Մ. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հ. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ,
Ս. Դ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ռ. Ն. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՏՆՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

Գործույթների հետազոտում
Կառավարման գիտություն

I

Թույլատրված է Հայաստանի Հանրապետության Կրթության և գիտության նախարարության կողմից որպես դասագիրք բուհերի ուսանողների համար

ԷԿԱԳՄԱՀԲ
Երևան - 1997

MELS A. SAHAKYAN, HAYK L. SARGSYAN,
SARGIS D. SARGSYAN, RAFAEL N. TONOYAN

MATHEMATICAL METHODS OF ECONOMY ANALYSIS

Operations Research
Management Science
I

Yerevan - 1997

М.А. СААКЯН, Г.Л. САРКИСЯН,
С.Д. САРКИСЯН, Р.Н. ТОНОЯН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКОНОМИКИ

Исследование операций
Наука управления
I

Ереван - 1997

ԴՏՀ 51+33
ԳՄԴ 65.5+22.18y73
Տ-778

Խմբագիրներ՝

Ստեփան Մարկոսյան
Ռաֆայել Տոնոյան

Դասագիրքը գրել են՝ *Մելս (Սամվել) Ա.Սահակյան* (II, V-VII գլուխներ), *Հայկ Լ.Սարգսյան* (I գլուխ), *Սարգիս Դ.Սարգսյան* (III գլուխ), *Ռաֆայել Ն.Տոնոյան* (II, IV գլուխներ)

Տ-778 Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ/Մաս I. Գործույթների հետազոտում, կառավարման գիտություն: Մ.Սահակյան, Հ.Սարգսյան, Ս.Սարգսյան, Ռ.Տոնոյան. - Եր., 1997. - 320 էջ:

Դասագրքում արծարծվում են տնտեսության իրավիճակներն ու մոդելները, դրանց վերլուծության մաթեմատիկական որոշ եղանակներ՝ գծային ծրագրում և երկակիության տեսություն, դիսկրետ օպտիմացման խնդիրներ, ոչ գծային ծրագրում, դինամիկ ծրագրում և խաղերի տեսություն:

Նախատեսված է ապագա տնտեսագետների, մաթեմատիկոսների, ճարտարագետների և այլ հարակից մասնագիտությամբ բակալավրիատի և մագիստրատուրայի ուսանողների համար: Այն կարելի է օգտագործել որպես դասագիրք "Գործույթների հետազոտում", "Կառավարման գիտություն", "Մաթեմատիկական ծրագրում" և "Մաթեմատիկական եղանակները տնտեսագիտությունում" դասընթացներն ուսումնասիրելիս:

Օգտակար կլինի նաև ասպիրանտների, գիտաշխատողների, տնտեսության տարբեր օղակներում տնտեսական վերլուծության, կառավարման և կա մ [illegible] վ զբաղվողների համար:

*

ԳՄԴ 65.5+22.18y73

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆԻ ՓՈԽԱՐԵՆ

1996թ. սեպտեմբերին Ամերիկայի Միացյալ Նահանգների միջազգային զարգացման գործակալության Եվրասիա հիմնադրամը շնորհ հատկացրեց՝ տնտեսագետ ուսանողների համար 1983թ. հրատարակված "Մաթեմատիկական ծրագրավորում" (Մ.Սահակյան, Ս.Սարգսյան, Ֆ.Կարապետյան) ուսումնական ձեռնարկի վերամշակված տարբերակի ստեղծման համար:

Ափսոսանքով ենք նշում, որ այլևս մեզ հետ չէր այդ ձեռնարկի հեղինակներից մեկը՝ երջանկահիշատակ Ֆլորա Կարապետյանը:

Նոր ժամանակները պահանջում էին էապես վերանայել ձեռնարկի հիմնադրույթները, այն լրացնել անհրաժեշտ տնտեսագիտական ու մաթեմատիկական տեղեկատվությամբ: Մենք մեծագույն պատասխանատվությամբ և նույնիսկ բծախնդրությամբ ենք վերաբերվել դասագրքի ստեղծման թիմի կազմավորմանը, ընտրելով խնդրո առարկա բնագավառում հանրապետության լավագույն մասնագետ-գիտակներին՝ Հ.Սարգսյանին, Ռ.Տոնոյանին, Ս.Մարկոսյանին, Վ.Ասլանյանին:

Հեղինակների խումբը, նկատի ունենալով հանրապետությունում իրականացվող արմատական փոփոխությունները, ժողովրդական տնտեսությունում ստեղծված նոր իրավիճակները ու հարաբերությունները, կարևորելով մաթեմատիկայի դերը տնտեսական գործընթացների վերլուծության և ուսումնասիրման հարցերում, բուռն քննարկումներից և մտորումներից հետո, նպատակահարմար գտավ ստեղծելու նոր դասագիրք: Հեղինակները հույսով են, որ այն կնպաստի օպտիմացման մաթեմատիկական եղանակների յուրացմանը, մրցակցային շուկայական տնտեսության պայմաններում ծագող նոր խնդիրների հետազոտմանն ու լուծմանը, ինչպես նաև կօգտագործվի տնտեսության վերլուծության, կառավարման, գործարարության և այլ ոլորտներում: Թե դա ինչքանով է հաջողվել իրականացնել, թողնում ենք ընթերցողի դատին:

