f(X)=\frac{b}{a}\left(\frac{X_i}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\frac{X_i}{a}\right)^{b}\right], \qquad (1.47.)$$

որտեղ՝ a -ն և b -ն Վեյբուլի օրենքի պարամետրերն են, X_i -ն ուսումնասիրվող հատկանիշի i-րդ արժեքը:

Վեյբուլի օրենքի a պարամետրը կարելի է որոշել ըստ $a = f(b, x_i)$ ֆունկցիայի.

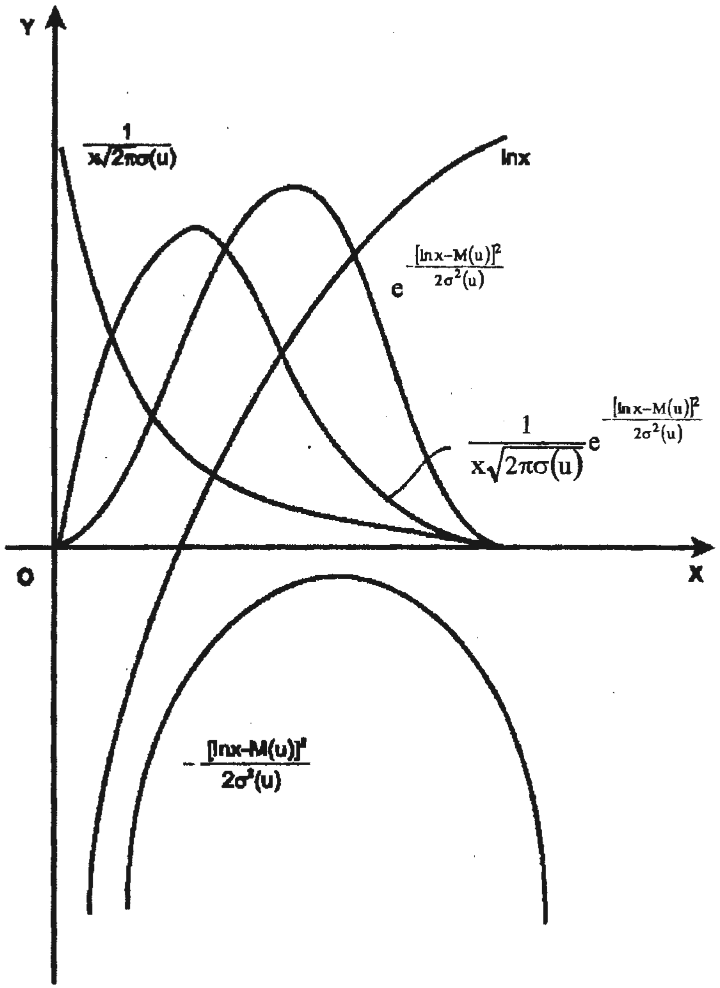
$$a=\sqrt[b]{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}X_i^b}{N}}, \qquad (1.48.)$$

ըստ հատկանիշի միջին արժեքի.

$$a=\frac{\overline{X}}{K_b}, \qquad (1.49.)$$

և ըստ հատկանիշի միջին քառակուսային շեղման.

$$a=\frac{\sigma}{C_b}, \qquad (1.50.)$$



Նկ. 1.8 Նորմալ լոգարիթմական բաշխման օրենքի կորերը:

որտեղ՝ K_b -ն և C_b -ն Վեյբուլի բաշխման օրենքի գործակիցներն են.

$$\left.\begin{aligned} K_b &= \Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right), \\ C_b &= \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right) - K_b^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.51.)$$

որտեղ Γ -ն գամմա ֆունկցիան է: Վեյբուլի բաշխման ֆունկցիան որոշվում է $(0 \le X \le +\infty)$ միջակայքում, որի ինտեգրումից ստանում ենք.

$$F(X) = \int_0^x \frac{b}{a}\left(\frac{X_i}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{X_i}{a}\right)^b\right] dX = 1 - \exp\left[-\frac{X_i}{a}\right]^b : \qquad (1.52.)$$

Վեյբուլի բաշխման օրենքից օգտվելու համար անհրաժեշտ է ունենալ a և b պարամետրերը: Ունենալով փորձնական բաշխման վարիացիոն գործակիցը՝ ν ըստ նրա, աղյուսակից կարելի է ընտրել b պարամետրը K_b և C_b գործակիցները (տե՛ս հավելվածի 1.7 աղյուսակը):

Վարիացիոն շարքի առաջին անդամի $X_1 > 0$, կամ $X_{2դ} > 0$ արժեքների դեպքում Վեյբուլի բաշխման օրենքի դիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(X) = \frac{b}{a}\left(\frac{X_i - X_{2դ}}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\frac{X_i - X_{2դ}}{a}\right]^b, \qquad (1.53.)$$

իսկ ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(X) = 1 - \exp\left[-\frac{X_i - X_{2դ}}{a}\right]^b : \qquad (1.54.)$$

Այս դեպքում Վեյբուլի բաշխման օրենքի b պարամետրը և C_b, K_b, S_b գործակիցները ընտրվում են ըստ $\nu = \frac{\sigma}{M(X) - X_{2դ}}$ կամ $\nu = \frac{S}{\bar{X} - X_{2դ}}$ արժեքի:

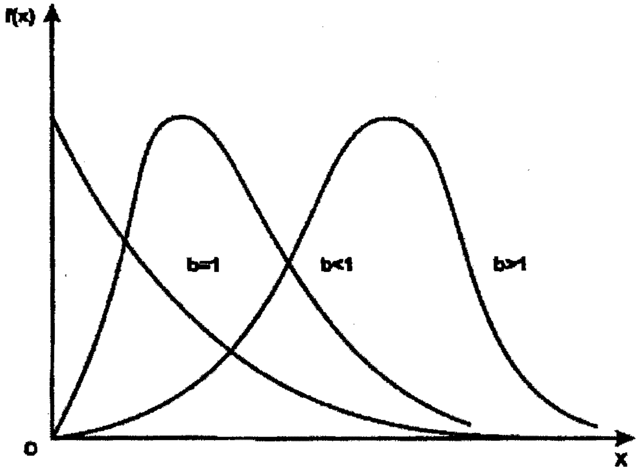
1.13. Էքսպոնենտային բաշխման օրենքը

Էքսպոնենտային բաշխման խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(X) = \lambda e^{-\lambda X} : \qquad (1.55.)$$

Բաշխման ֆունկցիան հաշվարկվում է $0 \le X \le +\infty$ միջակայքում և որոշվում հետևյալ բանաձևով.

$$F(X) = \int_0^x f(X)dX = \int_0^x \lambda e^{-\lambda X} dX = 1 - \exp(-\lambda X):$$



Նկ. 1.9. Վեյբուլի բաշխման կորերը:

Այս օրենքի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան հաշվարկվում է հետևյալ կերպ.

$$M(X)=\int_0^{+\infty}Xf(X)dX=\int_0^{+\infty}X\lambda e^{-\lambda X}dX=-\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}Xe^{-\lambda X}d(-\lambda X)=$$

$$=-Xe^{-\lambda X}\Big/_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda X}dX=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda X}\Big/_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda},$$

$$D(X)=\int_0^{+\infty}[X-M(X)]^2f(X)dX=\int_0^{+\infty}\left(X-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda e^{-\lambda X}dX=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(X-\frac{1}{\lambda}\right)^2d\left(e^{-\lambda X}\right)=-\left(X-\frac{1}{\lambda^2}\right)^2e^{-\lambda X}\Big/_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda X}dX=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}\left(X-\frac{1}{\lambda}\right)d\left(e^{-\lambda X}\right)=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\left(X-\frac{1}{\lambda}\right)d\left(e^{-\lambda X}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\left(X-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda X}\int_0^{+\infty}+\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda X}dX=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda X}dX=$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}:$$

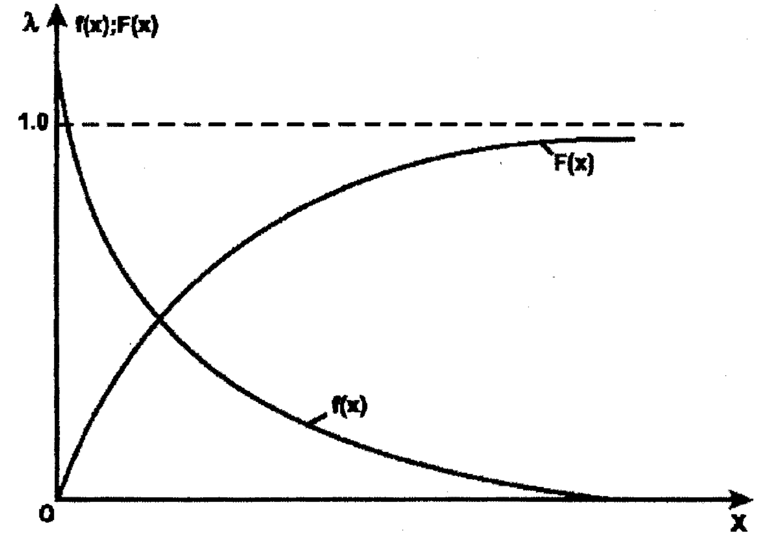
Այսպիսով, միջին քառակուսային շեղումը կարտահայտվի

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}:$$

Կնշանակի $M(X)=\sigma=\frac{1}{\lambda}$, ուրեմն, $\nu=\frac{\sigma}{M(X)}=1; \nu=1$ արժեքի դեպքում հավելվածի 1.7 աղյուսակից ստանում ենք $b=1$, $C_b=1$, $K_b=1$, $a=\frac{\sigma}{C_b}=\frac{1}{\lambda}$: Տեղադրելով a և b-ի արժեքները Վեյբուլի օրենքի դիֆերենցիալ տեսքի մեջ, ստանում ենք.

$$f(X)=\frac{b}{a}\left(\frac{X_i}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\frac{X_i}{a}\right)^b\right]=$$
$$=\frac{1}{a}\left(\frac{X_i}{a}\right)^0\exp\left[-\left(\frac{X_1}{a}\right)^1\right]=\lambda\exp(-\lambda X): \tag{1.56.}$$

Ստացվեց, որ էքսպոնենտային բաշխման օրենքը Վեյբուլի բաշխման օրենքի մասնավոր դեպքն է, երբ $b=1$, $\nu=1$: Օրենքի մնացած թվային բնութագրերը կարելի է հաշվել այնպես, ինչպես Վեյբուլի օրենքի դեպքում:



Նկ. 1.10. Էքսպոնենտային բաշխման օրենքի կորեր
f(X) -ը բաշխման խտության ֆունկցիան է,
F(X) –ը՝ բաշխման ֆունկցիան:

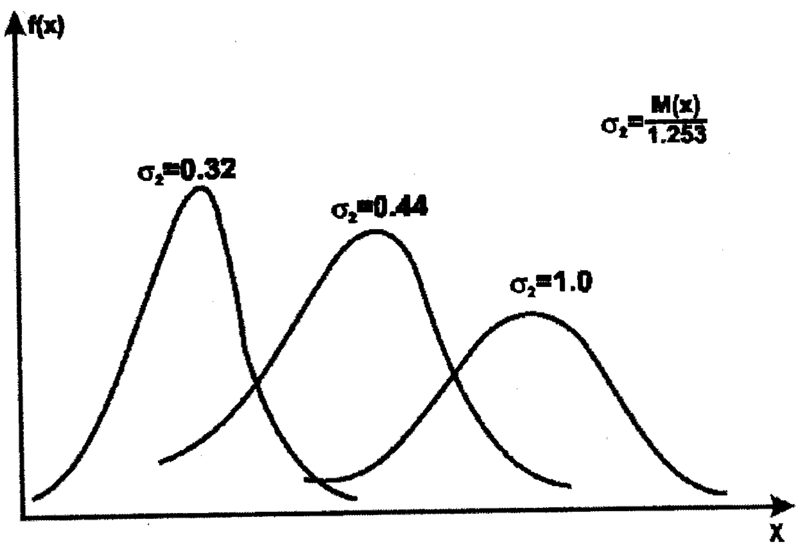
1.14. Ռելեի բաշխման օրենքը

Ռելեի բաշխման օրենքը բնութագրվում է պատահական դրական մեծության բաշխման խտության հետևյալ տեսքով.

$$f(X)=\frac{X}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma^2}\right): \qquad (1.57.)$$

Ռելեի բաշխման ֆունկցիան $(0 \le X \le +\infty)$ միջակայքում ունի հետևյալ տեսքը,

$$F(X)=\int_0^x f(X)dX=\int_0^x \frac{X}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma^2}\right)dX=1-\exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma^2}\right): \qquad (1.58.)$$



Նկ. 1.11. Ռելեի բաշխման օրենքի կորերը:

1.15 Բինոմինալ բաշխում

Բինոմինալ բաշխումը սահմանվել է մոտավորապես 1700-ական թվականներին Բերնուլիի կողմից: Այս, ինչպես նաև Պուասոնի օրենքը պրակտիկ նշանակություն ունեն միայն ընդհատուն պատահական դրական

մեծությունների բնութագրման համար, ասենք, երբ կատարվում է մի շարք հաջորդական անկախ փորձարկումներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ավարտվում է 2 միմյանց հետ անհամատեղելի արդյունքներից մեկով: Այսպես, յուրաքանչյուր փորձարկման ժամանակ եթե A դեպքի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է P-ի, ապա A դեպքի հանդես չգալու հավանականությունը կլինի q = 1 - P: Քանի որ փորձարկումները անկախ են, ուստի A դեպքի հանդես գալու կամ չգալու հավանականությունը կախված չէ նախորդ փորձարկումների արդյունքներից: Այն հավանականությունը, որ A դեպքը n փորձարկումներում հանդես է գալիս 0, 1, 2..., m,...n. անգամ, որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$P_n(m)=C_n^m P^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}P^m q^{n-m}, \qquad (1.59.)$$

որտեղ՝ $P_n(m)$ - ը n անկախ փորձարկումներում A դեպքի m անգամ հանդես գալու հավանականությունն է:

$P_n(m)$ բոլոր հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի:

Բինոմինալ օրենքին ենթարկվող պատահական մեծությունների թվային բնութագրերը որոշվում են հետևյալ արտահայտություններով՝

$$M(m)=np,$$

$$\sigma^2(m)=npq,$$

Ասիմետրիան

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \\ &\text{Էքսցեսը} \\ E&=\frac{1-6pq}{npq}: \end{aligned}\right\} \qquad (1.60.)$$

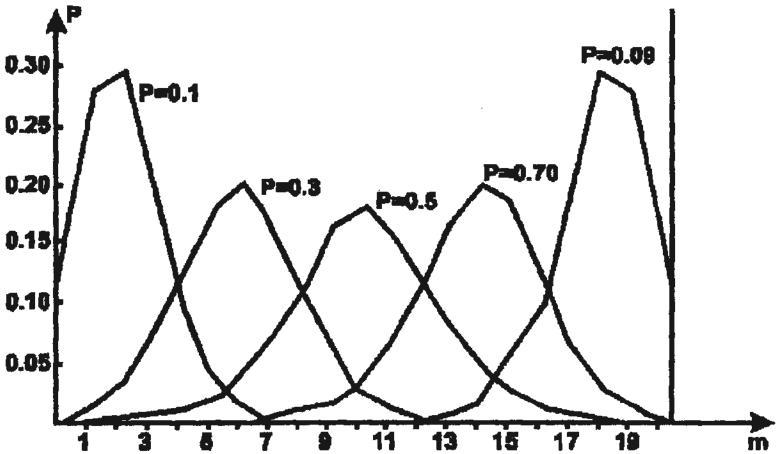
Եթե m պատահական մեծության փոխարեն դիտարկվում է $X=\dfrac{m}{n}$ պատահական հաճախականությունը, ապա՝

$$\left.\begin{aligned} M(X)&=\frac{1}{n}M(m)=p, \\ \sigma(X)&=\frac{1}{n}\sigma(m)=\sqrt{\frac{pq}{n}}: \end{aligned}\right\} \qquad (1.61.)$$

Ուսումնասիրենք բինոմինալ բաշխման գրաֆիկների տեսքերը, երբ n=20, իսկ P=0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; (նկ. 1.12.), նման բաշխման առանձնահատկությունն այն է, որ m-ի ավելացման հետ $p_{m,n}$ հավանականությունը սկզբում աճում է և առավելագույն արժեքի հասնում $m = m_0$ ամենահավանական արժեքի դեպքում, որը որոշվում է

$$np - q \le m_0 \le np + q \qquad (1.62.)$$

արտահայտությունից:



Նկ. 1.12. Բինոմինալ բաշխման բազմանկյունները
$n = 20$, $p = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$ դեպքում:

m_0 - ն համարվում է բինոմինալ օրենքի ամենահավանական (մոդալ) արժեքը: Երկու առավել հավանական արժեքների գոյության դեպքում բաշխումը կոչվում է բիմոդալ: Նշենք նաև, որ ցանկացած բինոմինալ բաշխման համար մաթեմատիկական սպասման և մոդալ արժեքի միջև եղած կապը չի գերազանցում մեկից: Եթե np -ն ամբողջ թիվ է, ապա մաթեմատիկական սպասումը և ամենահավանական արժեքները համընկնում են: Առավել հավանական m_0 արժեքի հասնելուց հետո $p_{m,n}$ հավանականությունը սկսում է նվազել: Բինոմինալ բաշխումը ընդհանրապես ասիմետրիկ է, բացի $p = 0,5$ դեպքից (նկ. 1.12):

1.16. Պուասոնի կամ բացառիկ երևույթների բաշխման օրենքը

Այն դեպքում, երբ նորմալ բաշխման օրենքը առավել կարևոր է անընդմեջ պատահական մեծությունների բաշխման բնութագրման համար, ընդհատուն պատահական մեծությունների բնութագրման համար կարևորվում է 1837թ. Պուասոնի կողմից հայտնագործված օրենքը:

Պուասոնի օրենքը ներկայացնում է միավոր ժամանակահատվածում տեղի ունեցող m դեպքերի քանակը, պայմանով, որ դեպքերը տեղի են ունենում միմյանցից անկախ և հաստատուն միջին ինտենսիվությամբ: Այս դեպքում փորձարկումների քանակը՝ n -ը մեծ է, իսկ յուրաքանչյուր փորձարկման ընթացքում դեպքի հանդես գալու հավանականությունը՝ p -ն փոքր: Այդ պատճառով Պուասոնի օրենքը կոչվում է նաև բացառիկ երևույթների օրենք: Պուասոնի բաշխման պարամետր է համարվում a մեծությունը, որը բնութագրվում է n փորձարկումներում դեպքերի հանդես գալու ինտենսիվությամբ.

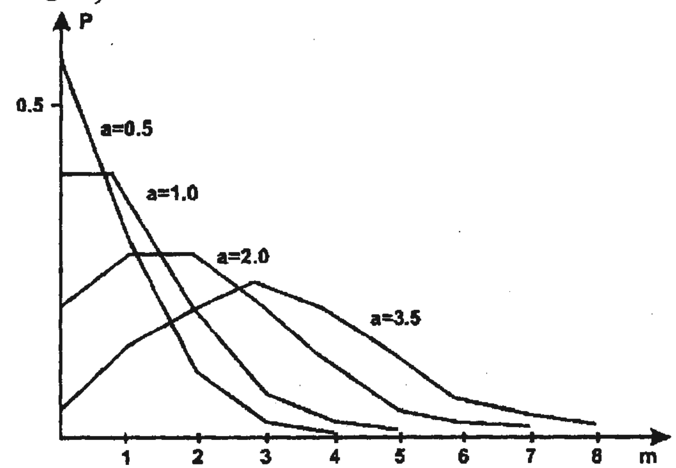
$$p_m = \frac{(np)^m e^{-np}}{m!} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad (1.63.)$$

որտեղ՝ m - ը տվյալ պատահարի հաճախությունն է, n - ը դիտարկումների (փորձերի) քանակը, p - ն մեկ փորձարկման ժամանակ պատահարի հանդես գալու հավանականությունն է, $a = np$ –ն՝ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

Պուասոնի օրենքի համար դիսպերսիան և մաթեմատիկական սպասումը իրար հավասար են $\sigma^2 = a$:

Պուասոնի բաշխման օրենքի համար ասիմետրիան և էքսցեսը որոշվում են հետևյալ արտահայտություններով.

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{a}}, \\ E &= \frac{1}{a}: \end{aligned}\right\} \qquad (1.64.)$$



Նկ. 1.13. Պուասոնի բաշխման օրենքի կորերը

1.17. Վիճակագրական հիպոթեզների ստուգումը

Վիճակագրական հիպոթեզների ստուգումը խիստ կապված է պարամետրերի գնահատման տեսության հետ: Բնագիտության, տնտեսագիտության և տեխնիկայի բնագավառներում այս կամ այն պատահական փաստի բացատրման համար դիմում են հիպոթեզի օգնությանը, որը կարելի է ստուգել վիճակագրորեն: Վիճակագրական կոչվում են այնպիսի հիպոթեզները, որոնք վերաբերում են պատահական մեծությանը, տեսական կամ առանձին պարամետրերի բաշխմանը:

Գիտափորձերի մեկ սերիայի միջին արդյունքները (միջին արժեք, միջին քառակուսային շեղում) նկատելիորեն տարբերվում են մեկ ուրիշ սերիայի գիտափորձերի միջին արդյունքից: Այս դեպքում հարց է առաջանում. միջինների նկատված տարբերությունը կարելի՞ է, արդյոք, բացատրել գիտափորձերի պատահական սխալներով, թե այն կախված է ինչ-որ աննկատելի կամ նույնիսկ անհայտ օրինաչափություններից:

Երկու ընտրանքների կրիտիկական տիրույթների կառուցման համար անհրաժեշտ է հետազոտել $\hat{S}_x^2$ և $\hat{S}_y^2$ գնահատականների համատեղ բաշխման օրենքը: $\hat{S}_x^2$ և $\hat{S}_y^2$ վիճակագրության այդպիսի համատեղ բաշխման օրենք է համարվում F բաշխումը, որը կոչվում է նաև Ֆիշեր-Սնեդեկորի բաշխում:

F պատահական մեծությունը որոշվում է հետևյալ հարաբերությունից.

$$F=\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\hat{S}_1^2 n_1/\sigma^2}{\hat{S}_2^2 n_2/\sigma^2}=\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}: \qquad (1.65.)$$

Պետք է նկատել, որ միշտ կարելի է գտնել այնպիսի հարաբերություն, երբ $\hat{S}_1^2>\hat{S}_2^2$, որից հետևում է, որ $F\geq 1$:

Մի շարք խնդիրներում հետազոտվող պատահական մեծության բաշխման իրական օրենքը անհայտ է, կամ հայտնի է նրա հիպոթեզը, որը վիճակագրական ստուգում է պահանջում: Սովորաբար փորձնական ճանապարհով ստացված բաշխումը մոտավորապես ենթարկվում է տեսական բաշխման ինչ-որ հայտնի օրենքի: Բացի դրանից, տեսական և փորձնական հաճախությունների միջև նկատվում են նկատելի տարբերություններ: Տեսական և փորձնական հաճախությունների միջև անհամապատասխանության, պատահականության և հավաստիության գնահատման համար օգտվում են համաձայնեցման չափանիշներից:

Համաձայնեցման չափանիշները համարվում են պատահական մեծություններ և ենթարկվում են բաշխման որոշակի օրենքի: Ուստի, յուրաքանչյուր դեպքի համար ըստ համաձայնեցման չափանիշի մեծության կարելի է որոշել տեսական և փորձնական ֆունկցիաների համապատասխանության հավանականությունը, ըստ որի պետք է կա՛մ ընդունել, կա՛մ մերժել ընտրված տեսական բաշխման օրենքը: Պետք է նկատի ունենալ նաև, որ որքան էլ մեծ լինի համընկնման հավանականությունը, այն վկայում է միայն այն մասին, որ ընտրված օրենքը չի հակասում փորձնական տվյալներին, բայց չի երաշխավորում նաև այն, որ այս դեպքի համար այս օրենքը ավելի լավ է, քան մեկ ուրիշը և շտկում է փորձնական տեղեկությունը: Համաձայնեցման չափանիշները առավել հարմար կիրառվում են այն դեպքերում, երբ երկու կամ մի քանի տեսական օրենքներից անհրաժեշտ է ընտրել միայն մեկը: Այս դեպքում կարելի է չկասկածել, որ առավել ընդունելի է այն օրենքը, որի հետ փորձնական տեղեկության համընկնումը բնութագրվում է անհամապատասխանության փոքր մեծությամբ: Պատահական մեծության տեսական բաշխման օրենք կարելի է ընտրել ըստ փորձնական տեղեկության վարիացիոն գործակցի` ν-ի: Երբ $\nu \leq 0{,}3$, ապա որպես տեսական բաշխման օրենք է ընտրվում նորմալ բաշխման օրենքը, երբ $\nu > 0{,}5$, ընտրվում է Վեյբուլի բաշխման օրենքը, երբ $0{,}3 > \nu \leq 0{,}5$, ընտրվում է կա՛մ նորմալ բաշխման, կա՛մ Վեյբուլի բաշխման օրենքը, երբ $\nu = 1$, ընտրվում է էքսպոնենտային բաշխման օրենքը, երբ $\nu = 0{,}523$` Ռելեի բաշխման օրենքը:

1.17.1. Պիրսոնի (χ^2) համաձայնեցման չափանիշը

Բաշխման օրենքի հիպոթեզի ստուգման առավել կիրառելի չափանիշ կարող է ծառայել (χ^2) համաձայնեցման չափանիշը, որը 1900թ. առաջարկվել է Կ. Պիրսոնի կողմից (Վ. Յու. Ուրբախ 1963, Գ. Ֆ. Լակին 1980, Ա. Ա. Բարովկով 1984): Պիրսոնի (χ^2) համաձայնեցման չափանիշը իրենից ներկայացնում է ինֆորմացիայի վիճակագրական շարքի յուրաքանչյուր միջակայքի տեսական և փորձնական հաճախությունների տարբերությունների քառակուսիների գումար.

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-m_{ti})^2}{m_{ti}}, \qquad (1.66.)$$

որտեղ` k -ն վիճակագրական շարքում միջակայքերի քանակն է, m_i և m_{ti} -ն համապատասխանաբար վիճակագրական շարքի i-րդ միջակայքի փորձնական և տեսական հաճախություններն են:

Եթե ելակետային տեղեկատվությունը տրված է վիճակագրական շարքի տեսքով, ապա Պիրսոնի (χ^2) համաձայնեցման չափանիշի կիրառման համար անհրաժեշտ է պահպանել հետևյալ կանոնները՝ $k \geq 4$, $m_i \geq 5$: Այս դեպքում թույլատրվում է միացնել այն միջակայքերը, որոնց $m_i < 5$:

Վիճակագրական շարքի բացակայության դեպքում ելակետային ամբողջ տեղեկությունը ըստ աճման արժեքների կարելի է բաժանել տարբեր մեծության միջակայքային շարքի այնպես, որ $k \geq 4$ և $m_i \geq 5$:

Օգտվելով (χ^2) համաձայնեցման չափանիշից, հավելվածի 1.9 աղյուսակից որոշվում է տեսական և փորձնական տվյալների համապատասխանության հավանականությունը:

Այլ հավասար պայմանների դեպքում համապատասխանության հավանականությունը կախված է կիրառվող ինֆորմացիայի կրկնությունից: Այդ պատճառով հավելվածի 1.9 աղյուսակից օգտվելիս անհրաժեշտ է որոշել ազատության աստիճանների թիվը.

$$r = k - \ell\,, \tag{1.67.}$$

որտեղ՝ k-վիճակագրական շարքում միջակայքերի քանակն է, ℓ -ը պարտադիր կապերի թիվն է (նորմալ և Վեյբուլի բաշխման օրենքների համար $\ell=3$):

Հավանականության $p(\%) < 10\%$ արժեքի դեպքում, ըստ քիչ հավանական դեպքերի գործնական անհնարինության սկզբունքի, կարելի է ասել, որ փորձնական տեղեկության բաշխումը չի համապատասխանում տեսական բաշխման օրենքին:

Պիրսոնի χ^2 համաձայնեցման չափանիշով բաշխման օրենքի հիպոթեզը ստուգելիս տարբեր օրենքների համար օգտվում ենք նաև տարբեր արտահայտություններից: χ^2 չափանիշի մեծությունը կարող ենք որոշել ըստ ինտեգրալային և ըստ դիֆերենցիալ ֆունկցիաների արժեքների: Ըստ ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքների, տեսական հաճախությունների արժեքները որոշվում են հետևյալ արտահայտությունից.

$$m_{ti} = N\left[F\left(X_i^{վ}\right) - F\left(X_i^{ս}\right)\right], \tag{1.68.}$$

որտեղ՝ N -ը փորձերի քանակն է, $F\left(X_i^{վ}\right)$ և $F\left(X_i^{ս}\right)$ համապատասխանաբար i-րդ միջակայքի վերին և ստորին արժեքներին համապատասխան ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքներն են:

Նորմալ բաշխման օրենքի դեպքում, ըստ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի, արժեքների տեսական հաճախությունները հաշվարկվում են.

$$m_{ti} = \frac{Nh}{\sigma} Z_{ti}\,, \text{ բանաձևով} \tag{1.69.}$$

որտեղ՝ $$Z_{ti} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \tag{1.70.}$$

իսկ $t = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$ կամ $t = \dfrac{X_i - M(X)}{\sigma}$:

Z_{ti} արժեքներն ընտրում են հավելվածի 1.3 աղյուսակից:

$0{,}5 \leq \dfrac{h}{\sigma} \leq 1{,}0$ դեպքում (1.69) արտահայտությամբ m_{ti} արժեքների հաշվարկները բավարարում են, իսկ $0 \leq \dfrac{h}{\sigma} < 0{,}5$ դեպքում (1.69) արտահայտությամբ m_{ti} -ի հաշվարկային արժեքները չեն բավարարում: Նշված դեպքերի համար առաջարկվում է հետևյալ բանաձևը.

$$m_{ti} = \frac{Nh}{\sigma} f(X)_i\,, \tag{1.71.}$$

որտեղ՝ $f(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$:

Վեյբուլի բաշխման օրենքի դեպքում χ^2 չափանիշը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\chi^2 = Nh \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[f^*(X)_i - f_T(X)_i\right]^2}{f_T(X)_i}\,, \tag{1.72.}$$

որտեղ՝ $f^*(X)_i = \dfrac{W_i}{h}$ -ը հավանականությունների խտության փորձնական ֆունկցիան է, $W_i = \dfrac{m_i}{N}$ - ն i-րդ միջակայքի հաճախությունն է, h-ը միջակայքի մեծությունն է, N-ը փորձերի քանակը, $f_T(X)_i = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{X_i}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\dfrac{X_i}{a}\right)^{b}\right]$-ը՝ տեսական դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

1.17.2. Կոլմոգորովի համաձայնեցման λ չափանիշը

Բաշխման օրենքի հիպոթեզի ստուգման առավել հասարակ չափանիշ կարող է ծառայել λ չափանիշը, որ առաջադրվել է ակադեմիկոս Ա. Ն.

Կոլմոգորովի կողմից: Այս չափանիշի կիրառման դեպքում ենթադրվում է, որ վիճակագրական տվյալների բաշխումը ունի նորմալ բաշխման բնույթ: Որպես բաշխման պարամետր է ընդունվում ընտրանքի համապատասխան բնութագիրը:

Ընդունելով, որ տեսական բաշխման պարամետրերը հավասար են փորձնական բաշխման պարամետրերին, X - ի ցանկացած մեծության դեպքում m_{ti} տեսական հաճախությունները որոշում են հետևյալ բանաձևով.

$$\left.\begin{aligned} m_{ti} &= \frac{hN}{\sigma} f(X), \\ \text{կամ} \quad m_{ti} &= \frac{h}{S} N\varphi(X) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.73.)$$

որտեղ՝ h- ը միջակայքերի մեծությունն է, $f(X)=f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ արժեքներն ընտրվում են հավելվածի 1.3 աղյուսակից, ըստ $t=\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}$ մեծության:

Տեսական և փորձնական հաճախությունների մոտիկությունը հնարավորություն է տալիս ենթադրել, որ բաշխման փորձնական կորը ենթարկվում է նորմալ բաշխման օրենքին:

Ըստ փորձնական և հնարավոր տեսական բաշխման հաճախությունների հաշվում են համաձայնեցման λ չափանիշի մեծությունը.

$$\lambda = \frac{|m_i - m_{ti}|_{max}}{N}\cdot\sqrt{N} = D_{max}\cdot\sqrt{N}, \qquad (1.74.)$$

որտեղ՝ $D_{max} = |F_T(x)_i - F_Э(x)_i|_{max}$,

$F_Э(X)_i = W_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{N}$ -ը վարիացիայի շարքի գումարային հաճախությունն է կամ փորձնական ինտեգրալային ֆունկցիան, $F_T(X)_i$ - բաշխման տեսական ինտեգրալային ֆունկցիան է:

Նորմալ բաշխման օրենքի համար

$$\left.\begin{aligned} F_T(X)_i &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\phi(t), \\ \phi(t)_i &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt, \end{aligned}\right\} \qquad (1.75.)$$

$$t=\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma},$$

$\phi(t)_i$ արժեքները վերցնում ենք հավելվածի 1.4 աղյուսակից:

Վեյբուլի բաշխման օրենքի համար

$$F(X)_i = 1-\exp\left(-\frac{X_i}{a}\right)^b : \qquad (1.76.)$$

Ըստ հաշվարկված λ -ի արժեքի գտնում ենք համապատասխանության սահմանային հավանականությունը՝ p(λ) (հավելվածի 1.7 աղյուսակ):

Եթե p(λ)-ի արժեքը ստացվի շատ փոքր $p(\lambda) \le 0{,}05$, ապա ենթադրվում է, որ փորձնական ինֆորմացիայի բաշխումը չի համապատասխանում տեսական բաշխման օրենքին:

Համաձայնեցման չափանիշներով բաշխման օրենքի հիպոթեզի ստուգման ժամանակ հաճախ հետազոտողները տեսական ինտեգրալային կամ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի արժեքները հաշվարկում են ըստ միջակայքի վերին կամ ստորին սահմանի, իսկ փորձնական արժեքները՝ ըստ միջակայքի միջին արժեքների կամ հակառակը: Նման դեպքերում հիպոթեզի ստուգումը սխալ է կատարվում:

1.18. Ճշգրտության գնահատական, վստահելի սահմաններ

Տեսական բաշխման հիմնական պարամետրերը՝ մաթեմատիկական սպասումը՝ M(X) և դիսպերսիան՝ D(X), որոշվում են մեկ թվով: Մեծ թվով փորձերի դեպքում կարելի է ընդունել, որ $X = M(X)$ և $S^2 = D(X)$: Նման գնահատականները կոչվում են կետային:

Պարամետրերի գնահատման վիճակագրական տեսությունը, բացի կետային գնահատականից, զբաղվում է նաև միջակայքային գնահատման հարցերով: Միջակայքային գնահատման խնդիրը ընդհանուր տեսքով կարելի է ձևակերպել այսպես՝ տվյալ ընտրանքի համար ընտրել թվային այնպիսի միջակայք, ըստ որի և նախապես ընտրված հավանականության կարելի է ասել, որ այդ միջակայքում է գտնվում պարամետրի գնահատվող արժեքը:

Այն դեպքերում, երբ ընտրանքի ծավալը, որպես կանոն, մեծ չէ, անհրաժեշտ է օգտվել միջակայքային գնահատականներից, որոնք որոշվում են երկու թվերով՝ միջակայքային եզրային արժեքներով: Միջակայքային գնահատականը հնարավորություն է տալիս հաստատել գնահատականների ճշգրտությունը և հուսալիությունը, այսինքն հնարավորություն է տալիս գտնել թե ինչպիսի՞ սխալի կարող է հանգեցնել X_t տեսական պարամետրերի փոխարինումը X_c վիճակագրական բնութագրով: Որից հետևում է, որքան փոքր է միջակայքը, այնքան գնահատականը ճշգրիտ է ($/X_t - X_c/ < \delta$), ընդունում ենք $\delta > 0$: Այսինքն՝ դրական թիվը բնութագրում է գնահատման ճշգրտությունը:

Սակայն վիճակագրական մեթոդները հնարավորություն չեն տալիս կտրականապես հաստատել, որ X_c գնահատականը բավարարում է $/X_t - X_c/ < \delta$ անհավասարությանը: Այս դեպքում կարելի է միայն նշել α հավանականության մասին, որի համար այդ անհավասարությունը ճիշտ չէ: Ըստ X_c – ի X_T գնահատականի վստահելի հավանականություն (հուսալիություն) է կոչվում α հավանականությունը, որի դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $/X_T - X_c/ < \alpha$: Սովորաբար α - ի արժեքը ընդունվում է մեկի մոտ և ենթադրում են, որ վերջինս կարող ենք ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$p[/X_T - X_c/ < \delta] = \alpha,$$
$$p[X_c - \delta < X_T < X_c + \delta] = \alpha:$$

Այս արտահայտությունը կարելի է հասկանալ հետևյալ կերպ՝ հավանականությունը, թե X_T պարամետրը գտնվում է (X_c - δ, $X_c + \delta$) միջակայքում հավասար է α - ի:

Վստահելի (I_α) միջակայք է կոչվում (X_c - δ, $X_c + \delta$) միջակայքը, որի մեջ ընդգրկվում է α հավանականությամբ անհայտ պարամետրը, այսինքն սա միջակայք է, որում տվյալ վստահելի հավանականության համար N դեպքերից α քանակը 100% -ով համընկնում է : α վստահելի հավանականության ընտրությունը մաթեմատիկական խնդիր չի համարվում, այլ ընտրվում է կոնկրետ լուծվող խնդրի պայմանից:

Այն սահմանները, որոնցում կարող են տատանվել α հավանականությամբ պարամետրի արժեքները, կոչվում են վստահելի սահմաններ՝ ստորին վստահելի սահման $X_\alpha^{\text{ս}}$ և $X_\alpha^{\text{վ}}$ վերին վստահելի սահման:

Նորմալ բաշխման օրենքի համար, երբ հայտնի է միջին քառակուսային շեղումը՝ σ, վստահելի սահմանները կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$\left.\begin{aligned} X_\alpha^{\text{ս}} &= X_c - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \\ X_\alpha^{\text{վ}} &= X_c + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.77.)$$

որտեղ՝ N - ը փորձերի (դիտարկումների) քանակն է, t_α - ն որոշում են հավելվածի 1.6 աղյուսակից ($2\phi(t) = \alpha$ պայմանից), α - ն վստահելի հավանականությունն է, որը տրվում է ըստ խնդրի պայմանի: Վստահելի միջակայքի մեծությունը՝ $I_\alpha = X_\alpha^{\text{վ}} - X_\alpha^{\text{ս}}$, որոշ դեպքերում՝ գնահատման ճշգրտությունը՝ δ, որոշվում է $\delta = t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}}$ արտահայտությունից, որտեղ՝ t_γ -ն աղյուսակային գործակից է, որ որոշվում է α տրված հավանականության և n = k - 1 ազատության աստիճաններով (հավելվածի 1.6 աղյուսակ):

Այս դեպքում միջին քառակուսային շեղումը՝ S-ը, որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(X_i - X_c)^2 m_i} :$$

Վեյբուլի բաշխման օրենքի համար վստահելի սահմանները որոշվում են այսպես.

$$\begin{aligned} X_\alpha^{\text{ս}} &= H_k^B\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)a + X_{\text{շղ}}, \\ X_\alpha^{\text{վ}} &= H_k^B\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)a + X_{\text{շղ}}, \end{aligned} \qquad (1.78.)$$

որտեղ a - ն Վեյբուլի բաշխման օրենքի պարամետրն է, H_k^B - ն Վեյբուլի բաշխման օրենքի քվանտիլն է, որ ընտրվում է հավելվածի 1.10 աղյուսակից, ըստ Վեյբուլի օրենքի b պարամետրի և $\frac{1-\alpha}{2}$ կամ $\frac{1+\alpha}{2}$ արժեքների:

$X_{\text{շղ}}$ -ը ցուցանիշի շեղման մեծությունն է, որը որոշվում է $X_{\text{շղ}} = X_1 \frac{X_3 - X_1}{2}$ արտահայտությունից, որտեղ՝ X_1 և X_3 -ը գնահատվող ցուցանիշի վարիացիայի շարքի առաջին և երրորդ համարի արժեքներն են: $X_{\text{շղ}} > X_1$ արժեքի դեպքում շեղման մեծությունն ընդունվում է հավասար X_1 - ի, իսկ եթե $X_{\text{շղ}} \leq 0$, ընդունվում է $X_{\text{շղ}} = 0$ պայմանը:

Մշակված հարցերի պրակտիկ կիրառության նպատակով լուծենք մի քանի արտադրական նշանակության խնդիրներ:

Խնդիր 1: ՄՏԶ մակնիշի տրակտորների հիմնական նորոգման ժամանակ միկրոմետրական չափման են ենթարկվել 200 միատեսակ մեքենամասեր, որոնց մաշի մեծություններով կազմվել է վարիացիոն շարք: Մաշի առավելագույն և նվազագույն արժեքները համապատասխանաբար հավասար են X_{max} = 0,605մմ X_{min} = 0,020 մմ: Վարիացիոն շարքի միջակայքերի քանակը և մեծությունը հավասար են՝

$$k = 1 + 3{,}2\lg N = 1 + 3{,}2\lg 200 \approx 9,$$

$$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{k} = \frac{0{,}605 - 0{,}020}{9} = 0{,}065 \text{ մմ}:$$

Մաշի վիճակագրական ցուցանիշների միջին արժեքը՝ $\overline{X}$ -ը և միջին քառակուսային շեղումը՝ σ -ը որոշելու համար լրացնենք աղյուսակը (1.2).

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{iep} - m_i,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(X_{iep} - \overline{x}\right)^2 m_i} :$$

Ստանում ենք $\overline{X} = 0{,}29205$; $\sigma = 0{,}1344$,

վարիացիոն գործակիցը $\nu = \frac{\sigma}{\overline{X}} = 0{,}460$

$\nu = 0{,}46$ դեպքում մեքենամասերի մաշերի ցուցանիշների հետագա հաշվարկների համար որպես տեսական բաշխման օրենք ընտրում ենք Վեյբուլի բաշխման օրենքը: Հավելվածի 5 աղյուսակից վարիացիոն գործակցի ν= 0,46 արժեքին համապատասխան ընտրում ենք Վեյբուլի բաշխման օրենքի $b = 2{,}305$ պարամետրը և $C_b = 0{,}407, k_b = 0{,}886$ գործակիցները, իսկ a պարամետրը՝ $a = \frac{\sigma}{C_b} = 0{,}3302$:

Աղյուսակ 1.2

Մեքենամասի մաշի վիճակագրական ցուցանիշները

Մաշի միջակայքերը /մմ/	Համախու-թյունը m_i	Համախա-կանությունը $W_i = \frac{m_i}{N}$	Միջակայ-քի միջին արժեքը X_{icp}	m_iX_i	$\left(X_i - \overline{X}\right)^2 W_i$
0,020…0,085	12	0,060	0,0525	0,6300	$3{,}444 \cdot 10^{-3}$
0,085…0,150	23	0,115	0,1175	2,7025	$3{,}506 \cdot 10^{-3}$
0,150…0,215	28	0,140	0,1825	5,1100	$1{,}682 \cdot 10^{-3}$
0,215…0,280	34	0,170	0,2575	8,7550	$2{,}040 \cdot 10^{-4}$
0,280…0,345	38	0,195	0,3225	12,5775	$1{,}800 \cdot 10^{-4}$
0,345…0,410	28	0,140	0,3875	10,8500	$1{,}274 \cdot 10^{-3}$
0,410…0,475	19	0,095	0,4525	8,5975	$2{,}444 \cdot 10^{-3}$
0,475…0,540	11	0,055	0,5175	5,6925	$2{,}794 \cdot 10^{-3}$
0,540…0,605	6	0,030	0,5825	3,4950	$2{,}530 \cdot 10^{-3}$

$$\sum m_i N = 200 :$$

Մաշի միջնագծի արժեքը և մոդալ մեծությունը հաշվարկում ենք 1.36 արտահայտություններից.

$$M_e = X_e + h\frac{\frac{N}{2} - S_n}{m_e},$$

$$M_0 = \overline{X} + 3\left(M_e - \overline{X}\right)$$

$$X_e = 0{,}280;\ h = 0{,}065;\ S = 97;\ \frac{N}{2} = 100,$$

$$m_e = 39;\ \overline{X} = 0{,}2902 :$$

Ստանում ենք $M_e = 0{,}2850$; $M_0 = 0{,}274$ս:

Տեսական և փորձնական բաշխման օրենքների համապատասխանությունը ստուգենք Պիրսոնի χ^2 չափանիշով (1.19.1).

$$\chi^2 = Nh\sum_{i=1}^{k}\frac{\left[f^*(X_i) - f_T(X)_i\right]^2}{f_T(X)_i}$$

$$f_T(X)_i = \frac{b}{a}\left(\frac{X_{icp}}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{X_i}{a}\right)^b}$$

$$f^*(X)_i = \frac{W_i}{h}$$

Աղյուսակ 1.3

Տեսական և փորձնական դիֆերենցիալ ֆունկցիաների արժեքները

Մաշի միջա-կայքերի սահմանները (մմ)	Միջակայքի միջին արժեքը X_{icp}	$f^*(X)_i$	$f_T(X)_i$	$\frac{\left(f^*(X)_i - f_T(X)_i\right)^2}{f_T(X)_i}$
0,020…0,085	0,0525	0,923	0,625	0,1420
0,085…0,150	0,1175	1,769	1,655	0,0079
0,150..0,215	0,1825	2,154	2,498	0,0470
0,215…0,280	0,2575	2,652	2,873	0,1700
0,280…0,345	0,3225	3,000	2,626	0,0533
0,345…0,410	0,3875	2,150	2,024	0,0078
0,410…0,475	0,4525	1,460	1,330	0,0128
0,475…0,540	0,5175	0,846	0,792	0,0040
0,540…0,605	0,5825	0,401	0,361	0,0277

$\chi^2 = 200 \cdot 0{,}065 \cdot 0{,}319 = 4{,}147$:

Հավելվածի 1.9 աղյուսակից $r = k - \ell = 9 - 3 = 6$ գտնում ենք $p = 65\%$:

Ընտրված տեսական բաշխման օրենքի և փորձնական օրինաչափության համապատասխանության հավանականությունը $p(65\%) > p_{min}(10\%)$, այսինքն՝ ընտրված տեսական բաշխման օրենքը բավարարում է փորձնական տեղեկության:

Ստացված արդյունքներով կառուցենք տեսական և փորձնական դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկները:

Վեյբուլի բաշխման օրենքի համար տեսական ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքները որոշվում են.

$F_T(X)_i = 1 - e^{-\left(\frac{X_i}{a}\right)^b}$ արտահայտությունից:

Մաշի ցուցանիշների վստահելի սահմանները հաշվարկվում են (1.22)-ից.

$$X_\alpha^{ս} = H_k^B\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)a + X_{2ղ},$$

$$X_\alpha^{վ} = H_k^B\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)a + X_{2ղ},$$

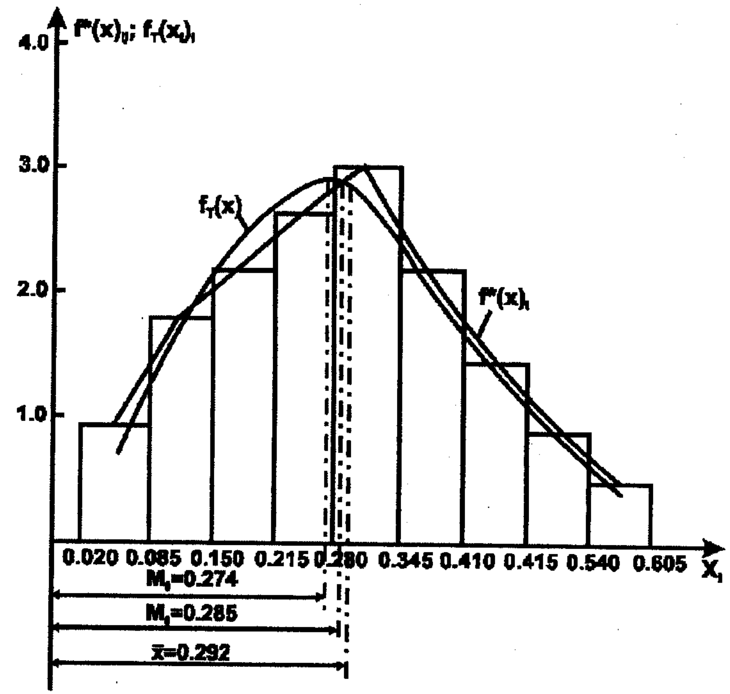
որտեղ՝ $X_{2ղ} = X_1 - \frac{X_3 - X_1}{2} = 0$, հավելվածի 1.10 աղյուսակից ըստ b պարամետրի ընտրում ենք H_k^B - ի արժեքները $\alpha = 0,90$ արժեքի համար: Մեր օրինակներում $b = 2,305$; $a = 0,3302$; $H_k^B(0,05) = 0,28$; $H_k^B(0,95) = 1,63$:

Ստանում ենք $X_\alpha^{ս} = 0,0925$; $X_\alpha^{վ} = 0,5382$:

Աղյուսակ 1.4

Տեսական և փորձնական ինտեգրալային ֆունկցիաների արժեքները

Մաշի միջակայքերի սահմանները (մմ)	Փորձնական ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքները $W_n = \sum W_i = \frac{\sum m_i}{N}$	Տեսական ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքները $F_t(X)_i$
0,020…0,085	0,060	0,0143
0,085…0,150	0,175	0,0884
0,150…0,215	0,315	0,2253
0,215…0,280	0,485	0,4314
0,280…0,345	0,680	0,6127
0,345…0,410	0,820	0,7650
0,410…0,475	0,915	0,8739
0,475…0,540	0,970	0,9361
0,540…0,605	1,00	0,9755



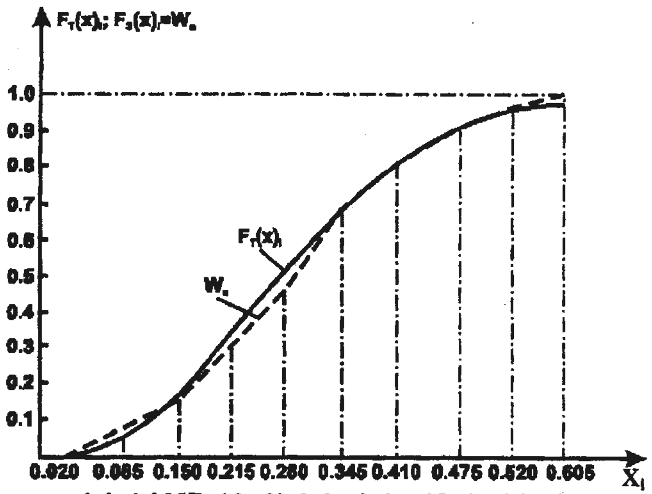
Նկ. 1.14. Մեքենամասի մաշի փորձնական և տեսական դիֆերենցիալ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Վստահելի միջակայքի մեծությունը՝

$h_\alpha = x_\alpha^{վ} - X_\alpha^{ս} = 0,5382 - 0,0925 = 0,4447$մմ:

Կառուցենք փորձնական և տեսական ինտեգրալային ֆունկցիաների գրաֆիկները, հորիզոնական առանցքի վրա տեղադրելով մաշի միջակայքերի սահմանային արժեքները, ուղղահայաց առանցքին՝ ինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքները:

Խնդիր 2. Ծարքի երկարությամբ սերմնահան ունիվերսալ ապարատով ցորենի սերմերի բաշխման համաչափությունը գնահատելու համար կատարվել են լաբորատոր փորձեր, որոնց ընթացքում որոշվել են փոխադրիչի շարժական ժապավենի 25 սմ լայնության N=50 բաժանմունքներում ընկած սերմերի քանակը: Որոշակի քանակի հատիկներ ընկել են հետևյալ թվով բաժանմունքներում 4 հատիկ մեկ բաժանմունքում և համապատասխանաբար՝ 5-2, 6-3, 7-4, 8-5, 9-4,10-5,11-6, 12-4, 13-4, 14-3, 15-3, 16-1, 17-1, 18-1, 19-1, 20-1: Այսպիսով, մեկ բաժանմունքում պարունակվող սերմերի առավելագույն և նվազագույն քանակներն են՝ $X_{max} = 20$, $X_{min} = 4$:



Նկ. 1.15 Մերենաների մաշի փորձնական և տեսական ինտեգրալային ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Հատիկների բաշխման համաչափության վիճակագրական ցուցանիշները որոշելու համար այն բաժանենք միջակայքերի (k = 8) և որոշենք նրանց մեծությունը.

$$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{k}$$

$\overline{X}, \sigma, \nu$ ցուցանիշների հաշվարկման համար լրացնենք 1.5 աղյուսակը:

Աղյուսակ 1.5.

Հատիկների բաշխման համաչափության վիճակագրական ցուցանիշները

Ցուցանիշները	Միջակայքի սահմանները							
	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20
միջակայքի միջին արժեքը X_{icp}	5	7	9	11	13	15	17	19
հաճախությունը m_i	3	8	9	11	8	6	2	3
հաճախականությունը՝ $w_i = \frac{m_i}{N}$	0,06	0,16	0,18	0,22	0,16	0,12	0,04	0,06
գումարային հաճախականությունը՝ W_n	0,06	0,22	0,40	0,62	0,78	0,90	0,94	1,00

$$W_n = \sum W_i = \frac{1}{N}\sum m_i$$

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} X_{icp}.m_i = \frac{1}{50}(5.3 + 7.8 + 9.9 + 11.11 + 13.8 + 15.6 +$$

$$+17.2 + 19.3) = 11.16$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(X_{icp} - \overline{x}\right)^2 m_i = 13.254$$

$$\sigma^2 = 3,64$$

Վարիացիոն գործակիցը՝ $\nu = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{3,64}{11,16} = 0,326$:

$\nu = 0,326$ արժեքի դեպքում որպես տեսական բաշխման օրենք ենք ընտրում նորմալ բաշխման օրենքը (ՆԲՕ)

ՆԲՕ-ի դեպքում հատիկների բաշխման փորձնական (բազմանկյունը և հիստոգիրը) և տեսական դիֆերենցիալ ֆունկցիաների գրաֆիկները կառուցելու համար որոշենք տեսական հաճախությունների (m_{ti}) արժեքները հետևյալ բանաձևով.

$$m_{ti} = \frac{Nh}{\sigma} \cdot Z_{Ti},$$

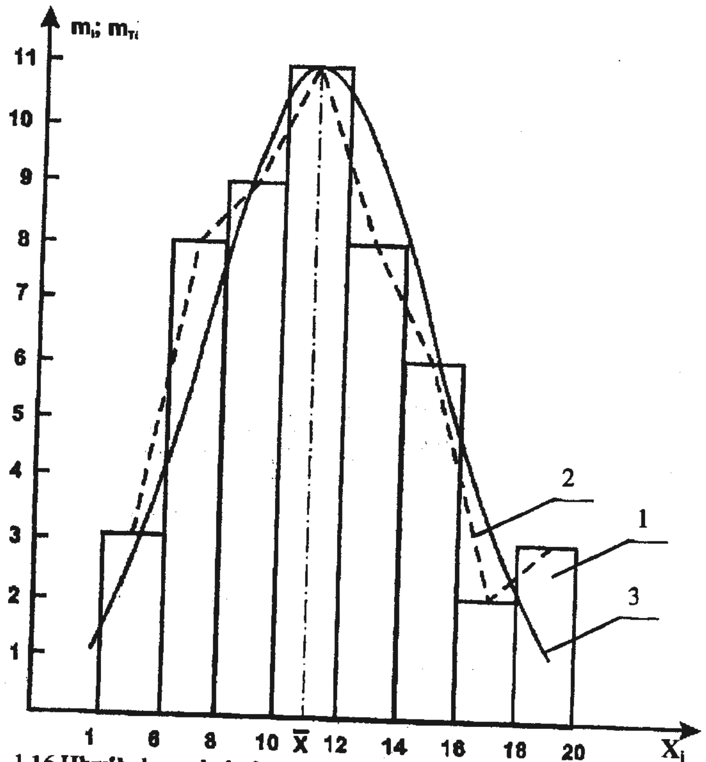
որտեղ $Z_{ti} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}$: Լապլասի նորմավորված ֆունկցիայի արժեքները որոշում ենք հավելվածի 1.3 աղյուսակի $t_i = \frac{X_{icp} - \bar{X}}{\sigma}$ մեծությունից:

Աղյուսակ 1.6

Հատիկների բաշխման տեսական հաճախությունների արժեքները

Միջակայքի սահմանները	t_i	Z_i	m_i	m_{Ti}
4 - 6	-1,692	0,0957	3	2,63
6 – 8	-1,148	0,2083	8	5,72
8 – 10	-0,599	0,3352	9	9,21
10 – 12	-0,044	0,3986	11	10,95
12 – 14	-0,505	0,3503	8	9,62
14 – 16	-1,055	0,2275	6	6,25
16 – 18	-1,604	0,1109	2	3,05
18 - 20	-2,154	0,0396	3	1,09

Գրաֆիկների կառուցման համար հորիզոնական առանցքի վրա տեղադրենք միջակայքերի համապատասխան սահմանները, իսկ ուղղահայաց առանցքի վրա՝ հաճախությունների մեծությունները (նկ. 1.16).



Նկ. 1.16 Սերմերի բաշխման համաչափության փորձնական և տեսական հաճախությունների գրաֆիկները: 1. Բազմանկյուն, 2. հիստոգիր, 3. տեսական հաճախություններից կորը:

Սերմերի բաշխման համաչափության միջին արժեքը և մոդալ արժեքը հավասար են՝

$$M_e = X_e + h\frac{\frac{N}{2} - S_n}{m_e} = 10 + 2\frac{25-20}{11} = 10,9,$$

$$M_0 = \overline{X} + 3\left(M_e - \overline{X}\right) = 11,16 + 3(10,9 - 11,16) = 10,38:$$

Փորձնական և տեսական բաշխման օրենքների համապատասխանությունը ստուգենք Կոլմոգորովի $p(\lambda)$ չափանիշներով, այդ նպատակով լրացնենք 1.7 աղյուսակը:

Աղյուսակ 1.7

Սերմերի բաշխման տեսական և փորձնական ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքները

Միջակայքի սահմանները	$t_i = \frac{X_i^{\text{վ}} - \overline{X}}{\sigma}$	$\frac{1}{2}\phi(t)$	$F_T(X)_i$	W_n	D
4…6	-1,418	-0,422	0,078	0,06	0,018
6…8	-0,868	-0,308	0,192	0,22	0,028
8…10	-0,319	-0,126	0,374	0,40	0,026
10…12	-0,231	0,091	0,591	0,62	0,029
12…14	0,780	0,283	0,783	0,78	0,003
14…16	1,330	0,408	0,908	0,90	0,008
16…18	1,879	0,470	0,970	0,94	0,030
18…20	2,429	0,492	0,992	1,00	0,008

$\frac{1}{2}\phi(t)$ - ի արժեքները ընտրվել են հավելվածի 1.4 աղյուսակից.

$$D_{max} = 0,03,$$

$$\lambda = D_{max} \cdot \sqrt{N} = 0,03\sqrt{50} = 0,212:$$

Հավելվածի 1.7 աղյուսակից $\lambda = 0,212$ դեպքում $p(\lambda) = 1,0$, այսինքն փորձնական բաշխման և տեսական բաշխման համապատասխանությունը հավասար է 100%-ի, ուրեմն տեսական բաշխման օրենքը ճիշտ է ընտրված: Կառուցենք փորձնական և տեսական ինտեգրալային ֆունկցիայի գրաֆիկները:

Սերմերի բաշխման համաչափության վստահելի սահմանները.

$$X_\alpha^{\text{ս}} = \overline{X} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

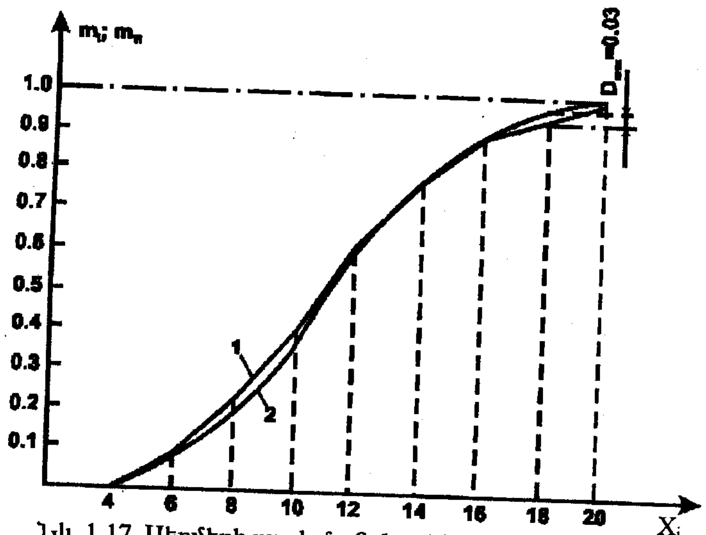
$$X_\alpha^{\text{վ}} = \overline{X} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}}:$$

Հավելվածի 1.4 աղյուսակից ընտրում ենք t-ի արժեքը և ստանում ենք՝

$$X_\alpha^{\text{ս}} = 11,16 - 1,68\frac{3,64}{\sqrt{50}} = 11,16 - 0,8 = 10,31,$$

$$X_\alpha^{\text{վ}} = 11,16 + 1,68\frac{3,64}{\sqrt{50}} = 11,16 + 0,8 = 12,01,$$

$$h = X_\alpha^{\text{վ}} - X_\alpha^{\text{ս}} = 12,01 - 10,31 = 1,7:$$



Նկ. 1.17. Սերմերի բաշխման փորձնական և տեսական ինտեգրալային ֆունկցիաների գրաֆիկները.
1. փորձնական, 2- տեսական:

2. Գիտափորձերի պլանավորման տեսությունը

2.1 Հիմնական սահմանումներ

2.1.1. Պրակտիկան ճշմարտության չափանիշ

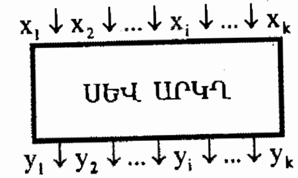
Գիտափորձերը կարևոր տեղ են գրավում գիտության մեջ և լինում են ֆիզիկական, հոգեբանական, մոդելային և այլն: Գիտափորձերը կարելի է կատարել ըստ մոդելի, եթե, իհարկե, վերջինս բավականին ճիշտ է ներկայացնում ուսումնասիրվող օբյեկտը: Ինչպես նշում է Ջոն Բերլոնը, ապրիորի (քառսային) ձևով անցկացվող գիտափորձերը գիտական հետազոտությունների ՕԳԳ-ն նվազեցնում են մինչև 0,02:

Սովորաբար, գիտափորձերը կատարվում են հիմնական երկու խնդիրներից մեկի լուծման համար: Առաջին խնդիրը անվանում են արտակարգ, գիտափորձեր, որոնք դրվում են օպտիմալացման խնդրի լուծման նպատակով: Նման խնդրի էությունը ընտրված պարամետրերի օպտիմալ արժեքների ստացումն ապահովող գործընթացի պայմանների որոնումն է: Արտակարգ խնդիրների հատկանիշներ են համարվում որոշակի ֆունկցիայի էքստրեմումի որոնման պահանջները: Երկրորդ խնդիրը անվանում են ինտերպոլացիոն: Խնդրի էությունն այս է. կախված ուսումնասիրվող պարամետրերի մի շարք գործոններից, արժեքների կանխագուշակման համար ինտերպոլացիոն բանաձև են կառուցում: Արտակարգ և ինտերպոլացիոն խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ է ունենալ ուսումնասիրվող օբյեկտի մաթեմատիկական մոդելը: Օբյեկտի մոդելը ստանում են՝ մշակելով փորձերի արդյունքները: Բազմագործոն գործընթացի հետազոտման ժամանակ մաթեմատիկական մոդելի բոլոր հնարավոր փորձերի իրականացումը հսկայական ծավալի աշխատանք է, քանի որ անհրաժեշտ փորձերի քանակը մեծ է: Գիտափորձերի պլանավորման խնդիրը անհրաժեշտ նվազագույն քանակով փորձերի կատարումն է, նրանց անցկացման պայմանների բացահայտումն է, ինչպես նաև փորձերի արդյունքների մաթեմատիկական մշակման մեթոդների ընտրությունը և այլ որոշումների ընդունումը:

Արտակարգ գիտափորձերը պլանավորելիս հետազոտման նպատակը պետք է հստակ ձևակերպված լինի և ունենա քանակական գնահատականներ: Գիտափորձերի պլանավորման խնդիրների լուծման ժամանակ անհրաժեշտ է ունենալ հատուկ ալգորիթմ-կանոն, համաձայն որի գործընթացը բնութագրող բոլոր փոփոխականները տարափոխվում են միաժամանակ: Օպտիմալացման խնդրի էությունը դրված նպատակին կարճ ճանապարհով հասնելն է: Խնդրի ճիշտ դրվածքը հետազոտողից պահանջում է ոչ միայն գործընթացի էության լավ պատկերացում, այլև գիտափորձերի մաթեմատիկական տեսության խոր իմացություն, իսկ հաճախ էլ՝ անսովոր, ոչ ստանդարտ իրավիճակներում ստեղծագործական մոտեցում: Ստորև բերվում է խնդրի դրվածքը կազմող փուլերի օրինակելի ցանկը:

1. Գործընթացի և նրա տեխնոլոգիայի ուսումնասիրում (գրականության վերլուծություն, ծանոթություն գործընթացի չափիչ սարքավորումների և այլ անհրաժեշտ գործիքների հետ):
2. Գործընթացի տեխնոլոգիական սխեմաների կազմում: Ուսումնասիրվող գործընթացը հաճախ ներառում է մի քանի հաջորդական օղակներ, որոնց համար ճշտվում են մուտքի և ելքի մեծությունները:
3. Օպտիմալացման ենթակա օղակի առանձնացումը: Անհրաժեշտ է հաշվի առնել երկու և ավելի օղակները մեկ խնդրի մեջ միավորելու հնարավորությունը:
4. Օպտիմալացման ենթակա գործընթացի սխեմայի կազմում «սև արկղի» տեսքով, սահմանելով օպտիմալացման պարամետրերը, չկարգավորվող գործոնները, կարգավորվող գործոնները, ճշտելով նաև բոլոր փոփոխականների չափման միավորները:
5. Օպտիմալացման պարամետրերի ուսումնասիրում: Եթե այդպիսիները շատ են, ցանկալի է դրանք կրճատել մինչև նվազագույն քանակի, թողնելով առավել տեղեկատուները: Այս նպատակի համար կարելի է ուսումնասիրել պարամետրերի միջև եղած համահարաբերակցական կապերը, արտաքսելով նրանք, որոնք ուժեղ հարաբերակցվում են ուրիշների հետ, քիչ իմաստավոր են, կամ նրանց որոշման ճշտությունը փոքր է: Կրճատումից հետո, եթե մնում են օպտիմալացման երկու և ավելի պարամետրեր, անհրաժեշտ է որոշել ինչպես իրականացնել օպտիմալացումը.
   - ղեկավարվելով օպտիմալացման գլխավոր պարամետրով, սահմանափակումներ դնել մյուսների վրա,
   - օպտիմալացման բոլոր պարամետրերը միավորել օգտակարության ընդհանրացված ֆունկցիայի մեջ և օպտիմալացնել այն:
6. Չկարգավորվող գործոնների մանրակրկիտ վերլուծություն: Անհրաժեշտ է ձգտել կրճատելու այդ գործոնները մինչև նվազագույն քանակի: Օգտակար է հիշել նաև հետևյալ հնարավորությունների մասին՝ արձանագրել գիտափորձերի անցկացման մի քանի պայմաններ, յուրաքանչյուր չկարգավորվող գործոնի մի քանի աստիճանավորումների համար բաժանել տարափոխման միջակայքերը և այդ աստիճանավորումների բոլոր հնարավոր զուգադրության համար լուծել առանձին խնդիրներ:
   - Եթե չկարգավորվող x գործոնի էությունը համընկնում է օպտիմալացման y պարամետրի հետ (օրինակ՝ օբյեկտի խոնավությունը չորացումից առաջ և հետո), ապա հաճախ x գործոնից կարելի է ձերբազատվել փոխարինելով y պարամետրը y - x կամ y/x մեծություններով, ելնելով այն հանգամանքից, թե փոփոխականի ինչպիսի՞ փոփոխություններն են կարևոր գործընթացի իրականացման համար:
7. Կարգավորվող գործոնների վերլուծություն: Կարգավորվող գործոնների համատեղություն և անկախություն, ինչպես նաև նրանց կարգավորման աստիճանի ստուգում:
8. «Աղմուկի» մակարդակի գնահատական: Գիտափորձերի իրականացման ժամանակ հաշվի առնել այդ մակարդակը:
9. Փորձի բովանդակության որոշում: Փորձերի տևողության շարունակության և ստացված արժեքների գնահատում:
10. Գիտափորձերի պլանավորման մեթոդի և սխեմայի կամ օպտիմալացման մեկ այլ մեթոդի ընտրություն:

Գիտափորձերի պլանավորման տեսության մեջ հաջորդ կարևոր սահմանումը «հետազոտման» օբյեկտն է: Այդ նպատակի համար օգտագործում են կիբերնետիկական համակարգ (նկ. 2.1), որը հաճախ անվանում են «Սև արկղ»:



Նկ. 2.1. Սև արկղի սխեման:

y_i -ն անվանում են հետազոտման նպատակ կամ օպտիմալացման պարամետր կամ էլ նպատակային ֆունկցիա, «սև արկղի» ելք և այլն: Գիտափորձերի կատարման համար անհրաժեշտ է հնարավորություն ունենալ ներգործել «սև արկղի» վարքի վրա:

Ներգործության բոլոր եղանակները (x_i) անվանում են գործոններ կամ «սև արկղի» մուտք:

$x_i(i=1,2,...,m)$ գործոնները պետք է լինեն կառավարելի, այսինքն ոչ պատահական և միմյանցից անկախ այնպես, որ փորձարարը կարողանա կարգավորել գործընթացը:

Բացի կարգավորվող գործոններից, «սև արկղի» վրա ներգործում են նաև մի քանի պատահական $W_k(k=1,2,...,q)$ մեծություններ, որոնք կառավարելի են և համակարգում աղմուկ են առաջացնում: Դրանք կոչվում են գրգռող գործոններ:

Օպտիմալացման y_i պարամետրի և x_i գործոնների միջև կապի հավասարումը ունի այսպիսի տեսք և անվանվում է մաթեմատիկական մոդել.

$$y = \varphi(x_1, x_2, ... x_i): \qquad (2.1.)$$

Այսպիսի ֆունկցիան կոչվում է նաև արձագանքների ֆունկցիա, իսկ դրանց համապատասխան մակերևույթները՝ արձագանքների մակերևույթ:

Գիտափորձերում յուրաքանչյուր x_i գործոն կարող է ունենալ որոշակի քանակի ընդհատուն մակարդակ:

Ուսումնասիրվող գործընթացի տարբեր քանակի իրավիճակները որոշվում են p^k արտահայտությամբ, որտեղ k-ն գործոնների քանակն է, իսկ p-ն՝ գործոնների մակարդակների քանակը (եթե այն բոլոր գործոնների համար միատեսակ է):

Գիտափորձերի պլանավորումը ենթադրում է գործընթացի վրա ակտիվ միջամտություն, մակարդակների քանակի ընտրության հնարավորություն: Այդպիսի գիտափորձը անվանում են ակտիվ, իսկ օբյեկտը՝ կառավարելի: Հետազոտման ծավալի նկատմամբ երկրորդ պահանջը վերարտադրելիությունն է: Դա նշանակում է, որ ժամանակի տարբեր միջակայքերում նույն տարբերակի փորձի կրկնության դեպքում պետք է ստացվեն վիճակագրական տեսակետից ուսումնասիրվող պարամետրերի միատեսակ արժեքներ: Ստացված արդյունքների վերարտադրելիության վրա ուժեղ ազդեցություն կարող են ունենալ չկարգավորվող գործոնները: Վերարտադրելիության ստուգման համար գործոնները որոշվում են մի քանի մակարդակներով, և փորձերը կրկնվում են: Այդ արժեքների ցրվածությունը կբնութագրի արդյունքների վերարտադրելիության աստիճանը: Եթե այն չի գերազանցում մի քանի նախապես տրված մեծությունները (գիտափորձերի ճշտության նկատմամբ մեր պահանջները), ապա օբյեկտը բավարարում է վերարտադրելիության արդյունքներին ներկայացվող պահանջներին:

Եթե վերարտադրելիության պահանջները չեն կատարվում, իսկ դա պրակտիկայում հաճախ է պատահում, ապա անհրաժեշտություն է առաջանում դիմել ակտիվ-պասիվ գիտափորձերին: Սովորաբար, երկրագործական մեխանիկայում այդպիսի օբյեկտներ չկան:

Արտակարգ գիտափորձերի պլանավորումը օպտիմալ պայմանների որոնման համար անհրաժեշտ նվազագույն քանակի փորձերի անցկացման և պայմանների ընտրության եղանակն է:

Որոշակի գիտական խնդիրների լուծման համար հաճախ կիրառվում է դետերմինացված մոտեցում: Նման դեպքերում երևույթի մեխանիզմի մանրազնին ուսումնասիրման հիման վրա օբյեկտի մաթեմատիկական մոդելը կազմում են դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի տեսքով: Ոչ մի դեպքում դետերմինացված և վիճակագրական մոտեցումները չպետք է միմյանց հակասեն, այլ, ընդհակառակն, դրանք ճշտորեն պետք է լրացնեն միմյանց:

2.1.2. Օպտիմալացման պարամետրերը և նրա տեսակները

Իրական պայմաններում օբյեկտը բնութագրվում է պարամետրերի ամբողջությամբ՝ տնտեսական, տեխնոլոգիական, տեխնիկական և այլն: Շարժը դեպի օպտիմալը հնարավոր է, եթե ընտրված է մեկ օպտիմալացման պարամետր, իսկ մնացած պարամետրերը հանդես են գալիս սահմանափակողների դերում: Մյուս ճանապարհը որպես բազմաթիվ ելքերի ֆունկցիա օպտիմալացման ընդհանրացված պարամետրի որոշումն է:

Օպտիմալացման պարամետրերին ներկայացվող պահանջները: Օպտիմալացման պարամետրերը հատկանիշներ են, ըստ որոնց օպտիմալացվում են գործընթացները: Դրանք պետք է լինեն քանակական և տրված լինեն թվերով:

Այն բազմաթիվ արժեքները, որոնք կարող է ընդունել օպտիմալացման պարամետրը, կոչվում է նրա որոշման տիրույթ: Նրանք կարող են լինել դիսկրետ և անընդմեջ: Եթե օպտիմալացման պարամետրը քանակապես չի չափվում, ապա կիրառում են ռանգավորման եղանակը (բալային մոտեցում՝ այո, ոչ, լավ, վատ):

Ռանգային պարամետրն ունի որոշման դիսկրետ (սահմանափակ) տիրույթ: Ռանգը օպտիմալացման պարամետրի պատահական բնույթի քանակական գնահատականն է: Օպտիմալացման պարամետրը պետք է արտահայտվի մեկ թվով, ըստ վիճակագրական իմաստի լինի միարժեք, արդյունավետ և բազմակողմանի բնութագրի օբյեկտը: Օպտիմալացման պարամետրի բազմակողմանիության տակ պետք է հասկանալ օբյեկտի համակողմանի բնութագրման հատկությունը: Բազմակողմանիության հատկություն ունեն միայն ընդհանրացված պարամետրերը: Օպտիմալացման առավել ամբողջական պարամետրը S էնտրոպիական ֆունկցիան է.

$$S = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \log C_{ij}, \qquad (2.2.)$$

որտեղ՝ C_{ij} -ն օրինակ հողի i-րդ խառնուրդի խտությունն է (նրա m թվով փորձերի դեպքում) i-րդ տեղամասում (n թվով):

Ցանկալի է, որ օպտիմալացման պարամետրը ֆիզիկական իմաստ ունենա, լինի պարզ և հեշտ հաշվարկելի: Ֆիզիկական իմաստի պահանջը կապված է փորձերի արդյունքների հետագա մեկնաբանման հետ:

Բացի վերը նշված պահանջներից և ցանկություններից, օպտիմալացման պարամետր ընտրելիս անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ օպտիմալացման պարամետրը որոշակի ազդեցություն է թողնում հետազոտվող օբյեկտի մաթեմատիկական մոդելի վրա:

<u>Մի քանի ելքերով պարամետրերի խնդիրների մասին:</u> Պրակտիկայում հաճախ անհրաժեշտ է լինում հաշվի առնել մի քանի ելքային պարամետրեր: Մաթեմատիկական մոդելները կարելի է կառուցել յուրաքանչյուր պարամետրի համար, սակայն միաժամանակ մի քանի ֆունկցիաներ օպտիմալացնել հնարավոր չէ: Հետազոտման նպատակի տեսանկյունից օպտիմալացվում է ամենակարևոր ֆունկցիաներից մեկը, իսկ մնացածները ծառայում են որպես սահմանափակիչներ:

Ելքային պարամետրերի քանակի կրճատման նպատակով կատարում են հարաբերակցական վերլուծություն: Այս դեպքում պարամետրերի բոլոր հնարավոր զույգերի միջև կապի բնութագիրը ճշտելու համար հաշվում են զույգային հարաբերակցության գործակիցը.

$$r_{y_1y_2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(y_{1u}-\bar{y}_1\right)\left(y_{2u}-\bar{y}_2\right)}{\sqrt{\sum\limits_{u=1}^{N}\left(y_{1u}-\bar{y}_1\right)^2\left(y_{2u}-\bar{y}_2\right)^2}}, \qquad (2.3.)$$

$$y_1=\sum_{u=1}^{N}y_{1u}\Big/N \text{ և } y_2=\sum_{u=1}^{N}y_{2u}\Big/N,$$

որտեղ՝ N-ը փորձերի քանակն է, y_1 և y_2-ը պարամետրերն են, $\bar{y}_1$ և $\bar{y}_2$-ը՝ դրանց մաթեմատիկական սպասումները , u-ն փորձի ընթացիկ համարն է:

r - ը կարող է ընդունել –1 - ից մինչև +1. եթե մեկ պարամետրի արժեքի մեծացման հետ աճում է մյուսը, ապա գործակցի արժեքը դրական է, իսկ եթե նվազում է բացասական, եթե $r\to1$, ապա y_1 և y_2 - ի միջև գոյություն ունի գծային կապ և կարելի է դիտարկել դրանցից մեկը:

Պարամետրերի միջև գծային կախվածության և նրանց նորմալ բաշխման դեպքում զույգ հարաբերակցության գործակիցն ունի հատուկ մաթեմատաիկական իմաստ:

r - մեծության ստուգման համար անհրաժեշտ է այդ արժեքը համեմատել նրա աղյուսակային (կրիտիկական) r արժեքների հետ (աղյուսակ 2.1): Աղյուսակից օգտվելու համար անհրաժեշտ է իմանալ նրա ազատության աստիճանների թիվը՝ $f=N-2$ և ընտրել օրինակ $\alpha=0{,}05$ նշանակալիության որոշակի մակարդակ: α -ի այդպիսի արժեքը կոչվում է նաև համարձակության մակարդակ, որը համապատասխանում է $p=1-\alpha=0{,}95$ կամ հիպոթեզի ստուգման 95% ստույգ պատասխանի հավանականությունը: Դա նշանակում է, որ դեպքերի 5% -ում կարող է սխալ կատարվել: Սովորաբար, բավարար է համարձակության 5% -ի մակարդակը, բայց և

կարելի է վերցնել է՛լ ավելի պակաս. 0,05: Եթե փորձնականորեն պարզվել է, որ r - ի մեծությունը փոքր է կրիտիկականից, ապա պարամետրերի միջև կապը ոչ գծային է:

Աղյուսակ 2.1

Զույգ հարաբերակցության գործակիցների կրիտիկական արժեքները $\alpha=0{,}05$ դեպքում

Ազատության աստիճանների թիվը՝ j	r-ի կրիտիկական արժեքները	Ազատության աստիճանների թիվը՝ j	r-ի կրիտիկական արժեքները	Ազատության աստիճանների թիվը՝ j	r-ի կրիտիկական արժեքները
1	0,997	9	0,602	17	0,456
2	0,990	10	0,576	18	0,444
3	0,878	11	0,553	19	0,433
4	0,811	12	0,532	20	0,423
5	0,754	13	0,514	21	0,349
6	0,707	14	0,497	22	0,273
7	0,666	15	0,482	23	0,217
8	0,632	16	0,468	24	0,195

$r\to1$ դեպքում դիտարկումից կարելի է հանել y_1 - ը կամ y_2 - ը, այն, որը դժվար է չափել:

Գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ ցանկալի է չափել բոլոր պարամետրերը, գնահատելով նրանց միջև r - ը և կառուցել մոդելը (հնարավոր նվազագույն թվով փորձերի համար կամ օգտվել ընդհանրացված պարամետրերից):Լինում են դեպքեր, երբ անհրաժեշտ է դիտարկել հարաբերակցական պարամետրերը:

2.1.3. Օպտիմալացման ընդհանրացված պարամետրերը

Յուրաքանչյուր արձագանք ունի իր չափողականությունը: Որպեսզի դրանք միավորել անհրաժեշտ է յուրաքանչյուրի համար մշակել չափազուրկ սանդղակ: Սանդղակը միավորող բոլոր արձագանքների համար այն պետք է լինի միատեսակ, որը նրանց դարձնում է միմյանց համեմատելի: Յուրաքանչյուր արձագանքի չափազուրկ սանդղակի ընտրումից հետո անհրաժեշտ է նաև ընտրել համակցման կանոնները:

Ընդունենք ուսումնասիրվող օբյեկտը բնութագրվում է n մասնակի արձագանքներով՝ $y_u(u=1,2,\ldots,n)$, որոնցից յուրաքանչյուրը չափվել է N փորձերի ընթացքում և u-րդ արձագանքի i-րդ փորձում ($i=1,2,\ldots,N$) արժեքը հավասար է y_{ui} - ի: Յուրաքանչյուր y_u արձագանք ունի իր ֆիզիկական իմաստը և հաճախ էլ տարբեր չափողականություն: Օրինակ, ընդունենք, որ 0 -ն խոտանն է, 1-ը՝ պիտանի արտադրանքը: y_u -ն ձևափոխում ենք ըստ ստանդարտ անալոգ-սանդղակի, որն ունի միայն երկու արժեք՝ 0- խոտան, 1- պիտանի: Ձևափոխված y_u արժեքները նշանակում ենք α_{ui} - ով:

Ընդունվում է նաև, որ ընդհանրացված արձագանքը պետք է ունենա 0 կամ 1 արժեքներից մեկը: Փորձի ժամանակ եթե գոնե մեկ α_{ui} արձագանք հավասար է 0-ի, ապա ընդհանրացված արձագանքը նույնպես հավասար է զրոյի.

$$\bar{y}_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} \alpha_{ui}}\ , \tag{2.4.}$$

որտեղ՝ $\bar{y}_i$ -ն ընդհանրացված արձագանքն է i-րդ փորձում, $\prod_{u=1}^{n}$ -ն մասնակի ձևափոխված արձագանքների $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$ արտադրյալն է:

<u>*Օրինակ 1.*</u> Հերկի ագրեգատի աշխատանքը գնահատվում է (ենթադրենք) երեք ելքային արձագանք-պարամետրերով՝ y_1 - հողի փշրման աստիճան, %-ներով, y_2 - հողի փուխփուխություն, սմ-ով, y_3 - քարշային դիմադրությունը կգ ուժ: i-րդ փորձի դեպքում տրված են արձագանքների դրական գնահատման հետևյալ սահմանները՝ $y_{1i} \geq 50\%, y_{2i} \geq 1{,}5$սմ$, y_{3i} \leq 1000$ կգ ուժ: Այսպիսով ստանում ենք.

$$\alpha_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } y_{1i} > 50 \\ 0, & \text{եթե } y_{1i} \leq 50, \end{cases}$$

$$\alpha_{2i} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } y_{2i} > 1{,}5 \\ 0, & \text{եթե } y_{2i} \leq 1{,}5, \end{cases}$$

$$\alpha_{3i} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } y_{3i} > 1000 \\ 0, & \text{եթե } y_{3i} \leq 1000 : \end{cases}$$

Բերենք երկու փորձերի տվյալները i=1, 2, որոնց դեպքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Փորձի համարը	Մասնակի արձագանքներ			Ձևափոխված մասնակի արձագանքներ			Ընդհանրացված արձագանքներ
	y_1	y_2	y_3	α_1	α_2	α_3	$\bar{y}$
1	55	2,0	500	1	1	1	$\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$
2	47	1,6	600	0	1	1	$\sqrt[3]{0 \cdot 1 \cdot 1} = 0$

Ընդհանրացված արձագանքների ստացման այն դեպքերում, երբ յուրաքանչյուր մասնակի արձագանքի համար հայտնի է «իդեալ»-ը, որին անհրաժեշտ է ձգտել, գոյություն ունեն «դեպի իդեալին մոտ» չափագրման բազմաթիվ եղանակներ: Չափագրել նշանակում է տալ մեզ հետաքրքրող բազմությունից օբյեկտների ցանկացած զույգի միջև եղած հեռավորության կանոնը:

u-րդ արձագանքի իդեալական մեծությունը նշանակելով y_{u0} - ով, $y_{ui} - y_{u0}$ -ն կարելի է դիտել իդեալին մոտ լինելու չափանիշ: Քանի որ տարբեր արձագանքներ կարող են ունենալ տարբեր չափողականություն և նշաններ (±), որը որոշակի դժվարություններ է ստեղծում ընդհանրացված արձագանքի կառուցման ժամանակ, այս դեպքում ընդունելի է հետևյալ արտահայտությունը.

$$\bar{y}_i = \sum_{u=1}^{n} \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2 : \tag{2.5.}$$

Եթե որոշ փորձերի դեպքում բոլոր մասնակի արձագանքները համընկնում են իդեալականի հետ, ապա y - ը ստացվում է զրոյին հավասար: Որքան $\bar{y}_i$ - ի արժեքը մոտ լինի զրոյին, այնքան լավ: Այդ արտահայտության թերությունն այն է, որ բոլոր մասնակի արձագանքները մտնում են ընդհանրացված արձագանքի մեջ հավասար պայմաններով: Այս թերությունը վերացվում է, երբ (2.5) արտահայտության մեջ մտցվում է a_u - ին հավասար որոշակի մեծություն.

$$\bar{y}_i = \sum_{u=1}^{n} a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2 , \tag{2.6.}$$

ընդ որում՝ $\sum_{u=1}^{n} a_u = 1$ և $a_u > 0$:

2.1.4. Ցանկալիության սանդղակ

Ընդհանրացված ածագանքի կառուցման ամենահարմար եղանակներից մեկը Հարինգտոնի ցանկալիության ընդհանրացված ֆունկցիան է, որի կառուցման հիմքում ընկած է մասնակի արձագանքների բնական արժեքների ցանկալիության կամ գերադասելիության չափազուրկ սանդղակի ձևափոխման գաղափարը: Այդ սանդղակը պատկանում է հոգեբանաֆիզիկական սանդղակների դասին, որի նշանակությունը ֆիզիկական և հոգեբանական պարամետրերի միջև համապատասխանության հաստատումն է: Այստեղ, հոգեբանական պարամետրերի տակ հասկացվում է ցանկալիության այս կամ այն արձագանքի արժեքների փորձարարի սուբյեկտիվ գնահատականը, իսկ ֆիզիկական պարամետրերի տակ՝ հետազոտվող օբյեկտի գործունեությունը բնութագրող բոլոր հավանական արձագանքները:

Ցանկալիության սանդղակ ստանալու համար հարմար է օգտվել փորձնական և թվային (հոգեբանական) համակարգերի միջև հարաբերությունների համապատասխանության պատրաստի աղյուսակներից:

Աղյուսակ 2.2

Ցանկալիության սանդղակի վրա ստանդարտ նշումների աղյուսակ

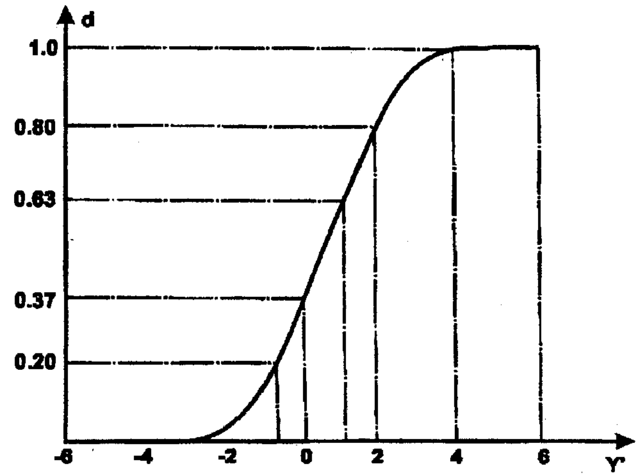
Ցանկալիություն	Նշումներ ցանկալիության սանդղակին
Շատ լավ	1,00 ... 0,80
Լավ	0,80 ... 0,63
Բավարար	0,63 ... 0,37
Վատ	0,37 ... 0,20
Շատ վատ	0,20 ...0,00

Ցանկալիության չափազուրկ սանդղակի ձևափոխված մասնակի արձագանքների արժեքները արտահայտվում են $d_u\left(u = 1,2,...,n\right)$ -ի միջոցով և անվանում մասնակի ցանկալիություն (desirable - *ֆրանսերեն ցանկալիություն*):

Ցանկալիության սանդղակն ունի 0-ից մինչև 1 միջակայք: Պարզ է որ $1 \geq d_u \geq 0$ սահմաններում 0,63 և 0,37 մեծությունների ընտրությունը բացատրվում է հաշվարկման հարմարությամբ. $0{,}63 \approx \left(1-\frac{1}{e}\right)$, $0{,}37 \approx \frac{1}{e}$: $d_u = 0{,}37$ արժեքը սովորաբար համապատասխանում է թույլատրելի արժեքների սահմանին:

Աղյուսակում թվերը համապատասխանում են տրված հավասարման $d = e^{-e^{-y}}$ ցանկալիության ֆունկցիայի մի քանի բնութագրիչ կետերին:

Կոորդինատային առանցքների վրա տեղադրում են ցանկալիության $d(0...1)$ և y արձագանքների արժեքները պայմանական մասշտաբներով: Հաշվարկի սկզբում „0'' - ն աբսցիսների առանցքի վրա ընտրվում է „y'' ցանկալիության համապատասխան $d = 0{,}37$ արժեքը: Տվյալ կետի ընտրությունը կապված է կորի շրջման կետի հետ (նկ.22): Նույնը կարելի է ասել նաև $d = 0{,}63$ - ին համապատասխան կետի մասին: Այս կորի ընտրությունը չի համարվում միակ հնարավորը: Հետաքրքիր է, որ կորի «զգայնությունը» այդ հատվածում բավականին ցածր է քան միջին գոտում:



Նկ. 2.2. Ցանկալիության ֆունկցիա:

Ձորյին հարաբերաբար y' առանցքի վրա տեղադրված են արձագանքների կոդավորված արժեքները (-6...+6):

Այս կորից օգտվելիս գերիշխում են սուբյեկտիվ գործոնները: Փորձարարը արձագանքների բացարձակ մեծությունները կարող է նշել ըստ իր ցանկության. օրինակ՝ հողի 50% փշրումը կարող է համարվել «գերազանց» և նշվի +1 կետի մոտ և, ընդհակառակն, «վատ» 45%-ից ցածր դեպքում, համապատասխանեցնելով 2.2 աղյուսակի տվյալների հետ: Սովորաբար, ցանկալիության կորը օգտագործում են որպես նոմոգրամ, քանի որ այն հեշտ է ընկալվում: Պրակտիկայում հաճախ այս հասարակ ձևը լրիվ բավարար է, սակայն հաճախ էլ ցանկալիության գրաֆիկական որոշումը անբավարար է, քանի որ նրա ճշտությունը կախված է y սանդղակի դիրքից: Այդպիսի դեպքերում անհրաժեշտ է դիմել ցանկալիության որոշման անալիտիկ եղանակին:

<u>Մասնակի արձագանքների և արձագանքների մասնակի ֆունկցիաների ձևափոխումները:</u>

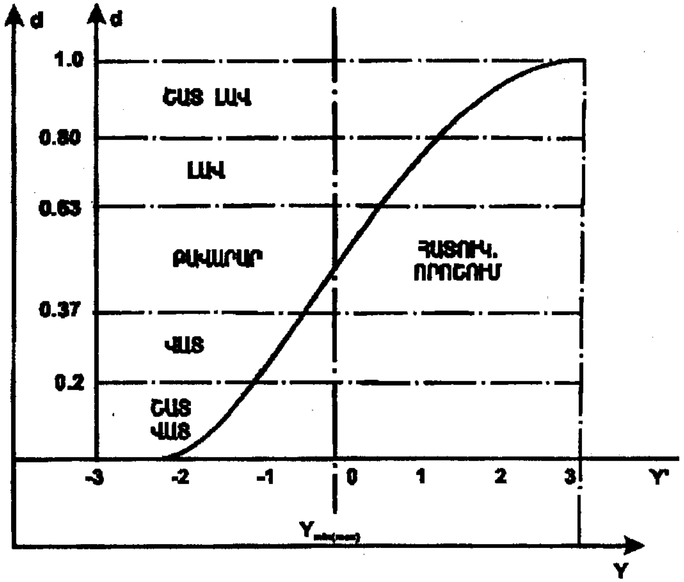
Մասնակի արձագանքների համար սահմանափակումները կարող են լինել միակողմանի ($y_u \leq y_{max}$ կամ $y_u \geq y_{min}$) և երկկողմանի ($y_{min} \leq y_u \leq y_{max}$),

$$\text{ուստի} \begin{Bmatrix} 0, \text{ եթե } y_u < y_{min} \\ 1, \text{ եթե } y_u \geq y_{min} \end{Bmatrix}:$$

Դասակարգումը կատարվել է ըստ y_{min} ներքին սահմանի (նկ. 2.3):

Նկար 2.3-ում ներկայացված է միակողմանի սահմանափակված հատկանիշների ցանկալիության ֆունկցիան: Միակողմանի սահմանափակումներին ենթակա հատկանիշների թվին են պատկանում նյութերի որակի բազմաթիվ բնութագրեր՝ ջերմակայունությունը, ամրությունը, հարվածային մածուցիկությունը, ցրտադիմացկունությունը, առաձգականության մոդուլը, հարաբերական երկարացումը և այլն: Այս բոլորի համար սահմանափակում կարող է հանդիսանալ $y_u \ge y_{min}$, կարելի է ներկայացնել նաև $y_u \le y_{min}$ միակողմանի սահմանափակված հատկանիշներ: Ցանկալիության ֆունկցիայի երկկողմանի սահմանափակումներով դեպքեր ավելի քիչ են հանդիպում, քան միակողմանի սահմանափակումներով դեպքերը, և նրանք արժեքների գնահատման տեսակետից ավելի բարդ են:

$$d_u = \begin{cases} 0 \text{ եթե } y_u < y_{min} \text{ եւ } y_u > y_{max} \\ 1 \text{ եթե } y_{min} \le y_u \le y_{max} \end{cases}$$

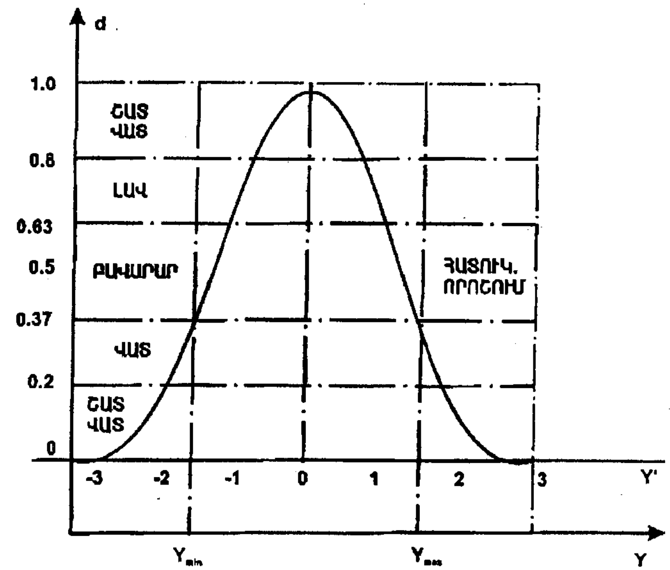


Նկ. 2.3 Միակողմանի սահմանափակված հատկությունների ցանկալիության ֆունկցիաները

2.1.5 Ցանկալիության ընդհանրացված ֆունկցիան

Եթե ընտրված են ցանկալիության սանդղակը և ցանկալիության մասնակի ֆունկցիայում ձևափոխման մասնակի արժեքները, կարելի է կառուցել ընդհանրացված ցուցանիշը՝ D: Ընդհանրացված ցուցանիշներին այդպիսի անվանում է տրվել Հարինգտոնի կողմից.

$$D = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} d_u} \; : \qquad (2.7.)$$



Նկ. 2.4 Երկկողմանի սահմանափակված հատկությունների ցանկալիության ֆունկցիաները:

Այստեղ ցանկալիության ընդհանրացված ֆունկցիան տրված է որպես մասնակի ցանկալիության միջին երկրաչափական: Եթե պարամետրի համալիրի մեջ մտնող թեկուզ և մեկ մասնակի արժեքը չի բավարարում ներկայացվող պահանջներին, ապա, որքան էլ լավ լինեն մյուս հատկանիշները, օբյեկտը չի կարելի ըստ նշանակության օգտագործել: Իրականում, եթե գոնե մեկ մասնակի ցանկալիությունը՝ $d_u = 0$, ապա ընդհանրացված ֆունկցիան՝ $D = 0$, մյուս կողմից՝ $D = 1$, եթե բոլոր $d_u = 1(u = 1,2...n)$ այսպես, եթե $d_1 d_2,...,d_n = 0,63$, ապա $D = 0,63$ և եթե $d_1 d_2,...,d_n = 0,37$, ապա $D = 0,37$ այլն:

Ցանկալիության ընդհանրացված ֆունկցիայի մեջ կարող են մտնել ամենաբազմազան մասնակի արձագանքներ՝ տեխնոլոգիական, տեխնիկա-տնտեսական, տնտեսական, էսթետիկական և այլն:

Այդ ֆունկցիան համարվում է հետազոտվող օբյեկտի միարժեք, ընդհանուր, քանակական և ունիվերսալ ցուցանիշ: Եվ եթե դրան էլ ավելացնենք այնպիսի հատկություններ, ինչպիսիք են նույնականությունը, արդյունավետությունը և վիճակագրական զգայականությունը, ապա պարզ է դառնում, որ այն կարելի է օգտագործել որպես օպտիմալացման չափանիշ:

2.2 Գործոններ

2.2.1. Գործոնների որոշումը

Հետազոտման օբյեկտի օպտիմալացման պարամետրերի ընտրումից հետո դիտարկենք ուսումնասիրվող գործընթացի վրա ազդող գործոնների համախումբը:

Գործոն է կոչվում օպտիմալացման պարամետրի վրա ազդող անկախ, փոփոխական մեծությունը:

Գործոնները չափվող մեծություններ են և համարվում են տրված, եթե անվանման հետ միասին նշված է նաև դրանց որոշման տիրույթը՝ բոլոր արժեքների համախումբը: Հասկանալի է, որ գործոնի արժեքների այն համախումբը, որը օգտագործվում է փորձերում համարվում է որոշման տիրույթը կազմող արժեքների բազմության ենթաբազմություն: Գործոնների որոշման տիրույթը կարող է լինել անընդմեջ և ընդհատուն: Մեր կողմից քննարկումներում ընտրվում են գործոնների ընդհատուն տիրույթներ:

Գործոնները բաժանվում են քանակական և որակական խմբերի: Գործոնը որակական է, եթե համեմատվում են երկու եղանակներ, երկու մեքենաներ, տեխնոլոգիաներ, որոնց գնահատման համար կազմվում են պայմանական սանդղակներ:

2.2.2. Գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ գործոններին ներկայացվող պահանջները

Առաջին հերթին գործոնները պետք է լինեն կառավարելի, այսինքն ընտրելով գործոնի անհրաժեշտ արժեք, այն ամբողջ փորձի ընթացքում կարելի է պահպանել հաստատուն: Սա էլ հենց «ակտիվ» գիտափորձերի իմաստն է: Օրինակ՝ արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանը անկառավարելի է, այդ պատճառով այն չի մտցվում գործոնների ցանկի մեջ: Գործոնի ճիշտ որոշման համար անհրաժեշտ է նշել գործողությունների այն հաջորդականությունը, որոնց միջոցով հաստատվում են նրա կոնկրետ արժեքները (մակարդակները): Գործոնի այսպիսի որոշումը կոչվում է գործառելի: Այսպես, եթե ինչ-որ մի սարքում ճնշումը գործոն է համարվում, ապա անհրաժեշտ է նշել, թե ո՞ր կետում և ի՞նչ սարքի միջոցով է այն չափվում: Գործառելիության որոշման հետ են կապված գործոնի չափողականության ընտրությունը և նրա գրանցման ճշտությունը: Գործոնները պետք է լինեն միարժեք: Եթե գործոնը բարդ է (կախված է այլ գործոններից), ապա անհրաժեշտ է այն ներկայացնել հասարակ, միարժեք գործոններով: Բարդ գործոնը ներկայացվում է կորերի տարբեր տարբերակներով և յուրաքանչյուր կոր դիտարկվում է առանձին, որպես գործոնի մակարդակ: Գործոնը պետք է լինի միարժեք և կառավարելի:

2.2.3. Գործոնների համախմբին ներկայացվող պահանջները

Գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ սովորաբար բոլոր գործոնները չափվում են միաժամանակ: Այդ տեսակետից շատ կարևոր է ճիշտ ձևակերպել գործոնների համախմբին ներկայացվող պահանջները: Առաջինը նրանց համատեղելիության պահանջն է, որը նշանակում է, որ դրանց բոլոր կոմբինացիաները պետք է լինեն իրագործելի և անվտանգ: Գործոնների անհամատեղելիությունը կարող է նկատվել նրանց որոշման տիրույթի սահմաններում, որից խուսափում են որոշման տիրույթը փոքրացնելով:

Շատ կարևոր է, որ գործոնները լինեն անկախ, այսինքն մյուս գործոնների մակարդակից անկախ, ցանկացած արժեքում հնարավոր լինի որոշել գործոնը:

Երկրորդ պահանջը գործոնների միջև համահարաբերակցության բացակայությունն է, սակայն դա չի բացառում գործոնների արժեքների միջև եղած կապը: Բավարար է որ կապը լինի ոչ գծային:

2.3. Մոդելի ընտրությունը

Մոդել ասելով հասկանում ենք արձագանքների ֆունկցիայի տեսքը:

$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ֆունկցիան գործոնների արձագանքների մոդելն է:

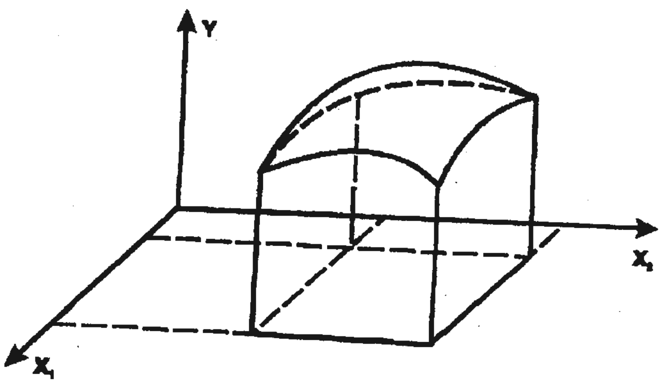
Ֆունկցիայի տեսքի ընտրությունից հետո մնում է այս հավասարման գործակիցների թվային արժեքների գնահատման համար պլանավորել և իրականացնել գիտափորձեր:

$y = \varphi(x_1, x_2)$ ֆունկցիայի երկրաչափական մոդելը ներկայացվում է արձագանքների մակերևույթով (նկ. 2.5):

Յուրաքանչյուր գործոն ունի նվազագույն և առավելագույն արժեք-
ներ, այդ տիրույթում գործոնը փոփոխվում է կամ անընդհատ, կամ ընդհա-
տուն կերպով: Գործոնների համատեղելիության դեպքում հարթության վրա
դրանց արժեքների սահմաններով կազմվում է որոշակի ուղղանկյուն, որի
ներսում ընկած կետերը համապատասխանում են «սև արկղի» պարունա-
կությանը:

Օպտիմալացման պարամետրի արժեքի գրանցման համար պա-
հանջվում է ևս մեկ կոորդինատական առանցք: Այս դեպքում արձագանքնե-
րի մակերեսը կունենա հետևյալ տեսքը (նկ. 2.5): Այն տարածքը, որտեղ կա-
ռուցվում են արձագանքների մակերևույթները կոչվում են գործոնային տի-
րույթներ: Գործոնային տիրույթի չափողականությունը կախված է գործոն-
ների քանակից: Երեքից ավելի գործոնների դեպքում արձագանքների մա-
կերևույթը դժվար է ցուցադրաբար ներկայացնել, անհրաժեշտ է բավարար-
վել միայն նրանց անալիտիկ արտահայտություններով:

Հատելով արձագանքների մակերևույթները հորիզոնական հարթու-
թյուններով (նկ. 2.5), ստանում ենք հավասար արձագանքների գծերը:



Նկ. 2.5. Արձագանքների մակերևույթը:

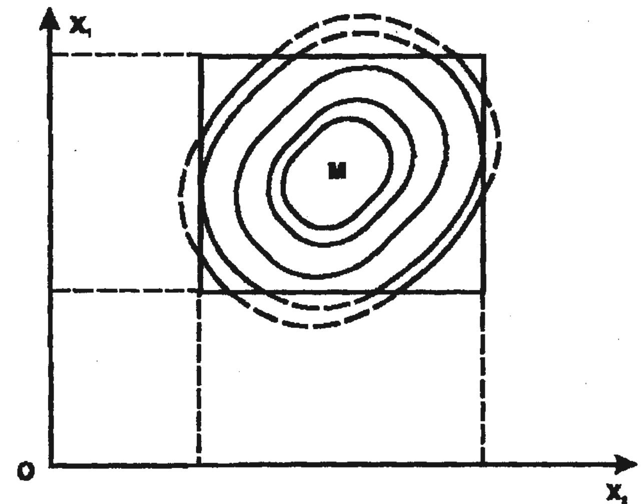
Գծագրի M կետը կլինի օպտիմալ, որն էլ հենց փնտրվում է:

Այժմ ինչպես կատարել փորձերը, որպեսզի նվազագույն ծախսերով գտնենք պարամետրի օպտիմումը:

Գոյություն ունեն օպտիմալացման մի քանի եղանակներ: Կատար-
վում է որոշակի թվերով իրավիճակների պատահական ընտրություն և
նրանցում որոշվում արձագանքները, հուսալով, որ օպտիմումը կգտնվի
նրանց մեջ կամ նրանց մոտիկ:

<u>Հաջորդ մեթոդ</u>. կազմվում է մաթեմատիկական մոդել և նրա օգնու-
թյամբ կանխագուշակվում արձագանքների արժեքները այն իրավիճակնե-

րում, որոնք փորձնականորեն չեն ուսումնասիրվել: Այսպիսի ստրատեգիան հանգեցնում է քայլային սկզբունքին:



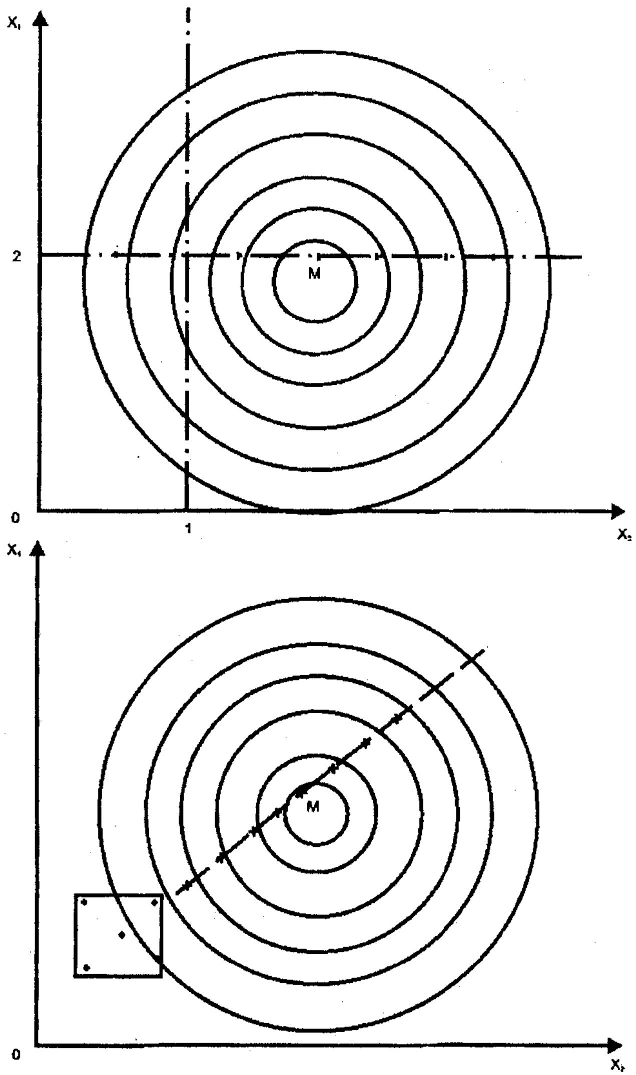
Նկ. 2.6 Հարթության վրա արձագանքների մակերևույթի հատույթների պրոյեկցիաները:

<u>Քայլային սկզբունքը</u>: Ընդունում են, որ արձագանքի մակերևույթը անընդմեջ է, հարթ և նրանում կա միայն մեկ օպտիմում:

Նման կանխադրույթները հնարավորություն են տալիս ուսումնասիրվող ֆունկցիան ներկայացնել գործոնային տիրույթի ցանկացած հնարավոր կետի մոտակայքում, աստիճանական շարքի տեսքով: Լինում են դեպքեր, երբ մակերևույթը ունի մի քանի օպտիմում, որոնք համարժեք չեն: Ընդունելով, որ կանխադրույթները իրագործվում են, խնդիրը լուծվում է հետևյալ կերպ: Իմանալով օպտիմալացման պարամետրի արժեքը գործոնային տիրույթի մի քանի հարևան կետերում, կարող ենք ենթադրել, թե ինչ արժեքներ կարելի է սպասել մյուս հարևան կետերում: Հետևաբար, կարելի է գտնել այնպիսի կետեր, որոնցում ապահովվում է պարամետրերի արժեքի առավելագույն աճ: Պարզ է, որ հաջորդ փորձերը պետք է կատարվեն այդ կետերի ուղղությամբ: Դրանից հետո, պարզելով նոր տվյալներ, փորձերը քայլ առ քայլ ճշտվում են այնքան ժամանակ, մինչև չի գտնվում օպտիմումը (նկ. 2.7)

Նկ. 2.7-ում պատկերված է նույն օպտիմումի որոնման երկու եղանակ: Խաչերով նշված են փորձի պայմանները: Առաջինը կոչվում է Գաուս-Զայդելի մեթոդ, երբ մեկ գործոնը թողնելով անփոփոխ, մյուսը հաջորդաբար փոփոխվում է: Այնուհետև գտնում և ֆիքսում են լավագույն արժեքը:

Երկրորդ տարբերակի ժամանակ սկզբում ուսումնասիրվում է մասնակի տիրույթը որոշվում է հարմար մի ուղղանկյուն, և փորձերը կատարվում են այդ ուղղությամբ: Քայլային մեթոդը առավել արդյունավետ է նկ. 2.6 բ-ում պատկերված տարբերակների դեպքում:



Նկ. 2.7. Օպտիմումի որոնման երկու եղանակ:

2.3.1. Մոդելի ընտրությունը առաջին փորձերի համար

Բազմազան մոդելներից մեկը ընտրելիս անհրաժեշտ է ճշտել մոդելին ներկայացվող պահանջները:

Ուսումնասիրվող մոդելի նկատմամբ գլխավոր պահանջը փորձերի հետագա ուղղվածության կանխագուշակման ունակությունն է: Գուշակման ճշտությունը բոլոր հնարավոր ուղղություններով պետք է լինի միատեսակ: Դա նշանակում է, որ մոդելի օգնությամբ արձագանքների արժեքների գուշակումները մի քանի ենթատիրույթներում չպետք է տարբերվեն նախապես տրված փաստացի մեծություններից:

Այս կամ այն նմանատիպ պահանջներին բավարարող մոդելը կոչվում է նույնական: Հետագայում մոդելի նույնականությունը պետք է ստուգել: Մոդելների ընտրության ժամանակ անհրաժեշտ է կանգ առնել հասարակի վրա: Այսպիսով երկու գործոնների դեպքում կարելի է ընտրել հետևյալ բազմանդամներից մեկը. զրոյական աստիճանի բազմանդամ՝ $y = b_0$, առաջին աստիճանի $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$, երկրորդ աստիճանի

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$, երրորդ աստիճանի՝

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{122}x_1x_2^2 + b_{111}x_1^3 +$

$+ b_{222}x_2^3$:

2.3.2. Բազմանդամ մոդելներ

Ընդունենք, որ անհայտ ֆունկցիան արտահայտված է բազմանդամով: Հարց է առաջանում. առաջին քայլով ի՞նչ աստիճանի բազմանդամ ընտրենք: Փորձերը կատարվում են բազմանդամի գործակիցների թվային արժեքների որոշման համար: Պետք է գտնել այնպիսի բազմանդամ, որը կպարունակի քիչ թվով գործակիցներ, սակայն կբավարարի մոդելներին ներկայացվող պահանջներին: Անհրաժեշտ է, որ մոդելը թույլ տա գտնելու օպտիմալացման պարամետրի ամենաարագ բարելավման ուղղությունները: Այսպիսի ուղին կոչվում է շարժում գրադիենտի ուղղությամբ: Գրադիենտի ուղի նշանակում է օպտիմալացման պարամետրը որոշել առավել կարճ ճանապարհով: Հաջորդ խնդիրն այն է, թե կարելի՞ է, արդյոք, այդ նպատակի համար օգտվել առաջին կարգի բազմանդամից: Այս տեսակետից անհրաժեշտ է գործոնային ոլորտում ենթատիրույթը ընտրել այնպես, որ գծային մոդելը լինի նույնական:

Գոյություն ունի ցանկացած կետի այնպիսի շրջակայք, որում գծային մոդելը նույնական է (նույնականությունը ստուգվում է փորձերի արդյունքներով): Նշանակում է, սկզբում ընտրելով կամայական ենթատիրույթ, գտնում են նրա պահանջվող չափերը և հետագայում շարժվում գրադիենտով:

Հաջորդ փուլում գծային մոդելը պետք է փնտրել ուրիշ ենթատիրույթում: Ցիկլը կրկնվում է այնքան, որ հերթական շարժումը գրադիենտով պարզ դարձնի պարամետրի օպտիմալ արժեքի տիրույթը: Նման տիրույթը կոչվում է «գրեթե անփոփոխ»: Այստեղ գծային մոդելը այլևս պետք չէ: Անհրաժեշտ է անցնել ավելի բարձր կարգի բազմանդամի:

Երբեմն պահանջվում է ինտերպոլյացիոն մոդելի կառուցում, երբ չի հետաքրքրում օպտիմումը: Պահանջվում է անհրաժեշտ ճշտությամբ գուշակել նախապես տրված մի քանի տիրույթների բոլոր կետերի արժեքները: Նույն կարգով աստիճանաբար ավելացնում են բազմանդամի կարգը այնքան, մինչև որ մոդելը դառնա նույնական:

2.4. Միագործոն գիտափորձեր

Միագործոն y = f(x) ֆունկցիայի կազմավորման և գիտափորձնական ուսումնասիրության նպատակով կատարվում են y մեծության բազմակի չափումներ x գործոնի տարբեր արժեքներին համապատասխան Ստացված արժեքները ներկայացնում են ինչպես աղյուսակի (աղ. 2.3), այնպես էլ գրաֆիկի (նկ. 2.8) տեսքով:

Պատահական սխալներից խուսափելու նպատակով ցանկալի է գիտափորձերի յուրաքանչյուր տարբերակ կրկնել առնվազն երկու անգամ: Կասկածելի շեղված արժեքների դեպքում անհրաժեշտ է կատարել ստուգում (§1.6):

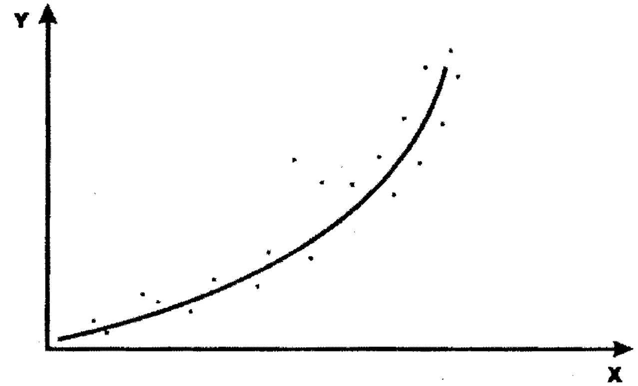
Առաջադրված խնդրի լուծման նպատակը մեկն է՝ հաստատել y = f(x) կախվածության անալիտիկ կապը:

Աղյուսակ 2.3

Եղակետային տվյալների աղյուսակ

x	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_n

Խնդրի իրացման դժվարությունն այն է, որ փորձնական արդյունքների (չափումների) պատահական սխալները (գիտափորձերում «աղմուկի» առկայությունը) անտրամաբանական են դարձնում այնպիսի բանաձևի ընտրությունը, որը ճշտությամբ կներկայացներ y-ի փորձնական տարբերակների բոլոր արժեքները: Այլ կերպ ասած՝ նման դեպքերում իրական ֆունկցիայի կորը չի անցնի բոլոր կետերով (նկ. 2.8), ուստի և հնարավորության սահմաններում պետք է այն շտկել: Իհարկե, «աղմուկի» շտկումը առավել ճշգրիտ և հուսալի կլինի, եթե իրականացված փորձերը բազմաքանակ լինեն:



Նկ. 2.8. y = f(x) ֆունկիոնալ կախվածության գրաֆիկ:

Այսպես, օրինակ՝ y = ax + b ֆունկցիայի համար բավարար է (x_1, y_1) և (x_2, y_2) երկու կետ, եթե այդ երկու կետերը ճշգրիտ հայտնի են: Միագործոն կախվածության ժամանակ կիրառվող մոդելների բազմազանությունը սովորաբար ստիպում է դիմելու ԷՀՄ-ի օգնությանը:

Որոնվող բանաձևը կարելի է ընտրել ներքոհիշյալ արտահայտություններից որևէ մեկով.

$$\left.\begin{aligned}
&y = a + bx;\ y = a + bx + cx^2;\ y = a + b\ln x;\\
&y = a + \frac{b}{x};\ y = ab^x;\ y = ax^b;\ y = ae^{\frac{b}{x}};\\
&y = a + bx + \frac{c}{x};\ y = \frac{ax}{x+b};\ y = \frac{1}{c + ab^x};\\
&y = ae^{bx} + c;\ y = a + b\sin(\omega x + \varphi)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.8.)$$

և այլն:

Այլ կերպ ասած՝ խնդրի լուծումը հանգեցվում է (2.8) արտահայտության a, b, c... պարամետրերի որոշմանը, այն դեպքերում, երբ տեսական ենթադրություններով կամ փորձնական տվյալներով (անալիտիկ ներկայացման պարզության նպատակով) նախապես հայտնի է բանաձևի տեսքը: Նշված ֆունկցիոնալ կախվածությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով:

$$y = f(x; a_0; a_1; ...; a_n) \qquad (2.9.)$$

Բերված $a_0, a_1, ..., a_n$ պարամետրերը ըստ ֆունկցիայի $y_1, y_2, ..., y_N$ փորձնական արժեքների ճիշտ որոշելը ոչ միշտ է հնարավոր, քանի որ վերջիններս կարող են ունենալ պատահական սխալներ: Այստեղ խոսքը միայն իրական պարամետրերի «բավականին լավ» գնահատականների ստացման մասին է:

Նվազագույն քառակուսիների մեթոդը հնարավորություն է տալիս ստանալ բոլոր $a_0, a_1, \ldots, a_n$ պարամետրերի չշեղված և հնարավոր գնահատականներ, ենթադրվում է, որ ֆունկցիայի $y_1, y_2, \ldots, y_N$ արժեքները չափվել են միմյանցից անկախ:

Ֆունկցիայի $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ արժեքները միևնույն ճշտությամբ չափելու դեպքում $a_0, a_1, \ldots, a_n$ պարամետրերը որոշվում են

$$S=\sum_{k=1}^{N}\left[y_k-f(x_k;a_0;a_1;\ldots;a_n)\right]^2 \qquad (2.10.)$$

պայմանից այնպես, որ S-ը ընդունի ամենափոքր արժեք:

Եթե չափումների արդյունքում ստացվել են տարբեր դիսպերսիաներ և հայտնի է առանձին չափումների դիսպերսիաների հարաբերությունը, ապա՝

$$S=\sum_{k=1}^{N}\left[y_k-f(x_k;a_0;a_1;\ldots;a_n)\right]^2\omega_k\,, \qquad (2.11.)$$

որտեղ՝ ω_k արտադրիչը հակադարձ համեմատական է դիսպերսիաներին:

$$\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_N=\frac{1}{\sigma_1^2}:\frac{1}{\sigma_2^2}:\ldots:\frac{1}{\sigma_N^2}: \qquad (2.12.)$$

$a_0; a_1; \ldots; a_n$ պարարեմետրերի այն արժեքները, որոնք ֆունկցիային տալիս են առավել փոքր արժեք՝ $S=S(a_0;a_1;\ldots;a_n)\to\min$, հանգեցվում են հավասարումների հետևյալ համակարգի.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=0;\frac{\partial S}{\partial a_1}=0;\ldots;\frac{\partial S}{\partial a_n}=0:$$

Գծային ֆունկցիայի դեպքում հավասարումների համակարգը նույնպես գծային է: Նվազագույն քառակուսիների մեթոդով գծային ֆունկցիայի պարարմետրերի որոնման ժամանակ նկատի ենք ունենում, որ այդ գիծն անցնում է $(\bar{x},\bar{y})$ կետով, որի կորդինատները համարվում են այդ կետերի կոորդինատների միջին արժեքը.

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{N}x_k\omega_k}{\sum_{k=1}^{N}\omega_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{N}y_k\omega_k}{\sum_{k=1}^{N}\omega_k}, \qquad (2.13.)$$

որտեղ՝ ω_k -ն չափումների կշիռն է:

Նման դեպքում որոնվող հավասարումը նպատակահարմար է գրել

$$y-\bar{y}=a(x-\bar{x})$$ տեսքով:

Այստեղից a պարամետրը որոշվում է

$$a=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{x^2-(\bar{x})^2} \text{ բանաձևով,} \qquad (2.14.)$$

որտեղ՝

$$\bar{x}=\frac{\sum x_k^2\omega_k}{\sum\omega_k};\quad \overline{xy}=\frac{\sum x_k y_k\omega_k}{\sum\omega_k}: \qquad (2.15.)$$

Բոլոր չափումների նույն ճշտությամբ ($\omega_k = 1$) իրականացման դեպքում ստացվում է.

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k;\ \bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}y_k;\ x^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2,\\&\overline{xy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k:\end{aligned}\right\} \qquad (2.16.)$$

Գծային ձևափոխումներից հետո ստանում ենք

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+hu\\y&=y_0+h_1v\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}u&=\frac{x-x_0}{h}\\v&=\frac{y-y_0}{h_1}\end{aligned}\right\} \qquad (2.17.)$$

Գծային ֆունկցիայի պարամետրերը որոշվում են հետևյալ արտահայտություններով.

$$\bar{x}=x_0+h\bar{u},\ \bar{y}=y_0+h_1\bar{v}_1,\ a=\frac{h_1}{h}\frac{u\bar{v}-\bar{u}\bar{v}}{u^2-(\bar{u})^2}, \qquad (2.18)$$

որտեղ՝ u-ի և v-ի համար միջին արժեքները հաշվարկվում են (2.13) բանաձևերին համանման:

2.4.1. Երկրորդ կարգի ֆունկցիայի պարամետրերի որոնումը

$y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիայի պարամետրը որոշվում են գծային հավասարումների համակարգից.

$$\left.\begin{aligned} aS_4 + bS_3 + cS_2 &= \sum_{k=1}^{N} y_k x_k \omega_k \\ aS_3 + bS_2 + cS_1 &= \sum_{k=1}^{N} y_k x_k \omega_k \\ aS_2 + bS_1 + cS_0 &= \sum_{k=1}^{N} y_k \omega_k \end{aligned}\right\} \qquad (2.19.)$$

որտեղ՝ $S_m = \sum_{k=1}^{N} x_k^m \omega_k (m = 0,1,2,3,4)$; ω_k – ն $(k = 1,2,...,N)$ չափումների կշիռն է: Գծային կախվածության (2.13) համանման հաշվարկները կարելի է պարզեցնել հաշվարկի սկզբի և մասշտաբի ընտրմամբ:

Այս դեպքում քառակուսային ֆունկցիան նպատակահարմար է գրել հետևյալ տեսքով.

$$y = a\left(x - \bar{x}\right)^2 + b\left(x - \bar{x}\right) + c, \qquad (2.20.)$$

որտեղ՝ $\bar{x} = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} x_k \omega_k}{\sum_{k=1}^{N} \omega_k}$:

Ֆունկցիայի (2.20) պարամետրերը ցանկալի է որոշել հետևյալ բանաձևով.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{D}\left[\sum_{k=1}^{N} y_k \left(x_k - \bar{x}\right)^2 \omega_k - S_2 \bar{y}\right], \\ b &= \frac{1}{S_2}\sum_{k=1}^{N} y_k \left(x_k - \bar{x}\right)^2 \omega_k, \ c = \bar{y} - \frac{S_2 a}{S_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.21.)$$

որտեղ՝

$$S_m = \sum_{k=1}^{N} \left(x_k - \bar{x}\right)^m \omega_k, \ (m = 0,2,4),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{S_0}\sum_{k=1}^{N} y_k \omega_k, \ D = S_4 - \frac{S_2^2}{S_0}:$$

Եթե բոլոր չափումները կատարվում են միևնույն ճշտությամբ, ապա $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 1$ մասնավորապես

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \ \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k, S_0 = N$$

2.4.2. Բազմանդամի պարամետրերի որոնումը

$y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ բազմանդամի պարամետրերը տեսականորեն կարելի է որոշել գծային հավասարումների համակարգից.

$$\left.\begin{aligned} & a_0 \sum \omega + a_1 \sum x\omega + \ldots a_n \sum x^n\omega = \sum y\omega, \\ & a_0 \sum x\omega + a_1 \sum x^2\omega + \ldots a_n \sum x^{n+1}\omega = \sum yx\omega, \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & a_n \sum x^n\omega + a_1 \sum x^{n+1}\omega + \ldots a_n \sum x^{2n}\omega = \sum yx^n\omega : \end{aligned}\right\} \qquad (2.22.)$$

Նշենք, որ ճշտության անբավարարության պատճառով գրված համակարգը պրակտիկապես պիտանի չէ բարձր աստիճանի $(n > 2)$ բազմանդամի գործակիցների հաշվարկման համար: Բացի այդ, բազմանդամի աստիճանի ավելացմանը զուգընթաց անհրաժեշտ է ամբողջ հաշվարկը կրկնել: Ուստի խորհուրդ է տրվում բազմանդամի պարամետրերի որոնման համար այն գրել հետևյալ տեսքով.

$$y = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + \cdots b_nP_n(x), \qquad (2.23)$$

որտեղ՝ $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\omega(x)$ $(\omega_k = \omega(x_k) > 0)$ կշռով x_1, x_2, … x_n բազմաթիվ կետերում Չեբեշևի օրթոգոնալ բազմանդամներն են: Դա նշանակում է, որ բոլոր $i \neq j$ դեպքերում տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$\sum_{k=1}^{N} P_i(x_k) P_j(x_k) \omega_k = 0 :$$

(2.23) արտահայտության պարարմետրերը հաշվարկվում են հետեվյալ բանաձևով.

$$b_j = \frac{\sum y_k P_j(x_k)\omega_k}{\sum P_j^2(x_k)\omega_k} \qquad (2.24.)$$

և կախված չեն իրական բազմանդամի աստիճանից:

2.4.3. Ոչ գծային արտահայտությունների պարամետրերի որոնման մոտավոր և պարզեցված մեթոդները

Ոչ գծային արտահայտությունների պարամետրերի որոշումը նվազագույն քառակուսիների մեթոդով սովորաբար կապված է հսկայական հաշվարկների հետ: Ուստի, նպատակահարմար է խնդիրը հանգեցնել պարմետրերի գծային կախվածության վերը դիտարկված դեպքին: Շատ խնդիրներում դրան հասնում են փորձնական արտահայտության համապատասխան ձևափոխություններով, սակայն վերջինս խախտում է նվազագույն քառակուսիների սկզբունքը: Մոտավոր արժեքների ստացման համար կիրառվում են ստորև բերված պարզեցված մեթոդները:

$y = f(x)$ կախվածության մաթեմատիկական նկարագրման համար փորձարարին բավարարում են առավել հասարակ մեկ պարամետրով մոդելներ, օրինակ՝

$$y = mx; y = \frac{m}{x}; \; y = x^m; \; y = m\ln x; \; y = m^x; \; y = e^{mx} :$$

Այս դեպքում ևս անհայտ m պարամետրը նպատակահարմար է գնահատել նվազագույն քառակուսիների մեթոդով, նախապես այն բերելով գծային տեսքի: m-ի արժեքը հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով.

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} :$$

Լոգարիթմելով $y = m^x$ ֆունկցիան՝ ստանում ենք $\ln y = x\ln m$:
Նշանակելով $\ln y = Y$, $\ln m = m'$, ստանում ենք $Y = m'x$ գծային ֆունկցիան: Այնուհետև որոշում ենք m'- ը, որի համար լրացվում է համապատասխան աղյուսակ:

<u>*Երկու (a, b) պարամետրերի դեպքում*</u> $y = f(x; a; b)$ արտահայտությունը ներկայացվում է $Y = a_1X + b_1$ տեսքով, փոփոխականների համապատասխան փոխարինման եղանակով, այնուհետև հաշվարկվում մեզ հետաքրքրող a և b պարամետրերը:

Տեխնիկական խնդիրներ լուծելիս շատ հաճախ հանդիպում են հետեվյալ դեպքերը.

ա) աստիճանական ֆունկցիայի պարամետրերի հաշվարկման համար օգտվում ենք լոգարիթմական ձևափոխություններից.

$$y = ax^b \,; \qquad (2.25.)$$

$\ln y = \ln a + b\ln x$ և փոխարինելով $X = \ln x$, $Y = \ln y$ ստանում ենք

$$Y = a_1X + b_1, \qquad (2.26.)$$

որտեղ $a_1 = b$, $b_1 = \ln a$:

(2.26) գծային ֆունկցիայի a_1 և b_1 անհայտ պարամետրերը նպատակահարմար է հաշվարկել հետևյալ հավասարումների համակարգից.

$$\left.\begin{aligned} Nb_1 + a_1\sum X &= \sum Y, \\ N\sum X + a_1\sum X^2 &= \sum XY : \end{aligned}\right\} \qquad (2.27.)$$

Ցանկալի է մաթեմատիկական մոդելի ստացման ելակետային տվյալները և հաշվարկային մեծությունները լրացնել հետևյալ աղյուսակում:

Աղյուսակ 2.4

Ելակետային և հաշվարկային տվյալներ

Հ/Հ	x	y	X=lnx	X^2	Y=lnx	XY	$\hat{y}$
1							
2							
3							
.							
.							
.							
N							
Σ	--	--					--

բ) $y = ae^{bx}$ արտահայտությունը լոգարիթմական ձևափոխությունից հետո ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$\ln y = \ln a + bx. \qquad (2.28.)$$

Փոխարինելով $Y = \ln y$, $X = x$, ստանում ենք նորից գծային ֆունկցիա, որտեղ $a_1 = b$, $b_1 = \ln a$, $Y = b_1 + a_1X$:

գ) $y = \dfrac{1}{ax+b}$ արտահայտությունը ձևափոխությունից հետո ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$Y = \frac{1}{y} = ax + b: \tag{2.29.}$$

դ) $y = \dfrac{1}{a+be^{-x}}$ բանաձևի պարամետրերը կարելի է գտնել $Y = \dfrac{1}{y}$, $X = e^{-x}$ ձևափոխությունների օգնությամբ:

Գծային ֆունկցիայի բերված արտահայտությունների պարամետրերի արժեքները կարելի է հաշվարկել առաջարկված տարբերակով: Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ այս մեթոդով ստացված պարամետրերի մեծությունները չեն կարող բավարարել նվազագույն քառակուսիների սկզբունքին և կարող են ծառայել որպես որոնվող պարամետրերի գնահատման առաջին մոտավորություն:

Երեք պարարմետրերի դեպքը

Երեք պարամետրերով որոշակի փորձնական բանաձևերի դեպքում հաջողվում է մոտավորությամբ գտնել պարամետրերից մեկը, կամ համապատասխան ձևափոխությունների օգնությամբ արտաքսել այն, մնացած երկուսը որոշել շտկման մեթոդով:

ա) $y = ax^b + c$ (2.30.)

բանաձևի դեպքում c պարամետրը մոտավոր ճշտությամբ կարելի է որոշել հետևյալ առնչությամբ.

$$c = \frac{y_1y_3 - y_2^2}{y_1 + y_3 - 2y_2}, \tag{2.31.}$$

որտեղ՝ y_1, y_2, y_3 ֆունկցիայի փորձնական արժեքներն են $x_2 : x_1 = x_3 : x_2$ երկրաչափական պրոգրեսիա առաջացնող արգումենտի արժեքների դեպքում:

x_1 և x_2 արժեքները կարելի է ընտրել կամայական, սակայն c պարամետրի որոշման սխալը փոքրացնելու համար խորհուրդ է տրվում x_1 և x_2

արժեքները ընտրել իրարից հեռու: c պարամետրի ընտրումից հետո $X = \ln x, Y = \ln(y-c)$, ձևափոխությունները հանգեցնում են հետյալ գծային ֆունկցիային.

$$Y = bX + \ln a = bX + b_1, \tag{2.32.}$$

$b_1 = \ln a$:

Այս գծային կախվածության պարամետրերը գտնելուց հետո խորհուրդ է տրվում համեմատել ($y - ax^b$) տարբերության միջին թվաբականանի արժեքը ընտրված c արժեքների բոլոր կետերի հետ: Մեծ տարբերությունների դեպքում պետք է փորձել գտնել c - ի այլ արժեք:

Երբեմն նպատակահարմար է a, b, c պարամետրերը գտնել այլ հաջորդականությամբ: Այսպես, եթե b > 1 և փորձնական տվյալները պարունակում են x - ի բավականին մեծ արժեքներ, ապա այդ արժեքներից սկզբում գծային կախվածության համար կարելի է ընտրել b - ի մոտավոր արժեքը.

$Y = bX + b_1$, որտեղ՝ $Y = \ln y, X = \ln x$

Այնուհետև a և c պարամետրերի համար նույնպես մնում է գծային կախվածություն.

$$y = aZ + c \tag{2.33.}$$

որտեղ՝ $Z = x^b$:

բ) $y = ae^{bx} + c$ (2.34.)

բանաձևի համար c պարամետրը կարելի է որոշել (2.31) առնչությունից, միայն ֆունկցիայի այն արժեքների համար, որոնց արգումենտների արժեքների համար տեղի ունի $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ թվաբանական պրոգրեսիան: Հետագայում պետք է առաջնորդվել նույն դատողություններով, սակայն հետևյալ ձևափոխություններով,

$X = x; Y = \ln(y-c)$; $(Y = b \ln eX + \ln a)$:

գ) $y = ax^be^{cx}$ (2.35.)

բանաձևը լոգարիթմելուց հետո ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$\ln y = \ln a + b\ln x + cx, \tag{2.36.}$$

որի մեջ lna, b, c պարամետրերը մտնում են որպես գծային ֆունկցիայի անդամներ: (2.36) բանաձևի պարամետրերը կարող են որոշվել ընդհանուր մեթոդներով:

Պարզվում է՝ այստեղ տարբերություններ հնարավոր են այն դեպքերում, երբ x_k արգումենտի արժեքները, որտեղ չափվել են ֆունկցիայի մեծությունները, ձևավորում են թվաբանական կամ երկրաչափական պրոգրեսիա.

$$\Delta \ln y_k = \ln y_{k+1} - \ln y_k = \ln \frac{y_{k+1}}{y_k} : \qquad (2.37.)$$

Եթե արգումենտի աժեքները ձևավորում են թվաբանական պրոգրեսիա.

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = h \text{, (բոլոր k-ի համար),}$$

$$\Delta \ln y_k = b\Delta \ln x_k + ch :$$

$Y = a_1 X + b_1$, տեսքը շտկելով ստանում ենք փոխարինողներ.

$$Y = \Delta \ln y,\ X = \Delta \ln x,\ a_1 = b,\ b_1 = ch :$$

Եթե արգումենտի արժեքները ձևավորում են երկրաչափական պրոգրեսիա, ապա $x_{k+1} = qx_k$.

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k (q-1)x,$$

$$\Delta \ln x_k = \ln \frac{x_{k+1}}{x_k} = \ln q :$$

Այսինքն՝

$$\Delta \ln y_k = b \ln q + c(q-1)x_k \qquad (2.38.)$$

Շտկելով $Y = a_1 x + b_1$ տեսքը ստանում ենք

$$Y = \Delta \ln y,\ X = x,\ a_1 = c(q-1),\ b_1 = b \ln q :$$

Երկու դեպքում էլ նախ գտնում ենք a_1 և b_1 պարամետրերը, ըստ որոնց հաշվարկում b և c, իսկ հետո a-ն.

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{N} y_k}{\sum_{k=1}^{N} x_k^b e^{cx_k}} : \qquad (2.39.)$$

2.4.4 Մաթեմատիկական մոդելի գնահատումը

Մաթեմատիկական մոդելի պիտանելիության գնահատումը մոդելի կոռելյացիոն ինդեքսի և միջին քառակուսային սխալի ճշտումն է: Վերջին ժամանակներս տարածում է գտել յուրաքանչյուր մոդելի համար $\varepsilon = y_i - \hat{y}_i$ մնացորդների վերլուծությունը (§1.6):

Կոռելյացիոն ինդեքսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$i = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2}}, \qquad (2.40.)$$

որտեղ՝ $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$:

i-ի հնարավոր արժեքների տիրույթը $0 \le i \le 1$: Որքան մոդելը շատ է մոտենում փորձնական տվյալներին, այնքան մեծ է i-ի արժեքը: i-ի հաշվարկային արժեքի մեջ անհրաժեշտ է ազատության աստիճանների թվի մեջ համապատասխան ուղղումներ մտցնել:

$$i' = \sqrt{1 - \left[(1 - i^2)\right]\frac{n-1}{n-m}}, \qquad (2.41.)$$

որտեղ՝ m-ը մոդելի պարամետրերի թիվն է:

i' - ի արժեքը նույնպես գտնվում է $0 \le i' \le 1$ հատվածում:

n-ի փոքր արժեքների կամ մոդելի անհաջող ընտրության դեպքում (2.41) արտահայտության արմատի տակ ստացվում է բացասական թիվ, որը վկայում է ստուգվող մոդելի անօգտակարության մասին:

2.5. Լրիվ գործոնային գիտափորձեր

Գիտափորձերի պլանավորումից առաջ որոշումների ընդունումը:

Գիտափորձերի տիրույթն ընտրելիս անհրաժեշտ է նախ գնահատել գործոնների որոշման տիրույթի սահմանները: Այս դեպքում ամենից առաջ անհրաժեշտ է կատարել գործոնների արժեքների սահմանափակում: Գիտափորձերի արժեքների սկզբունքային սահմանափակումներ կատարելիս ոչ մի փորձի պայմաններում չի կարելի դրանք խախտել:

Հաջորդը՝ կատարել սահմանափակումներ, որոնք կապված են տեխնիկատնտեսական նկատառումների հետ: Եվ երրորդ. գիտափորձերի պայմանների հետ կապված սահմանափակումներ (սարքավորումներ և այլն):

Օպտիմալացումը սովորաբար սկսվում է, երբ օբյեկտը նախապես հետազոտվել է և կան փորձերի վրա հիմնված նախնական տեղեկություններ, որոնք անվանենք ապրիորային: Ապրիորային տեղեկություններ կարելի է օգտագործել օպտիմալացման պարամետրի, գործոնների և փորձերի կատարման լավագույն պայմանների մասին գաղափար կազմելու համար: Այնուհետև, անհրաժեշտ է գիտափորձերի պլանավորման համար ընտրել տեղային ենթատիրույթներ: Այս գործողությունը ներառում է երկու փուլ՝ հիմնական մակարդակի և տարափոխման միջակայքերի ընտրություն:

2.5.1. Հիմնական մակարդակների ընտրություն

Ապրիորային տեղեկության վերլուծությունից ընտրված լավագույն պայմաններին համապատասխանում է գործոնների մակարդակների կոմբինացիա (կամ մի քանի կոմբինացիաներ): Գործոնային տիրույթում յուրաքանչյուր կոմբինացիա համարվում է բազմաչափ կետ: Այն կարելի է դիտարկել որպես գիտափորձերի պլանի կառուցման ելակետային կետ՝ հիմնական (զրոյական) մակարդակ: Գիտափորձերի պլանի կառուցումը հանգեցվում է հիմնական մակարդակի նկատմամբ համաչափ փորձնական կետերի ընտրմանը: Առանձին դեպքերում լավագույն պայմանների տիրույթի մասին կարող ենք ունենալ տարբեր տեղեկություններ: Եթե տեղեկություն ունենք մեկ լավագույն կետի կոորդինատների մասին, իսկ գործոնների որոշման սահմանների մասին չկան տեղեկություններ, ապա այդ կետը դիտվում է որպես հիմնական մակարդակ: Նմանատիպ որոշում է կայացվում նաև, երբ հայտնի են սահմանները և լավագույն պայմանները գտնվում են տիրույթի ներսում: Դրությունը բարդանում է, երբ այդ կետն ընկած է տիրույթի սահմանների վրա (կամ շատ մոտ է սահմանին): Այդ դեպքում լավագույն մակարդակն ընտրվում է լավագույն պայմաններից որոշ չափով շեղված: Լավագույն կետի կոորդինատների բացակայության դեպքում որպես հիմնական մակարդակ է ընտրվում կամ ենթատիրույթի կենտրոնը, կամ մի պատահական կետ: Ենթատիրույթի մասին տեղեկությունը վերցվում է նմանատիպ հետազոտություններից կամ տեսական ենթադրություններից: Հնարավոր են նաև դեպքեր, երբ կան համարժեք մի քանի կետեր, որոնց կոորդինատները տարբեր են: Նման դեպքերում ընտրությունը կամայական է: Փորձի պայմաններից ելնելով կարելի է նաև բոլոր կետերի համար գիտափորձերի նոր պլան մշակել:

Հիմնական մակարդակների (տարբեր դեպքերի համար) ընտրության ժամանակ բլոկ-սխեմայի տեսքով որոշումների ընդունումը ցույց է տրված նկ. 2.9 -ում:

2.5.2. Տարափոխման միջակայքերի ընտրությունը

Այժմ մեր նպատակն է յուրաքանչյուր գործոնի համար ընտրել երկու այնպիսի մակարդակներ, որոնց միջև գիտափորձերի ժամանակ պետք է

տարափոխվի գործոնը: Միջակայքերի ընտրությունը նշանակում է յուրաքանչյուր գործոնի համար որոշել հիմնական մակարդակին հարաբերաբար երկու մակարդակների համաչափություն:

Գործոնի տարափոխման միջակայքը կոորդինատական առանցքի վրա հիմնական և վերին (ստորին) մակարդակների միջև հեռավորությունն է: Ըստ առանցքների մասշտաբներն ընտրվում են այնպես, որ վերին մակարդակին համապատասխանի +1, ստորինին՝ -1, իսկ հիմնականին՝ զրո:

Անդընդմեջ որոշման տիրույթով գործոնների համար գործոնի կոդավորված արժեքը որոշվում է

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{I_i} \text{ բանաձևով,} \qquad (2.42.)$$

որտեղ՝ $\tilde{x}_j$ -ը գործոնի բնական արժեքն է, $\tilde{x}_{j0}$ -ը՝ հիմնական գործոնի բնական արժեքը, I_i -ը տարափոխման միջակայքը, j –ն՝ գործոնի համարը:

Օրինակ՝ տրված են $I_i = 2, x_{j0} = 3$

բնական արժեքները՝ 1 3 5 $\tilde{x}_1$,

կոդավորված արժեքները՝ -1 0 1 x_1:

Որոշենք x_j արժեքը, երբ $\tilde{x}_j = 2$.

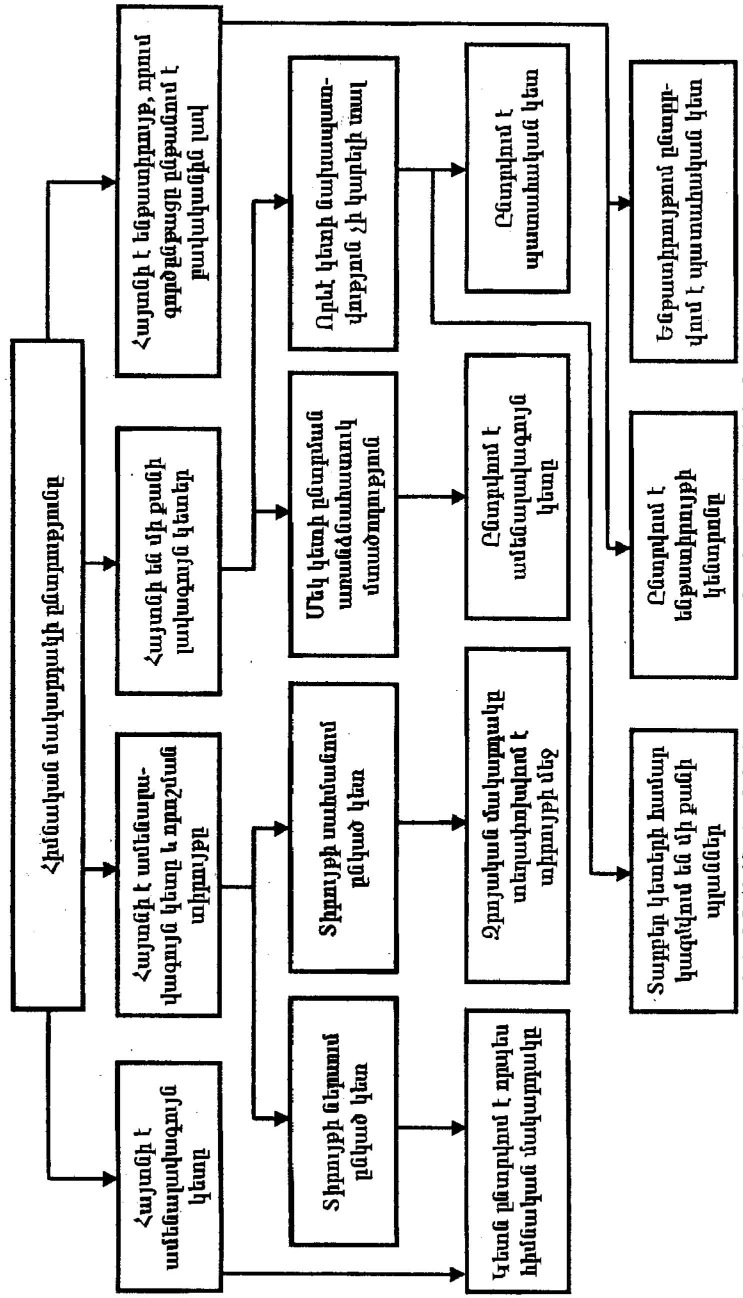
$$x_j = \frac{2-3}{2} = -0{,}5:$$

Տարափոխման միջակայքը չի կարող փոքր լինել այն սխալից, որով փորձարարը ամրագրում է գործոնի մակարդակը: Հակառակ դեպքում ստորին և վերին մակարդակները կդառնան անզանազանելի: Մյուս կողմից՝ միջակայքը շատ մեծ չպետք է լինի, հակառակ դեպքում գործոնի մակարդակը դուրս կմնա որոշման տիրույթի սահմաններից:

Միջակայքի համար նույնպես մտցնենք աստիճանավորում: Քննարկենք տարափոխման լայն, միջին և նեղ միջակայքեր, ինչպես նաև դեպքեր, երբ դժվար է միանշանակ որոշումներ կայացնել: Միջակայքի տարափոխման չափերը կազմում են գործակցի որոշման տիրույթի որոշակի մասը: Կարելի է պայմանավորվել, որ եթե միջակայքը կազմում է որոշման տիրույթի ոչ ավելի, քան 10% -ը, այն համարել նեղ, 30%-ից պակասի դեպքում միջին և մնացած դեպքերում լայն: Իհարկե, սրանք խիստ պայմանական են, կոնկրետ խնդիրների համար կարող են փոփոխվել:

Կարևոր է իմանալ նաև, թե գործոնային տիրույթի տարբեր կետերում ինչպիսի՞ միջակայքերում է տարափոխվում օպտիմալացման պարամետրը:

Օպտիմալացման խնդիրներում ընտրվում է ենթատիրույթ, որը հնարավորություն է տալիս դեպի օպտիմում շարժվել քայլային եղանակով:



Նկ. 2.9 Հիմնական մակարդակներ ընտրելու բլոկ-սխեման:

Ինտերպոլացիայի խնդիրներում տարափոխման միջակայքը ընդգրկում է նկարագրվող ողջ տիրույթը:

Գործոնի գրանցման ցածր ճշտությանը համապատասխանում է տարափոխման լայն միջակայք, միջինին-միջին միջակայք և բարձր ճշտությանը՝ տարափոխման նեղ (սահմանափակ կամ միջին միջակայքեր):

2.5.3. 2^k տիպի լրիվ գործոնային գիտափորձեր

Գիտափորձը, որում իրականացվում են գործոնների մակարդակների բոլոր հնարավոր զուգակցումները, կոչվում է լրիվ գործոնային: Այսպես, երբ գործոնի մակարդակների թիվը հավասար է երկուսի, փորձերի քանակը՝ N -ը կլինի $N = 2^k$, որտեղ k – ն գործոնների թիվն է:

Գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ օգտվում են նաև (+1 և -1) կամ (+) և (-) առանց միավորների գործոնի կոդավորված արժեքներից: Գիտափորձի պայմանները կարելի է ներկայացնել նաև աղյուսակի տեսքով (գիտափորձի պլանավորման մատրիցա), որում տողերը համապատասխանում են հերթական փորձերին, իսկ սյունակները՝ գործոնների արժեքներին, որոնք կոչվում են նաև վեկտոր-սյունակներ և վեկտոր-տողեր: Բազմագործոն պլանավորման մատրիցաների կրճատ ներկայացման համար օգտվում են տողերի տառային նշանակումներից, որը կարելի է կատարել հետևյալ կերպ. $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d$ և այլն (աղյուսակ 2.5):

Աղյուսակ 2.5

Գիտափորձերի պլանավորման 2^3 մատրիցա

Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	Տողերի տառային նշանակումը	Օպտիմալացման պարամետրը
1	-1	-1	+1	c	y_1
2	-1	+1	-1	b	y_2
3	+1	-1	-1	a	y_3
4	+1	+1	+1	abc	y_4
5	-1	-1	-1	(1)	y_5
6	-1	+1	+1	bc	y_6
7	+1	-1	+1	ac	y_7
8	+1	+1	-1	ab	y_8

Գործոնների քանակի ավելացման հետ անհրաժեշտություն է առաջանում մի քանի գործոններով մատրիցաների կառուցում: Դիտարկենք երկու ամենահասարակ ձևերը: Առաջինը հիմնված է նշանների հերթագայության կանոնի վրա: Առաջին սյունակի (x_1) նշանի հերթագայությունը իրականացվում է հերթականությամբ, երկրորդում նրանք հերթագայում են 2-ով, երրորդում 4-ով, չորրորդում 8-ով, հինգերորդում 16-ով և այլն, երկուսի աստիճանով:

Երկրորդ եղանակը հիմնված է մատրիցայի հերթականորեն կառուցման վրա: Դրա համար նոր գործոնի ավելացման հետ անհրաժեշտ են ելքային պլանի մակարդակների կոմբինացիաներ, սկզբում նոր գործոնի վերին մակարդակով, իսկ հետո ստորին: Երկուսից մինչև հինգ գործոնների քանակի ավելացման դեպքում մատրիցայի կառուցման հերթականությունը ցույց է տրված 2.6 աղյուսակում:

2^k տիպի լրիվ գործոնային գիտափորձերի առանձնահատկությունները

1. Յուրաքանչյուր գործոնի վեկտոր-սյունակի տարրերի թվաբանական գումարը հավասար է զրոյի.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0, \text{ որտեղ՝ } j = 1,2,\ldots k: \qquad (2.43.)$$

2. Յուրաքանչյուր սյունակի տարրերի քառակուսիների գումարը հավասար է փորձերի քանակին՝ N -ին (քանի որ գործոնները տրված են +1 և -1 նշանակումներով),

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N:$$

3. Մատրիցայի ցանկացած երկու վեկտոր-սյունակների անդամ առ անդամ արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{ui} = 0 \quad j \neq u \quad j,u = 0,1,2,3\ldots k: \qquad (2.44.)$$

Այս հատկությունը կոչվում է պլանավորման մատրիցայի օրթոգոնալություն:

4. Ռոտատաբելության հատկություն. մատրիցայում կետերը ընտրվում են այնպես, որ օպտիմալացման պարամետրի արժեքների գուշակման ճշտությունը գտնվում է փորձի կենտրոնից միատեսակ հեռավորության վրա և կախված չէ նրա ուղղվածությունից:

Հետևյալ մատրիցայի միջոցով ստուգենք երեք հատկությունները.

x_1	x_2
-	-
+	-
-	+
+	+

1. /-1/ + /+1/ + /-1/ + /+1/ = 0
2. $/\text{-}1/^2 + /\text{+}1/^2 + /\text{-}1/^2 + /\text{+}1/^2 = 4$
3. /-1/ · /-1/ + /+1/ · /-1/ + /-1/ · /+1/ + /+1/ · /+1/ = 0

2.5.4. Լրիվ գործոնային գիտափորձը և մաթեմատիկական մոդելը

Օգտվենք վերը բերված 2^k մոդելից: Դեպի օպտիմումի կետը շարժման համար մեզ անհրաժեշտ է նախ գծային մոդել.

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k:$

Մեր նպատակն է գիտափորձերի արդյունքների հիման վրա գտնել մոդելի անհայտ գործակիցների արժեքները: Գործակիցները հաշվարկվում են հետևյալ բանաձևով

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ij} y_i}{N} \quad j = 1,2,\ldots,k: \qquad (2.45.)$$

Օգտվելով 2^2 մատրիցայից, ստանում ենք.

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4},$$

$$b_2 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4}:$$

Այսինքն՝ b_1 - ը հաշվելու համար օգտվում ենք x_1 վեկտոր-սյունակից, իսկ b_2 - ի համար՝ x_2 սյունակից, b_0 - ի արժեքը ստանալու համար օգտվում ենք կեղծ փոփոխականի (գործոնի) վեկտոր-սյունակից, սակայն այս դեպքում այնպես, որ բոլոր փորձերի դեպքում $x_0 = \pm 1$, ուստի

$$b_0^1 = \frac{(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} = \bar{y}:$$

Անկախ փոփոխականների դեպքում գործակիցները ցույց են տալիս գործոնի ազդեցության ուժը: Որքան մեծ են գործակցի (±) արժեքները, այնքան մեծ է գործոնի ազդեցությունը օպտիմալացման պարամետրի վրա: Գործակցի դրական նշանի դեպքում նրա արժեքի մեծացման հետ օպտիմալացման պարամետրը մեծանում է, իսկ բացասականի դեպքում՝ նվազում: Գործակցի մեծությունը համապատասխանում է զրոյական մակարդակից վերին կամ ստորին մակարդակի տվյալ գործոնի փոփոխման ժամանակ օպտիմալացման պարամետրի վրա նրա ներգործության արժեքին:

Հաճախ գործոնի ներգործությունը հարմար է գնահատել նրա ստորին մակարդակից դեպի վերին մակարդակը անցնելիս: Գործոնի այսպիսի ներգործությունը կոչվում է գործոնի էֆեկտ (հիմնական կամ գլխավոր էֆեկտ), որը թվապես հավասար է գործակցի կրկնապատկին:

Աղյուսակ 2.6

Երկուսից հինգ գործոններով պլանավորման մատրիցայի կառուցման սխեմա

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	+	+	+	+	+	+
2	+	-	+	+	+	+
3	+	+	-	+	+	+
4	+	-	-	+	+	+
5	+	+	+	-	+	+
6	+	-	+	-	+	+
7	+	+	-	-	+	+
8	+	-	-	-	+	+
9	+	+	+	+	-	+
10	+	-	+	+	-	+
11	+	+	-	+	-	+
12	+	-	-	+	-	+
13	+	+	+	-	-	+
14	+	-	+	-	-	+
15	+	+	-	-	-	+
16	+	-	-	-	-	+
17	+	+	+	+	+	-
18	+	-	+	+	+	-
19	+	+	-	+	+	-
20	+	-	-	+	+	-
21	+	+	+	-	+	-
22	+	-	+	-	+	-
23	+	+	-	-	+	-
24	+	-	-	-	+	-
25	+	+	+	+	-	-
26	+	-	+	+	-	-
27	+	+	-	+	-	-
28	+	-	-	+	-	-
29	+	+	+	-	-	-
30	+	-	+	-	-	-
31	+	+	-	-	-	-
32	+	-	-	-	-	-

Վերը դիտարկվեց գծային մոդելը: Եթե մոդելը ոչ գծային է, ապա քանակապես ինչպես գնահատել ոչ գծայնությունը:

Հաճախ հանդիպում են ոչ գծային տեսքեր, երբ մեկ գործոնի էֆեկտը կախված է երկրորդ գործոնի մակարդակից: Այս դեպքում հանդես է գալիս երկու գործոնների փոխներգործության էֆեկտը: Փոխներգործության էֆեկտի քանակական գնահատման համար օգտվում ենք սյունակների բազմապատկման կանոնից, ստանալով երկու գործոնների արտադրյալի սյունակ: Այս սյունակը անհրաժեշտ է համապատասխան գործակցի հաշվարկման համար: Կարևոր է նաև, որ փոխներգործության էֆեկտների սյունակների ավելացման հետ պահպանվի գիտափորձերի պլանավորման մատրիցաների հատկությունները:

Վերը ասվածը դիտարկենք օրինակով (աղյուսակ 2.7).

$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1 \cdot x_2$ մոդելի b_{12} գործակիցը հաշվարկվում է հետևյալ կերպ.

$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}:$$

Աղյուսակ 2.7

Փոխներգործության էֆեկտով գիտափորձերի պլանավորման 2^2 մատրիցա

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y	Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1	3	+1	-1	-1	+1	y_3
2	+1	-1	+1	-1	y_2	4	+1	+1	-1	-1	y_4

x_1 և x_2 սյունակները որոշվում են ըստ փորձի պայմանների, իսկ x_0 և x_1x_2 սյունակները ծառայում են միայն հաշվարկի համար:

Դիտարկենք գործակիցների հաշվարկման Հեյտսի մեթոդը (աղ. 2.8):

Աղյուսակ 2.8

Ռեգրեսիայի գործակիցների հաշվարկը ըստ Հեյտսի մեթոդի

1	2	3	1	2	3
y_1	y_1+y_2	$y_1+y_2+y_3+y_4$	y_3	y_2-y_1	$y_3+y_4-y_1-y_2$
y_2	y_3+y_4	$y_2-y_1+y_4-y_3$	y_4	y_4-y_3	$y_4-y_3-y_2+y_1$

Առաջին վեկտոր-սյունակում գրանցվում են օպտիմալացման պարամետրերի մեծությունները: Առաջին գործողություններով (2-րդ սյունակը) այդ մեծությունները զույգ առ զույգ գումարում և հանում ենք միմյանցից (ներքևի արժեքից հանում ենք վերևինը), երկրորդ գործողությամբ (երրորդ սյունակ) նույնը կատարում ենք երկրորդ սյունակի արժեքների հետ: Բաժանելով երրորդ սյունակի թիվը փորձերի թվի վրա ստանում են գործակիցների մեծությունները: Գումարման և հանման գործողությունները կրկնում ենք այնքան անգամ, որքան գործոններ ունենք: Դիտարկենք պլանավորման 2^3 մատրիցան (աղ. 2.9):

Աղյուսակ 2.9

2^3 լրիվ գործոնային գիտափորձերի փոխներգործության էֆեկտներով մատրիցա:

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_8

Առավելագույն կարգի փոխներգործության էֆեկտն ունի գործոնների թվից մեկ միավորով ավելի կարգ ($x_1x_2x_3$ երկրորդ կարգի դեպքում): Հաճախ օգտագործում են նաև սինոնիմներ, անվանում են՝ զույգային էֆեկտ (x_1x_2, x_2x_3), եռակի ($x_1x_2x_3$) էֆեկտ և այլն:

Հնարավոր բոլոր էֆեկտների ամբողջ քանակը, ներառյալ նաև b_0 գծային էֆեկտը, և բոլոր կարգերի փոխներգործության էֆեկտները հավասար են լրիվ գործոնային գիտափորձերի քանակին:

П - րդ կարգի փոխներգործության հնարավոր քանակը որոշվում է զուգորդության թվի բանաձևով.

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \qquad (2.46.)$$

որտեղ՝ K-ն գործոնների թիվն է, m-ը՝ n-րդ կարգի փոխներգործության քանակը:

Երբ $N = 2^4$, եռակի փոխներգործության թիվը՝ $n = 3$:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 4 = x_1\cdot x_2\cdot x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4:$$

Պլանավորման մատրիցայի օրթոգոնալությունը հնարավորություն է տալիս ստանալու միմյանցից անկախ գործակիցների արժեքները: Սակայն դա իրավացի է, երբ ներառում է միայն գծային և փոխներգործության

էֆեկտներ: Գործոնների քառակուսային (x_k^2), խորանարդային (x_k^3) և այլ դեպքերում էական կարող են լինել նրանց գործակիցները: Օրինակ՝ 2^2 դեպքում մոդելը կարող ենք գրել

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 \text{ ձևով:} \qquad (2.47.)$$

x_1 և x_2 վեկտոր-սյունակների կառուցման փորձը հանգեցնում է x_0 - ի և միմյանց համընկնող սյունակի ստացմանը: Քանի որ այդ սյունակները միատեսակ են, ապա դժվար է ասել, թե ինչի հաշվին է ստացվում b_0 - ն: Այն ներառում է ազատ անդամի արժեքը և քառակուսային արժեքների ներդրումները: Այս դեպքում ասում են, որ տեղի ունի խառը գնահատական և սիմվոլիկ ձևով այն գրում են այսպես.

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{j=1}^{k}\beta_{jj}, \qquad (2.48.)$$

որտեղ՝ հունական տառերով նշված են անհայտ β_0 ազատ անդամի և β_{jj} քառակուսային գործակիցների իրական արժեքները:

Իհարկե, մեծ թվով փորձերի դեպքում կարելի է ստանալ գործակիցների իրական արժեքները, պրակտիկայում այդ թիվը սահմանափակ է:

Քառակուսային մոդելի համեմատությամբ երկու գործոնների համար իրար խառնվելու համակարգը ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$b_0 \to \beta_0 + \beta_{11} + \beta_{22}; \quad b_2 \to \beta_2,$$

$$b_1 \to \beta_1, \qquad b_{12} \to \beta_{12}:$$

Այսինքն՝ b_0 - ից բացի բոլոր գործակիցների գնահատականները իրար խիստ խառնված չեն: Լրիվ գործոնային գիտափորձերում փորձերի թիվը գերազանցում է գծային մոդելի գործակիցների թվին և դրա համար երբեմն իմաստ ունի կրճատել անհրաժեշտ փորձերի թիվը, բայց այնպես, որ պլանավորման մատրիցան չզրկվի իր լավագույն հատկություններից:

2.6. Մասնատված գործոնային գիտափորձեր

2.6.1. Փորձերի քանակի նվազարկումը

Լրիվ գործոնային գիտափորձերում փորձերի քանակը նկատելի գերազանցում Է գծային մոդելում որոշվող գործակիցների քանակը: Ցանկալի կլիներ, եթե նրանց քանակը կրճատվեր գծային մոդելի կառուցման համար, ոչ այնքան կարևոր տեղեկությունների հաշվին:

Տարափոխման ընտրված միջակայքերում գործընթացի հիմնավորման հնարավորության դեպքում մոդելը ներկայացնելով $y = b_0 + b_1x_1 +$

$+ b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$ ֆունկցիայով, բավարար է հաշվարկել b_0, b_1, b_2 գործակիցները: Այս դեպքում $b_{12} \to 0$, իսկ x_1x_2 վեկտոր-սյունակը կարելի է օգտագործել նոր x_3 գործոնի համար: Փորձերի պայմաններով այդ գործոնի արժեքները որոշվում են այդ սյունակի նշաններով: Ստացվում է, որ երեք գործոնների ուսումնասիրման ժամանակ ութ փորձի փոխարեն կարելի է կատարել չորսը, չկորցնելով պլանավորման մատրիցայի օպտիմալացման հատկությունները: Գծային մոդելը կարտահայտվի հետևյալ տեսքով.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \ldots \qquad (2.49.)$$

Այսպիսով, եռագործոն գիտափորձերի պլանավորման մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը՝

№	x_0	x_1	x_2	x_3	$(x_1 x_2)$	x_1	x_2	x_3	$(x_1 x_2)$
1	+1	-	-	+		+	-	-	
2	+1	+	+	+	կամ	-	+	-	
3	+1	-	+	-		-	-	+	
4	+1	+	-	-		+	+	+	

Մեծ թվով գործոնների դեպքում նման խնդիրը բարդ է, դիտարկենք այն մանրամասնորեն:

2.6.2. Մասնատված կիսապատասխաններ (дробная реплика)

Երեք գործոնների ազդեցության գնահատման համար չորս գիտափորձ կատարելիս կարող ենք օգտվել $2^3 = 8$ լրիվ գործոնային գիտափորձերի կեսից $\frac{8}{2} = 4$ կամ «կիսապատասխաններից» (реплика):

Երրորդ գործոնը (x_3) ստուգելով x_1x_2 - ի միջոցով, կստանանք մատրիցայի երկրորդ կեսը: Երկու կիսապատասխանների իրացման դեպքում գծային և փոխներգործության էֆեկտների համար գնահատականները կարելի է ստանալ առանձին-առանձին: 2.10 աղյուսակում մասնատված պատասխանները ներկայացված են այնպես, որ (p) գծային էֆեկտները հավասար են փոխներգործության էֆեկտներին, այդ դեպքում $N_{գծ} = 2^{k-p}$:

Աղյուսակ 2.10

Մասնատված կիսապատասխանների պայմանական նշանակումները և փորձերի քանակը

Գործոնների քանակը	Մասնատված կիսապատասխանը	Պայմանական նշանակումներ	Փորձերի քանակը: մասնակի կիսապատասխաններ	Փորձերի քանակը: լրիվ գործոնային գիտափորձի համար
3	1/2–կիսապատասխաններ 2^3 –ից	2^{3-1}	4	8
4	1/2– կիսապատասխաններ 2^4 –ից	2^{4-1}	8	16
5	1/4– կիսապատասխաններ 2^5 –ից	2^{5-1}	8	32
6	1/8– կիսապատասխաններ 2^6 –ից	2^{6-1}	8	64
7	1/16– կիսապատասխաններ 2^3-ից	2^{7-1}	8	128
5	1/2– կիսապատասխաններ 2^5-ից	2^{5-1}	16	32
6	1/4– կիսապատասխաններ 2^6 –ից	2^{6-2}	16	64
7	1/8– կիսապատասխաններ 2^7 –ից	2^{7-3}	16	128
8	1/16– կիսապատասխաններ 2^8 –ից	2^{8-4}	16	256
9	1/32– կիսապատասխաններ 2^9 –ից	2^{8-5}	16	512
10	1/64– կիսապատասխաններ 2^{10} –ից	2^{10-6}	16	1024
11	1/128– կիսապատասխաններ 2^{11} -ից	2^{11-7}	16	2048
12	1/256–կիսապատասխաններ 2^{12} -ից	2^{12-8}	16	4096
13	1/512–կիսապատասխաններ 2^{13} -ից	2^{13-9}	16	8192
14	1/1024–կիսապատասխաններ 2^{14}–ից	2^{14-10}	16	16384
15	1/2048–կիսապատասխաններ 2^{15}–ից	2^{15-11}	16	32768

2.6.3. Կիսապատասխանների ընտրությունը, վերարտադրության հարաբերակցություն և որոշող հակադրություններ

2^{3-1} կիսապատասխանների կառուցման համար գոյություն ունի միայն երկու հնարավորություն.

$x_3 = +x_1x_2$ և $x_3 = -x_1x_2$

Այդ պատճառով ստանում ենք միայն երկու կիսապատասխաններ (աղ.2.11): Առաջին կիսապատասխանում բոլոր $x_1x_2x_3 = +1$,իսկ երկրորդում $x_1x_2x_3 = -1$: Սյունակների արտադրյալների սիմվոլիկ նշանակումները հավասար են կամ +1, կամ -1, որը և կոչվում է որոշող հակադրություն: Հակադրությունը հնարավորություն է տալիս որոշել խառը էֆեկտները: Որպեսզի որոշենք, թե ո՛ր էֆեկտն է խառնված տվյալների հետ, անհրաժեշտ է որոշող հակադրության երկու մասերը բազմապատկել տվյալ էֆեկտին համապատասխանող սյունակի հետ:

Այսպես՝ $x_1x_2x_3 = +1$ դեպքում x_1- ի համար ունենք $x_1 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3$ (քանի որ միշտ $x_i^2 = 1$):

Աղյուսակ 2.11

2^{3-1} պլանավորման մատրիցա

Փորձի համարը	1 $x_3 = x_1x_2$				Փորձի համարը	2 $x_3 = -x_1x_2$			
	x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$		x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$
1	+	+	+	+	5	+	+	-	-
2	-	-	+	+	6	-	-	-	-
3	+	-	-	+	7	+	-	+	-
4	-	+	-	+	8	-	+	+	-

x_2 - ի համար կունենանք $x_2 = x_1x_2^2x_3 = x_1x_3$. դա նշանակում է, որ գծային հավասարման գործակիցները կարող են գնահատվել $b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$, $b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}, b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$:

Այն հարաբերակցությունը, որը ցույց է տալիս, թե տվյալ էֆեկտը որ էֆեկտի հետ է խառնված կոչվում է վերարտադրության հարաբերակցություն: Այն կիսապատասխանները, որոնցում հիմնական էֆեկտները խառն են երկգործոնային փոխներգործությունների հետ, կոչվում են 3-րդ կարգի վճռող հատկությունների պլան (որոշող հակադրությունում ամենաշատ գործոններով) և նշանակվում է 2^{3-1}:

2^{4-1} կիսապատասխանի ընտրման դեպքում հնարավոր է ութ լուծումներ

1. $x_4 = x_1x_2$, 2. $x_4 = x_2x_3$,

3. $x_4 = -x_1x_2$, 4. $x_4 = -x_2x_3$,

5. $x_4 = x_1x_3$, 6. $x_4 = -x_1x_3$,

7. $x_4 = x_1x_2x_3$, 8. $x_4 = -x_1x_2x_3$:

Այս կիսապատասխանների վճռող հատկությունները տարբեր են: 1...6 պատասխանները որոշող հակադրությունում ունեն երեքական գործոններ, 7 և 8-ը՝ չորսական: 7 և 8 պատասխաններն ունեն առավելագույն վճռող հատկություններ և կոչվում են գլխավոր: Վճռող հատկությունները տրվում են տվյալ պատասխանի խառնման համակարգով: Այն կլինի առավելագույն, եթե գծային էֆեկտները խառնված լինեն ամենաբարձր հնարավոր կարգի փոխներգործության էֆեկտների հետ:

Փոխներգործության էֆեկտների մասին ապրիորային տեղեկության բացակայության դեպքում փորձարարը ձգտում է ընտրել ամենամեծ վճռող հատկություններով պատասխաններ, քանի որ եռակի փոխներգործությունները սովորաբար ավելի քիչ կարևոր են քան կրկնակիները: Եթե փոխներգործության էֆեկտների մասին կա տեղեկություն, ապա այն կարելի է օգտագործել կիսապատասխանների ընտրման ժամանակ:

Աղյուսակ 2.12

$1 = x_1x_2x_3x_4$ որոշող հակադրությունով
2^{4-1} կիսապատասխանների մատրիցա

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	+	-	-	+	+	y_1
2	+	+	-	+	-	y_2
3	+	-	+	+	-	y_3
4	+	+	+	+	+	y_4
5	+	-	-	-	-	y_5
6	+	+	-	-	+	y_6
7	+	-	+	-	+	y_7
8	+	+	+	-	-	y_8

Աղյուսակ 2.13

$1 = x_1x_2x_4$ որոշող հակադրությունով
2^{4-1} կիսապատասխանների մատրիցա

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	+	-	-	+	+	y_1
2	+	+	-	+	-	y_2
3	+	-	+	+	-	y_3
4	+	+	+	+	+	y_4
5	+	-	-	-	+	y_5
6	+	+	-	-	-	y_6
7	+	-	+	-	-	y_7
8	+	+	+	-	+	y_8

Այն պատասխանները, որոնցում չկա ոչ մի գլխավոր էֆեկտ, որը խառը լինի ուրիշ գլխավոր էֆեկտների կամ կրկնակի փոխներգործության հետ, իսկ բոլոր կրկնակի փոխներգործությունները միմյանց հետ խառն են, կոչվում են 4-րդ կարգի (որոշող հակադրությունում ամենամեծ թվով գործոնների դեպքում) վճռող հակադրությունների պլան: Նրանք նշանակվում են 2^{4-1}: $1 = + x_1x_2x_3x_4$ որոշող հակադրություններով տրված կիսապատասխանները յուրաքանչյուր տողի համար ունեն միայն տառերի չորս կոմբինացիաներ (համակցություններ): Հաշվելով զույգ տողերը՝ այն կարելի է գրել հետևյալ ձևով. I ad, bd, ab, ac, cd, bc, abcd:

Տրված $1 = -x_1x_2x_3x_4$ կիսապատասխանը ունի միայն կենտ կոմբինացիաներ, a, b, c, d, abd, acd, abc, bcd:

Այդպիսի կիսապատասխանները կոչվում են գլխավոր, քանի որ նրանք ունեն ամենամեծ վճռող հատկություններ:

Ենթադրենք ընտրված կիսապատասխանները տրված են $1 = x_1x_2x_3x_4$ և $1 = -x_1x_2x_3x_4$ որոշող հակադրություններով: Այդ դեպքում համատեղ գնահատականները որոշվում են հետևյալ հարաբերակցություններով.

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = x_2x_3x_4, & x_1 = -x_2x_3x_4, \\
x_2 = x_1x_3x_4, & x_2 = -x_1x_3x_4, \\
x_3 = x_1x_2x_4, & x_3 = -x_1x_2x_4, \\
x_4 = x_1x_2x_3, & x_4 = -x_1x_2x_3, \\
x_1x_2 = x_3x_4, & x_1x_2 = -x_3x_4, \\
x_1x_3 = x_2x_4, & x_1x_3 = -x_2x_4, \\
x_1x_4 = x_2x_3, & x_1x_4 = -x_2x_3:
\end{array}
$$

Խառնման այդպիսի եղանակը հնարավորություն է տալիս գծային էֆեկտները գնահատել երկրորդ կարգի փոխներգործության էֆեկտների հետ համատեղ, իսկ առաջին կարգի փոխներգործությունները՝ միմյանց հետ:

Եթե կիսապատասխանները տրված են $x_4 = x_1x_2$ և $x_4 = -x_1x_2$ վերարտադրության հարաբերակցությամբ, ապա որոշող հակադրությունները կհամարվեն $1 = x_1x_2x_4$ և $1 = x_1x_2x_4$, այսինքն ստանում ենք 3-րդ կարգի վճռող հատկությամբ պլաններ.

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = x_2x_4, & x_1x_3 = x_2x_3x_4, \\
x_2 = x_1x_4, & x_2x_3 = x_1x_3x_4, \\
x_3 = x_1x_2x_3x_4, & x_3x_4 = x_1x_2x_3, \\
x_4 = x_1x_2, &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = -x_2x_4, & x_1x_3 = -x_2x_3x_4, \\
x_2 = -x_1x_4, & x_2x_3 = -x_1x_3x_4, \\
x_3 = -x_1x_2x_3x_4, & x_3x_4 = -x_1x_2x_3: \\
x_4 = -x_1x_2, &
\end{array}
$$

Մեծ մասնատվածության (1/4, 1/8 և այլն) պատասխանների վճռող հատկությունների գնահատման համար օգտագործում են ընդհանրացված որոշող հակադրություններ: 2^{5-2}, 1/4 պատասխանները կարող են տրված լինել $x_4 = x_1x_2x_3$ և $x_5 = x_2x_3$ վերարտադրության հարաբերակցություններով: Այս պատասխանների պլանավորման մատրիցան տրված է 2.14 աղյուսակում:

Որոշվող հակադրությունով այս պատասխանների հարաբերակցություններ են համարվում $1 = x_1x_2x_3x_4$, $1 = x_2x_3x_5$, որոնցից ստանում ենք 3-րդ կարգի հարաբերակցություն՝ $1 = x_1x_4x_5$:

Գնահատականների խառնման սխեման գտնում ենք հետևյալ կերպ.

$$
\begin{array}{l}
x_1 = x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_4x_5, \\
x_2 = x_1x_3x_4 = x_3x_5 = x_1x_2x_4x_5, \\
x_3 = x_1x_2x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_4x_5, \\
x_4 = x_1x_2x_3 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_5, \\
x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 = x_2x_3 = x_1x_4, \\
x_1x_2 = x_3x_4 = x_1x_3x_5 = x_2x_4x_5, \\
x_1x_3 = x_2x_4 = x_1x_2x_5 = x_3x_4x_5:
\end{array}
$$

Աղյուսակ 2.14

2^{5-2} պլանավորման մատրիցա

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	+	+	+	-	-	-	y_1
2	+	-	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	+	+	y_3
4	+	-	-	-	-	+	y_4
5	+	+	+	+	+	+	y_5
6	+	-	+	+	+	+	y_6
7	+	+	-	+	-	-	y_7
8	+	-	-	+	-	-	y_8

Այս կիսապատասխանների վճռող հատկությունները ավելի պակաս են, քան 4-րդ կարգի պլանների դեպքում, որոնց օգնությամբ գծային էֆեկտները որոշվում են զույգ փոխներգործություններից անկախ:

2^{5-1} կիսապատասխանի ընտրման դեպքում, եթե վերարտադրության հարաբերակցությունները տրված են $x_5 = \pm x_1x_2x_3x_4$ ձևով, որին համապատասխանում են $1 = x_1x_2x_3x_4x_5$ և $-1 = x_1x_2x_3x_4x_5$ որոշող հակադրությունները, ապա դրանց համար ստացվում է՝

$x_1 = \pm x_1x_2x_3x_4x_5$

$x_2 = \pm x_1x_2x_3x_4x_5$

… … … … … … …

… … … … … … …

2^{6-1} և բարձր կարգի կիսապատասխանների դիտարկումը աննպատակահարմար է, քանի որ պահանջում է մեծ թվով փորձեր:

Այդ դեպքում օգտվում են 1/4 և ավելի պատասխաններից (աղյուսակ 2.10): Այստեղ կարևոր է վերարտադրության հարաբերակցության ընտրությունը:

Գնահատվող գործակիցների քանակին համապատասխան նվազագույն փորձերի քանակով պլանը անվանում են հագեցած:

Մասնակի պատասխանների կիրառման արդյունավետությունը կախված է գծային էֆեկտների $\left[b_i = \varphi(b_{jk})\right]$ խառնման համակարգի հաջող ընտրությունից: Փորձերի թվի կրճատման համար (մասնակի պատասխանների կառուցման դեպքում) պլանում նոր գործոններ մտցնելու դեպքում անհրաժեշտ է այդ գործոնը տեղադրել մատրիցայի փոխներգործությանը պատկանող սյունակում:

Ցանկալի է նաև նշել պարամետրերի միջև համահարաբերակցությունը, իսկ եթե այդպիսիք չկան, անհրաժեշտ է հաշվարկել զույգային համահարաբերակցության գործակիցները և առանձնացնել ոչ համահարաբերակցության պարամետրերը:

3. Գիտափորձերի կատարման ընթացքը

Քննարկենք փորձերի նախապատրաստման, պլանավորման մատրիցայի իրականացման, սխալների հաշվարկի և նրանց դասակարգման, ինչպես նաև սիստեմատիկ սխալներից խուսափելու խնդիրները:

3.1.1. Նախնական տեղեկությունների հավաքման հարցաթերթ

Նմանատիպ հարցաթերթը պարտադիր չէ բոլոր գիտափորձերի համար, սակայն հարմար է օգտվել նրանից:

Հարցաթերթն ընդգրկում է.

1. օբյեկտի գործընթացի կարճ նկարագրությունը.
2. հետազոտման նպատակի ձևակերպումը (եթե խնդիրները մի քանիսն են, դրանք պետք է ռանգավորել ըստ հնարավորության աստիճանի).
3. օպտիմալացման պարամետրերի (արձագանքների) ընտրությունը.
4. ցանկալի արդյունքը, քանակը և ճշտությունը.
5. որ արդյունքը կարելի է համարել գերազանց, լավ, բավարար, անբավարար և այլն:

Աղյուսակ 3.1

Լրացնել հետևյալ աղյուսակը, նրանում նշելով բոլոր հնարավոր արձագանքները

Արձագանքի համարը	Անվանումը	Չափողականությունը	Որոշման տիրույթը	Ճշտությունը	Ծանոթություն

3.1.2. Գործոնների ընտրությունը

1. Գործընթացի վրա ազդող բոլոր «կասկածելի» գործոնների ցուցակը.
2. իրական գիտափորձերում առկա գործոնների ցուցակը.
3. հնարավո՞ր է, արդյոք, տրված բոլոր մակարդակներում ճշտել գործոնի մեծությունը.
4. Ամբողջ փորձի ընթացքում պահպանվու՞մ են, արդյոք, մակարդակների տրված արժեքները:
5. Կարո՞ղ են, արդյոք, գործոնների մակարդակների որոշ կոմբինացիաներ հանգեցնել գործընթացի ընդհատմանը (օրինակ՝ պայթյուն, ոչ տեխնոլոգիականություն)

Աղյուսակ 3.2

Գործոնի համարը	Անվանումը	Չափողականությունը	Որոշման տիրույթը	Հետաքրքրությունների տիրույթը	Ճշտությունը	Ծանոթություն

<u>Փորձերի քանակը</u>

1. Փորձերի ցանկալի քանակը, փորձերի քանակի սահմանափակումները.
2. հետազոտման անցկացման ցանկալի ժամկետը.
3. մեկ փորձի մոտավոր տևողությունը.
4. մեկ փորձի կատարման արժեքը և աշխատանքային ծախսերը.
5. մեկ գործոնի համար մակարդակների ցանկալի քանակը.
6. զուգահեռ փորձերի անցկացման հնարավորությունը և նրանց ցանկալի քանակը.
7. զուգահեռ չափումների անկացման հնարավորությունը.
8. փորձերի անցկացման ցանկալի ստրատեգիան (օրինակ՝ օրը մեկ անգամ և այլն):

3.1.3. Ապրիորային տեղեկությունների հաշվառումը

1. Նմանատիպ գործընթացների ուսումնասիրման ժամանակ ձեռք բերված արդյունքները և պայմանները.
2. նախնական գիտափորձերի արդյունքները և գիտափորձերի սխալի մեծության տվյալները (գրականություն և այլն).
3. գործոնների փոխներգործությունը.

3.1.4. Գիտափորձերի պլանի իրականացումը

Գիտափորձերին անհրաժեշտ է խնամքով նախապատրաստվել. հավաքել, փորձնական տեղեկությունները, նյութերը, գրանցման սարքավորումները և մատյանները: Նախապատրաստումը պետք է կատարել այնպես, որ փորձերի հերթականությունը չխախտվի: Գիտափորձերը կատարել մատրիցայի պլանին համապատասխան և հետևել նրա արդյունքների ճիշտ գրանցմանը:

3.2. Դիսպերսիոն վերլուծություն

Գիտափորձերի պլանի հիմնական մակարդակների և գործոնների տարափոխման միջակայքերի ընտրությունից հետո անցնում ենք փորձերի կատարմանը:

Մատրիցայի յուրաքանչյուր տող փորձի պայման է:

Պատահական սխալների ազդեցությունը կոմպենսացնելու համար խորհուրդ է տրվում յուրաքանչյուր փորձ կրկնել n անգամ: Գործոնի նույն արժեքների դեպքում մի քանի կրկնվող փորձերը կոչվում են կրկնվող կամ զուգահեռ: Սովորաբար $n = 2 \ldots 3$, երբեմն էլ $4 \ldots 5$:

Եթե հայտնի է փորձի սխալը, երկու միջինների տարբերության արժեքը կարելի է ստուգել t-չափանիշի օգնությամբ (Ստյուդենտի չափանիշ), հետևյալ բանաձևով.

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad (3.1.)$$

որտեղ՝ $\bar{y}_1$-ը մի փորձի պարամետրի միջին արժեքն է, $\bar{y}_2$-ը՝ մյուս փորձի պարամետրի արժեքը, S-ը փորձի սխալն է, n_1-ը առաջին փորձի դիտարկումների քանակը, n_2-ը՝ երկրորդ փորձի դիտարկումների քանակը:

Ունենալով ազատության աստիճանների թիվը (f), 3.3 աղյուսակից կարող ենք ընտրել գործոնի արժեքների մակարդակը և համեմատել միմյանց հետ:

Հետազոտությունների ժամանակ գործ ենք ունենում կրկնօրինակման երեք տարբերակների հետ.

1. գիտափորձը կատարվել է փորձի հավասարաչափ կրկնօրինակմամբ.
2. գիտափորձը կատարվել է փորձի անհավասարաչափ կրկնօրինակմամբ.
3. գիտափորձը կատարվել է առանց կրկօրինակման:

Հավասարաչափ կրկնօրինակման դեպքում պլանավորման մատրիցայի բոլոր տողերը ունեն նույն թվով զուգահեռ փորձեր: Անհավասարաչափի դեպքում փորձերի քանակը իրար հավասար չեն: Կրկնօրինակման բացակայության դեպքում փորձերը չեն կրկնվում: Կրկնօրինակման այս երեք տարբերակներից նախընտրելի է առաջինը:

Այս տարբերակի դեպքում գիտափորձը առանձնանում է բարձր ճշգրտությամբ, իսկ փորձնական տվյալների մաթեմատիկական մշակումը՝ իր պարզությամբ:

Աղյուսակ 3.3

Նշանակալիության 5% մակարդակի դեպքում t-ի արժեքները

Ազատության աստիճանների թիվը	1	2	3	4	5	6	7	8
t – ի արժեքը	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,30
Ազատության աստիճանների թիվը	9	10	11	12	13	14	15	16
t – ի արժեքը	2,26	2,23	2,20	2,18	2,1	2,14	2,13	2,12
Ազատության աստիճանների թիվը	17	18	19	20	21	22	23	24
t – ի արժեքը	2,11	2,10	2,09	0,08	0,08	2,07	2,07	2,06
Ազատության աստիճանների թիվը	25	26	27	28	29	30	40	60
t – ի արժեքը	2,06	2,06	2,05	2,05	2,05	2,04	2,02	2,00

Կրկնվող (կամ զուգահեռ) փորձերի արդյունքները ամբողջապես չեն համընկնում, քանի որ միշտ գոյություն ունի փորձի սխալ (վերարտադրելիության սխալներ)։ Ըստ կրկնվող փորձերի այդ սխալը կարելի է գնահատել հետևյալ արտահայտությամբ.

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_n}{n} : \qquad (3.2.)$$

Յանկացած փորձի արդյունքի շեղումը միջին թվաբանական ($\bar{y}$) արժեքից կարելի է հաշվել $y_i - \bar{y}$ տարբերությամբ, որտեղ y_i -ն i –րդ փորձի արդյունքն է։

Կասկածելի կամ կտրուկ արտահայտված արդյունքների ստուգման համար կիրառում են հատուկ չափանիշներ, որոնցից է U հարաբերակցությունը.

$$\text{կամ} \quad \left.\begin{aligned} U_{max} &= \frac{y_{i\,max} - \bar{y}}{S_i}, \\ U_{min} &= \frac{\bar{y} - y_{i\,min}}{S_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.)$$

որտեղ՝ $y_{i\,max}$ - n զուգահեռ փորձերի ընթացքում գրանցված օպտիմալացման պարամետրերի ամենամեծ արժեքն է, $y_{i\,min}$ - նույն պարամետրի նվազագույն արժեքը։

Ստացված արդյունքը կարելի է ճշտել α հավանականության վստահելի մակարդակի աղյուսակային արժեքին համապատասխան β* - ի հետ համեմատելով (β* -ի արժեքն ընտրվում է ԳՈՍՏ 11.002-73 թիվ 1 աղյուսակից)։ Եթե ստացվի $U_{max} \geq \beta$, ապա կասկածելի արդյունքը կարելի է արտաքսել։ Հակառակ դեպքում այն պետք է համարել նորմալ։ Նույն կերպ, երբ $U_{min} \geq \beta$ - ի դեպքում արժեքը պետք է արտաքսել։

Շեղումների փաստը $(y_i - \bar{y})$ վկայում է փորձերի արդյունքների փոփոխականության մասին։ Այս դեպքում փորձնական տվյալների դիսպերսիան կարելի է հաշվարկել.

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2}{n - 1}, \qquad (3.4.)$$

իսկ միջին քառակուսային շեղումը՝

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2} \qquad (3.5.)$$

Բոլոր սխալները կարելի է բաժանել սիստեմատիկ և պատահական խմբերի։ Սիստեմատիկ սխալներ առաջանում են կանոնավոր գործող պատճառներից։ Այդ կարգի սխալները կարելի է ուսումնասիրել և որոշել քանակապես։

Օպտիմալացման պարամետրի դիսպերսիան հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով

$$S^2\{y\} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)}, \qquad (3.6.)$$

որտեղ՝ N –ը մատրիցայում փորձերի քանակն է՝ i = 1, 2 ... N, j = 1,2 ... n։ Երկու կրկնվող փորձերի դեպքում բանաձևը ձեռք է բերում հասարակ տեսք.

$$S^2\{y\} = \frac{2\sum_{i=1}^{N} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N} ; \qquad (3.7.)$$

Վերարտադրության դիսպերսիան առավել հեշտ է հաշվարկել, եթե բոլոր փորձնական կետերում պահպանվում են կրկնվող փորձերի հավասար քանակներ։

Ինչպես նշվեց առաջին՝ մաթեմատիկական վիճակագրություն բաժնում, հիպոթեզի ստուգման համար օգտվում ենք համաձայնեցման չափանիշներից, որի դեպքում սահմանվում են նրանց նշանակալիության մակարդակները։ Սովորաբար կիրառում են նշանակալիության 5%, 2% կամ 1% մակարդակներ։ Տեխնիկայում ընդունված է 5% մակարդակը, այսինքն α = =0,05, որի դեպքում հավանականությունը կլինի p = 1 - α = 1 – 0,05 = 0,95։

Երկու դիսպերսիաների համասեռությունը կարող է ստուգվել Ֆիշերի F չափանիշով, որը իրենից ներկայացնում է մեծ դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \qquad (3.8.)$$

որտեղ՝ $S_1^2 > S_2^2$:

Աղյուսակ 3.4

Ֆիշերի F չափանիշների արժեքները 5% նշանակալիության մակարդակների դեպքում

Ազատության աստիճանների թիվը	Մեծ դիսպերսիաների համար տվյալ ազատության աստիճաններով չափանիշների արժեքները								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,5
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,8	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,5	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	6,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	4,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	4,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,8	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Եթե F_p հաշվարկային արժեքը փոքր է աղյուսակային F_T արժեքից, ապա դիսպերսիան համասեռ է: 3.4 աղյուսակից օգտվելու համար անհրաժեշտ է հաշվարկել ազատության աստիճանների թիվը՝ ℓ = N-(n-1): Դիսպերսիոն շարքի համասեռությունը ստուգվում է Կոխրենի կամ Բարտլետի չափանիշներով: Փորձերի հավասարաչափ կրկնօրինակման դեպքում դիսպերսիոն շարքի համասեռությունը ստուգում են Կոխրենի G չափանիշով, որը իրենից ներկայացնում է առավելագույն դիսպերսիայի և բոլոր դիսպերսիաների գումարի հարաբերություն.

$$G_p = \frac{S_{max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2} = \frac{S_{max}^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} S_i^2}: \qquad (3.9.)$$

Դիսպերսիան համասեռ է, եթե G_p հաշվարկային արժեքը չի գերազանցում G_T աղյուսակայինից (աղյուսակ 3.5): Աղյուսակում N_G-ն համեմատվող դիսպեսիայի քանակն է, իսկ n –ը՝ զուգահեռ փորձերինը, եթե $G_p > G_T$ դիսպերսիան համասեռ չէ, այսինքն հետազոտվող y մեծությունը չի ենթարկվում նորմալ բաշխման օրենքին:

Աղյուսակ 3.5

G չափանիշի (Կոխրեն) արժեքները 5% նշանակալիության մակարդակի դեպքում

N	n – 1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0,9065	0,7679	0,6541	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682
8	0,6798	0,9157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2093
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736
20	0,3894	0,2705	0,2255	0,1735	0,1735	0,1302	0,1501	0,1422	0,1357

Եթե S_i^2 փորձերի դիսպերսիան համասեռ է, ապա գիտափորձերի վերարտադրելիության S_y^2 դիսպերսիան հաշվարկվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2,$$

որտեղ՝ N-ը փորձերի կամ պլանավորման մատրիցայում տողերի քանակն է:

Գիտափորձերի արդյունքների մշակումը փորձերի անհավասարաչափ կրկնօրինակման դեպքում:

Հաճախ առանձին փորձերի արդյունքներ սխալ են ստացվում և անհրաժեշտ է լինում դրանք արտաքսել, որի հետևանքով զուգահեռ փորձերի քանակները լինում են տարբեր: Լինում են դեպքեր, երբ այս կամ այն պատճառով չեն կատարվում նույն քանակությամբ զուգահեռ փորձեր: Այս դեպքում խախտվում է մատրիցայի օրթոգոնալությունը, որի հետևանքով փոխվում են ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների և դրանց սխալի որոշման բանաձևերը: Վերջիններս բարդանում են: Փորձերի անհավասարաչափ կրկնօրինակման ժամանակ գիտափորերի արդյունքները մշակվում են հետևյալ սխեմայով:

1. Պլանավորման մատրիցայի յուրաքանչյուր տողի համար օպտիմալացման միջին թվաբանական $\bar{y}_i$ արժեքը որոշվում է.

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{u=1}^{n_i} y_{iu} \text{ բանաձևով,} \qquad (3.10.)$$

որտեղ՝ n_i -ն մատրիցայի i-րդ տողի զուգահեռ փորձերի քանակն է:

2. Մատրիցայի յուրաքանչյուր տողի համար S_i^2 փորձերի դիսպերսիան հաշվարկվում է այսպես.

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{u=1}^{n_i}\left(y_{iu} - \bar{y}_i\right)^2 : \qquad (3.11.)$$

3. Փորձերի դիսպերսիայի համասեռության հիպոթեզը ստուգվում է Բարտլետի չափանիշով: Գիտափորձերի վերարտադրելիության S_y^2 դիսպերսիան հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S_y^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} f_i}\left(\sum_{i=1}^{N} S_i^2 f_i\right), \qquad (3.12.)$$

որտեղ՝ f_i -ն ազատության աստիճանների թիվն է, որի օգնությամբ որոշվել է i-րդ փորձի S_i^2 դիսպերսիան: Այնուհետև հաշվարկվում է համեմատելի Q մեծությունը.

$$Q = \frac{1}{c}\left\{f \lg S_y^2 - \sum_{i=1}^{N} f_i \lg S_i^2\right\}, \qquad (3.13.)$$

որտեղ՝

$$c = 0{,}4343\left[1 + \frac{1}{3(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f}\right)\right],$$

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i :$$

Բարտլետը ապացուցել է, որ (N-1) ազատության աստիճանով Q մեծությունը մոտավորապես ենթարկվում է χ^2 բաշխման, որտեղ N-ը համեմատվող դիսպերսիաների քանակն է: Եթե $Q < \chi_T^2$, ապա դիսպերսիան համասեռ է և ընդհանրական (աղյուսակ 3.6):

<u>Գիտափորձերի արդյունքների մշակումը գիտափորձերի կրկնօրինակման բացակայության դեպքում:</u>

Նման դեպքում գիտափորձերի արդյունքները մշակում են հետևյալ սխեմայով:

Գիտափորձերի վերարտադրելիության դիսպերսիան S_y^2 հաշվարկելու համար զրոյական կետում (պլանի կենտրոնում) կատարվում են մի քանի զուգահեռ փորձեր: Զրոյական կետում փորձեր կատարելիս բոլոր գործոնները գտնվում են զրոյական մակարդակի վրա: Այստեղ փորձերի վերարտադրելիության դիսպերսիան՝ S_y^2 հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S_y^2 = \frac{1}{n_0 - 1}\left[\sum_{u=1}^{n_0}\left(y_u - \bar{y}\right)^2\right], \qquad (3.14.)$$

որտեղ՝ n_0 -ն զրոյական կետում զուգահեռ փորձերի քանակն է, y_u –ը՝ u-րդ փորձում օպտիմալացման պարամետրի արժեքը, $\bar{y}$ -ը՝ n_0 զուգահեռ փորձերում օպտիմալացման պարամետրի միջին թվաբանականի մեծությունը:

Աղյուսակ 3.6

χ^2արժեքները 5% նշանակալիության մակարդակների դեպքում

Ազատության աստիճանների թիվը	χ^2 արժեքները	Ազատության աստիճանների թիվը	χ^2 արժեքները
1	3,84	16	26,3
2	5,99	17	27,6
3	7,82	18	28,9
4	9,42	19	30,1
5	11,07	20	31,4
6	12,59	21	32,7
7	14,07	22	33,9
8	15,51	23	35,2
9	16,92	24	36,4
10	18,31	25	37,7
11	19,68	26	38,9
12	21,0	27	40,1
13	22,4	28	41,3
14	23,7	29	42,6
15	25,0	30	43,8

3.3. Գիտափորձերի արդյունքների մշակումը

Մանրակրկիտ կատարված գիտափորձերը, անկասկած, համարվում են հետազոտման հաջողության գլխավոր պայմանը: Սակայն շատ կարևոր է նաև ստացված արդյունքների մշակումը: Վիճակագիրները մշակել են գիտափորձերի արդյունքների ամփոփման բազմաքանույթ եղանակներ: Դիտարկենք նրանցից մի քանիսը:

3.3.1. Նվազագույն քառակուսիների մեթոդը

Գիտափորձերի արդյունքների մշակման ամենատարածված եղանակներից է նվազագույն քառակուսիների մեթոդը, որը առաջադրվել է ավելի քան 150 տարի առաջ Լեժանդրի և Գաուսի կողմից:

Միագործոն, գծային մաթեմատիկական մոդելը ունի հետևյալ տեսքը. $y = b_0 + b_1 x_1$: Խնդրի նպատակն է հաշվել b_0 և b_1 անհայտ գործակիցները:

Եթե փորձնական կետերը ընկնեին խիստ ուղիղ գծի վրա, ապա յուրաքանչյուր կետի համար ճիշտ կլիներ հետևյալ հավասարումը.

$$y_i - \left(b_0 + b_i x_i\right) = 0, \qquad (3.15.)$$

որտեղ՝ $i = 1, 2, ..., N$ փորձի համարն է:

Սակայն իրականում այս հավասարումը խախտվում է և ձեռք է բերում հետևյալ տեսքը.

$$y_i - \left(b_0 + b_i x_i\right) = \varepsilon_i,$$

որտեղ՝ ε_i-ը ռեգրեսիոն հավասարման i-րդ փորձնական կետի y - ի արժեքի և փորձնական արժեքի տարբերությունն է: Այդ տարբերությունը առաջանում է հիմնականում երկու պատճառով՝ գիտափորձի սխալից և մոդելի անհամապատասխանությունից: Նշված պատճառները միախառնված են և չի կարելի պնդել, թե դրանցից որն է գերակշռելի:

Ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցները պետք է հաշվարկել այնպես, որ տարբերությունը „U" -ն լինի նվազագույն.

$$U = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 \rightarrow \min \qquad (3.16.)$$

և հանգեցնի նվազագույն քառակուսիների մեթոդին (Ն. Ք. Մ.):

Գծային ֆունկցիան ունի երկու անհայտ գործակիցներ, ուրեմն պետք է կատարել երկուսից ավելի փորձ: Այսինքն բոլոր դեպքերում կատարվող փորձերի քանակը պետք է գերազանցի անհայտ գործակիցների

քանակին: Պարզվում է, որ գծային հավասարումների համակարգը կարող է լինել վերաորոշված կամ հակասական (այսինքն այն կարող է ունենալ անվերջ թվով լուծումներ կամ լուծումներ չունենալ):

Առաջին դեպքը տեղի կունենա, եթե հավասարումների թիվը մեծ լինի անհայտների թվից: Նվազագույն քառակուսիների մեթոդին բնորոշ է հավասարումների ցանկացած կամայական համակարգի որոշակիության հատկությունը: Դրանով հավասարումների քանակը հավասարվում է անհայտ գործակիցների քանակին, այսինքն գծային հավասարման դեպքում նվազագույն քառակուսիների մեթոդը կիրառելիս ստացվում է երկու հավասարում:

Վերը նշված հավասարումը գծային ֆունկցիայի դեպքում կարող է գրվել այսպես.

$$U = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i}\right)^2 \rightarrow \min, \qquad (3.17.)$$

ուստի՝ $\dfrac{\partial u}{\partial b_0} = 0$ և $\dfrac{\partial u}{\partial b_i} = 0$,

որտեղից՝ $-2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i}\right) = 0$

և $-2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i}\right)x_{1i} = 0$:

Հաշվարկման համար հարմար է բացել փակագծերը. $Nb_0 + \sum_{i=1}^{N} x_{1i} b_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i$

և $\sum_{i=1}^{N} x_{1i} b_0 + \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 b_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}$:

Ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների հաշվարկման արտահայտությունները կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}}{N\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\right)^2}, \\ b_1 &= \frac{N\sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_{1i}}{N\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\right)^2}: \end{aligned}\right\} \qquad (3.18.)$$

Կարելի է ապացուցել, որ ցանկացած թվով գործոնների դեպքում գործակիցները կհաշվարկվեն հետևյալ ընդհանուր բանաձևով.

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ij}}{N}, \qquad (3.19.)$$

որտեղ՝ $j = 0, 1, 2, ..., k$ գործոնի համարն է (0 -ն գրված է b_0 գործակցի հաշվարկի համար):

Գիտափորձերի հավասարաչափ և անհավասարաչափ կրկնօրինակման դեպքում մաթեմատիկական մոդելի գործակիցները հաշվարկվում են հետևյալ արտահայտություններով.

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i, \qquad (3.20.)$$

գծային էֆեկտը բնութագրող գործակիցները հաշվարկվում են.

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}\bar{y}_i \text{ բանաձևով, իսկ} \qquad (3.21.)$$

փոխներգործության էֆեկտները բնութագրող գործակիցները հաշվարկվում են այսպես.

$$b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{\ell j} y_j, \qquad (3.22.)$$

որտեղ j -ն գործոնի համարն է, x_{ij} և x_{lj} i - րդ փորձում j և ℓ գործոնների արժեքն է:

3.3.2. Ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների նշանակալիության ստուգումը

Ստացված գործակիցների նշանակալիությունը կարելի է ստուգել երկու եղանակով՝ 1) գործակիցների բացարձակ արժեքները վստահելի միջակայքերի հետ համեմատելով, 2) Ստյուդենտի t չափանիշով:

Առաջին եղանակով գործակիցների նշանակալիությունը ստուգելիս վստահելի միջակայքերը որոշելու համար հաշվարկվում է ռեգրեսիայի գործակիցների դիսպերսիան: i-րդ գործոնի $S^2\{b_i\}$ դիսպերսիան որոշվում է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$S^2\{b_i\} = \frac{1}{nN} S_y^2, \qquad (3.23.)$$

Δb_i վստահելի միջակայքը կարտահայտվի.

$$\Delta b_i = \pm t_T S\{b_i\},$$

որտեղ՝ t_T -ն f ազատության աստիճանների թվով և նշանակալիության ընդունված մակարդակով չափանիշի աղյուսակային արժեքն է (աղ. 3.3):

Փորձերի հավասարաչափ կրկնօրինակման դեպքում ազատության աստիճանների թիվը որոշվում է $f = (n-1)N$ արտահայտությունից, որտեղ՝ N-ը պլանավորման մատրիցայում փորձերի քանակն է, n –ը՝ զուգահեռ փորձերի քանակը:

Ռեգրեսիայի i-րդ գործակցի սխալը հաշվվում է $S = \{b_i\} = +\sqrt{S^2\{b_i\}}$ բանաձևից:

Գործակիցը նշանակալի է, եթե նրա բացարձակ արժեքը մեծ է վստահելի միջակայքից:

Երկրորդ եղանակի դեպքում t_p չափանիշը հաշվարկվում է հետևյալ արտահայտությունից.

$$t_p = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}:$$

Այնուհետև համեմատվում է աղյուսակային t_T արժեքի հետ, եթե $t_p > t_T$, ապա գործակիցը նշանակալի է:

Ստյուդենտի t չափանիշը հաշվարկվում է ռեգրեսիայի յուրաքանչյուր գործակցի համար:

Գիտափորձերի անհավասարաչափ կրկնօրինակման դեպքում ազատության աստիճանների թիվը որոշվում է

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i = \sum_{i=1}^{N} (n_i - 1) \text{ բանաձևով,} \qquad (3.24.)$$

որտեղ՝ n_i –ն i -րդ զուգահեռ փորձերի կրկնման քանակն է: Չկրկնօրինակված փորձերի դեպքում $\bar{y}_i = y_1$ ուրեմն գործակիցների մեծությունը հաշվարկելիս բանաձևում $\bar{y}_i$ - ի փոխարեն պետք է տեղադրել y_i.

$$S^2\{b_i\} = \frac{1}{N} S_y^2:$$

Քանի որ n = 1, բանաձևից հետևում է, որ բոլոր գործակիցների դիսպերսիաները հավասար են, իսկ վստահելի միջակայքը՝ $\Delta b_i = \pm t_T S\{b_i\}$: Այստեղ t_T - ի աղյուսակային արժեքը որոշվում է $f = n_0 - 1$ արտահայտությամբ, որտեղ n_0 -ն զրոյական կետում զուգահեռ փորձերի քանակն է:

3.4. Մաթեմատիկական մոդելի համապատասխանության ստուգումը

Մաթեմատիկական մոդելի գործակիցները որոշելուց հետո մեզ հետաքրքրող առաջին հարցը մոդելի պիտանելիության աստիճանի որոշումն է: Այդ գործողությունը կանվանենք մոդելի համապատասխանության ստուգում:

Մնացորդային դիսպերսիան կամ համապատասխանության դիսպերսիան բնութագրում է հաշվարկային $\hat{y}$ - ի նկատմամբ փորձնական y_i -ի ցրվածությունը:

Համապատասխանության դիսպերսիան որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S_{ag}^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{f}, \qquad (3.25.)$$

որտեղ՝ $\bar{y}_i$ -ն i-րդ փորձում օպտիմալացման պարամետրի միջին թվաբանական արժեքն է, $\hat{y}_i$ -ն՝ i-րդ փորձի պայմանների համար մոդելի հաշվարկված օպտիմալացման պարամետրի արժեքը, f -ը ազատության աստիճանների թիվն է և հավասար է՝ $f = N - (k+1)$, k - ն գործոնների թիվն է:

Վիճակագրության մեջ ազատության աստիճանների թիվը փորձերի և գործոնների քանակների տարբերությունն է:

Գիտափորձերի արդյունքների մշակման վերջին փուլը ստացված մոդելի համապատասխանության հիպոթեզի ստուգումն է, որը կատարվում է Ֆիշերի F չափանիշով.

$$F_p = \frac{S_{ag}^2}{S_y^2},$$

որտեղ՝ S_y^2 -ը գիտափորձերի վերարտադրելիության դիսպերսիան է:

Ազատության աստիճանի համապատասխան թվի և նշանակալիության ընդունված մակարդակի $F_p < F_T$ հարաբերության դեպքում մոդելը համարվում է համապատասխան, իսկ եթե $F_p > F_T$, ապա համապատասխանության հիպոթեզը մերժվում է: Պլանավորման երկրորդ կարգի ռեգրեսիոն մոդելի համապատասխանությունը ստուգելու և առանձին գործակիցների նշանակալիությունը ճշտելու համար նպատակահարմար է լրացնել 3.7 աղյուսակը:

Դիսպերսիոն հարաբերակցությունները համեմատելով աղյուսակային արժեքների հետ՝ $F_\alpha(f_1, f_2)$ կպարզվի, որ եթե $F \le F_\alpha(f_1, f_2)$, ապա մոդելի համապատասխանության հիպոթեզը չի հաստատվում: Դա չի նշանակում,

որ այդ մոդելից ընդհանրապես չի կարելի օգտվել: Այս դեպքերում որպես կանոն նկատվում է ֆունկցիայի y_u արժազանքի փորձնական արժեքների և ըստ մոդելի հաշվարկված $\hat{y}_u$ - ի արժեքի բավականին լավ համապատասխանություն: Վերջինիս վերլուծության դեպքում հետագա եզրակացությունները կարող են օգտագործվել ուսումնասիրվող գործընթացի օպտիմալացման համար:

Աղյուսակ 3.7

Երկրորդ կարգի ռեգրեսիոն հավասարման դիսպերսիոն վերլուծության սխեման

Քառակուսիների գումարը						
Կոմպո-նենտներ	Բանաձևեր	Գումար	Ազատու-թյան աստի-ճանները	Դիսպերսիա	Դիսպերսիա-ների հարաբե-րությունը	$F_\alpha = (f_1, f_2)$
Դիտարկման արդյունքների քառակուսի - ների գումարը	$(yy) = \sum_{u=1}^{N} y_u^2$		N	-	-	-
Կապված b_0-ի հետ	$S_0 = \frac{\left(\sum_{u=1}^{N} y_u\right)^2}{N}$		1	-	-	-
Կապված b_i-ի հետ	$S_{10} = \sum_{i=1}^{k} b_i \sum_{i=1}^{N} x_{iu} y_u$		k			
Կապված b_{ij}, b_{ii} -ի հետ	$S_{2\cdot10} = b_0 \sum_{u=1}^{N} y_u + \sum_{ij=1}^{k} b_{ij} \sum_{u=1}^{k} x_{iu} x_{ju} y_u - S_0$		$\frac{k(k+1)}{2}$			
Մնացորդային դիսպերսիան	$S_{LF} = (yy) - (S_0 - S_{10} + S_{2\cdot10})$		$N - \frac{(k+1)(k+2)}{2}$			
Վերարտադրելիության սխալի գնահատման դիսպերսիան	$S_{b_{0cn}} = N_\gamma(\gamma - 1) S^2\{\bar{y}\}$	$\frac{S_{boc}}{\gamma}$	$N(\gamma - 1)$	$S^2(\bar{y})$	-	-

3.5. Արձագանքի մակերևույթով կտրուկ վերընթաց

3.5.1. Շարժում գրադիենտի ուղղությամբ

Գրադիենտ է կոչվում այն վեկտորը, որը ցույց է տալիս որոշակի մեծության ամենաարագ փոփոխության ուղղությունը, որի արժեքը փոփոխվում է տարածության մի կետից դեպի մյուսը:

Նկ. 3.1-ում պատկերված են երկու անկախ փոփոխականներով ռեգրեսիոն հավասարման արձագանքի y_i մակերևույթի հավասար ելքով կորեր;

Արձագանքի մակերևույթն ունի „0'' գագաթով լեռան տեսք: Շարժումը գրադիենտով վերլուծելու նպատակով փորձենք միագործոն գիտափորձերի որևէ տարբերակով A կետից ընկնենք „0'' կետի տարածքը:

Դրա համար անհրաժեշտ է նախ կայունացնել առաջին գործոնը, օրինակ՝ $x_1 = a_1$, ապա AC ուղղությամբ փոփոխել երկրորդ գործոնը այնքան, քանի դեռ աճում է ելքը՝ y_i: Սկսած C կետից ելքը նվազում է, այդ պատճառով հաջորդ քայլով կայունացվում է x_2-ը և նույն կարգով CD ուղղությամբ՝ x_1 գործոնը: Շարժումը դեպի գագաթ այս եղանակով ոլորապտույտ է և առավել աշխատատար է դառնում անկախ փոփոխականների ավելացման հետ: Դեպի գագաթ ամենակարճ ճանապարհը, ֆունկցիայի արձագանքի գրադիենտով շարժումն է՝ AB ուղղությամբ հաստատուն մակարդակների կորերի շոշափողներին ուղղահայացը (նկ. 3.1): Անընդմեջ, միարժեք φ ֆունկցիայի գրադիենտը՝ ∇φ վեկտոր է:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} i + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} j + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} k,$$

որտեղ՝ $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ ֆունկցիայի i-րդ գործոնի մասնակի ածանցյալն է, i, j, k-ն գործոնների առանցքների ուղղությամբ միավոր վեկտորներն են:

Համաձայն Թեյլորի անալիտիկ ֆունկցիայի շարքի տեսության, ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալը, ըստ գործոնների՝ մեծությամբ և նշանով հավասար են ռեգրեսիայի համապատասխան գործակիցներին: Հետևաբար, y արձագանքի ֆունկցիայի գրադիենտը ∇y վեկտոր է,

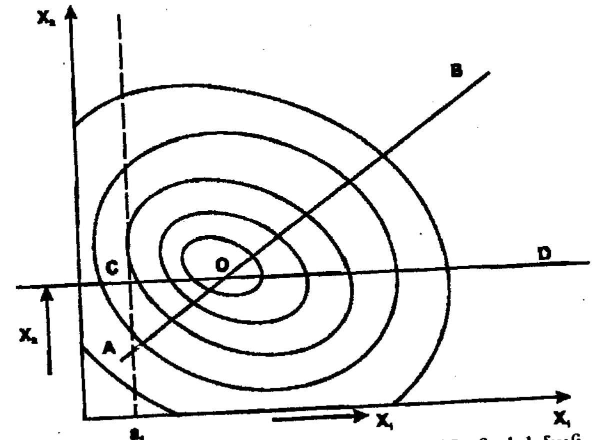
$$\nabla y = b_1\bar{i} + b_2 j + b_3 k: \qquad (3.26.)$$

Ռեգրեսիայի գործակիցների մեծություններին համամասնորեն փոփոխելով անկախ փոփոխականները՝ ամենակարճ ճանապարհով կշարժվենք արձագանքների ֆունկցիայի գրադիենտի ուղղությամբ: Այդ պատճառով համարյա ստացիոնար տիրույթով շարժման ընթացակարգը կոչվում է

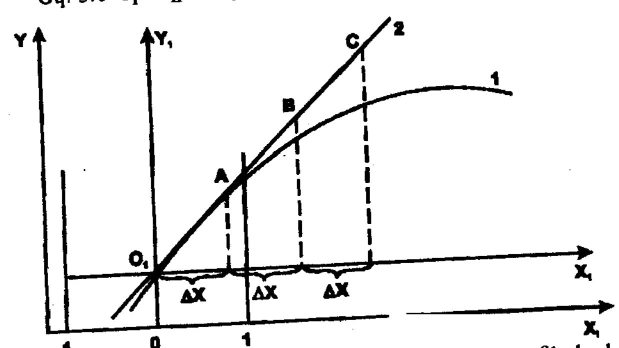
կտրուկ վերընթաց: Կտրուկ վերընթացի հաշվարկը քննարկենք մեկ գործոնով x_1 խնդրի օրինակով (նկ. 3.2):

Ենթադրենք կորը (1) արձագանքի անհայտ ֆունկցիան է: Գիտափորձերի պլանի իրականացման հետևանքով 0 կետում ստացվել է $y = b_0 + b_1x_1$ ռեգրեսիոն հավասարումը, որը գործոնի $x_1 = (-1\ldots+1)$ տիրույթում նույնականորեն արտահայտում է արձագանքի ֆունկցիան:

Ռեգրեսիոն գործակից b_1-ը հավասար է տվյալ գործոնի առանցքի և ռեգրեսիոն գծի միջև կազմած անկյան տանգենսին: Ընդունենք որ, x_1 առանցքով շարժման քայլը հավասար է Δx, ուստի, այն բազմապատկելով b_1-ով, կստանանք գրադիենտի վրա ընկած A կետի կոորդինատները:



Նկ. 3.1 Գրադիենտի ուղղությամբ շարժման սխեման



Նկ. 3.2 Գրադիենտի ուղղությամբ կետերի կոորդինատների սխեմա
1. Անհայտ ֆունկցիայի արձագանքի գրաֆիկը,
2. Գրադիենտի ուղղությունը՝ $y = b_0 + b_1x_1$:

Երկրորդ քայլից հետո x_1 առանցքի վրա հեռավորությունը կլինի $2\Delta x$ - ի չափով: Բազմապատկելով $2\Delta x$ - ը b_1 - ով, գտնում ենք գրադիենտի վրա գտնվող B կետի կոորդինատները ($2\Delta x$ և $2b_1\Delta x$) և այլն: Այնուհետև փորձերը կատարվում են գրադիենտի կետերին համապատասխան պայմաններով: Այս փորձերի արդյունքով որոշվում են օպտիմումի տիրույթը: Պրակտիկ խնդիրներ լուծելիս գիտափորձերի ծավալի կրճատման նպատակով կտրուկ վերընթացով նախատեսված ոչ բոլոր փորձերն են կատարվում: Փորձերի պայմանները ընտրվում են այնպես, որ օպտիմումի տիրույթը կարելի լինի ավարտել «եղան»-ով;

Գործոնների K թվի դեպքում կտրուկ վերընթացի շարժումը յուրաքանչյուր գործոնի առանցքով կատարվում է նմանատիպ եղանակով, քանի որ b_i գործակիցները որոշվում են միմյանցից անկախ: Գրադիենտի հաշվարկի վրա b_0 -ն ոչ մի ազդեցություն չի թողնում: Գրադիենտով շարժման քայլը ընտրվում է այնպես, որ նրա նվազագույն արժեքը մեծ լինի գործոնի գրանցման սխալից: Քայլի առավելագույն արժեքը սահմանափակվում է գործոնի որոշման տիրույթով: Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ փոքր քայլերով դեպի օպտիմում շարժումը պահանջում է նկատելի թվով փորձեր, իսկ մեծ քայլերը կարող են հանգեցնել օպտիմումի տարածքի շրջանցմանը, ուստի շարժման քայլը ընտրվում է մեկ գործոնի համար, իսկ մյուսների համար հաշվարկվում հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$\Delta i = \Delta L \frac{b_i \varepsilon_i}{b_L \varepsilon_L},$$

որտեղ՝ ΔL -ը L գործոնի համար շարժման ընտրված քայլն է, Δi -ն՝ i-րդ գործոնի շարժման քայլը, b_i, b_L -ը ռեգրեսիայի i - րդ և L -րդ գործոնների գործակիցները, $\varepsilon_i, \varepsilon_L$ -ն՝ i -րդ և L -րդ գործոնների տարափոխման միջակայքերը:

Գրադիենտի ուղղությամբ շարժումը պետք է սկսվի զրոյական կետից (յուրաքանչյուր գործոնի հիմնական մակարդակից), քանի որ ռեգրեսիայի գործակիցները հաշվարկված են զրոյական կետի շրջակայքում: Եթե ռեգրեսիոն գործակիցները միմյանցից նկատելիորեն տարբերվում են, խորհուրդ է տրվում փոփոխել գործոնի տարափոխման միջակայքը և կատարել նոր փորձեր: Յուրաքանչյուր գործոնի շարժման քայլը հաշվարկելուց հետո գտնում են «ենթադրական» փորձերի պայմանները:

«Ենթադրական» են համարվում այն փորձերը, որոնց կատարման պայմանները կտրուկ վերընթաց փուլում սահմանվում են՝ հաշվի առնելով յուրաքանչյուր գործոնի շարժման քայլը: Կտրուկ վերընթացի արդյունքների ստուգման նպատակով իրականացվում է «ենթադրական» փորձերի մի մասը:

Դեպի օպտիմում շարժման ժամանակ հնարավոր է առաջանա մի իրավիճակ, որը խանգարի որևէ գործոնի փոփոխմանը, այդ դեպքում գործոնները ֆիքսվում են օպտիմալ մակարդակներում, շարունակելով շարժումը մնացած գործոններով: Կտրուկ վերընթացը դադարեցվում է, եթե գտնվել են օպտիմալացման պայմանները, կամ գործոնների սահմանափակումները գրադիենտով շարժումը դարձնում են անտրամաբանական:

4. Ռեգրեսիոն վերլուծություն

Բազմաթիվ ինժեներական խնդիրների լուծման ժամանակ անհրաժեշտություն է առաջանում կապ հաստատել $x_1, x_2, ..., x_k$ անկախ և y փոփոխականների միջև: Փոփոխական մեծությունների միջև հնարավոր են կապերի հետևյալ տեսակները:

1. Ֆունկցիոնալ կապ ոչ պատահական մեծությունների միջև: Այս դեպքում y կախյալ փոփոխականը ամբողջությամբ կարող է որոշվել $x_1, x_2, ..., x_k$ անկախ փոփոխականներով:
2. Ֆունկցիոնալ կապ պատահական մեծությունների միջև:
3. Ֆունկցիոնալ կապ պատահական մեծությունների միջև, երբ պատահական մեծություններից մեկը արձագանքում է մյուս փոփոխականի կողմից իր բաշխման օրենքի փոփոխություններին:
4. Կապը պատահական և ոչ պատահական մեծությունների միջև: Այս կապը կարող է լինել երկակի՝ ա) կախյալ փոփոխականի չափումը կախված է չափման որոշակի սխալից, իսկ $x_1, x_2, ..., x_k$ փոփոխականները չափվում են անսխալ կամ այդ սխալները, համեմատած կախյալ փոփոխականի սխալի հետ, փոքր են: բ) y փոփոխականի արժեքը կախված է ոչ միայն $x_1, x_2, ..., x_k$ գործոններից այլև մի շարք չվերահսկվող գործոններից:

Օպտիմալացման պարամետրը՝ y -ը պատահական մեծություն է $M[y]$ բաշխման կենտրոնով, ունի նորմալ բաշխում և փոփոխվում է $x_1, x_2, ..., x_k$ գործոնների փոփոխման հետ:

$M[y] = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ արտահայտությունն անվանում են $x_1, x_2, ..., x_k$ մեծություններից y պատահական մեծության մաթեմաթիկական սպասման ռեգրեսիոն հավասարում:

Այսպիսով, ռեգրեսիոն վերլուծության հիմքում ընկած են հետևյալ ենթադրությունները.

1. $x_1, x_2, ..., x_k$ արժեքների ցանկացած զուգորդության դեպքում y մեծությունն ունի նորմալ բաշխում,
2. y պատահական մեծության տեսական բաշխման σ^2 դիսպերսիան հաստատուն է,
3. $M[y] = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ ֆունկցիայի տեսակը անհայտ է,
4. $x_1, x_2, ..., x_k$ փոփոխականների չափման սխալը ավելի փոքր է, քան y մեծությունը,
5. $x_1, x_2, ..., x_k$ փոփոխականները գծայնորեն անկախ են:

Բազմագործոն գիտափորձերի արդյունքները մշակելիս $M[y] = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ ֆունկցիան սովորաբար ներկայացվում է բազմանդամի տեսքով.

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + ... + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k, \quad (4.1.)$$

կամ երկրորդ կարգի բազմանդամով.

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + ... + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k + \quad (4.2.)$$
$$+ \beta_{11} x_1^2 + ... + \beta_{kk} x_k^2,$$

որտեղ՝ $\beta_0, \beta_1, \beta_2 ...$ ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցներն են:

Ռեգրեսիոն վերլուծության հաշվարկը կատարվում է հետևյալ հերթականությամբ.

1. S_j^2 դիսպերսիայի համասեռության ստուգում,
2. $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ գործոնների b_0, b_1, b_2 գնահատականների որոշում,
3. $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ -ի վստահելի սահմանների որոշում և գնահատականների նշանակալիության ստուգում,
4. մաթեմատիկական մոդելի համասեռության հիպոթեզի ստուգում:

4.1. k անկախ փոփոխականներով գծային ռեգրեսիոն վերլուծություն

Ընդունենք որ, $x_1, x_2, ..., x_k$ անկախ փոփոխականներից կախված y մեծության որոշման համար կատարվել են N փորձեր: Փորձերը չեն կրկնօրինակվում:

Ենթադրենք նաև, որ դիտարկման արդյունքները կարելի է ներկայացնել հետևյալ ռեգրեսիոն հավասարման տեսքով,

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k : \quad (4.3.)$$

Այս հավասարման գործակիցների քանակը հավասար է $(k+1)$-ի: Նմանատիպ խնդրի լուծման համար փորձերի N քանակը պետք է կամ հավասար, կամ ավելին լինի գործակիցների թվից $N \geq (k+1)$:

Ռեգրեսիոն հավասարումը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_k x_k, \quad (4.4.)$$

որտեղ՝ $x_0 = 1$:

Ռեգրեսիոն հավասարման $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ գործոնների գնահատականները՝ $b_0,b_1,b_2,\dots,b_k$, որոշվում են նվազագույն քառակուսիների մեթոդով,

$$S=\sum_{u=1}^{N}\left(y_u-\hat{y}_u\right)^2=\sum_{u=1}^{N}\left(y_u-b_0x_{0u}-b_1x_{1u}-b_2x_{2u}-\dots-b_kx_{ku}\right)^2, \qquad (4.5.)$$

որտեղ՝ y_u-ն u-րդ փորձում դիտարկված y - ի արժեքն է, $\hat{y}_u$ -ն ռեգրեսիոն հավասարումով (4.4) ստացված y - ի արժեքն է: u-րդ փորձի պայմաններին համապատասխանող անկախ փոփոխականների արժեքների դեպքում x_{iu} -ն u-րդ փորձում i-րդ փոփոխականի արժեքն է:

Դիֆերենցելով (4.5.) արտահայտությունը ըստ $b_0,b_1,b_2,\dots,b_k$ և հավասարեցնելով զրոյի, ստանում ենք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_i}=0\ \left(i=0,1,\dots,k\right):$$

$$\left.\begin{array}{l}
b_0\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}^2+b_1\sum x_{0u}x_{1u}+b_2\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{2u}+\dots+b_k\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{ku}=\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}y_u;\\
b_0\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{1u}+b_1\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}^2+b_2\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}x_{2u}+\dots+b_k\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}x_{ku}=\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}y_u;\\
b_0\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{2u}+b_1\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}x_{2u}+b_2\sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}^2+\dots+b_k\sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}x_{ku}=\sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}y_u;\\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
b_0\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{ku}+b_1\sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}x_{ku}+b_2\sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}x_{ku}+\dots+b_k\sum\limits_{u=1}^{N}x_{ku}^2=\sum\limits_{u=1}^{N}x_{ku}y_u;
\end{array}\right\}\qquad (4.6.)$$

Կատարենք նշանակումներ,

$$(ij)=(ji)=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}x_{ju};\ (ii)=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}^2;\ (iy)=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}y_u;\ i=0,1,2,\dots,k\quad i\neq j,$$

որից հետո $\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}^2$ գումարը նշանակենք /00/ (քանի որ այդ դեպքում i= 0) $\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}x_{1u}$ գումարը /01/ (քանի որ i =0, j = 1) և այլն:

Այդ նշանակումներից հետո հավասարումների համակարգը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\left.\begin{array}{l}
b_0(00)+b_1(01)+b_2(02)+\dots+b_k(0k)=(0y)\\
b_0(10)+b_1(11)+b_2(12)+\dots+b_k(1k)=(1y)\\
b_0(20)+b_1(21)+b_2(22)+\dots+b_k(2k)=(2y)\\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
b_0(k0)+b_1(k1)+b_2(k2)+\dots+b_k(kk)=(Ky)
\end{array}\right\}\qquad (4.7.)$$

$b_0,b_1,\dots,b_k$ գործակիցները որոշելու համար անհրաժեշտ է հաշվարկել ստացված հավասարումների համակարգը: Հաշվարկային բանաձևերը պարզեցնելու նպատակով օգտվենք մատրիցային հանրահաշվից:

$x_0,x_1,x_2,\dots,x_k$ անկախ փոփոխականների (x_0 - ն կեղծ փոփոխականն է) արժեքները գրենք հետևյալ տեսքով.

$$X=\begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1}\\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN}\end{vmatrix}: \qquad (4.8.)$$

Այս մատրիցան կոչվում է գիտափորձերի պլանների մատրիցա:

N փորձերի արդյունքով ստացված y մեծության արժեքները ներկայացվում է հետևյալ մատրիցայով.

$$Y=\begin{vmatrix} y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_N\end{vmatrix}: \qquad (4.9)$$

Y մատրիցան կոչվում է գիտափորձերի մատրիցա:

Երկու մատրիցաները միմյանցով բազմապատկելու համար անհրաժեշտ է, որ առաջին մատրիցան ունենա այնքան սյունակ, որքան տող ունի երկրորդ մատրիցան:

Գտնենք X մատրիցայի նկատմամբ վերադասավորված X^* մատրիցան: X^*X արտադրյալ-մատրիցայի տարրերը նշանակենք h,ℓ,ν, որտեղ՝ ℓ -ը տողի համարն է, ν -ն սյունակի համարը:

X^*X մատրիցայի տարրերը օրինակ h_{11} - ը կլինի $h_{11}=-(x_{01}x_{01}+$

$$+x_{02}x_{02}+\dots+x_{0N}x_{0N})=\sum_{u=1}^{N}x_{0u}^2=(00);\ h_{12}=(01);\ h_{21}=(10)$$ և այլն:

Այս դեպքում X^*X մատրիցան կարտահայտվի հետևյալ տեսքով.

$$X^*X=\begin{vmatrix}(00) & (01) & (02) & \dots & (0k)\\ (10) & (11) & (12) & \dots & (1k)\\ (20) & (21) & (22) & \dots & (2k)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (k0) & (k1) & (k2) & \dots & (kk)\end{vmatrix}: \qquad (4.10.)$$

X^*Y մատրիցան սիմետրիկ է, քանի որ $(ij)=(ji)$

$$\begin{vmatrix}x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N}\\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_N\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{u=1}^{N}x_{0u}y_u\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{1u}y_u\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{2u}y_u\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{u=1}^{N}x_{ku}y_u\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0y\\ 1y\\ 2y\\ \dots\\ ky\end{vmatrix}, \qquad (4.11.)$$

$b_0, b_1, b_2 \dots, b_k$ գործակիցները գրենք հետևյալ մատրիցայի տեսքով.

$$B=\begin{vmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_k\end{vmatrix}, \qquad (4.12.)$$

B մատրիցան բազմապատկելով X^*X մատրիցայով ստանում ենք $(X^*X)B$ և X^*Y մատրիցաները, որոնք ունեն նույն չափողականությունը և իրար հավասար են $(X^*X)B = X^*Y$.

$$(X^*X)B=\begin{vmatrix}(00)b_0+ & (01)b_1+ & (02)b_2+ & \dots & (0k)b_k\\ (10)b_0+ & (11)b_1+ & (12)b_2+ & \dots & (1k)b_k\\ (20)b_0+ & (21)b_1+ & (22)b_2+ & \dots & (2k)b_k\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (k0)b_0+ & (k1)b_1+ & (k2)b_2+ & \dots & (kk)b_k\end{vmatrix}: \qquad (4.13.)$$

A մատրիցայի հակադարձ մատրիցան կլինի A^{-1}, որի համար ճիշտ է $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ արտահայտությունը, ուստի՝

$$(X^*X)^{-1}(X^*X)B=(X^*X)^{-1}(X^*Y),$$

քանի որ $(X^*X)^{-1}(X^*X)=E$, իսկ $EB = B$, ապա՝

$$B=(X^*X)^{-1}(X^*Y): \qquad (4.14.)$$

$(X^*X)^{-1}$ մատրիցայի տարրերը նշանակենք C_{ij} - ով, որտեղ՝ i -ն տողի համարն է, j –ն սյունակի համարը:

$(X^*X)^{-1}$ և X^*Y մատրիցաները բազմապատկելով, (4.14.) արտահայտության մեջ տեղադրելով և մատրիցաները հավասարեցնելուց հետո ստանում ենք,

$$\left.\begin{array}{l}b_0=C_{00}(0y)+C_{01}(1y)+C_{02}(2y)+\dots+C_{0k}(ky)\\ b_1=C_{10}(0y)+C_{11}(1y)+C_{12}(2y)+\dots+C_{1k}(ky)\\ b_2=C_{20}(0y)+C_{21}(1y)+C_{22}(2y)+\dots+C_{2k}(ky)\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ b_k=C_{k0}(0y)+C_{k1}(1y)+C_{k2}(2y)+\dots+C_{kk}(ky)\end{array}\right\}, \qquad (4.15.)$$

Ստացված հավասարումները թույլ են տալիս որոշել $b_0, b_1, b_2 \dots, b_k$ գործակիցների իրական արժեքները: Այս հավասարումների հիման վրա նշված գործակիցների հաշվարկման համար կարելի է գրել ընդհանրացված հետևյալ բանաձևը,

$$b_i=\sum_{j=0}^{k}C_{ij}\qquad(jy): \qquad (4.16.)$$

Այսպիսով, ռեգրեսիոն գործակիցների որոշման համար անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ գործողությունները.

1. կազմել նորմալ հավասարումների համակարգը,
2. կազմել նորմալ հավասարումների գործակիցների X^*X մատրիցան,
3. ռեգրեսիայի գործակիցները որոշել (4.16.) արտահայտությամբ:

Ռեգրեսիոն հավասարման գումարելիների քանակը հավասար է ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների թվին: Գումարելիներից յուրաքանչյուրը կախված է համապատասխան անկախ փոփոխականից, այդ պատճառով գործակիցները չեն կարող որոշվել միմյանցից անկախ: Եթե ինչ որ պատճառով թեկուզև մի գործակից արտաքսվում է ռեգրեսիոն հավասարումից, ապա մնացած գործակիցները պետք է հաշվարկել:

Գործակիցները հաշվելուց հետո կատարում են ռեգրեսիոն հավասարման վիճակագրական վերլուծություն: Մաթեմատիկական մոդելի համապատասխանության հիպոթեզի ստուգման համար որոշվում է մնացորդային կամ համապատասխանության S^2_{ag} դիսպերսիան:

$$S^2_{ag} = \frac{S_R}{f_R}, \qquad (4.17.)$$

որտեղ՝ S_R-ը քառակուսիների մնացորդային գումարն է, $f_R = N-(k+1)$-ը՝ ազատության աստիճանների թիվը,

$$S_R = \sum_{u=1}^{N} y_u^2 \sum_{i=0}^{k} b_i \sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u = \sum_{u=1}^{N} y_u^2 - \sum_{i=0}^{k} b_i (iy): \qquad (4.18.)$$

Համապատասխանության հիպոթեզը ստուգում ենք Ֆիշերի F_p չափանիշով (աղ. 3.4):

Դիտարկենք առավել ընդհանուր դեպք, երբ y պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման $M[y]$ կապը անկախ փոփոխականներից $x_1, x_2, ..., x_k$ արտահայտվում է n կարգի բազմանդամով, օրինակ.

$$M[y] = \eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i \le j \le k}^{k} \beta_{ij} x_i x_j : \qquad (4.19.)$$

Այս հավասարման մեջ ռեգրեսիոն գործակիցների քանակը հավասար է C^n_{k+n}:

Ոչ բարդ ձևափոխումներից հետո (4.19) հավասարումը կարելի է ներկայացնել.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + ... + \\ + b_{k-1} x_{k-1} x_K + b_{11} x_1^2 + ... + b_{kk} x_k^2 : \qquad (4.20.)$$

Փոխարինելով երկրորդ կարգի անդամները գծային տեսքերով և մտցնելով կեղծ փոփոխականը ստանում ենք.

$$x_1^2 = x_{k+1}; x_2^2 = x_{k+2}; ...; x_k^2 = x_{2k},$$

$$x_1 x_2 = x_{2k+1}; ...; x_{k-1} x_k = x_{k1},$$

որտեղ՝ $k_1 = C^2_{k+2} - 1$

Նշանակումների նոր համակարգում (4.20) հավասարումը կարելի է ներկայացնել.

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_k x_k : \qquad (4.21.)$$

Այսպիսով, ցանկացած կարգի բազմանդամ գծային դարձնելուց հետո, հավասարումը կարելի է դիտել որպես գծային համասեռ և նրա համար կիրառել ռեգրեսիոն գծային հավասարման վերլուծության քանաձևերը: Այս դեպքում X մատրիցայում կավելացվեն նոր փոփոխականներին համապատասխան սյունակներ, իսկ B մատրիցայում՝ համապատասխան նոր փոփոխականներ:

Գործակիցների հաշվարկման բանաձևը պարզեցնելու համար գիտափորձերը կարելի է պլանավորել այնպես, որ X մատրիցայում տարբերի ցանկացած երկու սյունակների, ըստ տողերի արտադրյալների գումարը հավասար լինի զրոյի, այսինքն $\sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} = 0$: Այսպիսի պլանավորումը կոչվում է օրթոգոնալ: Այս դեպքում X^*X մատրիցան ձեռք է բերում հետևյալ տեսքը.

$$X^*X = \begin{vmatrix} (00) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & (11) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & (22) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & (kk) \end{vmatrix}, \qquad (4.22.)$$

$(X^*X)^{-1}$ հակադարձ մատրիցան կլինի

$$(X^*X)^{-1} = \begin{vmatrix} C_{00} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & C_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & C_{kk} \end{vmatrix}, \qquad (4.23.)$$

որտեղ՝ $C_{ij} = 0 \; (i \ne j)$:

Ռեգրեսիոն գործակիցները որոշվում են միմյանցից անկախ.

$b_0 = C_{00}(0y); \; b_1 = C_{11}(1y);$

$b_2 = C_{22}(2y); \; ... b_k = C_{kk}(ky):$

Օրթոգոնալ պլանավորման ժամանակ ռեգրեսիոն գործակիցների որոշման բանաձևերի ընդհանուր տեսքը կլինի.

$$b_i = C_{ii}(iy) = C_{ii} \sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u : \qquad (4.24.)$$

Եթե $(X^*X)^{-1}$ հարաբերակցության մատրիցան անկյունագծային է, ապա յուրաքանչյուր գործակցի համար վստահելի սահմանները կարելի է հաշվարկել,

$$b_i - t_s\{b_i\} < \beta_i < b_i + t_s\{b_i\},$$

կամ

$$b_i - t\sqrt{C_{ii} S_y^2} < \beta_i < b_i + t\sqrt{C_{ii} S_y^2},$$

որտեղ՝ t-ն Ստյուդենտի չափանիշի աղյուսակային արժեքն է. $s\{b_i\}$-ին b_i-ի որոշման սխալը:

Այսպիսով, գծային հավասարման ռեգրեսիոն վերլուծությունը կարելի է ներկայացնել գործողությունների հետևյալ հաջորդականությամբ.

1. կազմվում են փորձերի պայմանների X և դիտարկումների Y մատրիցաները:
2. կազմվում է X մատրիցայի նկատմամբ վերադասավորված X^* մատրիցան,
3. հաշվարկվում է X^*X արտադրյալ-մատրիցան,
4. որոշվում է X^*X-ի հակադարձ մատրիցան $(X^*X)^{-1}$,
5. հաշվարկվում է X^*Y արտադրյալ-մատրիցան,
6. որոշվում են ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցները,
7. հաշվում են $S^2\{b_i\}$ և $\sigma^2\{b_i\}$ դիսպերսիաները,
8. հաշվարկվում են S^2_{ag} դիսպերսիան և ստուգում ռեգրեսիոն հավասարման համապատասխանության հիպոթեզը:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ y-ի արժեքը կախված է երկու գործոններից, իսկ ռեգրեսիոն հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 : \qquad (4.25.)$$

Կատարենք նշանակումներ,

$x_0 = 1;\ x_3 = x_1 \cdot x_2;\ x_4 = x_1^2;\ x_5 = x_2^2$:

Այս դեպքում (4.25.) հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը,

$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5$:

Պլանավորման մատրիցան և փորձերի արդյունքները բերված են թիվ 4.1 աղյուսակում:

Աղյուսակ 4.1

Պլանավորման մատրիցան և փորձերի արդյունքները

Փորձերի համարը	x_0	x_1	x_2	$x_1x_2(x_3)$	$x_1^2(x_4)$	$x_2^2(x_5)$	y
1	1	1	0	0	1	0	58,7
2	1	-1	0	0	1	0	49,2
3	1	0,5	0,866	0,433	0,25	0,75	50,5
4	1	0,5	-0,866	-0,433	0,25	0,75	61,0
5	1	-0,5	0,866	-0,433	0,25	0,75	43,8
6	1	-0,5	-0,866	0,433	0,25	0,75	57,7
7	1	0	0	0	0	0	50,1

$b_0, b_1, \ldots b_5$ գործակիցները հաշվարկելու համար կազմենք X մատրիցան և դիտարկման Y մատրիցան.

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,866 & 0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0,5 & -0,866 & -0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & -0,5 & 0,866 & 0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & -0,5 & -0,866 & -0,433 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$Y = \begin{vmatrix} 58,7 \\ 49,2 \\ 50,5 \\ 61,0 \\ 43,8 \\ 57,7 \\ 50,1 \end{vmatrix}:$$

X մատրիցան վերադասավորելով՝ ստանում ենք.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,866 & -0,866 & 0,866 & -0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0,433 & -0,433 & -0,433 & 0,433 & 0 \\ 1 & 1 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 0 \end{vmatrix}$$

Բազմապատկելով X և Y մատրիցաները X^*-ով՝ գտնենք (X^*X) մատրիցայի հակադարձ $(X^*X)^{-1}$ մատրիցան: A մատրիցայի հակադարձ A^{-1} մատրիցայի a_{ij}^{-1} տարրերը կարող ենք հաշվել $a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ij}}{|A|}$, որտեղ՝ $|A|$-ն A մատրիցայի որոշիչն է, A_{ij}-ն՝ $|A|$ որոշիչում a_{ij} տարրի հանրահաշվական լրացումը:

$$X^{*}X = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \end{vmatrix}, \qquad XY = \begin{vmatrix} 371 \\ 14,5 \\ -21,131 \\ 1,472 \\ 161,15 \\ 159,75 \end{vmatrix}:$$

Օրինակ՝ անհրաժեշտ է գտնել A - ի հակադարձ A^{-1} մատրիցան,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

a_{11} տարի A_{11} հանրահաշվական լրացումը կլինի $A_{11} = (-1)^{1+1}, M_{11} = = 5$ a_{12} - ի A_{12} լրացումը կլինի $A_{12} = (-1)^{1+2}, M_{12} = -4$, իսկ $A_{21} = -3$ և $A_{22} = 1$:

Այս դեպքում A^{-1} մատրիցայի տարրերը համապատասխանաբար կորոշվեն.

$$a_{11}^{-1} = \frac{A_{11}}{|A|} = -\frac{5}{7} \quad a_{12}^{-1} = \frac{A_{21}}{|A|} = \frac{3}{7},$$

և

$$a_{21}^{-1} = \frac{A_{12}}{|A|} = \frac{4}{7} \quad a_{12}^{-1} = \frac{A_{22}}{|A|} = -\frac{1}{7}$$

A^{-1} մատրիցան կունենա հետևյալ տեսքը.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{vmatrix}:$$

Հայտնի են հակադարձ մատրիցայի որոշման նաև այլ եղանակներ. օրինակ՝ Գաուսի եղանակը և այլն:

Ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցները որոշենք (4.16.) արտահայտությունից. որտեղ $(0y),(1y),(2y)...(5y)$ գումարները որոշված են $X^{*}Y$ մատրիցայից. $C_{00}, C_{01}, ..., C_{ij} ... (X^{*}X)^{-1}$ մատրիցայի տարրերն են. իսկ C_{01}, C_{02}, C_{03} տարրերը հավասար են զրոյի. այսպիսով.

$$b_0 = C_{00}(0y) + C_{04}(49) + C_{05}(5y) = 1 \cdot 371 - 1 \cdot 161,5 - 1 \cdot 159,75 = 50,1,$$

$$b_1 = C_{11}(1y) = 0,3333 \cdot 14,5 = 4,8333,$$

$$b_2 = C_{22}(2y) = 0,3333(-21,131) = -7,04,$$

$$b_3 = C_{33}(3y) = 1,3333 \cdot 1,4722 = 1,963,$$

$$b_4 = C_{40}(0y) + C_{44}(4y) + C_{45}(5y) = 1 \cdot 371 + 1,5 \cdot 161,16 + 0,833 \cdot 159,25 = 3,85,$$

$$b_5 = C_{50}(0y) + C_{54}(4y) + C_{55}(5y) = 1 \cdot 371 + 0,8333 \cdot 161,15 + 1,5 \cdot 159,75 = 2,9167:$$

Վերջապես ռեգրեսիոն հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը.

$$y = 50,1 \cdot x_0 + 4,8333x_1 - 7,0437x_2 + 1,9063x_3 + 3,85x_4 + 2,9167x_5:$$

Քառակուսիների մնացորդային գումարը.

$$S_R = \sum_{u=1}^{7} y_u^2 - \sum_{i=0}^{5} b_i(iy) = 19895,92 - 19895,278 = 0,042:$$

Նույն արժեքն են ստանում նաև.

$$S_R = \sum_{u=1}^{7} (y_u - \hat{y}_u)^2 = 0,042:$$

Համապատասխանության դիսպերսիան.

$$S_{ag} = \frac{S_R}{f_R} = \frac{S_R}{N - (k+1)} = 0,042,$$

$$S_y^2 = 0,02,$$

որտեղ՝ $F_p = \frac{S_{ag}^2}{S_y^2} = 2,1$:

Ռեգրեսիոն հավասարումը համապատասխանում է ուսումնասիրվող երևույթին. քանի որ $F_T > F_p$:

Ռեգրեսիոն գործակիցների դիսպերսիաները կլինեն.

$$S^2\{b_0\} = C_{00}S_y^2 = 1 \cdot 0,02 = 0,02,$$

$$S^2\{b_1\} = C_{11}S_y^2 = 0,333 \cdot 0,02 = 0,067,$$

$$S^2\{b_2\} = C_{22}S_y^2 = 0,333 \cdot 0,02 = 0,067,$$

$$S^2\{b_3\} = C_{33}S_y^2 = 1,333 \cdot 0,02 = 0,0267,$$

$$S^2\{b_4\} = C_{44}S_y^2 = 1,5 \cdot 0,02 = 0,03,$$

$$S^2\{b_5\} = C_{55}S_y^2 = 1,5 \cdot 0,02 = 0,03:$$

Ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների նշանակալիությունները ստուգելիս պարզվեց, որ բոլորն էլ բավարարում են $t_p > t_T$ պայմանին: b_0, b_4, b_5 գործակիցների միջև գոյություն ունի հարաբերակցական կապ: Եթե գործակիցներից մեկը արտաքսվի հավասարումից, ապա մնացածը անհրաժեշտ է նորից հաշվարկել:

Տեղադրելով գործակիցների համապատասխան արժեքները (4.25), հավասարումը ձեռք է բերում հետևյալ տեսքը.

$$y = 50,1 + 4,8333x_1 - 7,0437x_2 + 1,963x_1x_2 + 3,85x_1^2 + 2,9167x_2^2:$$

5. Արտակարգ գիտափորձերի պլանավորում

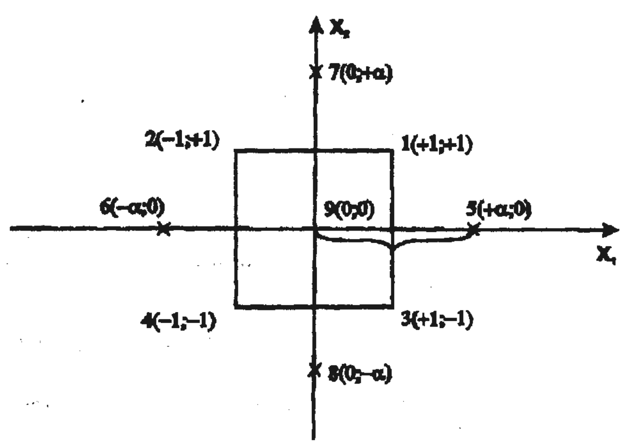
5.1. Կոմպոզիցիոն կենտրոնական պլաններ

Գրադիենտի ուղղությամբ շարժումն ավարտվում է օպտիմումի տիրույթի հայտնաբերումով, որտեղ արձագանքների ֆունկցիան սովորաբար ներկայացվում է երկրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով.

$$y = b_0 + \sum_{1 \le i \le k} b_i x_i + \sum_{1 \le i \le l \le k} b_{il} x_i \cdot x_l + \sum_{1 \le i \le k} b_{ii} x_i^2 : \qquad (5.1.)$$

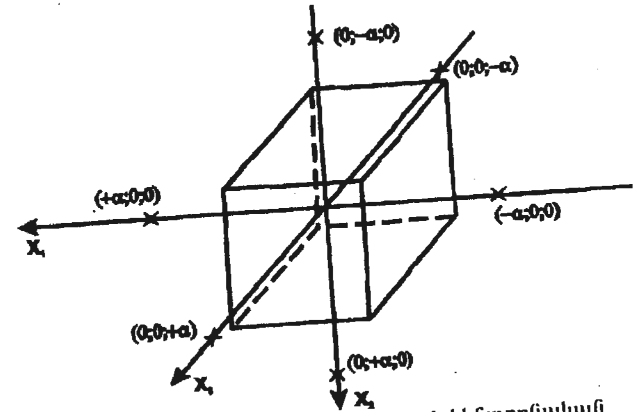
Երկրորդ կարգի բազմանդամների գործակիցները գնահատելիս անհրաժեշտ է, որ գիտափորձերի պլանում յուրաքանչյուր գործոն ընդունի երեքից ոչ պակաս արժեք: Ինչպես ցույց են տալիս որոշ հետազոտողներ [2.7], այս դեպքում առավել ռացիոնալ են համարվում կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանները: Հինգից պակաս գործոնների թվի $k < 5$ դեպքում կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի «միջուկ»-ի փոխարեն սովորաբար ընտրվում է 2^k լրիվ գործոնային պլան: Իսկ հինգից ավելիի դեպքում որպես «միջուկ» են ընտրվում 2^k լրիվ գործոնային գիտափորձերի կիսապատասխանները: Երկու գործոնի համար երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանը կարող է ներկայացվել սխեմայի տեսքով (նկ. 5.1): 2^2 լրիվ գործոնային գիտափորձերին (1, 2, 3, 4 կետեր) ավելացվում են n_0 թվով փորձեր պլանի կենտրոնում (կետ 9) և չորս «աստղանիշներով» կետեր (5, 6, 7, 8), որոնց կոորդինատներն են $(+\alpha,0)$; $(-\alpha,0)$; $(0,+\alpha)$; $(0,-\alpha)$:

Երկու գործոնների երկրորդ կարգի պլանը կարելի է ներկայացնել մատրիցայով (աղյուսակ 5.1):



Նկ. 5.1. Երկգործոն երկրորդ կարգի կենտրոնական պլան:

Երեք գործոնների համար նույն սխեման ներկայացված է նկ. 5.2-ում, մատրիցան՝ աղյուսակ 5.2-ում:



Նկ. 5.2 Եռագործոն երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի սխեմա:

Աղյուսակ 5.1

Երկգործոն երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի մատրիցա

Պլանի բովանդակությունը	Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
2^2 տեսակի պլան	1	+	+	+	+	+	+	y_1
	2	+	-	+	-	+	+	y_2
	3	+	+	-	-	+	+	y_3
	4	+	-	-	+	+	+	y_4
"Աստղանիշային" պլան	5	+	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
	6	+	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
	7	+	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
	8	+	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
Զրոյական կետ	9	+	0	0	0	0	0	y_9

K թվով գործոնների դեպքում երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանով փորձերի N քանակը որոշվում է $N = 2^k + 2k + n_0$ արտահայտությամբ: Որպես օպտիմալության չափանիշ ընտրվում են կա՛մ օրթոգոնալ, կա՛մ ռոտատաբել պլաններ:

Աղյուսակ 5.2

Եռագործոն երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի մատրիցա

Պլանի բովանդա-կությունը	Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y
2^3 տեսակի պլան	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1
	2	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	y_2
	3	+	+	-	+	-	+	-	+	+	+	y_3
	4	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	y_4
	5	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	y_5
	6	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	y_6
	7	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	y_7
	8	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	y_8
“Աստղանիշա-յին” կետեր	9	+	$+\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	0	y_9
	10	+	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	0	y_{10}
	11	+	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	y_{11}
	12	+	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	y_{12}
	13	+	0	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	y_{13}
	14	+	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	y_{14}
Զրոյա-կան կետ	15	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{15}

5.2. Երկրորդ կարգի օրթոգոնալ պլաններ

Ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ կարգի օրթոգոնալ պլանների առավելությունն այն է, որ հաշվարկների ամբողջ ծավալը փոքր է, քանի որ ռեգրեսիայի բոլոր գործակիցները որոշվում են միմյանցից անկախ: Կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի մատրիցայում ոչ բոլոր սյունակներն են օրթոգոնալ, որովհետև

$$\sum_{j=1}^{N} x_{0j}x_{ij}^2 \neq 0, \tag{5.2.}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 x_{ij}^2 \neq 0: \tag{5.3.}$$

Քանի որ $x_0 = +1$ և $x_{ij}^2 \geq 0$, ուստի, որպեսզի (5.2.) արտայահայտությունը դառնա օրթոգոնալ, անհրաժեշտ է մատրիցայի սյունակները ձևափոխել՝ x_i^2-ն փոխարինելով x_i^1-ով.

$$x_i^1 = x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = x_i^2 - \overline{x}_i^2: \tag{5.4.}$$

x_i^2-ն փոխարինելով x_i^1-ով (5.2.) արտահայտությունը կձևափոխվի հետևյալ տեսքի.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{0j}x_{ij}^1 = \sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 - Nx_i^2 = 0: \tag{5.5.}$$

Այսպես, օրինակ, երկու գործոնի համար կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի մատրիցայում (աղ. 5.1) ստանում ենք նոր փոփոխականներ.

$$\left.\begin{aligned}
& x_1^1 = x_1^2 - \frac{\sum_{i=1}^{9} x_{1i}^2}{9} = x_1^2 - \overline{x}_1^2 = x_1^2 - \frac{4+2\alpha^2}{9}, \\
& x_2^1 = x_2^2 - \frac{\sum_{i=1}^{9} x_{2i}^2}{9} = x_1^2 - \overline{x}_1^2 = x_2^2 - \frac{4+2\alpha^2}{9}, \\
& \text{ուրեմն} \\
& \sum_{j=1}^{9} x_{0j}x_{1j}^1 = \sum_{j=1}^{9} x_{0j}\left(x_{ij} - x_1^2\right) = \sum_{j=1}^{9} x_{1j}^2 - 9\overline{x}_1^2 = 4 + 2\alpha^2 - \frac{9\left(4+2\alpha^2\right)}{9} = 0, \\
& \text{նույն ձևով.} \\
& \sum_{j=1}^{9} x_{0j}x_{2j}^1 = 0:
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.}$$

Տեղադրելով $\alpha = 1$ (α-ն «աստղանիշային» բազուկն է) (5.6.) արտահայտության մեջ, գտնում ենք նոր փոփոխականները՝ x_1^1 և x_2^1.

$$x_1^1 = x_1^2 - \frac{2}{3},\ x_2^1 = x_2^2 - \frac{2}{3}:$$

Այս դեպքում կենտրոնական կոմպոզիցիոն երկրորդ կարգի օրթոգոնալ պլանը երկու գործոնի համար կարելի է ներկայացնել մատրիցայով (աղ. 5.3):

Երեք գործոնների համար «աստղանիշային» բազուկի $\alpha = 1$ արժեքով նույնպիսի գործողություններով ստանում ենք x_1^1, x_2^1, x_3^1 նոր փոփոխականներ,

$$x_1^1 = x_1^2 - \frac{\sum_{i=1}^{15} x_{1i}^2}{15} = x_1^2 - \frac{8 + 2(2,215)^2}{15} = x_1^2 - 0,73,$$

$$x_2^1 = x_2^2 - 0{,}73;\; x_3^1 = x_3^2 - 0{,}73:$$

Աղյուսակ 5.3

Երկգործոն կենտրոնական կոմպոզիցիոն երկրոր կարգի օրթոգոնալ պլան

Պլանի բովանդակու-թյունը	Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_1^2-\frac{2}{3}$	$x_2^2-\frac{2}{3}$	Y
2^2 տեսակի պլան	1	+	+	+	+	+1/3	+1/3	y_1
	2	+	-	+	-	+1/3	+1/3	y_2
	3	+	+	-	-	+1/3	+1/3	y_3
	4	+	-	-	+	+1/3	+1/3	y_4
α=1 բազուկով "աստղանշա-նային" կետեր	5	+	+	0	0	+1/3	+1/3	y_5
	6	+	-	0	0	+1/3	-2/3	y_6
	7	+	0	+	0	-2/3	-2/3	y_7
	8	+	0	-	0	-2/3	1/3	y_8
Զրոյական կետ	9	+	0	0	0	-2/3	-2/3	y_9

Երեք գործոնի օրթոգոնալ պլանավորման մատրիցան ներկայացված է աղյուսակ 5.4-ում:

Պլանավորման մատրիցայի օրթոգոնալության հիման վրա ռեգրեսի-ոն գործակիցները որոշվում են միմյանցից անկախ հետևյալ բանաձևով.

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_i}{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2}, \tag{5.7.}$$

որտեղ` i -ն մատրիցայում սյունակի համարն է, j –ն` փորձի համարը, x_{ij} -ն` մատրիցայի համապատասխան սյունակի տարրերը, $y_i$ –ն` i -րդ փորձում օպտիմալացման պարամետրի արժեքը:

Ռեգրեսիոն գործակիցների դիսպերսիաները որոշվում են.

$$S^2\{b_i\} = \frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2} \tag{5.8.}$$

Ըստ մատրիցայի փորձերի իրականացման ժամանակ ձևափոխու-թյուններից հետո ստացվում է հետևյալ հավասարումը.

$$y = b_0^1 + \sum_{1\le i\le k} b_i x_i + \sum_{1\le i\le L\le k} b_{il} b_i x_L + \sum_{1\le i\le k} b_{ii}\left(x_i^2 - x_i^2\right): \tag{5.9.}$$

Հավասարումը ընդհանուր տեսքով գրելու դեպքում ստացվում է

$$y = b_0 + \sum_{1\le i\le k} b_i x_i + \sum_{1\le i\le L\le k} b_{il} x_i x_L + \sum_{1\le i\le k} b_{ii} x_i^2 \tag{5.10.}$$

Աղյուսակ 5.4

Եռագործոն օրթոգոնալ պլանավորման մատրիցա

Պլանի բովանդակությունը	Փորձի համարը	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_2 X_3$	$X_1 X_3$	$x_2^2-0{,}73$	$_3^2-0{,}73$	$_3^2-0{,}73$	y
2^3 պլան	1	+	+	+	+	+	+	+	+0,27	+0,27	+0,27	y_1
	2	+	-	+	+	-	+	-	+0,27	+0,27	+0,27	y_2
	3	+	+	-	+	-	-	+	+0,27	+0,27	+0,27	y_3
	4	+	-	-	+	+	-	-	+0,27	+0,27	+0,27	y_4
	5	+	+	+	-	+	-	-	+0,27	+0,27	+0,27	y_5
	6	+	-	+	-	-	-	+	+0,27	+0,27	+0,27	y_6
	7	+	+	-	-	-	+	-	+0,27	+0,27	+0,27	y_7
	8	+	-	-	-	+	+	+	+0,27	+0,27	+0,27	y_8
α = 1,215 "Աստղանիշա-նային" պլան	9	+	+1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	y_9
	10	+	-1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	y_{10}
	11	+	0	+1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	y_{11}
	12	+	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	y_{12}
	13	+	0	0	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	y_{13}
	14	+	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	y_{14}
զրոյական կետ	15	+	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	y_{15}

որտեղ՝ b_0- ի արժեքը որոշվում է

$$b_0 = b_0 - b_{11}x_1^2 - \ldots - b_{kk}x_k^2,$$

իսկ դիսպերսիան՝

$$S^2\{b_0\} = S^2\{b_0^l\} + \bar{x}_1^2 S^2\{b_{11}\} + \ldots + \bar{x}_k^2 S^2\{b_k\}: \qquad (5.11.)$$

5.3. Երկրորդ կարգի պլանավորման գործակիցների որոշումը

Որպես կանոն, ուսումնասիրվող գործընացի նկարագրման համար բավարարվում են քառակուսային ամբողջական հավասարման մաթեմատիկական մոդելով.

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{ij}^{k} b_{ij} x_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i^2, \qquad (5.12.)$$

որտեղ՝ k -ն $i < j$ գործոնների քանակն է: Նման հավասարում ստանալու համար անհրաժեշտ է, որ փորձերում գործոնները ունենան առնվազն երեք արժեք: Երկրորդ կարգի գիտափորձերի պլանի ընտրությունը բավականին դժվար խնդիր է, քանի որ գոյություն ունեն գիտափորձերի պլանավորման օպտիմալության բազմաթիվ չափանիշներ: Հետազոտողը առաջին հերթին պետք է ձգտի՝

1. կատարել նվազագույն, սակայն նպատակին հասնելու համար բավարար քանակի փորձեր (N),
2. հարմարության տեսակետից գործոնները տարափոխել նվազագույն քանակի մակարդակներով:

Վերջին տարիներին առաջադրվել են օպտիմալացման պահանջները բավարարող պլաններ: Առավել մեծ տարածում են գտել հարմար և խնայողական խորանարդային պլանները: Եթե k = 2 փորձնական կետերը գտնըվում են քառակուսու վրա, k = 3 խորանարդի, իսկ k > 3 բազմաչափ խորանարդի (հիպերխորանարդի) վրա: Նման խնդիրներ լուծելիս գործոնները տարափոխվում են թվաբանական պրոգրեսիայի համապատասխան երեք մակարդակներով: 5.5......5.9 աղյուսակներում տրված են k = 2...5 - ի համար արդյունավետ և խնայողական մի քանի պլաններ և ռեգրեսոն մոդելի գործակիցների հաշվարկման բանաձևեր:

Աղյուսակ 5.5

Կոնո-2 (kO_2 պլանը)

Փորձի համարը	x_1	x_2	y	Փորձի համարը	x_1	x_2	y
1	+1	+1	y_1	6	-1	0	y_6
2	-1	+1	y_2	7	0	+1	y_7
3	+1	-1	y_3	8	0	-1	y_8
4	-1	-1	y_4	9	0	0	y_9
5	+1	0	y_5				

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= -\frac{1}{9}\sum_{u=1}^{4} y_u + \frac{2}{9}\sum_{u=5}^{8} y_u + \frac{5}{9} y_9, \\
b_i &= \frac{1}{6}\sum_{u=1}^{8} x_{iu} y_u \qquad i = 1,2 \\
b_{ii} &= \frac{1}{6}\sum_{u=1}^{4} y_u + \frac{1}{2}\sum_{u=5}^{8} x_{iu}^{8} y - \frac{1}{3}\sum_{u=5}^{9} y_u \qquad i = 1,2 \\
b_{12} &= \frac{1}{4}\sum_{u=1}^{4} x_{1u} x_{2u} y
\end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Աղյուսակ 5.6

Բոկս – 3 (B_3) պլանը

Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	y	Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	+1	+1	y_1	8	-1	-1	-1	y_8
2	-1	+1	+1	y_2	9	+1	0	0	y_9
3	+1	-1	+1	y_3	10	-1	0	0	y_{10}
4	-1	-1	+1	y_4	11	0	+1	0	y_{11}
5	+1	+1	-1	y_5	12	0	-1	0	y_{12}
6	-1	+1	-1	y_6	13	0	0	+1	y_{13}
7	+1	-1	-1	y_7	14	0	0	-1	y_{14}

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= -\frac{1}{16}\sum_{u=1}^{8} y_u + \frac{1}{4}\sum_{u=3}^{14} y_u \\
b_i &= \frac{1}{10}\sum_{u=1}^{14} x_{iu} y_u \qquad i = 1,2,3 \\
b_{ii} &= \frac{1}{16}\sum_{u=1}^{8} x_{iu} y_u - \frac{1}{4}\sum_{u=3}^{14} y_u + \frac{1}{2}\sum_{u=9}^{14} x_{iu}^2 y_u \quad i = 1,2,3 \\
b_{ij} &= \frac{1}{8}\sum_{u=1}^{8} x_{iu} x_{ju} y_u \quad i, j = 1,2,3
\end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Աղյուսակ 5.7

Բոկս-Բենկինի - 3 պլանը

Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	y	Փորձի համարը	X_1	x_2	x_3	Y
1	-1	+1	0	y_1	8	-	0	-1	y_8
2	+1	-1	0	y_2	9	0	+1	+1	y_9
3	-1	+1	0	y_3	10	0	+1	-1	y_{10}
4	-1	-1	0	y_4	11	0	-1	+1	y_{11}
5	+1	0	+1	y_5	12	0	-1	-1	y_{12}
6	+1	0	-1	y_6	13	0	0	0	y_{13}
7	-1	0	+1	y_7					

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= y_{13}\\
b_i &= 0{,}125\sum_{u=1}^{12} x_{iu}y_u \qquad i=1,2,3\\
b_{ii} &= 0{,}25\sum_{u=1}^{13} x_{iu}^2 y_u + 0{,}1875\sum_{i=1}^{3}\sum_{u=1}^{13} x_{iu}^2 y_u - 0{,}5\sum_{u=1}^{13} y_u \quad i=1,2,3\\
b_{ij} &= 0{,}25\sum_{u=1}^{12} x_{iu}x_{ju}y_u \qquad i,j=1,2,3 \quad i<j
\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Աղյուսակ 5.8

Բոկս-4 (B_4) պլանը

Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	x_4	y	Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1	13	+1	+1	-1	-1	y_{13}
2	-1	+1	+1	+1	y_2	14	-1	+1	-1	-1	y_{14}
3	+1	-1	+1	+1	y_3	15	+1	-1	-1	-1	y_{15}
4	-1	-1	+1	+1	y_4	16	-1	-1	-1	-1	y_{16}
5	+1	+1	-1	+1	y_5	17	+1	0	0	0	y_{17}
6	-1	+1	-1	+1	y_6	18	-1	0	0	0	y_{18}
7	+1	-1	-1	+1	y_7	19	0	+1	0	0	y_{19}
8	-1	-1	-1	+1	y_8	20	0	-1	0	0	y_{20}
9	+1	+1	+1	-1	y_9	21	0	0	+1	0	y_{21}
10	-1	+1	+1	-1	y_{10}	22	0	0	-1	0	y_{22}
11	+1	-1	+1	-1	y_{11}	23	0	0	0	+1	y_{23}
12	-1	-1	+1	-1	y_{12}	24	0	0	0	-1	y_{24}

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= -\frac{1}{48}\sum_{u=1}^{16} y_u + \frac{1}{6}\sum_{u=17}^{24} y_u\\
b_i &= \frac{1}{18}\sum_{u=1}^{24} x_{iu}y_u \qquad i=1,2,3,4\\
b_{ii} &= \frac{1}{48}\sum_{u=1}^{16} y_u - \frac{1}{6}\sum_{u=17}^{24} y_u + \frac{1}{2}\sum_{u=17}^{24} x_{iu}y_u \quad i=1,2,3,4\\
b_{ij} &= \frac{1}{16}\sum_{u=1}^{16} x_{iu}x_{ju}y_u \quad i,j=1,2,3,4 \quad i<j
\end{aligned}\right\} \tag{5.16.}$$

Աղյուսակ 5.9

Խարտլի-5 (H_a - 5) պլանը

Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	Փորձի համարը	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
1	+1	+1	+1	+1	+1		15	+1	-1	-1	-1	-1	
2	-1	+1	+1	+1	-1		16	-1	-1	-1	-1	+1	
3	+1	-1	+1	+1	-1		17	+1	0	0	0	0	
4	-1	-1	+1	+1	+1		18	-1	0	0	0	0	
5	+1	+1	-1	+1	-1		29	0	+1	0	0	0	
6	-1	+1	-1	+1	+1		20	0	-1	0	0	0	
7	+1	-1	-1	+1	+1		21	0	0	+1	0	0	
8	-1	-1	-1	+1	-1		22	0	0	-1	0	0	
9	+1	+1	+1	-1	-1		23	0	0	0	+1	0	
10	-1	+1	+1	-1	+1		24	0	0	0	-1	0	
11	+1	-1	+1	-1	+1		25	0	0	0	0	+1	
12	-1	-1	+1	-1	-1		26	0	0	0	0	-1	
13	+1	+1	-1	-1	+1		27	0	0	0	0	0	
14	-1	+1	-1	-1	-1								

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= -0{,}01347\sum_{u=1}^{16} y_u + 0{,}1077\sum_{u=17}^{26} y_u + 0{,}1380y_{27}\\
b_i &= \frac{1}{18}\sum_{u=1}^{16} x_{iu}y_u \qquad i=1,2,3,4,5\\
b_{ii} &= \frac{1}{16}\sum_{u=1}^{16} y_u + \frac{1}{2}\sum_{u=17}^{26} x_{iu}^2 y_u - \frac{4}{33}\sum_{u=17}^{26} y_u - \frac{1}{33}y_{27} \quad i=1,2,3,4,5\\
b_{ij} &= \frac{1}{16}\sum_{u=1}^{16} x_{iu}x_{ju}y_u \quad ij=1,2,3,4,5 \quad i<j
\end{aligned}\right\} \tag{5.17.}$$

5.4. Երկրորդ կարգի ռոտատաբել պլանավորում

Ինչպես ցույց են տալիս հետազոտությունները, օրթոգոնալության չափանիշները դեռևս չեն կարող համարվել երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի օպտիմալացման ուժեղ չափանիշներ: Եթե արձագանքների մակերևույթների վերաբերյալ հավաստի տեղեկություններ չկան, ավելի խելամիտ կլինի օգտվել ռոտատաբելության պահանջները բավարարող կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլաններից, որոնք հնարավորություն կտան ստանալ պլանի կենտրոնից հավասար հեռավորությունների համար օպտիմալացման պարամետրի արժեքը կանխագուշակող մոդել: Կենտրոնական կոմպոզիցիոն պլանի ռոտատաբելությանը կարելի է հասնել «աստղանիշային» բազուկի ընտրությամբ: Միջուկի համար «աստղանիշային» բազուկի մեծությունը հաշվարկվում է $\alpha = 2^{\frac{k}{4}}$ արտահայտությունից, իսկ կիսապատասխաններով «միջուկի» համար՝ $\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}$-ից, որտեղ՝ P –ն գործոնների փոխներգործության էֆեկտների թիվն է:

Երկրորդ կարգի ռոտատաբելային պլանավորման համար կարևոր նշանակություն ունի պլանի կենտրոնում փորձերի քանակի ընտրությունը, քանի որ այստեղ փորձերի քանակը որոշվում է արձագանքների մակերևույթի մասին ստացված տեղեկության բաշխման բնույթով:

Պլանի կենտրոնում փորձերի քանակը ընտրվում է այնպես, որ ապահովվի ունիֆորմ-պլանավորում: Պլանավորումը կոչվում է ունիֆորմ-ռոտատաբելային, եթե ստացված տեղեկությունը մշտապես մնում է $0 \le \beta \le 1$ միջակայքի սահմաններում, որտեղ՝ β-ն տեղեկատու եզրագծի շառավիղն է:

Ունիֆորմ-ռոտատաբելային պլանավորումը հնարավոր է, եթե λ որոշակի հաստատունը չգերազանցի մեկից.

$$\lambda = \frac{k(n_c - n_0)}{(k-2)n_c}, \tag{5.18.}$$

որտեղ՝ n_0-ն պլանի կենտրոնում փորձերի քանակն է (զրոյական կետերի քանակը), $n_c = N - n_0$, N –ը՝ փորձերի ընդհանուր քանակ, k –ն՝ գործոնների քանակը:

Երկուսից յոթ գործոններով երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն ռոտատաբելային պլանավորման մատրիցաների կառուցման անհրաժեշտ տեղեկությունները տրված են 5.10 աղյուսակում: k = 2 գործոնների համար երկրորդ կարգի ռոտատաբելային ունիֆորմ-պլանավորման մատրիցան ներկայացված է 5.11 աղյուսակում:

Աղյուսակ 5.10

Երկրորդ կարգի կենտրոնական կոմպոզիցիոն ռոտատաբելային մատրիցայի կառուցման տվյալներ

Գործոններ քանակը	Պլանի "միջուկը"	Միջուկի կետերի քանակը $n_я$	"Աստղանիշային" կետերի քանակը n_α	Զրոյական կետերի քանակը n_0	"Աստղանիշային" թևի α մեծությունը	Փորձերի ընդհանուր քանակը
2	2^2	4	4	5	1,414	13
3	2^3	8	6	6	1,682	20
4	2^4	16	8	7	2,000	31
5	2^5	32	10	10	2,378	52
5	2^{5-1}	16	10	6	2,000	32
6	2^6	64	12	15	2,828	91
6	2^{6-1}	32	12	9	3,378	53
7	2^7	128	14	21	3,363	163
7	2^{7-1}	64	14	14	2,828	92

Աղյուսակ 5.11

k = 2 ունիֆորմ-ռոտատաբելային պլանավորման մատրիցա

Փորձի համարը	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	1,414	0	0	2	0	y_5
6	+1	1,414	0	0	2	0	y_6
7	+1	0	1,414	0	0	2	y_7
8	+1	0	1,414	0	0	2	y_8
9	+1	0	0	0	0	0	y_9
10	+1	0	0	0	0	0	y_{10}
11	+1	0	0	0	0	0	y_{11}
12	+1	0	0	0	0	0	y_{12}
13	+1	0	0	0	0	0	y_{13}

Երկրորդ կարգի ռոտատաբելային պլանավորման մատրիցաները օրթոգոնալ չեն, այդ պատճառով ռեգրեսիոն գործակիցների հաշվարկման աշխատանքները բավականին աշխատատար են:

Խորհուրդ է տրվում նշված գործակիցները հաշվարկել հետևյալ բանաձևերով /7/.

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= \frac{A}{N}\left[2\lambda^2(k+2)\sum_{j=1}^{k} y_i - 2\lambda c\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_i\right],\\
b_i &= \frac{c}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_i,\\
b_{il} &= \frac{c^2}{N\lambda}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{lj} y_j,\\
b_{ii} &= \frac{A}{N}\left\{c^2\left[(k+2)\lambda - k\right]\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_i + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_i - 2\lambda c\sum_{j=1}^{N} y_i\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5.19.)$$

որտեղ

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2\lambda\left[(k+2)\lambda - k\right]},\\
C &= \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2}:
\end{aligned}\right\} \quad (5.20.)$$

Ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցների դիսպերսիան որոշվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$\left.\begin{aligned}
S^2\{b_0\} &= \frac{2A\lambda^2(k+2)}{N} S_y^2,\\
S^2\{b_i\} &= \frac{C}{N} S_y^2,\\
S^2\{b_{il}\} &= \frac{C^2}{\lambda N} S_y^2,\\
S^2\{b_{ii}\} &= \frac{AC^2\left[(k+1)\lambda - (k-1)\right]}{N} S_y^2:
\end{aligned}\right\} \quad (5.21.)$$

Հաշվարկներից հետո, վիճակագրական տեսակետից աննշան գործակիցները արտաքսվում են հավասարումից: Ստացված մոդելի համապատասխանությունը ստուգվում է Ֆիշերի չափանիշով.

$$F_p = \frac{S_{ag}^2}{S_y^2}:$$

Օպտիմալացման պարամետրի դիսպերսիան՝

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0}(y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1},$$

որտեղ՝ n_0 - ն պլանի կենտրոնի զուգահեռ փորձերի քանակն է, y_u -ն՝ u - րդ փորձում օպտիմալացման պարամետրի արժեքը, $\bar{y}$ – ը n_0 փորձերում օպտիմալացման պարամետրի միջին թվաբանական արժեքը, u –ն՝ պլանի կենտրոնում զուգահեռ փորձերի համարը:

S_{ag}^2 որոշելու համար հաշվարկում են

$$\left.\begin{aligned}
S_R &= \sum_{j=1}^{N}(y_j - \hat{y}_j)^2,\\
S_E &= \sum_{u=1}^{n_0}(y_u - \bar{y})^2,\\
\text{ապա}\quad S_{ag}^2 &= \frac{S_R - S_E}{f}
\end{aligned}\right\} \quad (5.23.)$$

որտեղ՝ $f = N - k - (n_0 - 1)$, k -ն վիճակագրական նշանակալի ռեգրեսիոն գործակիցների քանակը: Եթե $F_p < F_T$, ապա համապատասխանության հիպոթեզը հաստատվում է: Եթե հիպոթեզը չի հաստատվում, ապա անցնում ենք երրորդ կարգի պլանավորմանը (հավասարումներին):

5.5. Երկրորդ կարգի բազմանդամի օպտիմումի տիրույթի հետազոտումը

Երկրորդ կարգի պլանի իրականացման արդյունքում ստացվում է երկրորդ աստիճանի բազմանդամ հետևյալ տեսքով.

$$y = b_0 + \sum_{l\le i\le k} b_i x_i + \sum_{l\le i\le l\le k} b_{il} x_i x_l + \sum_{l\le i\le k} b_{ii} x_i^2$$

Երկրորդ աստիճանի հավասարումն այս տեսքով վերլուծելը բարդ է. այդ պատճառով ձևափոխումների միջոցով այն բերում են կանոնական տեսքի, որ նշանակում է կոորդինատական նոր համակարգի ընտրություն, որում հավասարումն ընդունում է ավելի հասարակ տեսք: Կանոնական ձևափոխման արդյունքում հավասարումը ձեռք է բերում ստանդարտ կանոնական հավասարման տեսք.

$$Y - Y_S = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + \ldots + B_{kk}X_k^2, \quad (5.24.)$$

որտեղ՝ Y -ը օպտիմալացման պարամետրի արժեքն է, Y_S –ը՝ նոր կոորդինատի սկզբնակետում օպտիմալացման պարամետրի արժեքը. X_1, X_2,..., X_k գործոնների գծային ֆունկցիայի կանոնական փոփոխականներն են, B_{11}, B_{22}, ..., B_{kk} կանոնական տեսքում ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցներն են:

Կանոնական ձևափոխման առաջին փուլում կատարվում է կոորդինատների սկզբնակետերի տեղափոխում արձագանքների մակերևույթի կենտրոն: Այս կետի կոորդինատների որոշման համար ելակետային հավասարումը դիֆերենցում ենք ըստ անկախ փոփոխականների: Մասնակի ածանցյալները հավասարեցնելով զրոյի, ստացվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=0,\frac{\partial y}{\partial x_2}=0,\dots,\frac{\partial y}{\partial x_k}=0: \qquad (5.25.)$$

Արձագանքների ֆունկցիան երկրորդ աստիճանի բազմանդամով մոտարկելուց և այն դիֆերենցելով ըստ առանձին անկախ փոփոխականների՝ ստացվում է K գծային հավասարումների համակարգ: Այդ հավասարումների համակարգի որոշիչի զրոյի դեպքում արձագանքների մակերևույթը կենտրոն չի ունենում: Այս դեպքում կոորդինատների սկիզբը չեն տեղափոխում կամ տեղափոխում են օպտիմալացման պարամետրի լավագույն արժեքի կետ:

Եթե մակերևույթը կենտրոն ունի, այսինքն համակարգի որոշիչը մեկից տարբեր է, ապա կոորդինատների սկիզբը տեղափոխում են նոր կենտրոն: Լուծելով հավասարումների համակարգը նախնական համակարգի կոորդինատներում՝ գտնում են մակերևույթի S կենտրոնի կոորդինատները: Կոորդինատական համակարգում մակերևույթի S կենտրոն զուգահեռ տեղափոխման ժամանակ ելակետային հավասարումից անհետանում են գծային էֆեկտ ունեցող անդամները, և փոփոխվում է ազատ անդամը: Ելակետային հավասարման մեջ տեղադրելով S կենտրոնի կոորդինատների ստացված արժեքները՝ գտնում են S կենտրոնում օպտիմալացման պարամետրի Y_S արժեքը:

Կոորդինատների զուգահեռ տեղափոխման դեպքում ելակետային հավասարումն ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$Y=Y_S+\sum_{1\le i\le l\le k} b_{il}x_ix_l+\sum_{1\le i\le k} b_{ii}x_i^2: \qquad (5.26.)$$

Կանոնական ձևափոխման երկրորդ փուլում կոորդինատական նոր կենտրոնի առանցքները պտտում են մինչև ուսումնասիրվող արձագանքների ֆունկցիայի երկրաչափական մակերևույթի գլխավոր առանցքների հետ համընկնելը: Կոորդինատական առանցքների պտտման դեպքում անհետանում են փոխներգործության էֆեկտներով անդամները, և փոխվում են հավասարումների երկրորդ կարգի անդամների գործակիցները:

Կոորդինատական առանցքների պտտման ժամանակ ազատ անդամը չի փոփոխվում: Այս դեպքում ստացվում է հետևյալ տեսքի հավասարում.

$$Y-Y_S=B_{11}X_1^2+B_{22}X_2^2+\dots+B_{kk}X_k^2: \qquad (5.27.)$$

Նոր կոորդինատական կենտրոնում առանցքների պտտման անկյունը որոշվում է

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{b_{12}}{b_{11}-b_{22}}$$ բանաձևով:

$B_{11},B_{22},\dots,B_{kk}$ գործակիցների որոշման համար անհրաժեշտ է լուծել բնութագրող հավասարումը.

$$f(B)=\begin{vmatrix} b_{11}-B & \frac{1}{2}b_{12} & \dots & \frac{1}{2}b_{1k} \\ \frac{1}{2}b_{21} & b_{22}-B & \dots & \frac{1}{2}b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}b_{k1} & \frac{1}{2}b_{k2} & \dots & b_{kk}-B \end{vmatrix}:$$

Այս հավասարման արմատները կլինեն B_{ii} ռեգրեսիայի որոնելի գործակիցները: Օրինակ՝ անհրաժեշտ է կանոնական տեսքի բերել հետևյալ հավասարումը.

$$Y=40-20x_1-30x_2+8x_1x_2+12x_1^2+8x_2^2:$$

Ածանցելով ըստ առանձին փոփոխականների և հավասարեցնելով զրոյի, ստանում ենք.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=-20+8x_2+24x_1=0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=-30+8x_1+16x_2=0:$$

Համակարգի որոշիչը հաշվում ենք այս բանաձևով.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 16 \end{vmatrix}=384-64=320:$$

Քանի որ որոշիչը հավասար չէ զրոյի, ապա հետազոտվող մակերևույթն ունի կենտրոն: S կենտրոնի x_{1S} և x_{2S} կոորդինատները որոշում ենք

$$x_{1S}=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 8 \\ 30 & 16 \end{vmatrix}}{320}=\frac{80}{320}=0{,}25,$$

$$x_{2S}=\frac{\begin{vmatrix} 24 & 20 \\ 8 & 30 \end{vmatrix}}{320}=\frac{560}{320}=1{,}75$$ բանաձևերով:

Տեղադրելով x_{1S} և x_{2S} արժեքները գտնում ենք օպտիմալացման պարամետրը.

$$Y_S=40-20\cdot0{,}25-30\cdot1{,}75+8\cdot0{,}25\cdot1{,}75+12(0{,}25)^2+8(1{,}75)^2=11{,}25:$$

Կոորդինատական առանցքների զուգահեռ տեղափոխումից հետո հավասարումը ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$Y = 11{,}25 + 8\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 12\tilde{x}_1^2 + 8\tilde{x}_2^2:$$

Կոորդինատական առանցքների պտտման անկյունը.

$$tg2\alpha = \frac{b_{12}}{b_{11} - b_{22}} = \frac{8}{12-8} = 2{,}0,$$

$$2\alpha = 63°48' \alpha = 31°54':$$

B_{11} և B_{22} գործակիցները հաշվարկելու համար լուծենք բնութագրող հավասարումը.

$$f(B) = \begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2}b_{12} \\ \frac{1}{2}b_{21} & b_{22} - B \end{vmatrix} = 0,$$

$$f(B) = \begin{vmatrix} 12 - B & 4 \\ 4 & 8 - B \end{vmatrix} = B^2 - 20B + 80 = 0:$$

Լուծելով հավասարումը, ստանում ենք հետևյալ արմատները. B_{11}= =14,472 և B_{22}= 5,528. հաշվարկի ճշտությունը կարելի է ստուգել $\sum\limits_{1 \le ik} b_{ii} = \sum\limits_{1<i<k} B_{ii}$ հավասարությունից:

Այսպիսով, որոնելի հավասարումը ստանում է հետևյալ կանոնական տեսքը.

$$Y - 11{,}25 = 14{,}472X_1^2 + 5{,}528X_2^2:$$

Եթե B_{ii} բոլոր գործակիցները տարբերվում են զրոյից, ապա հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.

1. բոլոր գործակիցները $B_{ii} < 0$ ապա կենտրոնից ցանկացած ուղղությամբ գործոնների փոփոխումը նվազեցնում է օպտիմալացման պարամետրը,
2. բոլոր գործակիցները $B_{ii} > 0$ ապա կենտրոնից ցանկացած ուղղությամբ գործոնների տեղաշարժը մեծացնում է օպտիմալացման պարամետրը,
3. գործակիցների մի մասը $B_{ii} < 0$, իսկ մյուս մասը՝ $B_{ii} > 0$ օպտիմալացման պարամետրի մեծացման համար անհրաժեշտ է կենտրոնից շարժվել այնպես, որ $B_{ii} \le 0$ գործակիցների համար x_i արժեքները դառնան զրո, այսինքն ֆունկցիայի մաքսիմումը պետք է փնտրել $B_{ii} > 0$ առանցքների երկարությամբ և հակառակը: Պարամետրի նվազեցման համար անհրաժեշտ է շարժվել $B_{ii} < 0$ առանցքների ուղղությամբ:

$k \le 3$ դեպքում ռեգրեսիոն հավասարման կանոնական ձևափոխումից հետո հեշտ է որոշել, թե ուսումնասիրվող արձագանքների ֆունկցիան երկչափական ինչպիսի տեսք ունի:

K=2 ուսումնասիրվող ֆունկցիայի երկրաչափական տեսքը կարելի է ներկայացնել եզրագծի կորերի տեսքով: Հնարավոր է եզրագծերի չորս տեսակ (նկ. 5.3): Յուրաքանչյուր գիծ իրենից ներկայացնում է հարթության վրա արձագանքների մակերևույթի հատույթների պրոեկցիաներ y_1, y_2, y_3, y_4 մակարդակներով: Այսպիսի գծերը կոչվում են հավասար արձագանքների գծեր, քանի որ յուրաքանչյուր գիծ համապատասխանում է օպտիմալացման պարամետրի որոշակի և հաստատուն արժեքի:

Նկարում (5.3 ա) բերված էլիպսները համապատասխանում են արձագանքների այն մակերևույթին, որի էքստրեմումը գտնվում է S կենտրոնում: B_{11} և B_{22} գործակիցներն ունեն նույն նշանը: Եթե գործակիցները բացասական են, ապա պատկերների կենտրոնը կոչվում է մաքսիմում, իսկ դրականի դեպքում՝ մինիմում: Էլիպսը ձգված է այն առանցքի ուղղությամբ, որի գործակիցը բացարձակ արժեքով փոքր է:

Հիպերբոլաները (նկ. 5.3 բ) համապատասխանում են մինիմաքս տեսակի արձագանքների մակերևույթին: B_{11} և B_{22} գործակիցներն ունեն տարբեր նշաններ:

Օպտիմալացման պարամետրը պատկերի կենտրոնից մի առանցքով շարժվելիս ավելանում է, մյուս առանցքով շարժվելիս՝ նվազում:

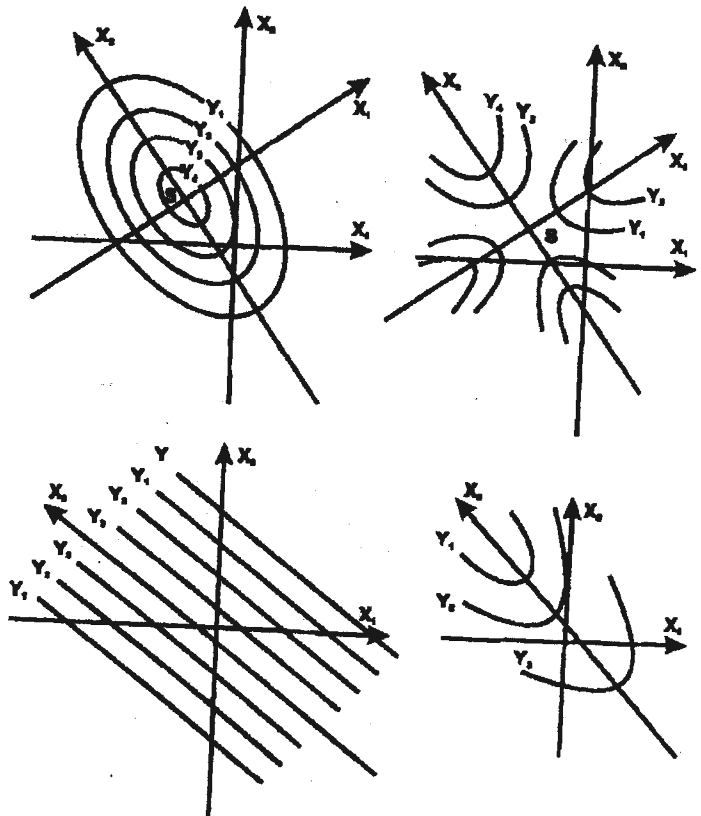
Զուգահեռ գծերը (նկ. 5.3գ) համապատասխանում են հաստատուն աճող արձագանքի մակերևույթին: Եթե B_{22} գործակիցը հավասար է զրոյի, ապա կենտրոնը կարող է համընկնել x_2 առանցքի ցանկացած կետ:

Պարաբոլներին (նկ. 5.3դ) համապատասխանում է աստիճանաբար աճող տեսակի արձագանքների մակերևույթ: Երբ B_{22} հավասար է զրոյի, պատկերի կենտրոնը գտնվում է անվերջության մեջ, կոորդինատների սկզբնակետը տեղակայվում է x_2 առանցքի վրա, փորձերի կենտրոնի մոտ՝ C կետում և ստանում պարաբոլների հավասարման տեսք.

$$Y - Y_c = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2,$$

որտեղ B_{22} գործակիցը որոշում է աճի շեշտակիությունը, այսինքն X_2 առանցքով օպտիմալացման պարամետրի արագության մեծացումը:

Նույն ձևով. կարելի է վերլուծել նաև K=3 թվով գործոններով երկրորդ կարգի հավասարումներով ներկայացվող արձագանքների մակերևույթները (նկ. 5.4): Կանոնական հավասարման բոլոր B_{ii} գործակիցների նույն նշանի դեպքում օպտիմումի տիրույթը բնութագրվում է պտտվող էլիպսոիդով (նկ. 5.4ա), որի կենտրոնում է էքստրեմումը: Երկու գործակիցների նույն նշանի դեպքում, երբ երրորդը մոտ է զրոյի, օպտիմումի տիրույթը կարող է բնութագրվել էլիպտիկ գլանի տեսքով (նկ. 5.4բ): Այս դեպքում գլանի առանցքը համընկնում է փոքր նշանակալիության գործակցի առանցքին: Մեկ գործակիցը զրոյին մոտ լինելու դեպքում կանոնական հավասարման օպտիմումի տիրույթը կարող է բնութագրվել նաև էլիպտական պարաբոլոիդով (նկ. 5.4ե): Պատկերների կենտրոնը այս դեպքում գտնվում է անվերջությունում: Եթե կանոնական հավասարման գործակիցներից մեկի արժեքը հակառակ է երկու մնացածներին, ապա օպտիմումի տիրույթը բնութագրվում է մեկ կամ երկխոռոչ հիպերբոլոիդներով (նկ. 5.4 գ.դ): Այն դեպքում, երբ կանոնական հավասարման երկու գործակիցները մոտ են զրոյի, օպտիմումի տիրույթը կարող է բնութագրվել զուգահեռ հարթությունների խմբաքանակով, որոնցից մեկը համապատասխանում է պարամետրի ամենամեծ արժեքին:



Նկ. 5.3. K=2 գործոնների դեպքում երկրորդ կարգի հավասարման օպտիմումի տիրույթը բնութագրող եզրագծեր.
ա) էքստրեմում, բ) մինիմաքս, գ) հաստատուն աճող,
դ) աստիճանական աճող:

$k > 3$ դեպքում արձագանքների ֆունկցիայի երկրաչափական տեսքի դիտողական ներկայացումը անհնարին է՝ բազմաչափ տարածության ընկալման մարդու հնարավորությունների բացակայության պատճառով: Երկրորդ կարգի հավասարումով նկարագրվող արձագանքների մակերևույթների ամբողջ բազմությունը կարելի է ներկայացնել մակերևույթների հետևյալ երեք տեսակներով՝

1. էքստրեմում-մաքսիմում կամ մինիմում ունեցող մակերևույթներ (նկ. 5.3ա, 5.4ա),
2. մինիմաքս տեսակի մակերևույթներ (նկ. 5.3բ, նկ. 5.4գ դ),
3. աստիճանաբար աճող տեսակի մակերևույթներ (նկ. 5.3գ դ, 5.4 ե զ):

Արձագանքների մակերևույթի առաջին տեսակի դեպքում արտակարգ խնդրի լուծումը ավարտվում է հավասարումը կանոնական տեսքի բերելով:

Փորձարարին մնում է մի քանի փորձեր կատարել պատկերի կենտրոնում և համոզվել, որ փորձնական տվյալները բավական լավ համընկնում են ռեգրեսիոն հավասարմամբ որոշված արժեքներին: Իրավիճակը ավելի բարդ է, երբ մակերևույթը ներկայացվում է երկրորդ կամ երրորդ կարգի տեսքերով: Այս դեպքում պետք է պայմանական էքստրեմումը փնտրել գործոնային տիրույթի այն հատվածներում, որտեղ կատարվել են գիտափորձերը:

Խնդիր: Նորոգվող մեքենամասերի վերականգնված մետաղական շերտի մանրակարծրությունը ծածկույթի ֆիզիկամեխանիկական կարևոր հատկություններից մեկն է, որը մեր խնդրի համար ընդունվել է որպես օպտիմալացման պարամետր:

Գիտափորձերով ապացուցվել է, որ պողպատապատմամբ աճեցված մետաղական շերտի մանրակարծության վրա մեծ ազդեցություն են թողնում հոսանքի բանվորական խտությունը $D_k(x_1)$, էլեկտրոլիտի ջերմաստիճանը՝ $T(x_2)$ և ջրածնային ցուցիչը՝ p^H :

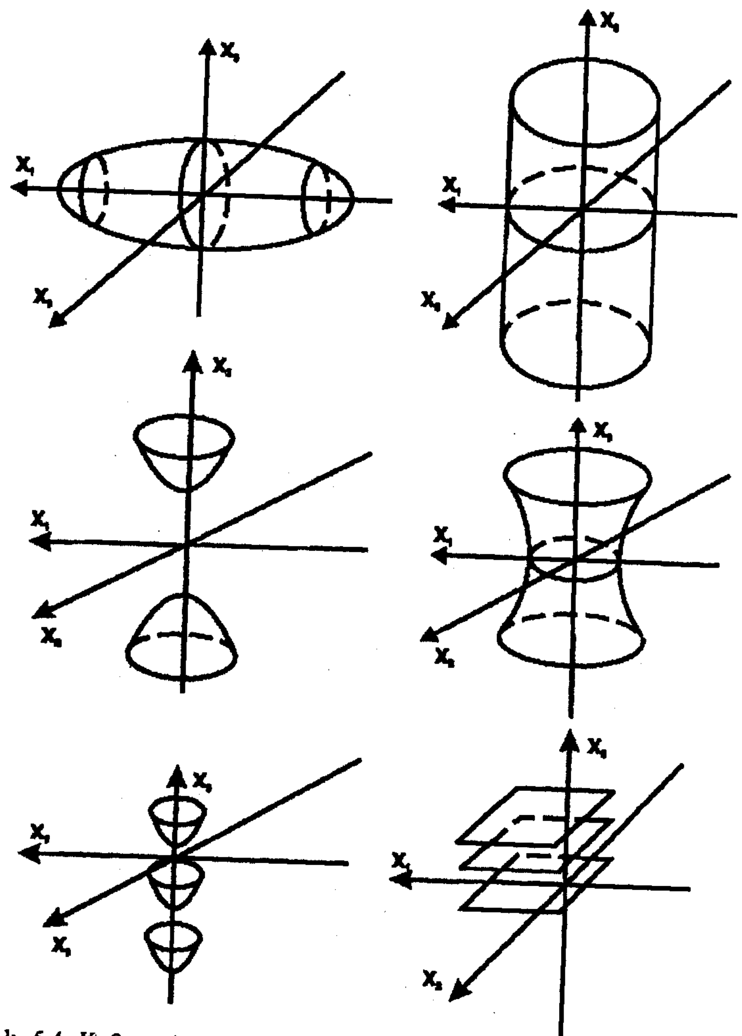
Գիտափորձերը իրականացվել են ըստ Բոկս-Բենկինի-3 մատրիցայի (աղ. 5.7), գործոնների մակարդակները և տարափոխման միջակայքերը ներկայացված են 5.12 աղյուսակում:

Աղյուսակ 5.12

Գործոնի մակարդակը և տարափոխման միջակայքերը

Մակարդակները և տարափոխման միջակայքերը	Գործոնները	x_1 ($Ա/Մ^2$)	x_2 (^0k)	x_3 p^H
տարափոխման միջակայքը		500	20	0,6
վերին մակարդակ +1		2500	333	1,8
հիմնական մակարդակ 0		2000	313	1,2
ստորին մակարդակ -1		1500	293	0,6

Գիտափորձերը կատարվել են ըստ մատրիցայի և կրկնօրինակվել երկու անգամ:



Նկ. 5.4. K=3 գործոններով երկրորդ կարգի հավասարումով ներկայացված օպտիմումի տիրույթները բնութագրող եռաչափ եզրագծով մի քանի մակերևույթներ. ա) պտտման էլիպսոիդ, բ) էլիպտիկ գլան, գ) երկխոռոչ հիպերբոլոիդ, դ) միախոռոչ հիպերբոլոիդ, ե) զուգահեռ հարթություններ:

Աղյուսակ 5.13

Գիտափորձերի արդյունքների աղյուսակ

Փորձի համարը	Կրկնօրինակման համարը I y_i	II y_i	Գիտափորձերի արդյունքների միջին արժեքը $\bar{y}_{ui}$	$S_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(y_i - \bar{y}_u)^2}$
y_1	5250	5300	5275	7,07
y_2	5470	5390	5430	8,95
y_3	5050	5170	5110	10,95
y_4	5240	5290	5265	7,07
y_5	5345	5450	5397,5	10,25
y_6	5300	5370	5335	8,37
y_7	5225	5130	5207,5	5,92
y_8	5160	5130	5145	5,48
y_9	5220	5700	5210	4,72
y_{10}	5150	5170	5160	4,72
y_{11}	5400	5390	5395	3,16
y_{12}	5370	5300	5335	8,37
y_{13}	5320	5300	5310	4,72

Կասկածելի կամ կտրուկ արտահայտված արդյունքները ստուգում ենք հարաբերակցությունից /3,5/.

$$U_{max} = \frac{y_{i\,min} - \bar{y}}{S_i},$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{13} \bar{y}_{ui}}{13} = 5275,$$

$$U_{max} = \frac{5470 - 5275}{8{,}95} = 21{,}79,$$

$$U_{min} = \frac{\bar{y} - y_{i\,min}}{S_i} = \frac{5275 - 5050}{10{,}95} = 20{,}55:$$

Քանի որ $U_{i\,max} < \beta$ և $U_{i\,min} < \beta$, ուստի փորձերի արդյունքները պետք է համարել նորմալ կամ ընդունելի: Հաստատելով փորձերի համասեռության վարկածը, 5.14 բանաձևերով որոշում ենք ռեգրեսիոն հավասարման գործակիցները.

$b_0 = 5310; b_1 = 88{,}75; b_2 = -83{,}75; b_3 = 29{,}375;$

$b_{11} = -21{,}875; b_{22} = -18{,}125; b_{33} = -16{,}875;$

$b_{13} = 0; b_{12} = 0; b_{23} = -2,$

Ռեգրեսիոն գործակիցները տեղադրելով (5.12) հավասարման մեջ, մաթեմատիկական մոդելը ձեռք կբերի հետևյալ տեսքը.

$$y = 5310 + 88{,}75x - 83{,}75x_2 + 29{,}375x_3 - 21{,}875x_1^2 - 18{,}125x_2^2 -$$
$$- 16{,}875x_3^2 - 2{,}5x_2x_3$$

Ստացված գործակիցների նշանակալիությունը ստուգվում է վստահելի սահմանների հաշվարկումով (3.32): Գիտափորձերի վերարտադրելիության S_y^2 դիսպերսիան հաշվարկվել է հետևյալ արտահայտությամբ.

$$S^2\{y\} = \frac{1}{N} S_i^2,$$

$$\text{իսկ } S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y}\right)^2}{n-1},$$

$$y_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ui} :$$

$N = 13; n = 2$ խնդրի համար ստանում ենք

$S_i^2 = 26225{,}5; \quad S^2\{y\} = 2017{,}346 :$

Ռեգրեսիոն գործակիցների դիսպերսիան.

$$S^2\{b_i\} = \frac{1}{N \cdot n}, \quad S_y^2 = \frac{2017{,}346}{26} = 7{,}76 :$$

Ստյուդենտի հաշվարկային t_p չափանիշները.

$$t_p = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}$$

$$t_{pb_0} = \frac{5310}{2{,}786} = 1906{,}2; \quad t_{pb_1} = \frac{88{,}75}{2{,}786} = 31{,}86,$$

$$t_{pb_2} = \frac{83{,}75}{2{,}786} = 30{,}06; \quad t_{pb_3} = \frac{29{,}375}{2{,}786} = 10{,}54,$$

$$t_{pb_{11}} = \frac{21{,}875}{2{,}786} = 7{,}86; \quad t_{pb_{22}} = \frac{18{,}125}{2{,}786} = 6{,}51,$$

$$t_{pb_{33}} = \frac{16{,}875}{2{,}78} = 6{,}06; \quad t_{pb_{23}} = \frac{2{,}5}{2{,}78} = 0{,}90 :$$

Ստյուդենտի չափանիշի աղյուսակային արժեքը $t_T = 2{,}16$ (աղյուսակ 3.3), $f = N(n - 1) = 13$):

Քանի որ միայն $t_{pb_{23}} < t_T$, ապա ռեգրեսիոն հավասարումից արտաքսվում է միայն b_{23} = -2,5 գործակիցը: Այդ դեպքում հավասարումը ձեռք է բերում հետևյալ տեսքը.

$$y = 5310 + 88{,}75x_1 - 83{,}75x_2 + 29{,}375x_3 - 21{,}875x_1^2 - 18{,}125x_2^2 - 16{,}875x_3^2 :$$

Ռեգրեսիոն հավասարման համապատասխանության ստուգման համար լրացնենք (5.14) աղյուսակը, 3.7 աղյուսակի նման

Աղյուսակ 5.14

Երկրորդ կարգի ռեգրեսիոն հավասարման դիսպերսիոն վերլուծության սխեմա

	Գումարները	Ազատության աստիճանները	Դիսպերսիաները	Դիսպերսիոն հարաբերակցությունը	$f_\alpha(f_1 f_2)$
(yy)	$3{,}618\ 10^8$	13	--	--	--
S_0	$3{,}617\ 10^8$	1	$3{,}617\ 10^8$	358603,12	4,67
S_{10}	9453,1248	3	3151,0416	3,124	3,41
S_{210}	2400155	6	400025,83	396,586	2,92
S_{LF}	4680618,1	3	1560206 0	1546,79	3,41
S_{bocn}	26225,499	13	1008,673	--	--

Ստացված մաթեմատիկական մոդելը համապատասխանում է ուսումնասիրվող գործընթացին, քանի որ

$$F_{agk} = \frac{S_{LF}}{f_{LF}} : S^2\{\bar{y}\} < F_\alpha(f_1; f_2),$$

$$-1546{,}79 < 3{,}41 :$$

Ռեգրեսիոն հավասարումը ստացված տեսքով վերլուծելը բարդ է, այդ պատճառով այն բերենք կանոնական տեսքի:

Կանոնական ձևափոխման համար որոշենք կոորդինատական նոր կենտրոնի կոորդինատները:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 88{,}75 - 47{,}750x_1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -83{,}75 - 35{,}350x_2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 29{,}375 - 33{,}750x_3 :$$

Մասնակի ածանցյալները հավասարեցնելով զրոյի, ստանում ենք S կենտրոնի կոորդինատները՝ $x_{1S} = 2{,}0285$, $x_{2S} = -2{,}3105$, $x_{3S} = 0{,}87037$:

Ստացված արժեքները տեղադրելով ռեգրեսիոն հավասարման մեջ, գտնում ենք կոորդինատական նոր սկզբնակետում օպտիմալացման պարամետրը՝ $y_S = 5509{,}55$:

B_{11}; B_{22}; B_{33} - գործակիցների որոշման համար լուծենք հետևյալ բնութագրիչ հավասարումը.

$$f(B) = \begin{pmatrix} -21{,}875 - B & 0 & 0 \\ 0 & -18{,}125 - B & 0 \\ 0 & 0 & -16{,}875 - B \end{pmatrix} = 0,$$

$$(-21{,}875 - B)(-18{,}125 - B)(-16{,}875 - B) = 0$$

$$B_{11} = -21{,}875;\ B_{22} = -18{,}125;\ B_{33} = -16{,}875:$$

Այսպիսով, հավասարումը ձեռք է բերում հետևյալ տեսքը.

$$y - 5509{,}547 = -21{,}875x_1^2 - 18{,}125x_2^2 - 16{,}875x_3^2:$$

Ստացված կանոնական հավասարման արձագանքների մակերևույթները վերլուծելիս կարելի է նշել, որ գործոնների թիվը հավասար է երեքի (K=3) և B_{11}, B_{22}, B_{33} գործակիցները հավասարման մեջ ունեն միևնույն նշանը, ուստի օպտիմումի տիրույթը բնութագրվում է պտտվող էլիպսոիդով, որի էքստրեմումը գտնվում է կենտրոնում: Երկրաչափական ինտերպոլյացիայի օգնությամբ, երբ գործոններից մեկը ունի հաստատուն արժեք (-1, 0, +1), կառուցենք ռեգրեսիոն հավասարման արձագանքների մակերևույթների կորերը.

Երբ $x_1 = -1$ -ի հավասարումը ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$y = 5308{,}904 - 18{,}125x_2^2 - 16{,}875x_3^2,$$

$$x_1 = 0$$

$$y = 5419{,}529 - 18{,}125x_2^2 - 16{,}875x_3^2,$$

$$x_1 = +1$$

$$y = 5486{,}404 - 18{,}125x_2^2 - 16{,}875x_3^2,$$

$$x_2 = -1$$

$$y = 5478{,}428 - 21{,}875x_1^2 - 16{,}875x_3^2,$$

$$x_2 = 0$$

$$y = 5412{,}801 - 21{,}875x_1^2 - 16{,}875x_3^2,$$

$$x_2 = +1$$

$$y = 5310{,}920 - 21{,}875x_1^2 - 16{,}875x_3^2,$$

$$x_3 = -1$$

$$y = 5540{,}514 - 21{,}875x_1^2 - 18{,}125x_2^2,$$

$$x_3 = 0$$

$$y = 5496{,}760 - 21{,}875x_1^2 - 18{,}125x_2^2,$$

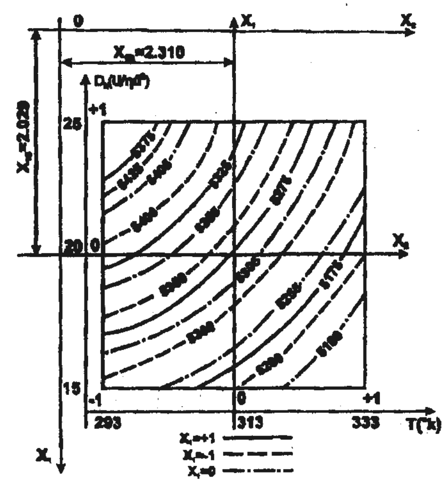
$$x_3 = +1$$

$$y = 5509{,}264 - 21{,}875x_1^2 - 18{,}125x_2^2:$$

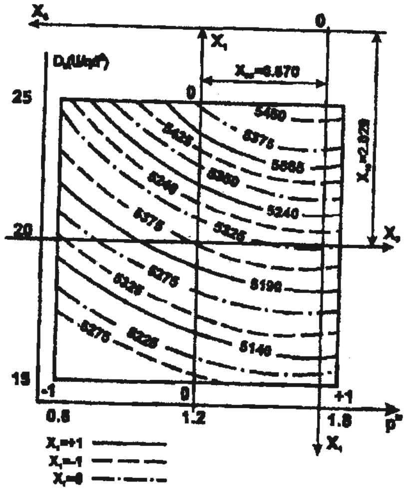
Գրաֆիկները կառուցելուց հետո կոորդինատական առանցքները տեղափոխում ենք համապատասխանաբար $x_{1S} = 2{,}029$; $x_{2S} = -2{,}310$; $x_{3S} = 0{,}820$ (նկ. 5.5, 5.6, 5.7):

Ստացված ռեգրեսիոն հավասարումները և կառուցված գրաֆիկները հնարավորություն են տալիս անելու հետևյալ եզրակացությունները.

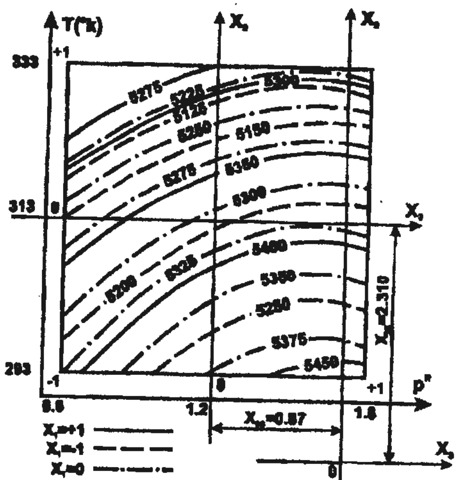
1. մանրակարծրության վրա ամենամեծ ազդեցություն թողնում են հոսանքի խտությունը, էլեկտրոլիտի խտությունը և էլեկտրոլիտի ջրածնային ցուցիչը
2. գործոնների գլխավոր էֆեկտները՝ $b_1 = 88{,}75$, $b_2 = -83{,}75$, $b_3 = 29{,}375$ ունեն բացարձակ մեծ արժեքներ, այդ պատճառով գործոնները -1 մակարդակից +1 մակարդակի անցնելիս մանրակարծրությունը նկատելի փոփոխվում է,
3. առավել որոշակի կարելի է ասել, որ հոսանքի խտության ավելացման հետ մանրակարծրությունը մեծանում է, էլեկտրոլիտի ջերմաստիճանի ավելացմամբ՝ փոքրանում, իսկ ջրածնային ցուցիչի ավելացման հետ մանրակարծրությունը միջակայքի միջին մասում ունի առավելագույն արժեք:



Նկ. 5.5. Երկաթ-նիկելային ծածկույթի մանրակարծության փոփոխության գրաֆիկների խումբ՝ կախված հոսանքի բանվորական խտությունից (x_1) և էլեկտրոլիտի ջերմաստիճանից (x_2):



Նկ. 5.6 երկաթ-նիկելային ծածկույթի մանրակարծրության փոփոխության գրաֆիկների խումբ՝ կախված հոսանքի բանվորական խտության (x_1) և էլեկտրոլիտի ջրածնային ցուցիչից (x_3):



Նկ. 5.7 Երկաթ-նիկելային ծածկույթի մանրակարծրության փոփոխության գրաֆիկների խումբ՝ կախված էլեկտրոլիտի ջերմաստիճանից (x_2) և ջրածնային ցուցիչից (x_3):

6. Նմանության և չափականության տեսության օգտագործումը գործընթացների մոդելավորման նպատակով

Արդյունաբերության, գյուղատնտեսության և շատ այլ բնագավառներում գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ հաճախ շարադրված (§2) սխեմայով փորձերի թվի ընտրությունը սպասվելիք արդյունքը չի տալիս:

Այսպես, օրինակ՝ «Հող-գութան» համակարգի մուտքի պարամետրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ տվյալ խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել մինչև 15 գործոններ, որոնցից են հողի ֆիզիկատեխնոլոգիական հատկությունները, իրանի և գութանի պարամետրերը, վարի խորությունը և համակարգի արագությունը և այլն:

Նման գիտափորձերի պլանավորման ժամանակ ցանկալի արդյունք չի տալիս նաև մասնատված պատասխանների և ոչ մի սխեմա, ուստի մշակվել են մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս առանց կրճատելու գործոնների թիվը կրճատել փորձերի քանակը: Այս կարգի խնդիրների լուծման նպատակով բավական դրական արդյունք է տալիս չափականության կիրառությունը:

Չափականության տեսության էությունն այս է, առանձին գործոններ միավորվում են անչափական համալիրի տեսքով: Այդ նպատակով ընդունվում են համակարգի անկախ հիմնական միավորներ երկարությունը՝ L, ժամանակը՝ T, և զանգվածը՝ M: Ինչ խոսք, կարելի է կառուցել նաև այլ համակարգեր, ընտրելով այս կամ այն, իրարից անկախ մեխանիկական մեծությունների չափման միավորներ: Օրինակ՝ ընտրենք հետևյալ երեք չափական մեծությունները B (գութանի ընդգրկման լայնություն), ρ (հողի խտություն) և v (արագություն):

Բերված երեք մեխանիկական մեծությունների անկախության պայմանն այն է, որ այդ մեծությունների չափական ցուցիչներից կազմված որոշիչը չհավասարվի զրոյի.

$$\Delta = \begin{array}{r} \\ B \rightarrow \\ \rho \rightarrow \\ \nu \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} L & T & M \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0:$$

Ընդհանուր ձևով այդ պայմանը կարտահայտվի հետևյալ որոշիչով՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Նմանության տեսության մեջ մեծագույն դեր են խաղում մեծությունների անչափական համալիրները, այսպես կոչված՝ նմանության չափանիշները, որոնք նշանակվում են հունարեն π տառով, օրինակ՝ $\frac{Vt}{l} = \pi_1$ և այլն:

Նմանության չափանիշները օգտագործվում են որպես ուսումնասիրվող համակարգի պարամետրեր և փոփոխականներ: Նշենք նաև, որ չափական մեծություններից կազմվում են իրարից անկախ նմանության չափանիշներ թվով n - r, որտեղ r - մատրիցայի կարգն է: Անհրաժեշտ է իմանալ նաև, որ մատրիցայի կարգը չի կարող մեծ լինել ընտրված չափական համակարգի միավորների թվից, քանի որ մատրիցայի տողերի թիվը հավասար է հիմնական միավորների թվին:

Անչափական համալիրների π_i պայմանի համար անհրաժեշտ է հավասարման տեսքով գրել տվյալ մեծության ցուցիչի չափողականությունը և այն բազմապատկել հիմնական փոփոխականների չափողականությանը՝ $B-[L]^\alpha$, $\rho-[ML^{-3}]^\beta$, $g[LT^{-2}]^\gamma$: Ընդհանրապես, ազատ անկման արագացումը որպես փոփոխական գործոն ընտրվում է այլ պատճառով, որ մեքենայի շարժման ժամանակ տեղի ունի զանգվածի տեղաշարժի արագացումով:

Այսպիսով, օգտագործելով նշված տեսության տարրերը, օրինակով կստանանք վարի գործընթացի մոդելավորումը:

Վարի էներգետիկական գնահատման նպատակով արտաքին գործոնների մեջ, բացի հողային պայմաններից, ընդգրկենք գութանի իրանի պարամետրը: Նման կարգով խնդրի լուծումը հնարավորություն է տալիս կատարելու գութանի էներգետիկական գնահատում դեռ նախագծման փուլում, առանց նախնական հետազոտության: Այս խնդրի լուծման հիմքում ընդունված է Բանախոյի կողմից առաջարկված բանաձևը՝ $P = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, V)$, որտեղ՝ λ_1 -ն ցույց է տալիս հողի հատկանիշները, λ_2 -ը՝ գութանը, որպես նյութական կետ և V -ն նյութական կետի շարժման արագությունը:

Հողի հատկությունները արտահայտվում են հետևյալ մեծություններով. ներքին շփման գործակից՝ $tg\varphi^1$, ներքին կցման ուժեր՝ $C\left[\frac{\text{Ն}}{\text{մ}}\right]$, խտություն՝ $\rho\left[\frac{\text{կգ}}{\text{մ}^3}\right]$, ամրություն՝ $\sigma = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\text{Ն}}{\text{սմ}^2}\right]$ (E -ն հողի դեֆորմացիայի գործակիցն է, իսկ μ -ը՝ Պուասոնի գործակիցը):

Գութանի կառուցվածքային պարամետրերի մեջ են մտնում՝ ε - խոփի կազմած անկյունը ակոսի հատակի հետ, γ_0 - խոփի կտրող եզրի կազմած անկյունը ակոսապատի հետ, γ_i - թևի ծնիչների կազմած անկյունը

ակոսապատի հետ, B_p - ընդգրկման իրական լայնությունը, B - իրանի ընդգրկման լայնությունը, H - իրանի բարձրությունը, l - ուղղորդ կորի հորիզոնական պրոյեկցիան, Q - իրանի կշիռը [Ն]: Հաշվի է առնվում նաև ազատ անկման արագացումը - g, վարի խորությունը - a և շարժման արագությունը:

Այսպիսով՝ գութանի քարշային դիմադրությունը կարտահայտվի հետևյալ տեսքով.

$$P = \varphi\left(B, B_p, l, H, \varepsilon, \gamma_0, \gamma_i, \rho, c, \sigma, tg\varphi^1, g, v, a, Q\right): \qquad (6.1.)$$

Որպես անկախ չափական մեծություններ ընտրում ենք B_p, ρ եւ v, որոնց ցուցիչների որոշիչը, իրոք, հավասար չէ զրոյի: Այսպիսով, (6.1.) հավասարման մեծությունները՝ B_p, ρ և V, նոր համակարգում կարտահայտվեն հետևյալ տեսքով.

$$\pi_B = [L][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_l = [L][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_H = [L][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_\varepsilon = \varepsilon,$$
$$\pi_{\gamma_0} = \gamma_0,$$
$$\pi_{\gamma_i} = \gamma_i,$$
$$\pi_c = [MT^{-2}][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_\sigma = [ML^{-1}T^{-2}][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_{\varphi^1} = tg\varphi^1,$$
$$\pi_g = [LT^{-2}][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_a = [L][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma,$$
$$\pi_Q = [MLT^{-2}][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-1}]^\gamma:$$

Անչափական համալիրի կազմավորման պայմանը համապատասխան հիմնական չափերի [M, L, T] գործակիցների գումարն է՝ $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, ուստի, π_B - ի համար կստանանք.

$$M \rightarrow \beta = 0,$$
$$T \rightarrow \gamma = 0,$$
$$L \rightarrow 1 + \alpha - 3\beta + \gamma = 0 \text{ կամ } \alpha = -1 \text{ (քանի որ } \beta = \gamma = 0\text{)}:$$

Այսպիսով, $\pi_B = \frac{B}{B_p}$ համապատասխան կարգով բոլոր գծային մեծությունների համար կստանանք.

$\pi_l = \frac{l}{B_p}$, $\pi_H = \frac{H}{B_p}$, $\pi_a = \frac{a}{B_p}$, ինչպես նաև՝ $\pi_\varepsilon = \varepsilon$, $\pi_{\gamma_0} = \gamma_0$, $\pi_{\gamma_i} = \gamma_i$, $\pi_{\varphi^1} = tg\varphi^1$:

Նմանատիպ հաշվարկներ կատարենք c, σ, g, Q մեծությունների համար:

π_c - ի համար կստանանք

$M \rightarrow 1+\beta = 0, \beta = -1$,

$T \rightarrow -2-\gamma = 0, \gamma = -2$,

$L \rightarrow \alpha + \gamma - 3\beta = 0, \alpha = -3+2 = -1$,

$$\pi_c = \frac{c}{B_p \rho V^2}:$$

Նույն կարգով $\pi_\sigma = \frac{\sigma}{\rho V^2}$, $\pi_g = \frac{gB_p}{V^2}$, $\pi_Q = \frac{Q}{B_p^2 \rho V^2}$:

Գութանի քարշային դիմադրության համար նույնպես կունենանք $\pi_p = \frac{P}{B_p^2 \rho V^2}$: Դժվար չէ նկատել, որ ստացված բոլոր անչափական մեծությունները ունեն $L^0T^0M^0$ չափողականություն:

Այսպիսով, մաթեմատիկական մոդելը (6.1.) անչափական տեսքով կներկայացվի հետևյալ կերպ՝

$$\frac{p}{B_p^2 \rho V^2} = \varphi\left(\frac{B}{B_p}, \frac{l}{B_p}, \frac{H}{B_p}, \varepsilon, \gamma_0, \gamma_1, \frac{c}{B_p \rho V^2}, tg\varphi^1, \frac{\sigma}{\rho V^2}, \frac{gB_p}{V^2}, \frac{Q}{B_p^2 \rho V^2}, \frac{a}{B_p}\right)$$

Ստացված անչափական մեծություններից

$$\pi_B = \frac{B}{B_p},\ \pi_l = \frac{l}{B_p},\ \pi_H = \frac{H}{B_p},\ \pi_\varepsilon = \varepsilon,\ \pi_{\gamma_0} = \gamma_0,\ \pi_{\gamma_i} = \gamma_i$$

ներկայացնում են նախագծվող իրանի երկրաչափական նմանությունները՝

$$\pi_c = \frac{c}{B_p \rho V^2},\ \pi_\sigma = \frac{\sigma}{\rho V^2},\ \pi_{\varphi^1} = tg\varphi^1$$

ներկայացնում են հողի ֆիզիկատեխնոլոգիական նմանությունները՝

$\pi_g = \frac{gB_p}{V^2}, \frac{Q}{B_p^2 \rho V^2}, \frac{p}{B_p^2 \rho V^2}$, վարի ժամանակ առաջացած ուժերի նմանություններն՝ $\pi_a = \frac{a}{B_p}$ ներկայացնում է վարի տեխնոլոգիական գործընթացի նմանությունը: Համաձայն գործընթացների մոդելավորման մեթոդիկայի, գրենք հավասարման վերջնական տեսքը.

$$p = \left[b_0 + b_1\frac{B}{B_p} + b_2\frac{l}{B_p} + b_3\frac{H}{B_p} + b_4\varepsilon + b_5\gamma_0 + b_6\gamma_1 + b_7\frac{c}{B_p \rho V^2} + b_8 tg\varphi^1 + b_9\frac{\sigma}{\rho V^2} + b_{10}\frac{gB_p}{V^2} + b_{11}\frac{Q}{B_p^2 \rho V^2} + b_{12}\frac{a}{B_p}\right] \cdot B_p^2 \rho V^2 \qquad (6.2.)$$

Ստացված հավասարման գործակիցները որոշվում են նախորդ բաժիններում տրված մեթոդներով:

Հավասարման (6.2.) վերլուծությունից դժվար չէ կռահել, որ այն լրիվ համապատասխանում է ակադեմիկոս Վ. Պ. Գորյաչկինի գութանի քարշի ուժի բանաձևին $p = f_0G + kab + \varepsilon abv^2$, այն տարբերությամբ, որ գործակիցները՝ f_0, k և ε արտահայտված են բացված տեսքով:

Քննարկենք ևս մեկ օրինակ՝ կապված հողի փխրիչի հետ:

Որպես հիմնական պարամետրեր այս դեպքում վերցնենք B, ρ և g:

Մատրիցայի պարամետր ընտրենք β_0 - փխրիչի դրվածքի անկյունը, σ- հողի ամրությունը, V - արագությունը, m - մեքենայի զանգվածը, a - մշակման խորությունը, g - ազատ անկման արագացումը, ρ - հողի խտությունը, B_p - ընդգրկման լայնությունը:

Հիմնական պարամետրերի անկախության պայմանը որոշիչի $\Delta \neq 0$ մեծությունն է:

Ձևափոխենք անչափական համալիրները

$\pi_i = [LT^{-1}][L]^\alpha[ML^{-3}]^\beta[LT^{-2}]^\gamma$,

$M \rightarrow \beta = 0$,

$T \rightarrow -1-2\gamma = 0,\ \gamma = -\frac{1}{2}$,

$L \rightarrow 1+\alpha-3\beta+\gamma = 0,\ \alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\pi_v = vB^{-\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}} = \frac{v}{\sqrt{Bg}},$$

$$\pi_a = [L][L]^\alpha [ML^{-3}]^\beta [LT^{-2}]^\gamma,$$

ստանում ենք $\pi_a = \frac{a}{B}$:

Նույն կարգով՝ $\pi_\sigma = \frac{\sigma}{\rho g B}$, $\pi_{\beta_0} = \beta_0$, $\pi_p = \frac{p}{\rho g B^3}$:

Որպես ելքային պարամետրեր կարող ենք ընտրել քարշային դիմադրությունը մշակության a_p իրական խորությունը, հողի ամրությունը մշակությունից հետո σ_p, հողի խտությունը մշակությունից հետո և այլ տեխնոլոգիական ցուցանիշներ:

Ունենալով փխրիչի մշակության a խորությունը՝ կարող ենք գրել.

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}, \frac{\sigma}{\sigma_0}, \frac{a_p}{b}\right) = b_0 + b_1\frac{a}{B} + b_2\frac{v}{\sqrt{gB}} + b_3\frac{\sigma}{\rho g B} + b_4 tg\beta_0 :$$

Քարշային դիմադրության համար կազմավորվում են $\frac{p}{\rho g B^3} = \varphi\left(\frac{V^2}{gB}\right)$ համալիրները, որոնք օգտագործվում են $\frac{V}{\sqrt{gB}}$ - ի փոխարեն, որը թույլ է տալիս $p = f(V)$ -ը բերել գծային տեսքի:

Այս դեպքում $\frac{p}{\rho g B^3} = \varphi_1\left(\frac{a_p}{B}, \frac{v}{\sqrt{gB}}, \frac{\sigma}{\rho g B}, \ldots\right)$ արտահայտության նմանարկումը (апроксимация) իրականացվում է հետևյալ բազմանդամի օգտագործումով.

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j : \qquad (6.3.)$$

7. Կոռելացիոն ֆունկցիաներ

Բնության առանձին երևույթների միջև կապերը բարդ են և բազմակերպ, սակայն դրանք որոշակի ձևով կարելի է դասակարգել: Մեխանիկայում հաճախ խոսք է գնում x և y փոփոխականների միջև ֆունկցիոնալ կախվածության մասին, երբ x -ի յուրաքանչյուր հնարավոր արժեքին համապատասխանում է y -ի որոշակի միարժեք մեծություն:

Իրականում բնության մեջ շատ երևույթներ տեղի են ունենում բազմաթիվ գործոնների ազդեցության տակ, որոնցից յուրաքանչյուրի ներգործությունը կարող է լինել աննշան: Այս դեպքում կապը կորցնում է իր իսկ խիստ ֆունկցիոնալությունը, իսկ ուսումնասիրվող ֆիզիկական համակարգը ընդունում է ոչ թե որոշակի, այլ որևէ հնարավոր վիճակ: Այստեղ խոսք կարող է լինել միայն, այսպես կոչված, ստոխաստիկական կապի մասին: Ստոխաստիկական կապը բացատրվում է նրանով, որ մի պատահական փոփոխական մյուսի փոփոխությանը արձագանքում է իր բաշխման օրենքի փոփոխմամբ: Վիճակագրական գործնական հետազոտություններում հաճախ դիտարկվում է այդպիսի կապի մասնավոր դեպքեր: Դա կոչվում է վիճակագրական կապ: Այս կապի մասին իմաստ ունի խոսել միայն այն ժամանակ, երբ մի պատահական փոփոխականի պայմանական մաթեմատիկական սպասումը ֆունկցիա է մյուս պատահական փոփոխականի արժեքներից.

$M(y/x) = f(x)$:

Այսպիսով, վիճակագրական կախվածության ուսումնասիրությունը հիմնվում է պատահական փոփոխականների այնպիսի կապերի հետազոտման վրա, որի դեպքում մեկ պատահական փոփոխականի արժեքները փոփոխվում են մյուս պատահական փոփոխականների արժեքներին համապատասխան:

Պատահական փոփոխականների միջև վիճակագրական կախվածության իմացությունը գործնական մեծ նշանակություն ունի: Դրա օգնությամբ կարելի է կանխագուշակել պատահական փոփոխականի արժեքը, ենթադրելով, որ անկախ փոփոխականն ընդունում է որոշակի արժեք: Միաժամանակ, քանի որ վիճակագրական կախվածության հասկացությունը համարվում է միջինացված պայման, ուստի կանխատեսումները անսխալ լինել չեն կարող:

Ուրեմն՝ վիճակագրական կախվածության ուսումնասիրման համար պետք է իմանալ պատահական փոփոխականի պայմանական մաթեմատիկական սպասումը: Վերջինիս գնահատման համար անհրաժեշտ է իմանալ (x,y) երկչափ բաշխման անալիտիկ տեսքը: Սակայն երկչափ բաշխման անալիտիկ տեսքը կարող է հանգեցնել լուրջ սխալների: Այդ պատճառով պատահական փոփոխականի պայմանական մաթեմատիկական սպասումից անցնում ենք պայմանական միջին արժեքի.

$$M(Y / X = x) = \bar{y}(x): \qquad (7.1)$$

Մեկ և մյուս պատահական փոփոխականների պայմանական միջին արժեքների միջև կախվածությունը կոչվում է կոռելացիոն կախվածություն: Խնդիրն այն է, ո՛րն ընդունել որպես կախյալ փոփոխական, որը՝ անկախ: Այդ պետք է ճշտել յուրաքանչյուր օրինակի դեպքում:

Հետազոտական աշխատանքներում լայն կիրառություն են գտել կոռելացիոն կախվածությունները, որոնք բնութագրվում են կապի բազմաթիվ ձևերով և սերտությամբ:

Գտնել կապի տեսակը, նշանակում է հայտնաբերել կախյալ պատահական փոփոխականի ստացման մեխանիզմը: Վիճակագրական կախվածության կապի տեսակը կարելի է ներկայացնել ռեգրեսիոն ֆունկցիայով (գծային, քառակուսային, բարձր կարգի ցուցչային և այլն):

7.1. Պատահական պրոցեսներ

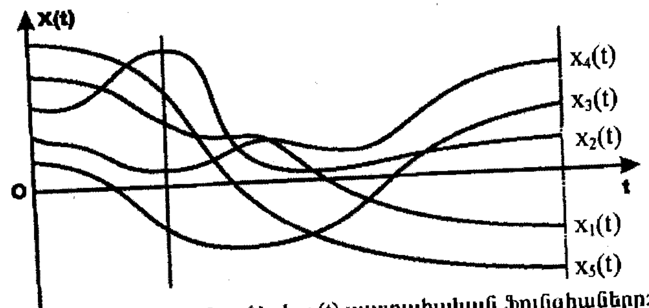
Գյուղատնտեսական տեխնիկայի փորձարկման և հետազոտման ժամանակ ստացված տեղեկությունները վկայում են այն մասին, որ մուտքի և ելքի պրոցեսները, վիճակագրական իմաստով, համարվում են պատահական: Գործնականում պատահում են դեպքեր, երբ այդ պրոցեսների մասին ունենք սահմանափակ տեղեկություններ, այդ դեպքում անհրաժեշտություն է առաջանում կատարել պրոցեսների քանակական և որակական գնահատում:

Գյուղատնտեսական տեխնիկայի վիճակագրական հաշվարկների համար ընտրվում են պրոցեսների տարբեր հավանական մոդելներ: Առավել հաճախ կիրառում են պատահական մեծությունների և պատահական ֆունկցիաների մոդելներ:

Որպես օրինակ ներկայացված են փոխանցման տուփի առանցքակալներից մեկի վրա հակազդման փոփոխության օսցիլոգրամի գրանցված չորս հատվածներ (նկ. 7.1): Առանցքակալի աշխատանքի դիտարկման ժամանակի յուրաքանչյուր T հատվածում $X_k(t)$ հակազդման փոփոխման պրոցեսը կընդունի այս կամ այն կոնկրետ տեսքը: Փորձարկման ընթացքում ստացված պատահական պրոցեսի կոնկրետ արժեքները $[X_k(t)]$ կոչվում են իրացումներ: $X_k(t)$ պատահական պրոցեսի $x_k^{(1)}(t), x_k^{(2)}(t), \ldots, x_k^{(i)}(t)$ իրացումների ամբողջությունը կազմում են բազմություն կամ խումբ (i = 1, 2, ..., n): Փորձի ընթացքում ստացված յուրաքանչյուր իրացում կոչվում է ոչ պատահական ֆունկցիա, որը դիտարկվող օրինակում տրված է գրաֆիկի տեսքով:

Ընդունենք, որ ժամանակի ցանկացած $t_1, t_2, \ldots, t_j$ (j = 1, 2, ..., m) ֆիքսված պահին ունենք պատահական պրոցեսի արժեքները: Այդ դեպքում t_i

յուրաքանչյուր արժեքի համար պրոցեսը վերափոխվում է սովորական պա-
տահական մեծության, որը փորձի ընթացքում ընդունում է այս կամ այն ար-
ժեքը: Պայմանականորեն այն կոչենք պատահական ֆունկցիայի հատույթ:
Առավել բարդ, սակայն առավել բովանդակալից կլինի $X_k(t)$ պրոցեսի մո-
դելը տալ պատահական ֆունկցիայի տեսքով, որի դեպքում ոչ պատահա-
կան արգումենտի ֆունկցիաների արժեքները ցանկացած t - ի դեպքում կլի-
նեն պատահական մեծություններ: Այսպիսով տվյալ մոդելում $X_k(t)$ պա-
տահական պրոցեսը ներկայացվում է պատահական մեծությունների բազ-
մության տեսքով: Պրոցեսի այսպիսի մոդելի մշակումից ստացվում է առա-
վել բովանդակալից տեղեկություն ոչ միայն պատահական մեծությունների
սովորական թվային բնութագրերի, այլև օրդինատների և սպեկտրի փո-
խադարձ կապերը որոշող հաճախականային և ժամային բնութագրերի
տեսքով:

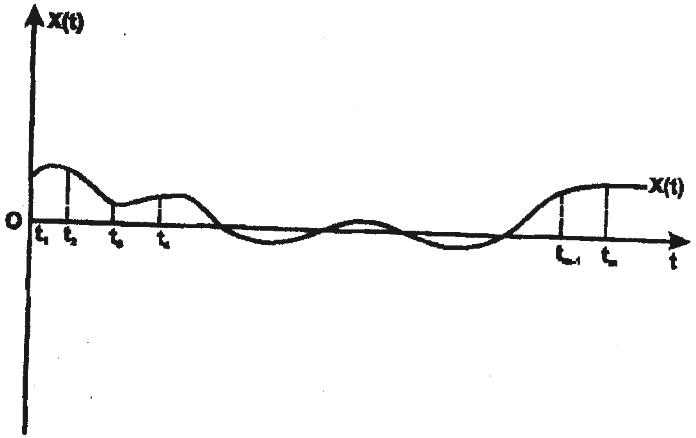


Նկ. 7.1. n անկախ փորձերի $x_i(t)$ պատահական ֆունցիաները:

Այստեղ խոսք է գնում պրոցեսների անալիտիկ ընդհանրացման հնա-
րավորության մասին, որը հնարավորություն է տալիս ըստ ժամանակի կան-
խագուշակել նրանց ընթացքը կամ մեկ այլ արգումենտից կախվածությունը:
Այդ իսկ պատճառով, գյուղատնտեսական տեխնիկայի համար կարևոր,
իսկ որոշ դեպքում որոշիչ են հետազոտությունների փորձարարական եղա-
նակները, որոնք իրական իրավիճակների մասին առավել վստահելի և
օբյեկտիվ տեղեկություններ են տալիս:
Հաճախ պատահական մեծությունները փորձերի ընթացքում անընդ-
մեջ փոփոխվում են, որոնք, ի տարբերություն սովորական պատահական
մեծությունների, անվանում են պատահական ֆունկցիաներ:
Պատահական է կոչվում այնպիսի ֆունկցիան, որը փորձի արդյուն-
քում կարող են ընդունել այս կամ այն նախապես անհայտ կոնկրետ տեսքը:
Սովորաբար, որպես պատահական ֆունկցիաների արգումենտ ըն-
դունվում է ժամանակը: Կան դեպքեր, երբ պատահական ֆունկցիաների
արգումենտ է ընդունվում այլ հասկացություն: Օրինակ՝ քրոմապատման

էլեկտրոլիտի խտության փոփոխությունը կարելի է դիտարկել ըստ էլեկտրո-լիտի խտության: Պատահական ֆունկցիաները երբեմն կախյալ են ոչ թե մեկ, այլ մի քանի արգումենտներից: Այս բաժնում կուսումնասիրենք միայն մեկ արգումենտով պատահական ֆունկցիաներ:

Պատահական ֆունկցիաները կորի տեսքով ներկայացնելը դժվար է, ուստի նպատակահարմար է գծել միայն նրանց կոնկրետ իրացումները: Դիտողական նպատակներով պայմանականորեն X(t) պատահական ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել նաև կորով (նկ. 7.2)



Նկ. 7.2. t_m ժամանակի ընթացքում x(t) պատահական ֆունցիան:

Ինչպես երևում է գրաֆիկից, գրանցման արդյունքները (t_m) լիրեցնից ներկայացնում են m պատահական մեծությունների համակարգ: Պատա-հական ֆունկցիան որոշակի մոտավորությամբ կարելի է փոխարինելը պա-տահական մեծությունների համակարգով. m-ի ավելացման հետ այն դառ-նում է առավել ճշգրիտ:

7.2. Պատահական պրոցեսների դասակարգումը

Մինչև վերջին ժամանակներս չկար պատահական պրոցեսների դա-սակարգման միասնական մոտեցում: Պատահական պրոցեսները դասա-կարգվում էին ըստ տարբեր հատկանիշների, առավել հաճախ ըստ կոնկ-րետ պատահական պրոցեսների մասին տեղեկությունների ստացման և մշակման մեթոդիկայի: Պատահական պրոցեսները կարելի է բաժանել ան-ընդհատ և դիսկրետ փոփոխմամբ արգումենտներով խմբերի: Տարբերակ-

վում է նաև պատահական և դիսկրետ պատահական հերթականությամբ պրոցեսներ:

Անընդմեջ պատահական պրոցեսների արժեքները և նրանց որոշման տիրույթները (ըստ ժամանակի) անընդմեջ բազմություններ են: Դիսկրետ պատահական պրոցեսների արժեքների տիրույթը դիսկրետ բազմություն է, իսկ որոշման տիրույթը՝ անընդմեջ բազմություն:

Գյուղատնտեսական աշխատանքների պատահական պրոցեսների տեսակների մասին հարցը պահանջում է հատուկ ուսումնասիրություններ: Սակայն պետք է նշել, որ այս հարցի վերաբերյալ եղած նյութը շատ սահ-մանափակ է, ուստի փորձել ենք այն լրացնել հեղինակների ուսումնասիրու-թյուններով:

Պատահական պրոցեսների դասակարգման համար առավել կարևոր հատկանիշ է ժամանակի սկզբից նրա հավանականության բնութագրի կախվածությունը: Այս հատկանիշով պատահական պրոցեսները դասա-կարգվում են ստացիոնար և ոչ ստացիոնար խմբերի:

Պատահական պրոցեսների տեսության մեջ ստացիոնար են կոչվում այնպիսի պրոցեսները, որոնց բնութագրերը (ֆունկցիայի մոմենտները, բաշխման ֆունկցիաները և այլն) կախված չեն ժամանակի հաշվարկման սկզբից: Ժամանակի հաշվարկման սկզբից կախված հավանականության բնութագրերով պրոցեսները համարվում են ոչ ստացիոնար:

Անհրաժեշտ է նշել, որ ընդհանուր դեպքերում գյուղատնտեսական մեքենաների աշխատանքային պրոցեսների, ինչպես նաև ցանկացած այլ դինամիկ համակարգերի աշխատանքներն սկսվում են ոչ ստացիոնար փու-լով (անկայուն ռեժիմ, թափառք): Մեքենաների անցումային պրոցեսների մարումից հետո անցում է կատարվում աշխատանքի կայունացված ռեժիմի, որն ընթանում է համեմատաբար համաչափ և ունի նրա միջին արժեքին հա-րաբերվող անընդմեջ տատանողական տեսք: Որոշ ոչ խիստ սահմանափա-կումների դեպքում այդ պրոցեսների դիտարկման միջակայքի համար կա-րելի է ընդունել ստացիոնար: Բացի դրանից, անհրաժեշտ է նկատի ունե-նալ, որ գյուղատնտեսական մեքենաների աշխատանքների իրական պրո-ցեսները համարվում են ոչ ստացիոնար և միայն որոշ մոտավորությամբ կարող են դիտարկվել որպես ստացիոնար: Իրական պրոցեսների ոչ ստա-ցիոնարությունը պայմանավորված է առաջին հերթին նրանով, որ նրա ար-դյունքների մշակման ժամանակ բավարարվում են դիտարկման որոշակի T միջակայքով, այսինքն ենթադրում ենք, որ $x(t) = 0$,երբ $t > T$: Բավականին մեծ T ժամանակահատվածի դեպքում, այդպիսի ոչ ստացիոնարությունը կարելի է գործնականորեն հաշվի չառնել:

Գյուղատնտեսական ագրեգատների փորձարկման ժամանակ ստացված սկզբնական տեղեկությունները մշակելիս, որպես կանոն, իրա-կան ոչ ստացիոնար պրոցեսերը բերվում են ստացիոնարի:

Պատահական պրոցեսների դասակարգման կարևոր հատկանիշ է համարվում նրանց թվային բնութագրերի միջև եղած կապը: Այս հատկանիշով տարբերակում են էրգոդիկ և ոչ էրգոդիկ պատահական պրոցեսները: Էրգոդիկ պրոցեսների ցանկացած բնութագրերի միջին արժեքները համընկնում է արգումենտի միջին արժեքի հետ: Այսպիսով, էրգոդիկ բնութագրերը կարելի է որոշել ըստ ժամանակի, իրացման միջինացմամբ [1]:

7.3. Պատահական ֆունկցիաների բնութագրերը

Ի տարբերություն պատահական մեծությունների թվային բնութագրերի, որոնք ներկայացվում են որոշակի թվերով, պատահական ֆունկցիաների բնութագրերը ընդհանուր դեպքում իրենցից ներկայացնում են ոչ թե թվեր, այլ ֆունկցիաներ:

X(t) պատահական ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը արտահայտվում է հետևյալ կերպ.

$$m_x(t) = M[X(t)]:$$

Այսպիսով, X(t) պատահական ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը կոչվում է $m_{\bar{x}}(t)$ ոչ պատահական ֆունկցիա, որը արգումենտի յուրաքանչյուր t արժեքի համար հավասար է պատահական ֆունկցիայի համապատասխան հատույթի մաթեմատիկական սպասումին: Ըստ էության, պատահական ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը ինչ-որ միջին ֆունկցիա է, որի շուրջը տարբեր ձևերով տարափոխվում են պատահական ֆունկցիայի կոնկրետ իրացումները [2]:

X(t) պատահական ֆունկցիայի դիսպերսիան՝ D(x) կոչվում է ոչ գծային, որի արժեքը յուրաքանչյուր t-ի համար հավասար է պատահական ֆունկցիայի համապատասխան հատույթի դիսպերսիային.

$$D_x(t) = D[X(t)]:$$

Ակնհայտ է, որ $D_x(t)$ -ն դրական ֆունկցիա է: Պատահական ֆունկցիայի միջին քառակուսային շեղումը՝

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}:$$

Գյուղատնտեսական մեքենաների աշխատանքային գործընթացներում հնարավոր է, որ $x_1(t)$ և $x_2(t)$ պատահական ֆունկցիաները ունենան մոտավորապես նույն մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան, սակայն դրանց բնութագրերը կարող են լինել միմյանցից խիստ տարբեր: Ակնհայտ է նաև, որ երկու պատահական պրոցեսների ներքին կառուցվածքները բացարձակապես տարբեր են, սակայն այդ տարբերությունը չի ատահայտվում ոչ մաթեմատիկական սպասմամբ, ոչ էլ դիսպերսիայով. այս դեպքում

անհրաժեշտ է հատուկ բնութագիր: Այդ բնութագիրը կոչվում է կորելացիոն ֆունկցիա:

Էրգոդիկ ստացիոնար պատահական պրոցեսների վիճակագրական բնութագրերի հաշվարկները նկատելիորեն պարզ են:

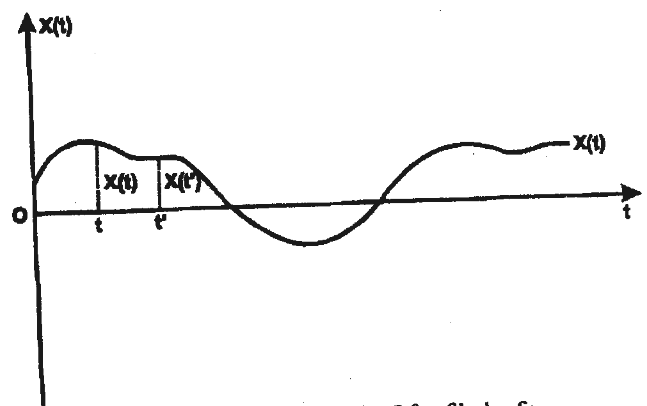
X(t) պատահական ֆունկցիան ներկայացված է կորի տեսքով (նկ. 7.3): Քննարկենք t, t' հատույթների արյունքում ստացված $X(t)$ և $X(t')$ պատահական մեծությունների կախվածությունը: Ակնհայտ է, որ $X(t)$ և $X(t')$-ը կապված են սերտ կախվածությամբ և բնութագրվում են կորելացիոն մոմենտով և համարվում են t և t' երկու արգումենտների կորելացիոն ֆունկցիա:

Պատահական X(t) ֆունկցիան կոչվում է $K_x(t, t')$ երկու արգումենտների ոչ պատահական կորելացիոն ֆունկցիա, որը յուրաքանչյուր t, t' զույգ արժեքների համար հավասար է պատահական ֆունկցիայի համապատասխան հատույթների կորելացիոն մոմենտներին.

$$K_x(t, t') = M[\dot{x}(t)\dot{x}(t')], \tag{7.2.}$$

որտեղ $\dot{x}(t) = x(t) - m_x(t)$,

$$\dot{x}(t') = x(t') - m_x(t'):$$



Նկ. 7.3 x(t) պատահական ֆունկցիան:

Արգումենտների համընկնման պայմանի դեպքում $(t = t')$

$$K_x(t, t) = M[\dot{x}(t)^2] = D_x(t),$$

այսինքն $t = t'$ դեպքում կորելացիոն ֆունկցիան վերածվում է պատահական ֆունկցիայի դիսպերսիայի:

Քանի որ երկու՝ $X(t)$ և $X(t')$ պատահական մեծությունների կորելացիոն մոմենտը կախված չէ նրանց դիտարկման հերթականությունից, ուստի կորելացիոն ֆունկցիան իր արգումենտների նկատմամբ կլինի սիմետրիկ.

$$K_x(t,t') = K_x(t',t):$$

Պատահական $x(t)$ ֆունկցիայի կորելացիոն ֆունկցիան կառուցում են հետևյալ կերպ. արգումենտին տրվում է հավասարահեռ արժեքներ և պատահական մեծությունների համակարգի միջոցով կառուցում կորելացիոն մատրիցան [2]:

Այս մատրիցան ոչ այլ ինչ է, քան հարթության վրա (t,t') արգումենտների արժեքների ուղղանկյուն ցանցի կորելացիոն ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ: Հետագայում ընդմիջարկման կամ մոտարկման եղանակով կարելի է կառուցել նաև երկու արգումենտներով $K_x(t,t')$ ֆունկցիա:

Կորելացիոն $K_x(t,t')$ ֆունկցիայի փոխարեն կարելի է օգտվել նորմավորված կորելացիոն ֆունկցիայից, որը $X(t)$ և $X(t')$ մեծությունների կորելացիոն գործակիցն է.

$$r_x(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}: \tag{7.3.}$$

Նորմավորված կորելացիոն ֆունկցիան համանման է պատահական մեծությունների համակարգի նորմավորված կորելացիոն մատրիցային, երբ $t' = t$, այն հավասար է մեկի.

$$r_x(t,t) = \frac{K_x(t,t)}{[\sigma_x(t)]^2} = \frac{D_x(t)}{[\sigma_x(t)]^2} = 1: \tag{7.4.}$$

7.4. Պատահական ստացիոնար ֆունկցիաներ

Կան պատահական պրոցեսները, որոնք ըստ ժամանակի ընթանում են համասեռ և ունեն որևէ միջին արժեքի շուրջը անընդմեջ պատահական տատանումների տեսք: Այսպիսի պատահական պրոցեսները կոչվում են ստացիոնար: Ստացիոնար պրոցեսն ուսումնասիրելիս նրա ցանկացած հատվածում պետք է ստացվեն նույն բնութագրերը:

Պատահական ստացիոնար ֆունկցիան ըստ ժամանակի պետք է ընթանա համասեռ, ուստի նրա մաթեմատիկական սպասումը հաստատուն է.

$$m_x(t) = m_x = \text{const}:$$

Պատահական ստացիոնար ֆունկցիայի դիսպերսիան նույնպես հաստատուն է.

$$D_x(t) = D_x = \text{const}:$$

Ակնհայտ է նաև, որ եթե պատահական $X(t)$ պրոցեսը իրականում ստացիոնար է, ապա կորելացիոն մոմենտը կախված է միայն τ հատվածի մեծությունից.

$$K_x(t,t+\tau) = R_x(\tau): \tag{7.5.}$$

Հետևաբար, պատահական ստացիոնար պրոցեսի կորելացիոն ֆունկցիան ֆունկցիա է ոչ թե երկու, այլ մեկ արգումենտից: Այս հանգամանքը մի շարք դեպքերում խիստ պարզեցնում է պատահական ստացիոնար ֆունկցիայի հետ կատարվող գործողությունները:

Ակնհայտ է, որ $X(t)$ ստացիոնար էրգոդիկ պրոցեսի $x(t)$ իրացման հիմնական վիճակագրական բնութագրերը արժեք են ձեռք բերում միայն ժամանակի $\tau = t' - t$ սահքից կախված:

Կորելացիոն ֆունկցիայի սիմետրիայի հատկությունից ստանում ենք.

$$K_x(t,t') = K_x(t',t),$$

որտեղից՝ $\tau = t' - t$, իսկ $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$:

Գործնականում խնդիրները լուծելիս հաճախ կորելացիոն $R_x(\tau)$ ֆունկցիայի փոխարեն օգտվում են նորմավորված կորելացիոն ֆունկցիայից

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}, \tag{7.6.}$$

որտեղ՝ $D_x = R_x(0)$ -ն ստացիոնար պրոցեսի հաստատուն դիսպերսիան է:

$\rho_x(\tau)$ ֆունկցիան ըստ ժամանակի τ միջակայքերով բաժանված պատահական ֆունկցիայի հատույթների միջև կորելացիոն գործակիցն է:

Պատահական պրոցեսի հաճախականությունը գնահատելիս օգտվում ենք վիճակագրական բնութագրից, որն անվանում են սպեկտրալ $S_x(\omega)$ խտություն:

Սպեկտրալ խտությունը պատահական պրոցեսի մասին նոր տեղեկություն չի տալիս: Սակայն ժամանակայինից դեպի հաճախականության տիրույթ անցնելիս բացահայտվում է պատահական պրոցեսի ներքին կառուցվածքը (ըստ հաճախականության սպեկտրի): $S_x(\omega)$ սպեկտրալ խտությունը և $R_x(\tau)$ կորելացիոն ֆունկցիան միմյանց հետ կապված են Ֆուրյեի կոսինուս-վերափոխմամբ [1].

$$\left.\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau, \\ R_x(\tau) &= \int_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega: \end{aligned}\right\} \tag{7.7.}$$

$\tau = 0$ արժեքի դեպքում երկրորդ արտահայտությունից ստանում ենք.

$$R_x(0)=\int_0^{\infty} S_x(\omega)d\omega : \qquad (7.8.)$$

Ցանկացած հաճախականության (ω) համար $S_x(\omega)d\omega$ արտադրյալ իրենից ներկայացնում է տարրական բազմանկյան մակերես: Այսպիսով, D_x դիսպերսիան տրոհվում է ըստ ω հաճախականության անընդհատ սպեկտորի անվերջ թվով տարրերի: Այլ կերպ ասած՝ ստացիոնար պատահական պրոցեսի սպեկտրալ խտությունը նրա դիսպերսիայի սպեկտորն է:

$\omega = 0$ արժեքի դեպքում ստանում ենք.

$$S_x(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R_x(\tau)d\tau :$$

Նորմավորված սպեկտրալ խտություն է կոչվում $\sigma_x(\omega)=\dfrac{S_x(\omega)}{D_x}$ արտահայտությունը, որը չափվում է վայրկյանով:

Ձևայած սպեկտրալ խտությունը որոշում է $R_x(\tau)$ կորելացիոն ֆունկցիայի սպեկտրալ բաղադրիչները, այն ներկայացնում է նաև պատահական պրոցեսի հաճախականության կազմը:

Ինչպես կորելացիոն ֆունկցիաների, այնպես էլ երկու ստացիոնար պատահական պրոցեսների համար ևս կարելի է որոշել սպեկտրալ փոխադարձ բնութագրեր: Պատահական x(t) և y(t) պրոցեսների իրացման համար $S_{xy}(\omega)$ սպեկտրալ փոխադարձ խտությունը որոշվում է որպես փոխադարձ կորելացիոն ֆունկցիաների Ֆուրյեի ուղիղ արտադրյալ.

$$S_{xy}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau)^{-i\omega\tau}d\tau :$$

Համապատասխան փոխադարձ կորելացիոն ֆունկցիան հավասար է.

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega :$$

Քանի որ $e^{-i\omega\tau} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau$

$e^{i\omega\tau} = \cos\omega\tau + i\sin\omega\tau$, ուստի՝

$$\left.\begin{aligned} S_{xy}(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau - i\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau,\\ R_{xy}(\tau)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega)\cos\omega\tau\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega)\sin\omega\tau\, d\tau : \end{aligned}\right\} \qquad (7.9.)$$

Եթե $R_{xy}(\tau)$ փոխադարձ կորելացիոն ֆունկցիան կենտ է, ապա փոխադարձ սպեկտրալ խտությունը կլինի արգումենտի ω հաճախականության համալիր ֆունկցիա.

$$S_{xy}(\omega) = S_{xy}^{B}(\omega) + iS_{xy}^{M}(\omega),$$

որտեղ՝ $S_{xy}^{B}(\omega)$ և $iS_{xy}^{M}(\omega)$ -ն համապատասխանաբար փոխադարձ սպեկտրալ խտության իրեղեն և թվացյալ մասերն են:

7.5. Պատահական պրոցեսների կորելացիոն ֆունկցիաների և սպեկտրալ խտության հիմնական հատկանիշներն ու պարամետրերը

Ստացիոնար պատահական պրոցեսի կորելացիոն ֆունկցիան համարվում է կենտ՝ $R_x(\tau)=R_x(-\tau)$: Այդ պատճառով $R_x(\tau)$ գրաֆիկը բավարար է ներկայացնել միայն $0 \le \tau \le \infty$ տիրույթում:

Կորելացիոն ֆունկցիայի երկրորդ կարևոր հատկությունը համարվում է $R_x(0)=D_x \ge R_x(\tau)$ անհավասարությունը, այսինքն կորելացիոն ֆունկցիայի ցանկացած արժեք փոքր կամ հավասար է դիսպերսիային: Ստացիոնար պրոցեսի նորմավորված կորելացիոն ֆունկցիայի համար

$\rho(\tau) \le 1$:

Պատահական պրոցեսում թաքնված պարբերական բաղադրիչի առկայությունը ազդում է կորելացիոն ֆունկցիայի ընթացքի բնույթի վրա: Որպես օրինակ նկ. 7.4 նկարում բերված են տրակտորի շարժման երկու արագությունների՝ v = 1,4 մ/վրկ (կոր 1) և v = 2,2 մ/վրկ (կոր 2) դեպքում կախովի գութանի ընթացքի խորության փոփոխության նորմավորված կորելացիոն ֆունկցիաները $\rho(\tau)$:

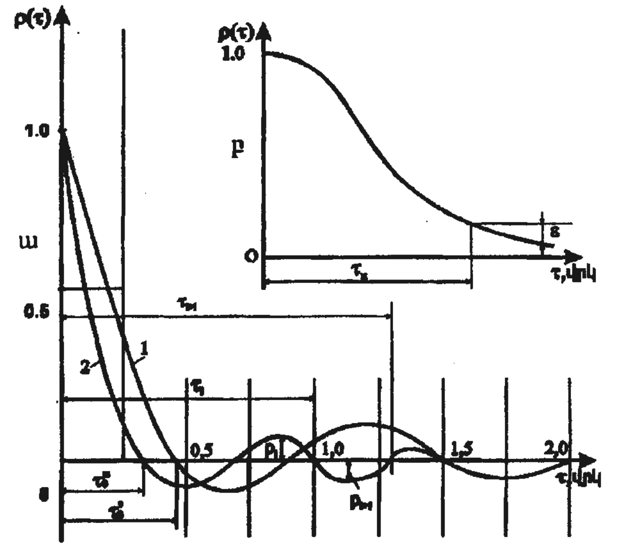
τ - ի աճման հետ պրոցեսի օրդինատների միջև կորելացիան թուլանում է: $\tau = \tau_0$ արժեքի դեպքում $\rho(\tau)$ կորը հատում է աբսցիսների առանցքը, և հետագայում նկատվում է այդ առանցքի նկատմամբ կորի տատանման մարում: $\rho(\tau)$ կորի ընթացքի այդպիսի բնույթը վկայում է պրոցեսում թաքնված պարբերական բաղադրիչի գոյության մասին:

Շատ հաճախ պրոցեսի ընթացքում կարող է պատահել ω հաճախականությամբ և a ամպլիտուդով ներդաշնակ բաղադրիչ: Այդ դեպքում, սկսած որոշակի τ - ի արժեքից, $\rho(\tau)$- ն չի մարում և դառնում է ω հաճախականությամբ ներդաշնակ տատանում:

Գյուղատնտեսական տեխնիկայի աշխատանքներում հազվադեպ են առանց պարբերական բաղադրիչների, այսպես կոչված «մաքուր» պատահական պրոցեսները (նկ. 7.4բ):

Կորելացիոն ֆունկցիաների բնութագրի պարամետրերից են կորելացիայի τ_K միջակայքը և տատանման միջին T_p կիսապարբերությունը: Երբեմն հաշվարկում են կորելացիոն ֆունկցիայի մարման δ նվազանքը (դեկրեմենտը):

Սովորաբար, կորելացիայի միջակայք են անվանում այն τ_K ժամանակը, որի ընթացքում կորելացիան անհայտանում կամ մարում է: Եթե նորմավորված կորելացիայի ֆունկցիաներն ունեն նկար 7.4 բ -ի կորի տեսքը, ապա կորելացիայի τ_K միջակայքը այնպիսին է, որի ցանկացած $\tau > \tau_K$ անհավասարության դեպքում $\rho(\tau)$ բացարձակ արժեքը փոքր է ε - ի տրված մեծությունից: Սովորաբար, ընդունում են $\varepsilon = 0,05$ [5]:



Նկ. 7.4 Կախովի գութանի ընթացքի խորության փոփոխության նորմավորված կորելացիոն ֆունկցիաները.

ա) 1 V = 1,4 մ/վ,

2 V = 2,2 մ/վ,

բ) τ_k միջակայքում կորելացիայի մարման կորը:

Թաքնված պարբերական բաղադրիչներով պրոցեսների համար վերը նշված ձևով τ_K - ի որոշումը հարմար չէ, քանի որ $\rho(\tau)$ կորի օրդինատները հաշվարկում են ըստ պրոցեսի ընթացքի ոչ մեծ τ_{max} սահքով, ճշտվում հաշվարկներով: Մյուս կողմից՝ τ_{max} արժեքը պետք է համապատասխանեցվի դիսպերսիայի սպեկտրին: Նմանատիպ խնդիրներ լուծելիս հարմար է համեմատման համար սկզբից ընտրել $\rho(\tau)$ կորի և աբսցիսների առանցքի հետ հատման ժամանակի τ_0 հատվածի մեծությունը:

Տատանման միջին T_p կիսապարբերությունը հաշվարկում են հետևյալ բանաձևով.

$$T_p = \frac{1}{n}\sum\left(\tau_{i+1} - \tau_i\right), \qquad (7.10.)$$

որտեղ՝ τ_i -ն $\rho(\tau)$ կորի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերի արժեքներն են:

T_p կիսապարբերությունը համապատասխանում է շրջանային ω_p միջին հաճախականությանը: Գործնական խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է քննարկել նաև փոխադարձ կորելացիայի ֆունկցիաների հատկությունները: Ի տարբերություն կորելացիայի $R_x(\tau)$ ֆունկցիայի, փոխադարձ կորելացիայի $R_{xy}(\tau)$ ֆունկցիան չի կարող լինել կենտ, այսինքն $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$:Դա նշանակում է, որ $R_{xy}(\tau)$ և $R_{xy}(-\tau)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները օրդինատի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ են:

Մյուս հատկությունը՝ $R_{xy}(\tau) \leq \left[R_x(0)R_y(0)\right]^{1/2}$, որտեղ $R_x(0)$ և $R_y(0)$- պրոցեսի դիսպերսիաներն են:

Մեծ թվով ստացիոնար և ստացիոնարի բերված պրոցեսների համար սպեկտրալ $S_x(\omega)$ խտությունը և կորելացիայի ֆունկցիան միասին բնոյթշում են պրոցեսների կառուցվածքը և նրանց հատկությունները, ընդ որում, կորելացիայի ֆունկցիան ժամանակային, իսկ սպեկտրալ խտությունը՝ հաճախականության ոլորտներում:

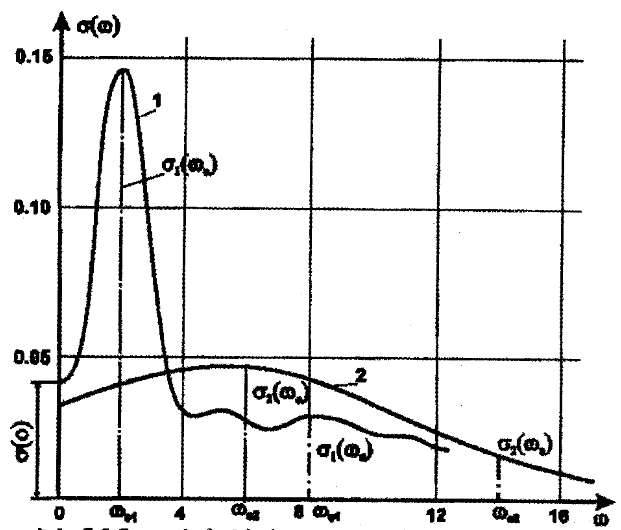
Պատահական պրոցեսի իրացման սպեկտրալ խտությունը համարվում է ω արգումենտի դրական ֆունկցիա և չի կարող ունենալ բացասական արժեք, այսինքն.

$S_x(\omega) > 0$ [1]:

Քանի որ սպեկտրալ խտությունը և կորելացիայի ֆունկցիան կապված են Ֆուրյեի ձևափոխություններով, ապա որքան լայն է դիսպերսիայի սպեկտորը այնքան փոքր է τ_K կորելացիան և հակառակը: Պատահական պրոցեսների սպեկտրալ խտության հիմնական պարամետրեր կարող են ծառայել ω_c կտրվածքով հաճախականությունը, $\Delta\omega$ սպեկտրի լայնությունը սպեկտրալ խտության առավելագույն արժեքին համապատասխան ω_0 հաճախականությունը, ω_0 -ին համապատասխան $S(\omega_0)$ սպեկտրալ խտությունը, $\omega = 0$ արժեքի դեպքում սպեկտրալ խտությունը, սպեկտրի հարաբերական խտությունը և այլն: Պետք է նշել, որ ինչպես սպեկտրալ խտության պարամետրերը, այնպես էլ նրանց քանակական բնութագրերը չեն համարվում կայունացած:

Նշված պարամետրերի էություններն ու գնահատականները դիտարկենք նորմավորված սպեկտրալ խտության երկու կորերի օրինակով, որոնք ստացվել են երկու դաշտերի մակերևույթների պրոֆիլագրանցման արդյունքների մշակումից (նկ. 7.5):

Պրոցեսի հաճախականության սպեկտրի վերին սահմանը որոշվում է ω_c կտրվածքի հաճախականությամբ: Քանի որ գյուղատնտեսական մեքենաների աշխատանքային շատ պրոցեսների համար սպեկտրալ խտությունը համարվում է $\omega(0 \le \omega \le \infty)$ հաճախականությամբ անընդմեջ ֆունկցիա, ապա ω_0 կտրվածքի հաճախականությունը որոշում է նաև հաճախականության գոտու լայնությունը: Այսպիսով, ω_c -ն այնպիսի հաճախականություն է, որի դեպքում $S_x(\omega)$ կամ $\sigma(\omega)$ դառնում է բավական փոքր:



Նկ. 7.5 Դաշտի մակերևույթի պրոֆիլի նորմավորված սպեկտրալ խտությունները (1- նեղաշերտ, 2-լայնաշերտ):

Սպեկտրի $\Delta\omega$ լայնություն են անվանում պրոցեսի դիսպերսիայի և ω_0 հաճախականությանը համապատասխան սպեկտրալ խտության արժեքի հարաբերակցությունը, այսինքն $\Delta\omega = D_x / Sx(\omega)$ [6]: Քանի որ $S_x(\omega_0) = D_x\sigma_x(\omega_0)$, ապա $\Delta\omega = [\sigma_x(\omega_0)]^{-1}$:

Այստեղ $\sigma_x(\omega_0)$ $\omega = \omega_0$ դեպքում նորմավորված խտության արժեքն է: Ըստ նշանակության $\Delta\omega$ համեմատվում է պատահական պրոցեսի նեղաշերտության կամ լայնաշերտության հետ: Պրոցեսը համարվում է նեղաշերտ, եթե նրա սպեկտրալ խտությունը կենտրոնացված է ω_0 հաճախականության շրջակայքում համեմատաբար նեղ դիապազոնում, ընդ որում, նեղաշերտության պայման է համարվում $\Delta\omega << \omega_0$ անհավասարությունը: Լայնաշերտ է համարվում այնպիսի պրոցեսը, որում նշված պայմանը չի բավարարվում: Գործնական խնդիրներ լուծելիս $\omega = 0$ - ից մինչև $\omega = \omega_c$ անընդմեջ հաճախականության սպեկտրում կարելի է ընդունել $\Delta\omega = \omega_c$, որը հետագայում ճշտվում է $\int_0^{\omega_c}\sigma(\omega)d\omega = 0,85...0,95$ պայմանից, որտեղ՝ $\sigma(\omega)$-ը պրոցեսի նորմավորված սպեկտրալ խտությունն է:

7.6 Կորելացիայի գործակցի վիճակագրական գնահատականը

Ընդհանրապես կորելացիայի գործակցի $\hat{r}$ գնահատականի հաշվարկման համար հարմար է փորձնական տվյալները լրացնել կորելացիայի աղյուսակում (աղյուսակ 7.1)

Սովորաբար, մեծաքանակ տվյալները հարմար է խմբավորել որոշակի թվով խմբերում: x - երի համար խմբերի քանակը կարող է լինել n, իսկ y - ի համար m, որտեղ m և n -ը կարող են իրար հավասար լինել կամ՝ ոչ: m և n խմբերի ճիշտ քանակը նշել հնարավոր չէ, սակայն պետք է նկատի ունենալ, որ որոշակի քանակով փորձերի դեպքում խմբերի քանակի նվազեցումը հանգեցնում է կորելացիայի գործակցի փոքրացմանը:

Աղյուսակի առաջին տողում X պատահական մեծության արժեքներն են, իսկ առաջին սյունակում՝ Y պատահական մեծության արժեքները: j - րդ սյունակի և i - րդ տողի հատման կետում նշում են ($x_j; y_i$) զույգի արժեքների հաճախականությունը $j = 1,2,...,n$, $i = 1,2,...m$:

Կորելացիայի աղյուսակին դիտողականություն հաղորդելու համար կարելի է ավելացնել ևս երկու տող և սյունակ: Առաջին լրացուցիչ տողում գրում են $N_{xj}=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ բացարձակ հաճախականությունները, իսկ երկրորդում $\bar{y}_{xj}$ պայմանական միջին թվաքանակնները: Նմանատիպ արժեքները լրացվում են լրացուցիչ սյունակներում: Առաջին լրացուցիչ տողի վերջում նշվում են.

$$N=\sum_{j=1}^{n} N_{xj}=\sum_{i=1}^{m} N_{yi} :$$

Աղյուսակ 7.1

Կորելացիայի աղյուսակ

Y	X							N_{yi}	$\bar{x}_{yi}$
	x_1	x_2	x_3	…	x_j	…	x_n		
y_1	N_{11}	N_{12}	N_{13}	…	N_{1j}	…	N_{1n}	N_{y1}	$\bar{x}_{y1}$
y_2	N_{21}	N_{22}	N_{23}	…	N_{2j}	…	N_{2n}	N_{y2}	$\bar{x}_{y2}$
y_3	N_{31}	N_{32}	N_{33}	…	N_{3j}	…	N_{3n}	N_{y3}	$\bar{x}_{y3}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_i	N_{i1}	N_{i2}	N_{i3}	…	N_{ij}	…	N_{in}	N_{yi}	$\bar{x}_{yi}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	N_{m1}	N_{m2}	N_{m3}	…	N_{mj}	…	N_{mn}	N_{ym}	$\bar{x}_{ym}$
N_{xi}	N_{x1}	N_{x2}	N_{x3}	…	N_{xj}	…	N_{xn}	N	$\overline{X}$
$\bar{y}_{xi}$	$\bar{y}_{x1}$	$\bar{y}_{x2}$	$\bar{y}_{x3}$	…	$\bar{y}_{xj}$	…	$\bar{y}_{xn}$	$\overline{Y}$	

Կորելացիայի աղյուսակի տվյալները իրացնելիս կորելացիայի գործակիցները հաշվարկվում են հետևյալ հերթականությամբ:

1. Հաշվարկում են X և Y պատահական մեծությունների պայմանական միջին թվաքանակնների արժեքները.

$$\bar{x}_{yi}=\frac{1}{N_{yi}}\sum_{j=1}^{n} N_{ij}x_j, \quad i=1,2,\dots,m,$$

$$\bar{y}_{xj}=\frac{1}{N_{xj}}\sum_{i=1}^{m} N_{ij}y_i, \quad j=1,2,\dots,n :$$

2. Որոշում են X -ի և Y - ի միջին թվաքանական արժեքները.

$$X=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} N_{xj}x_j,$$

$$Y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} N_{yi}y_i :$$

3. Կորելացիայի ընտրովի մոմենտը հաշվարկում են

$$\hat{K}_{xy}=\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} N_{ij}\left(x_j-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right):$$

4. Որոշում են X և Y մեծությունների շտկված դիսպերսիաները և միջին քառակուսային շեղումները.

$$S_x^2=\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{n} N_{yj}\left(x_j-\overline{X}\right), \quad S_x=\sqrt{S_x^2} :$$

$$S_y^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{m} N_{yi}\left(y_i-\overline{Y}\right), \quad S_y=\sqrt{S_y^2} :$$

5. Կորելացիայի գործակիցը հաշվարկում են հետևյալ բանաձևով.

$$\hat{r}=\frac{\hat{K}_{xy}}{S_xS_y} :$$

Փորձնական տվյալների խմբավորման կամ կորելացիայի աղյուսակի բացակայության դեպքում, տվյալները գրանցվում են երկու տողով կամ երկու սյունակով: Այս դեպքում կորելացիայի գործակիցը հաշվարկում են հետևյալ հաջորդականությամբ.

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\\
&\overline{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\\
&\hat{K}_{xy}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right),\\
&S_x^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{X}\right)^2,\\
&S_y^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\overline{Y}\right)^2,\\
&r=\frac{K_{xy}}{S_x\cdot S_y}:
\end{aligned}\right\} \qquad (7.11.)$$

Տվյալների մշակման վերը հիշատակված մեթոդիկայի դեպքում կորցնում ենք կախվածության բնութագրի մասին պատկերացում ստանալու հնարավորությունը:

7.7 Կոռելացիայի զույգային գործակից

Գործնականում հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում քննարկել ոչ միայն ֆունկցիոնալ, երբ մեկ փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է մյուսի որոշակի արժեք, այլ նաև կոռելացիայի (վիճակագրական) կախվածության հարցեր [8]:

Կոռելացիան համարվում է զույգային, երբ կապը որոշվում է երկու հատկանիշների միջև, բազմակի, երբ բացահայտվում է մեկ հատկանիշի կապը մի այլ խումբ հատկանիշներից: Երկու՝ X և Y, փոփոխականների մեծությունների n զույգ (x_i ;y_i) արժեքների ընտրանքի դեպքում, նրանց միջև գծային կախվածության աստիճանը կարելի է որոշել կոռելացիայի r զույգային գործակցով.

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right)}{n\cdot S_x\cdot S_y} \qquad (7.12.)$$

որտեղ՝ $\overline{x},\overline{y}$ -ը տվյալ ընտրանքում փոփոխականների միջին թվաբանականներն են, S_x, S_y -ը նրանց հաստատուն շեղվածքներն են, n –ը՝ զույգերի թիվը:

Կոռելացիայի r զույգային գործակիցն ընդունում է $-1\le r\le +1$ արժեք և ծառայում է գլխավոր ամբողջությունում X և Y փոփոխականների միջև կոռելացիայի անհայտ ρ գործակցի գնահատմանը:

Ակնհայտ է նաև երկու փոփոխականների միջև $r>0$ դրական, $r<0$ բացասական գծային կոռելացիոն կապը: Որքան | r | - ի արժեքը մոտ է մեկի, այնքան սերտ է կոռելացիայի կապը: Կոռելացիայի r կապը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$r_{xy}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right]}}: \qquad (7.13.)$$

Բերված բանաձևերով (7.12) և (7.13) հաշվարկները կարելի է պարզեցնել, ելակետային տվյալները նախապես ձևափոխելով: r_{xy} արժեքը չի

փոփոխվում, եթե x և y փոփոխականների միջև գծային ձևափոխությունները իրականացվեն հետևյալ տեսքով.

$$\left.\begin{aligned}ax+b&=x'\\ cy+d&=y'\end{aligned}\right\}:$$

Երբ $ac>0$, a և c ունեն նույն նշանը; a, b, c, d ցանկացած թվեր են, երբ $ac<0$, ապա r_{xy} փոփոխվում է հակադիրորեն:

Հետազոտական աշխատանքներում հաճախ հարց է ծագում, արդյոք r_{xy} - ը զրոյից նկատելի տարբերվում է, այսինքն իսկապես գծային կոռելացիոն կապ կա թե ոչ, թե այն ստացվել է տվյալների պատահական ընտրման արդյունքից:

r_{xy} -ը զրոյից 95% հավանականությամբ նկատելի տարբերության մասին դատելիս, r_{xy} - ի հաշվարկային արժեքը համեմատելով $r_{0,05}^{\text{тр}}(n)$ սահմանային արժեքի հետ, $\left|r_{xy}\right|>r_{0,05}^{\text{тр}}(n)$ դեպքում, X և Y փոփոխականների միջև ճշտված գծային կոռելացիայի կախվածությունը 95% հավանականությամբ իրավացի է, իսկ նրանց միջև սերտությունը կարելի է գնահատել r_{xy} արժեքով: Հակառակ դեպքում, երբ $\left|r_{xy}\right|\le r_{0,05}^{\text{тр}}(n)$, փոփոխականների միջև կապը պետք է համարել ոչ էական:

Կոռելացիայի r գործակիցը գլխավոր ամբողջության կոռելացիայի գործակցի՝ ρ -ի, գնահատականն է: r -ի վստահելի միջակայքը կառուցելու համար անհրաժեշտ է անցնել Ռ. Ֆիշերի ֆունկցիային.

$$Z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

Z -ի ստանդարտ սխալը որոշում են

$S_Z=\dfrac{1}{\sqrt{n-3}}$ արտահայտությամբ,

որտեղ՝ n - ը ընտրանքի ծավալն է, (n – 3) –ը՝ Z-ի ազատության աստիճանների թիվը:

Z - ի համար 95% վստահելի միջակայքը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$\underbrace{z-1{,}96\cdot S_z}_{z_H}<\underbrace{Z<z+1{,}96\cdot S_z}_{z_Ⴆ}$$

կամ

$z_H<Z<z_B$

ρ - ի համար $r_H<\rho<r_B$

որտեղ՝ $r_i = \dfrac{e^{-2z_i} - 1}{e^{2z_i} + 1}$ $i = H, B$ (ստորին և վերին):

z -ից r և հակառակը անցման համար կազմվել է հավելվածի (1.12) և (1.13) աղյուսակները:

Անհրաժեշտ է հստակ սահմանազատումներ դնել կոռելյացիայի հաշվարկված r արժեքների երկու հասկացությունների միջև՝

ա) կոռելյացիայի գործակիցը մեծ է (փոքր է),

բ) կոռելյացիայի գործակիցը նկատելի է (նկատելի չէ)

Օրինակ՝ r = 0,8 արժեքը բավական մեծ է, սակայն փոփոխականների միջև գծային կապը աննշան է, եթե n < 7: Մյուս կողմից՝ մեծ ծավալի ընտրանքի դեպքում (n = 100) r = 0,2 աննշան, բայց 95% հավանականության դեպքում համարվում է նկատելի:

Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ կոռելյացիայի r_{xy} զույգային գործակիցը կարող է միայն գնահատել X և Y փոփոխականների միջև գծային կապը: Ոչ գծային կապի դեպքում իմաստ չունի օգտվել r - ից: Երբ r - ի արժեքը մոտ է զրոյի, նշանակում է, որ փոփոխականների միջև գծային կապը բացակայում է, ոչ թե նրանց միջև կապ ընդհանրապես չկա: Վերջապես, երկու փոփոխականների միջև բացահայտված գծային կապը դեռևս չի խոսում նրանց միջև պատճառահետևանքային կապի մասին: Միշտ պետք է հիշել կեղծ կոռելյացիայի մասին, որը կարող է առաջանալ երրորդ գործոնի հետևանքով:

7.8. Մասնակի կոռելյացիա

Հետազոտական աշխատանքներում հաճախ հանդիպում են խնդիրներ, երբ երկու հատկանիշների միջև կապը որոշվում է երրորդի առկայության պայմաններում:

Օրինակ՝ մեկ ողկույզից հյութի ելքը կախված է կենսազանգվածից, պտղի քանակից և նրաց չափերից: Պտուղների թիվը ուղիղ կոռելյացիոն կապի մեջ է կենսազանգվածից, իսկ չափը հակառակ կապի մեջ է ողկույզի պտղաքանակից:

Մի քանի փոփոխականների փոփոխման տվյալների առկայության դեպքում հնարավորություն է ստեղծվում գտնել ցանկացած զույգ փոփոխականների միջև գծային կոռելյացիայի կապը, բացառելով մնացած փոփոխականների ազդեցությունը: x, y, z երեք փոփոխականների դեպքում, այդ նպատակին կարող են ծառայել հետևյալ բանաձևերը.

$$
\left.
\begin{aligned}
r_{xy\cdot z} &= \frac{r_{xy} - r_{xz}\cdot r_{yz}}{\sqrt{\left(1-r_{xz}^2\right)\left(1-r_{yz}^2\right)}},\\
z_{xz\cdot y} &= \frac{r_{xz} - r_{xy}\cdot r_{yz}}{\sqrt{\left(1-r_{xy}^2\right)\left(1-r_{yz}^2\right)}},\\
r_{yz\cdot x} &= \frac{r_{yz} - r_{xy}\cdot r_{xz}}{\sqrt{\left(1-r_{xy}^2\right)\left(1-r_{xz}^2\right)}},
\end{aligned}
\right\}
\qquad (7.14.)
$$

որտեղ՝- r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} փոփոխականների միջև զույգային կոռելյացիաների գործակիցն է, $r_{xy\cdot z}$ x և y փոփոխականների միջև մասնակի կոռելյացիան է, երբ բացառվում է z փոփոխականի ազդեցությունը (նման ձևով հասկացվում են նաև $r_{xz\cdot y}$ և $r_{yz\cdot x}$ նշանակումները):

K թվով փոփոխականների դեպքում, օգտվելով որոշիչի հասկացողությունից, դժվար չէ հաշվարկել կոռելյացիայի մասնակի գործակիցները.

$$
R_{123\ldots K} = \begin{vmatrix}
r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1K}\\
r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2K}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
r_{K1} & r_{K2} & r_{K3} & \cdots & r_{KK}
\end{vmatrix}
\qquad (7.15.)
$$

որտեղ՝ r_{ij} -ն i և j -ն փոփոխականների միջև կոռելյացիայի զույգային գործակիցներն են ($i,j = 1, 2, \ldots, K;\ i \neq j$):

r_{ij} գործակիցների մատրիցան սիմետրիկ է գլխավոր անկյունագծին ($r_{ij} = r_{ji}$), իսկ վերջինիս տարրերը, ակնհայտ է, որ հավասար են մեկի ($r_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, K$): Այս դեպքում ցանկացած երկու փոփոխականների միջև կոռելյացիայի մասնակի գործակիցները հաշվարկվում են հետևյալ կերպ.

$$
r_{12\cdot 34\ldots K} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}\cdot R_{22}}}, \qquad (7.16.)
$$

որտեղ՝ R_{12}, R_{11}, R_{22} -ը համապատասխանաբար r_{12}, r_{11}, r_{22} տարրերի (A) որոշիչում մինորներն են:

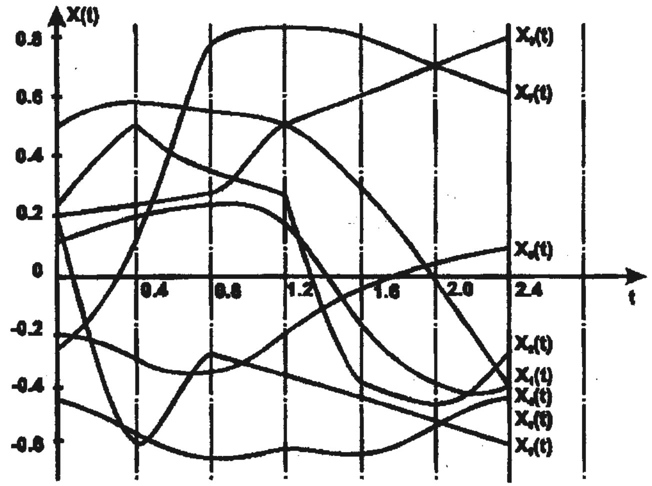
Կոռելյացիոն ֆունկցիայի որոշման օրինակ:

Որպես x(t) պատահական ֆունկցիա ներկայացված են առանցքակալային հանգույցի թրթռումների գրանցման օսցիլոգրաֆի տվյալները: Նկ. 7.6-ում դրանք տրված են 8 իրացման համախմբով:

Պահանջվում է՝

ա) գտնել պատահական ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը՝ $m_x(t)$, դիսպերսիան՝ $D_x(t)$, կոռելացիոն ֆունկցիան՝ $K_x(t')$ և նորմավորված կոռելացիայի $r_x(t,t')$ ֆունկցիայի բնութագրերը:

<u>Լուծում</u>: Քանի որ x(t) պատահական ֆունկցիան փոփոխվում է համեմատաբար սահուն, ապա հատույթները պետք է ընտրել ոչ հաճախ, օրինակ՝ t = 0,4 վրկ պարբերությամբ, պատահական ֆունկցիան կարելի է բերել յոթ պատահական մեծությունների, հետևյալ հատույթներով t = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4: Նշված հատույթներում կորերի արժեքները լրացված են աղյուսակում:



Նկ. 7.6. Առանցքակալ թրթռումների պատահական ֆունկցիաների կորեր ութ փորձերի համար:

Աղյուսակ 7.2

Փորձի համարը \ t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
1	0,52	0,58	0,55	0,50	0,24	-0,01	-0,40
2	0,30	0,46	0,33	0,26	-0,41	-0,48	-0,24
3	0,20	0,23	0,30	0,50	0,62	0,70	0,80
4	0,12	0,20	0,27	0,15	-0,20	-0,42	-0,40
5	-0,20	-0,25	-0,35	-0,20	-0,05	0,05	-0,10
6	-0,45	-0,55	-0,65	-0,60	-0,65	-0,50	-0,45
7	-0,25	0,13	0,70	0,80	0,75	0,70	0,65
8	0,18	-0,60	-0,30	-0,39	-0,45	-0,50	-0,59

Որոշենք x(0), x(0,4), x(0,8), x(1,2), x(1,6), x(2,0), x(2,4) պատահական մեծությունների արժեքները: Ըստ սյունակների գումարելով արժեքները և բաժանելով իրացման քանակի n = 8 վրա, որոշում ենք ըստ ժամանակի մաթեմատիկական սպասման մոտավոր կախվածությունը.

$$m_x(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{t_i}$$

Աղյուսակ 7.3

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$m_x(t)$	0,0525	0,0250	0,1063	0,1275	-0,0191	-0,0575	-0,09125

Կոռելացիայի մոմենտները և դիսպերսիաները որոշում ենք հետևյալ սխեմայով: Վիճակագրական դիսպերսիաները հաշվարկելու համար համապատասխան սյունակների արժեքների քառակուսիների գումարը բաժանվում է իրացման քանակի n = 8 վրա և արդյունքից հանվում է համապատասխան մաթեմատիկական սպասման քառակուսին: Ստացված արդյունքը ճշտելու համար այն բազմապատկվում է $\frac{n}{n-1}$ արտադրիչով:

$$D_x(t_i)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{t_i}^2-m_x^2(t_i)\right]\frac{n}{n-1}:$$

Նման ձևով գնահատվում են նաև կոռելացիայի մոմենտները: Երկու հատույթներով վիճակագրական մոմենտները գտնելու համար համապատասխան սյունակների արժեքների արտադրյալների գումարը բաժանվում է իրացման քանակի վրա n=8, արդյունքից հանվում է համապատասխան սյունակների մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալը: Կոռելացիայի մոմենտները ճշտելու համար ստացված մեծությունը բազմապատկվում է $\frac{n}{n-1}$ արտադրիչով:

$$K_{xi}(t_i t_j)=\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{ji}-m_{x1}(t_1)m_x(t_j)\right]$$

j = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4

Այսպիսով, x(0), x(0,4), ..., x(2,4) պատահական մեծությունների կոռելացիայի մատրիցայի համակարգը և կոռելացիայի $K_{xi}(t,t')$ ֆունկցիայի արժեքները լրացվում են աղյուսակում:

Աղյուսակ թիվ 7.4-ի գլխավոր անկյունագծի արդյունքները համարվում են դիսպերսիայի արժեքները:

Աղյուսակ 7.4

t' \ t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
0	0,1043	0,0937	0,0809	0,0632	0,021	-0,0122	-0,0251
0,4		0,1968	0,1841	0,1782	0,1135	0,0736	0,0701
0,8			0,2299	0,2257	0,1778	0,1327	0,1243
1,2				0,2360	0,2126	0,1801	0,1730
1,6					0,2625	0,2538	0,2307
2,0						0,2661	0,2536
2,4							0,2763

Աղյուսակ 7.5

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$D_x(t)$	0,1043	0,1968	0,2299	0,2360	0,2625	0,2661	0,2763

Դիսպերսիայի համապատասխան արժեքներից քառակուսի արմատներ հանելով ստանում ենք, ըստ ժամանակի միջին քառակուսային շեղման կախվածությունը

Աղյուսակ 7.6

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\sigma_x(t)$	0,3230	0,4437	0,4794	0,4858	0,5123	0,5159	0,5256

Կորելացիայի նորմավորված $r_x(t,t')$ ֆունկցիայի արժեքները որոշվել են հետևյալ բանաձևով.

$$r_x(t,t') = \frac{K_{xkj}}{\sigma_{xj} \cdot \sigma_{xk}}$$

Աղյուսակ 7.7

t' \ t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
0	1	0,6541	0,5225	0,4027	0,1240	-0,0733	-0,1480
0,4		1	0,8654	0,8266	0,4993	0,3217	0,3007
0,8			1	0,9690	0,7239	0,5022	0,4583
1,2				1	0,8655	0,6815	0,6379
1,6					1	0,9601	0,8509
2,0						1	0,9352
2,4							1

$$m_x = \frac{\sum_{j=1}^{K} m_x(t_j)}{K} = 0{,}0180,$$

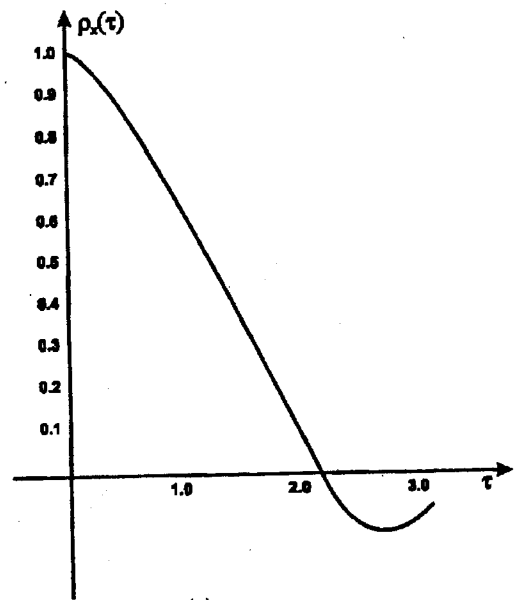
$$D_x = \frac{\sum_{j=1}^{K} D_x(t_j)}{K} = 0{,}1965:$$

Նորմավորված կորելացիայի ֆունկցիայի գնահատականները միջինացնելով գլխավոր անկյունագծի ողղությամբ կստանանք $\rho_x(\tau)$ ֆունկցիայի արժեքները (աղյուսակ 7.8)

Աղյուսակ 7.8

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4
$\rho_x(\tau)$	1	0,8749	0,7211	0,5105	0,3013	0,1137	-0,1480

$\rho_x(\tau)$ ֆունկցիայի (նկ. 7.7) գրաֆիկական տվյալների վերլուծությունը ցույց է տալիս , որ պատահական գրգռող ազդակների ազդեցության տակ կորելացիայի ֆունկցիան որոշակի ժամանակի ընթացքում ստանում է բացասական արժեքներ: Ժամանակի աճի հետ ֆունկցիան աստիճանաբար մարում է: Որքան ֆունկցիան արագ է մարում, այնքան գործընթացը ցանկալի է:



Նկ. 7.7 $\rho_x(\tau)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$\varphi = 2\arcsin\sqrt{p}$ (p – ընտրանքի բանակը, %)

Աղյուսակ 1.1

P, %	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
0,1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
0,2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
0,3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
0,4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
0,5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	0,148	0,150	0,151	0,153	0,154
0,6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,165	0,166
0,7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
0,8	0,179	0,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
0,9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
1	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
2	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
3	0,348	0,354	0,360	0,365	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
4	0,403	0,408	0,413	0,418	0,423	0,428	0,432	0,437	0,442	0,446
5	0,451	0,456	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
6	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532
7	0,536	0,539	0,543	0,547	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
8	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
9	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
11	0,676	0,679	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
12	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
13	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
14	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
15	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
16	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
17	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,866	0,868	0,871	0,874
18	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
19	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,942	0,945	0,947	0,950
21	0,952	0,955	0,957	0,959	0,962	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
22	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,993	0,996	0,998
23	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
24	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	1,045
25	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,063	1,066	1,068
26	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
27	1,093	1,095	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	1,113
28	1,115	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,35
29	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179
31	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,194	1,196	1,198	1,200
32	1,203	1,205	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243

P, %	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1,299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,063	1,605	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,625	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,695	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,779	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1969	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,012	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,058	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2,212

P, %	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2,237
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,401
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,450	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,550	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,655	2,659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
95	2,691	2,695	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931
99	2,941	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
99,1	2,952	2,953	2,954	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,960	2,961
99,2	2,963	2,964	2,965	2,966	2,967	2,968	2,969	2,971	2,972	2,973
99,3	2,974	2,975	2,976	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,984	2,985
99,4	2,987	2,988	2,989	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,997	2,999
99,5	3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,012	3,013
99,6	3,015	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030
99,7	3,032	3,034	3,036	3,038	3,040	3,041	3,044	3,046	3,048	3,050
99,8	3,052	3,054	3,057	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,072	3,075
99,9	3,078	3,082	3,085	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,113	3,122
100	3,142									

$g_{0,05}$ (f) –ի արժեքները (f - ազատության աստիճանների թիվն է)

Աղյուսակ 1.2

f	$g_{0,05}$ (f)	f	$g_{0,05}$ (f)	f	$g_{0,05}$ (f)	f	$g_{0,05}$ (f)
1	1,412	7	2,237	13	2,493	19	2,644
2	1,689	8	2,294	14	2,523	20	2,664
3	1,869	9	2,343	15	2,551	21	2,683
4	1,996	10	2,387	16	2,577	22	2,701
5	2,093	11	2,426	17	2,600	23	2,717
6	2,172	12	2,461	18	2,623		

Նորմալ բաշխման հավանականության խտություն Z(t)

$$t_i = \frac{x_i - m(x)}{\sigma}$$

Աղյուսակ 1.3

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3932	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3629	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3189	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1624	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0,0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0225
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0182
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0089	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0028	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Հավանականության միջակայքերի արժեքները

$$\phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \text{ և } \frac{1}{2}\phi(t)$$

Աղյուսակ 1.4

t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$	T	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$
0,00	0,0000	0,000	0,27	0,2128	0,1065
0,01	0,0080	0,004	0,28	0,2205	0,1105
0,02	0,0160	0,008	0,29	0,2282	0,1140
0,03	0,0239	0,012	0,30	0,2358	0,1180
0,04	0,0313	0,016	0,31	0,2434	0,1215
0,05	0,0399	0,020	0,32	0,2510	0,1258
0,06	0,0478	0,024	0,33	0,2586	0,1295
0,07	0,0558	0,028	0,34	0,2661	0,1334
0,08	0,0638	0,032	0,35	0,2737	0,1370
0,09	0,0717	0,036	0,36	0,2812	0,140
0,10	0,0797	0,040	0,37	0,2886	0,144
0,11	0,0876	0,044	0,38	0,2961	0,148
0,12	0,0955	0,048	0,39	0,3035	0,1515
0,13	0,1034	0,0515	0,40	0,3108	0,1555
0,14	0,1113	0,0555	0,41	0,3182	0,159
0,15	0,1192	0,0595	0,42	0,3255	0,1630
0,16	0,1271	0,0635	0,43	0,3328	0,166
0,17	0,1350	0,0675	0,44	0,3401	0,1700
0,18	0,1428	0,0715	0,45	0,3473	0,1735
0,19	0,1507	0,0755	0,46	0,3545	0,1770
0,20	0,1585	0,0795	0,47	0,3616	0,1810
0,21	0,1663	0,0830	0,48	0,3688	0,1845
0,22	0,1741	0,0870	0,49	0,3759	0,1880
0,23	0,1819	0,0910	0,50	0,3829	0,1915
0,24	0,1897	0,0950	0,51	0,3899	0,1950
0,25	0,1974	0,0983	0,52	0,3969	0,1985
0,26	0,2051	01025	0,53	0,4039	0,2020

t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$	t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$
0,54	0,4108	0,2055	0,94	0,6528	0,3265
0,55	0,4177	0,2090	0,95	0,6579	0,3290
0,56	0,4245	0,2125	0,96	0,6629	0,3315
0,57	0,4813	0,2155	0,97	0,6680	0,3340
0,58	0,4381	0,2190	0,98	0,6729	0,3365
0,59	0,4448	0,2225	0,99	0,6778	0,3390
0,60	0,4515	0,2255	1,00	0,6827	0,3415
0,61	0,4581	0,2290	1,01	0,6875	0,3440
0,62	0,4647	0,2325	1,02	0,6923	0,3460
0,63	0,4713	0,2355	1,03	0,6970	0,3485
0,64	0,4778	0,2390	1,04	0,7017	0,3510
0,65	0,4843	0,2420	1,05	0,7063	0,3530
0,66	0,4907	0,2455	1,06	0,7109	0,3555
0,67	0,4971	0,2485	1,07	0,7154	0,3575
0,68	0,5035	,02520	1,08	0,7199	0,3600
0,69	0,5098	0,2550	1,09	0,7243	0,3620
0,70	0,5161	0,2580	1,10	0,7287	0,3645
0,71	0,5223	0,2610	1,11	0,7330	0,3665
0,72	0,5285	0,2640	1,12	0,7373	0,3685
0,73	0,5346	0,2675	1,13	0,7415	0,3710
0,74	0,5407	0,2705	1,14	0,7457	0,3730
0,75	0,5467	0,2735	1,15	0,7499	0,3750
0,76	0,5527	0,2765	1,16	0,7540	0,3770
0,77	0,5587	0,2795	1,17	0,7580	0,3790
0,78	0,5646	0,2825	1,18	0,7620	0,3810
0,79	0,5705	0,2850	1,19	0,7660	0,3830
0,80	0,5763	0,2880	1,20	0,7699	0,3850
0,81	0,5821	0,2910	1,21	0,7737	0,3870
0,82	0,5878	0,2940	1,22	0,7775	0,3890
0,83	0,5935	0,2965	1,23	0,7813	0,3905
0,84	0,5991	0,2995	1,24	0,7850	0,3925
0,85	0,6047	0,3025	1,25	0,7887	0,3945
0,86	0,6102	0,3050	1,26	0,7923	0,3960
0,87	0,6157	0,3080	1,27	0,7959	0,3980
0,88	0,6211	0,3105	1,28	0,7995	0,4000
0,89	0,6265	0,3135	1,29	0,8030	0,4015
0,90	0,6319	0,3160	1,30	0,8064	0,4030
0,91	0,6372	0,3185	1,31	0,8098	0,4050
0,92	0,6424	0,3210	1,32	0,8132	0,4065
0,93	0,6476	0,3245	1,33	0,8165	0,4080

t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$	t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$
1,34	0,8197	0,4100	1,74	0,9181	0,4590
1,35	0,8230	0,4115	1,75	0,9199	0,4600
1,36	0,8262	0,4130	1,76	0,9216	0,4610
1,37	0,8293	0,4145	1,77	0,9233	0,4615
1,38	0,8324	0,4160	1,78	0,9249	0,4625
1,39	0,8355	0,4175	1,79	0,9265	0,4635
1,40	0,8385	0,4790	1,80	0,9281	0,4640
1,41	0,8415	0,4205	1,81	0,9297	0,4650
1,42	0,8444	0,4220	1,82	0,9312	0,4655
1,43	0,8473	0,4235	1,83	0,9328	0,4665
1,44	0,8501	0,4250	1,84	0,9342	0,4670
1,45	0,8529	0,4265	1,85	0,9357	0,4680
1,46	0,8557	0,4280	1,86	0,9371	0,4685
1,47	0,8584	0,4290	1,87	0,9385	0,4695
1,48	0,8611	0,4305	1,88	0,9399	0,4700
1,49	0,8638	0,4320	1,89	0,9412	0,4705
1,50	0,8464	0,4330	1,90	0,9426	0,4715
1,51	0,8690	0,4335	1,91	0,9439	0,4720
1,52	0,8715	0,4355	1,92	0,9451	0,4725
1,53	0,8740	0,4370	1,93	0,9464	0,4730
1,54	0,8764	0,4380	1,94	0,9476	0,4740
1,55	0,8789	0,4395	1,95	0,9485	0,4745
1,56	0,8812	0,4405	1,96	0,9500	0,4750
1,57	0,8836	0,4420	1,97	0,9512	0,4755
1,58	0,8859	0,4430	1,98	0,9523	0,4760
1,59	0,8882	0,4440	1,99	0,9534	0,4765
1,60	0,8904	0,4450	2,00	0,9545	0,4775
1,61	0,8926	0,4465	2,01	0,9560	0,4780
1,62	0,8948	0,4475	2,02	0,9566	0,4585
1,63	0,8969	0,4485	2,03	0,9580	0,4790
1,64	0,8990	0,4495	2,04	0,9587	0,4795
1,65	0,9011	0,4505	2,05	0,9600	0,4800
1,66	0,9031	0,4515	2,06	0,9606	0,4805
1,67	0,9051	0,4526	2,07	0,9620	0,4810
1,68	0,9070	0,4535	2,08	0,9625	0,4810
1,69	0,9090	0,4545	2,09	0,9630	0,4815
1,70	0,9109	0,4555	2,10	0,9643	0,4820
1,71	0,9127	0,4565	2,11	0,9650	0,4825
1,72	0,9146	0,4575	2,12	0,9660	0,4830
1,73	0,9164	0,4580	2,13	0,9670	0,4835

t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$	t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$
2,14	0,9676	0,4840	2,54	0,9889	0,4945
2,15	0,9680	0,4840	2,55	0,9889	0,4945
2,16	0,9692	0,4845	2,56	0,9895	0,4950
2,17	0,9700	0,4850	2,57	0,9895	0,4950
2,18	0,9707	0,4855	2,58	0,9901	0,4950
2,19	0,9710	0,4855	2,59	0,9901	0,4950
2,20	0,9722	0,4860	2,60	0,9907	0,4955
2,21	0,9730	0,4865	2,61	0,9907	0,4955
2,22	0,9736	0,4870	2,62	0,9912	0,4955
2,23	0,9740	0,4870	2,63	0,9912	0,4955
2,24	0,9749	0,4875	2,64	0,9917	0,4960
2,25	0,9760	0,4880	2,65	0,9917	0,4960
2,26	0,9762	0,4880	2,66	0,9922	0,4960
2,27	0,9770	0,4885	2,67	0,9922	0,4960
2,28	0,9774	0,4885	2,68	0,9926	0,4965
2,29	0,9780	0,4890	2,69	0,9926	0,4965
2,30	0,9786	0,4895	2,70	0,9931	0,4965
2,31	0,9790	0,4895	2,71	0,9931	0,4965
2,32	0,9797	0,4900	2,72	0,9935	0,4965
2,33	0,9800	0,4900	2,73	0,9935	0,4965
2,34	0,9801	0,4905	2,74	0,9939	0,4970
2,35	0,9810	0,4905	2,75	0,9939	0,4970
2,36	0,9817	0,4910	2,76	0,9942	0,4970
2,37	0,9820	0,4910	2,77	0,9942	0,4970
2,38	0,9827	0,4915	2,78	0,9946	0,4975
2,39	0,9830	0,4915	2,79	0,9946	0,4975
2,40	0,9836	0,4920	2,80	0,9949	0,4975
2,41	0,9840	0,4920	2,81	0,9949	0,4975
2,42	0,9845	0,4920	2,82	0,9952	0,4975
2,43	0,9850	0,4925	2,83	0,9952	0,4975
2,44	0,9853	0,4925	2,84	0,9955	0,4975
2,45	0,9860	0,4930	2,85	0,9955	0,4975
2,46	0,9861	0,4930	2,86	0,9958	0,4980
2,47	0,9861	0,4930	2,87	0,9958	0,4980
2,48	0,9869	0,4935	2,88	0,9960	0,4980
2,49	0,9870	0,4935	2,89	0,9960	0,4980
2,50	0,9876	0,4940	2,90	0,9962	0,4980
2,51	0,9880	0,4940	2,91	0,9962	0,4980
2,52	0,9883	0,4940	2,92	0,9965	0,4980
2,53	0,9089	0,4945	2,93	0,9965	0,4980

t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$	t	$\phi(t)$	$\frac{1}{2}\phi(t)$
2,94	0,9967	0,4985	3,30	0,9986	0,4993
2,95	0,9967	0,4985	3,40	0,999	0,4995
2,96	0,9969	0,4985	3,50	0,999	0,4995
2,97	0,9969	0,4985	3,60	0,999	0,4995
2,98	0,9971	0,4985	3,70	0,999	0,499
2,99	0,9971	0,4985	3,80	0,999	0,499
3,00	0,9973	0,4986	3,90	0,999	0,499
3,10	0,9986	0,4986	4,00	0,999	0,499
3,20	0,9986	0,4993	5,00	0,99999	0,49999

Կոլմոգորովի p(λ) չափանիշի արժեքները

Աղյուսակ 1.5

λ	p(λ)	λ	p(λ)	λ	p(λ)
0,0	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,967	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

Վստահելի սահմանների գործակիցները

Աղյուսակ 1.6

N	$\alpha = 60$	$\alpha = 80$	$\alpha = 0{,}90$	$\alpha = 95$
	x_α	x_α	x_α	x_α
3	1,06	1,89	2,92	4,90
4	0,98	1,64	2,35	3,18
5	0,94	1,53	2,13	2,78
6	0,92	1,48	2,02	2,57
7	0,91	1,44	1,84	2,45
8	0,90	1,42	1,90	2,37
9	0,89	1,40	1,86	2,31
10	0,88	1,38	1,83	2,26
11	0,88	1,37	1,81	2,23
12	0,88	1,36	1,80	2,20
13	0,87	1,36	1,78	2,18
14	0,87	1,35	1,77	2,16

N	$\alpha = 60$	$\alpha = 80$	$\alpha = 0{,}90$	$\alpha = 95$
	x_α	x_α	x_α	x_α
15	0,87	1,35	1,76	2,15
20	0,86	1,33	1,73	2,09
25	0,86	1,32	1,71	2,06
30	0,85	1,31	1,70	2,04
40	0,85	1,30	1,68	2,02
50	0,85	1,30	1,68	2,01
60	0,85	1,30	1,67	2,00
80	0,85	1,29	1,66	1,99
100	0,85	1,29	1,66	1,98

Վեյբուլի բաշխման օրենքի պարամետրը և գործակիցները

Աղյուսակ 1.7

b	K_b	C_b	ν	S_b	$p_{0в}$
0,80	1,13	1,43	1,26	2,82	0,67
0,84	1,10	1,31	1,20	2,61	0,66
0,88	1,07	0,21	1,14	2,43	0,65
0,92	1,04	0,13	1,09	2,27	0,65
0,96	1,02	1,06	1,04	2,13	0,14
1,00	1,00	1,00	1,00	2,00	0,63
1,08	0,97	0,90	0,93	1,78	0,62
1,16	0,95	0,82	0,86	1,60	0,61
1,24	0,93	0,76	0,81	1,45	0,60
1,32	0,92	0,70	0,76	1,31	0,59
1,40	0,91	0,66	0,72	1,20	0,58
1,44	0,91	0,64	0,71	1,15	0,58
1,48	0,90	0,62	0,69	1,10	0,58
1,52	0,90	0,60	0,67	1,05	0,57
1,56	0,90	0,59	0,65	1,00	0,57
1,60	0,90	0,57	0,69	0,56	0,57
1,64	0,89	0,56	0,63	0,92	0,57
1,68	0,89	0,55	0,61	0,88	0,56
1,72	0,89	0,53	0,60	0,85	0,56
1,76	0,89	0,52	0,59	0,81	0,56
1,80	0,89	0,51	0,57	0,78	0,56
1,84	0,89	0,50	0,56	0,75	0,55
1,88	0,89	0,49	0,55	0,72	0,55
1,92	0,89	0,48	0,54	0,69	0,55
1,96	0,89	0,47	0,53	0,66	0,55
2,00	0,89	0,46	0,52	0,63	0,54

b	K_b	C_b	ν	S_b	p_{0n}
2,04	0,89	0,45	0,51	0,60	0,54
2,08	0,89	0,45	0,50	0,58	0,54
2,12	0,89	0,44	0,50	0,56	0,54
2,16	0,89	0,43	0,49	0,53	0,54
2,20	0,89	0,42	0,48	0,51	0,54
2,24	0,89	0,42	0,47	0,49	0,53
2,28	0,89	0,41	0,46	0,47	0,53
2,32	0,89	0,41	0,46	0,44	0,53
2,36	0,89	0,40	0,45	0,42	0,53
2,40	0,89	0,39	0,44	0,40	0,53
2,44	0,89	0,39	0,44	0,39	0,53
2,48	0,89	0,38	0,43	0,37	0,53
2,52	0,89	0,38	0,42	0,35	0,52
2,56	0,89	0,37	0,42	0,33	0,52
2,60	0,89	0,37	0,44	0,32	0,52
2,64	0,89	0,36	0,41	0,30	0,52
2,70	0,89	0,36	0,40	0,28	0,52
2,74	0,89	0,35	0,39	0,26	0,52
2,78	0,89	0,35	0,39	0,24	0,52
2,82	0,89	0,34	0,38	0,23	0,51
2,86	0,89	0,34	0,38	0,22	0,51
2,90	0,89	0,33	0,37	0,20	0,51
2,94	0,89	0,33	0,37	0,19	0,51
2,98	0,89	0,33	0,37	0,17	0,51
3,02	0,89	0,32	0,36	0,16	0,51
3,06	0,89	0,32	0,36	0,15	0,51
3,10	0,89	0,32	0,35	0,14	0,51
3,14	0,89	0,31	0,35	0,12	0,51
3,18	0,90	0,31	0,34	0,11	0,51
3,22	0,90	0,31	0,34	0,10	0,51
3,26	0,90	0,30	0,34	0,09	0,50
3,30	0,90	0,30	0,33	0,08	0,50
3,34	0,90	0,30	0,33	0,07	0,50
3,38	0,90	0,29	0,33	0,06	0,50
3,42	0,90	0,29	0,32	0,05	0,50
3,46	0,90	0,29	0,32	0,04	0,50
3,50	0,90	0,28	0,32	0,03	0,50
3,54	0,90	0,28	0,31	0,02	0,50
3,58	0,90	0,28	0,31	0,01	0,50
3,62	0,90	0,28	0,31	-0,00	0,50
3,66	0,99	0,27	0,30	-0,01	0,50

b	K_b	C_b	ν	S_b	p_{0n}
3,70	0,90	0,27	0,30	-0,02	0,50
3,74	0,90	0,27	0,30	-0,03	0,50
3,78	0,90	0,27	0,30	-0,04	0,49
3,82	0,90	0,26	0,29	-0,05	0,49
3,86	0,90	0,26	0,29	-0,06	0,49
3,90	0,91	0,26	0,29	-0,07	0,49
3,94	0,91	0,26	0,28	-0,08	0,49
3,98	0,91	0,26	0,28	-0,08	0,49
4,02	0,91	0,25	0,28	-0,09	0,49
4,06	0,91	0,25	0,28	-0,10	0,49
4,10	0,91	0,25	0,27	-0,11	0,49
4,14	0,91	0,25	0,27	-0,11	0,49
4,18	0,91	0,25	0,27	-0,12	0,49

Վեյբուլի բաշխման օրենքի ինտեգրալային ֆունկցիայի արժեքները

Աղյուսակ 1.8

	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
0,1	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
0,2	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,09	0,07	0,06	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02
0,3	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,08
0,4	0,35	0,33	0,31	0,28	0,26	0,24	0,22	0,21	0,15	0,18	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,10
0,5	0,41	0,39	0,37	0,35	0,33	0,32	0,30	0,28	0,27	0,25	0,24	0,22	0,21	0,20	0,18	0,17
0,6	0,47	0,45	0,43	0,42	0,40	0,39	0,37	0,36	0,34	0,33	0,32	0,30	0,29	0,28	0,27	0,25
0,7	0,52	0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,44	0,45	0,43	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35
0,8	0,56	0,55	0,54	0,54	0,53	0,52	0,51	0,50	0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45	0,45	0,44
0,9	0,60	0,59	0,59	0,59	0,58	0,58	0,57	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,54	0,54
1,0	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63
1,1	0,66	0,67	0,67	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70	0,71	0,71	0,71	0,72
1,2	0,69	0,70	0,71	0,71	0,72	0,73	0,73	0,74	0,74	0,75	0,75	0,76	0,77	0,78	0,78	0,79
1,3	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,82	0,83	0,84	0,85
1,4	0,74	0,75	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,89
1,5	0,76	0,78	0,79	0,80	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,89	0,90	0,90	0,91	0,92	0,93
1,6	0,78	0,80	0,81	0,83	0,84	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,95
1,7	0,80	0,82	0,83	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,92	0,93	0,94	0,94	0,95	0,96	0,97	0,97
1,8	0,82	0,84	0,85	0,87	0,88	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98
1,9	0,83	0,85	0,87	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
2,0	0,85	0,87	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99
2,1	0,86	0,88	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00
2,2	0,87	0,89	0,91	0,92	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00
2,3	0,88	0,90	0,92	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,4	0,89	0,91	0,93	0,94	0,96	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,5	0,90	0,92	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,6	0,91	0,93	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,7	0,91	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,8	0,92	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,9	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

χ^2 համաձայնեցման չափանիշի արժեքները

Աղյուսակ 1.9

r	P %							
	95	90	80	70	50	30	20	10
1	0,00	0,02	0,06	0,15	0,45	1,07	1,64	2,71
2	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60
3	0,35	0,58	1,00	1,42	2,37	3,66	4,04	6,25
4	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	1,06
7	2,17	2,83	3,82	4,67	6,34	8,38	9,80	12,0
8	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4
9	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7
10	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0

Վեյբուլի բաշխման օրենքի քվանտելները

Աղյուսակ 1.10

Σp_i	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,16	0,22	0,27	0,32
0,03	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,08	0,16	0,11	0,13	0,14	0,16	0,18	0,23	0,35	0,37	0,42
0,05	0,04	0,05	0,07	0,08	0,10	0,12	0,14	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,31	0,37	0,43	0,48
0,07	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,25	0,27	0,35	0,42	0,47	0,52
0,10	0,08	0,11	0,13	0,15	0,18	0,20	0,22	0,25	0,27	0,29	0,31	0,33	0,41	0,47	0,53	0,57
0,15	0,14	0,17	0,13	0,23	0,25	0,29	0,30	0,33	0,35	0,38	0,40	0,42	0,50	0,56	0,60	0,63
0,20	0,19	0,22	0,26	0,23	0,32	0,34	0,37	0,39	0,41	0,44	0,45	0,47	0,55	0,61	0,65	0,69
0,25	0,25	0,29	0,33	0,36	0,39	,041	0,44	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,61	0,66	0,70	0,73
0,30	0,32	0,36	0,39	0,42	0,45	0,48	0,50	0,53	0,55	0,56	0,58	0,60	0,66	0,71	0,75	0,77
0,35	0,40	0,44	0,47	0,50	0,53	0,55	0,57	0,59	0,61	0,62	0,64	0,66	0,71	0,75	0,79	0,81
0,40	0,47	0,51	0,54	0,57	0,60	0,62	0,64	0,66	0,67	0,69	0,70	0,72	0,76	0,80	0,83	0,85
0,45	0,57	0,60	0,63	0,66	0,68	0,69	0,71	0,73	0,74	0,75	0,76	0,76	0,81	0,84	0,86	0,83
0,50	0,67	0,69	0,72	0,74	0,75	0,77	0,78	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,86	0,89	0,90	0,91
0,55	0,79	0,81	0,82	0,84	0,85	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	0,91	0,91	0,96	0,94	0,95
0,60	0,91	0,92	0,92	0,96	0,94	0,94	0,94	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98
0,65	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02
0,70	1,23	1,20	1,18	1,17	1,15	1,14	1,13	1,12	1,12	1,11	1,10	1,10	1,08	1,06	1,05	1,05
0,75	1,45	1,40	1,36	1,33	1,30	1,27	1,25	1,23	1,22	1,21	1,20	1,18	1,14	1,11	1,10	1,09
0,80	1,70	1,61	1,54	1,49	1,44	1,41	1,37	1,35	1,32	1,30	1,23	1,27	1,21	1,17	1,15	1,13
0,85	2,11	1,96	1,84	1,74	1,67	1,61	1,55	1,51	1,47	1,45	1,39	1,32	1,31	1,25	1,21	1,18
0,90	2,53	2,30	2,13	2,00	1,90	1,81	1,74	1,68	1,63	1,59	1,55	1,52	1,40	1,32	1,20	1,23
0,93	2,96	2,66	2,43	2,26	2,12	2,01	1,92	1,84	1,78	1,72	1,67	1,63	1,48	1,39	1,32	1,28
0,95	3,38	3,00	2,71	2,49	2,33	2,19	2,08	1,99	1,91	1,84	1,78	1,73	1,55	1,44	1,37	1,32
0,97	4,03	3,51	3,13	2,84	2,63	2,45	2,31	2,19	2,09	2,01	1,94	1,87	1,65	1,52	1,43	1,37
0,99	5,46	4,60	4,01	3,57	3,24	2,98	2,77	2,60	2,46	2,34	2,23	2,15	1,84	1,66	1,55	1,46

$r^{\text{гр}}_{0,05}(n)$ - արժեքները (n - զույգերի թիվն է)

Աղյուսակ 1.11

n	$r^{\text{гр}}_{0,05}(n)$	n	$r^{\text{гр}}_{0,05}(n)$	n	$r^{\text{гр}}_{0,05}(n)$	N	$r^{\text{гр}}_{0,05}(n)$
4	0,950	15	0,514	26	0,388	80	0,219
5	0,878	16	0,497	27	0,381	90	0,206
6	0,811	17	0,482	28	0,374	100	0,196
7	0,757	18	0,468	29	0,367	125	0,175
8	0,707	19	0,456	30	0,361	150	0,160
9	0,666	20	0,444	35	0,332	200	0,138
10	0,632	21	0,433	40	0,310	250	0,124
11	0,602	22	0,423	45	0,292	300	0,113
12	0,576	23	0,413	50	0,277	400	0,098
13	0,553	24	0,404	60	0,253	500	0,088
14	0,532	25	0,396	70	0,234	1000	0,062

$r(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$ արժեքները (երբ z < 0, r <0)

Աղյուսակ 1.12

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898
0,1	0997	1096	1194	1293	1391	1489	1586	1684	1781	1877
0,2	1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821
0,3	2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714
0,4	3800	3885	3969	4053	4136	4219	4301	4382	4462	4542
0,5	4621	4699	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299
0,6	5370	5441	5511	5580	5649	5717	5784	5850	5915	5980
0,7	6044	6107	6159	6231	6291	6351	6411	6469	6527	6584
0,8	6640	6696	6751	6805	6858	6911	6933	7014	7064	7114
0,9	7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574
1,0	7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969
1,1	8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8225	8306
1,2	8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591
1,3	8617	8643	8668	8692	8717	8791	8764	8787	8810	8832
1,4	8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033
1,5	9015	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201
1,6	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341
1,7	9354	9366	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458
1,8	9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9525	9554
1,9	9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9618	9626	9633
2,0	9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9686	9693	9699
2,1	9704	9710	9716	9722	9727	9732	9738	3743	9748	9753
2,2	9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797
2,3	9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834
2,4	9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	9861	9864

1.12 աղյուսակի շարունակությունը

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	9866	9869	9871	9874	9876	9879	9881	9884	9886	9888
2,6	9890	9892	9894	9897	9899	9901	9903	9904	9906	9908
2,7	9910	9912	9914	9915	9917	9919	9920	9922	9923	9925
2,8	9926	9928	9929	9931	9932	9933	9935	9936	9937	9938
2,9	9940	9941	9942	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949

Ծանոթություն՝ հեշտության համար բոլոր թվերից առաջ 0 -ն, բաց է թողնված:

$$z(r) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$ արժեքները (երբ $r < 0$, $z < 0$)

Աղյուսակ 1.13

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0501	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1105	0,1206	0,1308	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3206	0,3317	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1518	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6467

Գրականություն

1. Моделирование сельскохозяйственных агрегатов и их систем управления. Под редакцией А. Б. Лурье. Ленинград. “Колос”.1979г.312ст.
2. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. М., Наука, 1964г., 576ст.
3. Румшский. Математическая обработка результатов эксперимента. М., Наука, 1971г.,192ст.
4. Митков А. Л., Кардашевский С. В. Статические методы в сельхозмашиностроении.М., Машиностроение, София, Земиздат.1979г.360ст.
5. Ицкевич Э. Л. Статистические методы при автоматизации производства.М.,1964г.
6. Левин Б. Г. Теоритические основы статистической радиотехники.М., 1969г.
7. Шторм Р. Теория вероятностей: Математическая статистика: Статистический контроль качества: Пер. с нем. М.,Мир,1970,368ст.
8. Карасев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика. М.,Статистика, 1979г.

Բովանդակություն

Գրիգորյան Շավարշ Մացակի
Թարվերդյան Արշալույս Պողոսի
Խաչատրյան Արմեն Ցոլակի
Պետրոսյան Դանիել Պետրոսի

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ ԵՎ ԳԻՏԱՓՈՐՁԵՐԻ ՊԼԱՆԱՎՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գիրքը հրատարակվում է Հայկական Գյուղատնտեսական Ակադեմիայի պատվերով՝ Գյուղատնտեսական բարեփոխումների աջակցության ծրագրի միջոցներով:

ԱՍՈՂԻԿ

«ԱՍՈՂԻԿ» հրատարակչություն

Ստորագրված է տպագրության 26.02.2001թ.
Տպագրության եղանակը՝ ռիզոգրաֆիա
Ֆորմատ՝ 60x84/16
Պատվեր՝ 57
Տպաքանակը՝ 400:

Տպագրված է «ԱՍՈՂԻԿ» ՍՊԸ-ի տպարանում:
Ք. Երևան, Ավան, Չարենցի 9/22
Հեռ. 58.22.99 40.49.82
E-mail: print@netsys.am