Իրենց դիտողություններով և խորհուրդներով դասագրքի ստեղծմանն օգնել են շնորհի սահմաններում անցկացվող սեմինարի աշխատանքների մասնակիցները: Հեղինակների խումբը շնորհակալություն է հայտնում սեմինարների բոլոր մասնակիցներին և, հատկապես, դոցենտներ Հ.Մարզպանյանին, Գ.Գալստյանին (Երևանի պետական համալսարան), պրոֆեսոր Ռ.Սարգսյանին, դոցենտներ Ս.Մկրտչյանին, Ռ.Խաչատրյանին (Երևանի ճարտարագիտական համալսարան) և Երևանի պետական համալսարանի դիսկրետ մաթեմատիկայի ամբիոնի դասախոսներին:

Պարտք ենք համարում հատուկ շնորհակալություն հայտնել Վահագն Տոնոյանին, որն ամենայն բարեխղճությամբ և անտրտունջ իրականացրեց դասագրքի համակարգչային շարվածքը և բազմակի շտկումներն ու վերաշարումները: Շնորհակալ ենք Էկոլոգիայի և կենսագործունեության անվտանգության գիտությունների միջազգային ակադեմիայի հայկական բաժանմունքի նախագահ Գ.Փիրումյանից՝ նպաստավոր պայմաններ ստեղծելու համար: Հատուկ ուզում ենք նշել մեր լավ բարեկամ, Սանկտ Պետերբուրգի պետական համալսարանի պրոֆեսոր Լևոն Պետրոսյանին, որը մեզ տրամադրեց “Անհակամարտ խաղեր” բաժնի շարադրանքը:

Շնորհակալություն ենք հայտնում նաև կառավարման, տնտեսագիտության տեսության և տնտեսագիտական կիբեռնետիկայի երրորդ կուրսի մեր այն ուսանողներին, որոնք ջանասիրաբար փնտրում և հայտնաբերում էին գրքում տեղ գտած վրիպակները:

Վերջապես, հեղինակների անունից, հաճույքով շնորհակալություն եմ հայտնում մեր տիկնանց՝ Անահիտին, Ցողիկին, Նելլիին և Ժենյային, որոնք անսահման համբերությամբ հանձն առան ամեն նեղություն, որպեսզի մենք հնարավորություն ունենայինք այս ընթացքում ազատ լինելու այլ հոգսերից:

Մենք հեռու ենք այն մտքից, որ դասագիրքը զերծ է թերություններից: Գոհունակությամբ կընդունենք գրքի լավացմանը նպաստող բոլոր առաջարկություններն ու դիտողությունները:

1 հունիսի, 1997թ.

Մելս (Սամվել) Սահակյան
Ծրագրի ղեկավար

ԽՈՍՔ ԳՐՔԻ ՄԱՍԻՆ

*

*   *

Որոշումների կայացման հիմնախնդիրները մարդու կյանքում, ժամանակին համընթաց, առանձնակի կարևորություն են ստանում: Հնարավոր տարբերակների բազմությունից լավագույնի ընտրությունը նվազ հավանական է դառնում: Դրան քիչ են օգնում փորձը, բնազդը: Սակայն գիտությունը մարդկանց մենակ չի թողնում:

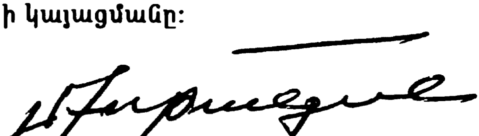
Գործույթների հետազոտումը և կառավարման գիտությունն աստիճանաբար ձևավորեցին որոշումների կայացման գիտական տեսությունը, որի հիմքերը կարելի էր գտնել ռազմական արվեստի, առևտրի, արտադրության կազմավորման փուլերում:

Ներկայումս, տնտեսական տարբեր իրավիճակներում, առանց օպտիմացման մաթեմատիկական եղանակների կիրառությունների գործնականում անհնար է ակնկալել այլընտրանքային տարբերակներից լավագույնի ընտրությունը:

Ձեռնարկությունների արտադրական ծրագրի մշակում, ռեսուրսների և ներդրումների ռացիոնալ բաշխում, սպառողական ապրանքների հավաքածուի որոշում, աշխատակազմի ռացիոնալ ընտրություն, պաշարների կառավարում. սրանք այն խնդիրներն են, որոնց լավագույն լուծումները պահանջում են օպտիմացման մեթոդների կիրառություններ:

Մրցակցային շուկայի պայմաններում օպտիմացման խնդիրներն առաջանում են բոլոր տնտեսավարող սուբյեկտների, այդ թվում՝ անհատ ձեռներեցի, ձեռնարկության, կառավարության գործունեության ժամանակ: Հետևաբար, ժողովրդական տնտեսության բոլոր օղակներում մեզ անհրաժեշտ են որոշակի կրթական մակարդակ ունեցող տնտեսագետ-մասնագետներ, որոնք պետք է տիրապետեն արդյունավետ կառավարման եղանակներին և օպտիմացման ժամանակակից կիրառություններին:

Հեղինակները ընթերցողին են առաջարկում հայերեն լեզվով ներկա գիրքը, որը, կարծում եմ, օգտակար կլինի ուսանողությանը և բոլոր նրանց, ովքեր իրենց առօրյայում առնչվում են լավագույն որոշումների կայացմանը:



Միքայել Քոթանյան
ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս

*
* *

Ընթերցողին առաջարկվող Մ. Սահակյանի, Հ. Սարգսյանի, Ս. Սարգսյանի և Ռ. Տոնոյանի «Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ» գիրքը պարունակում է կառավարման գիտության և գործույթների հետազոտման այն հիմնական մաթեմատիկական եղանակները, որոնք, որպես կանոն, ընդգրկված են այդ բնագավառի համարյա բոլոր արևմտյան դասագրքերում. գծային և ոչ գծային ծրագրում, դինամիկ ծրագրում, հոսքեր ցանցերում, խաղերի տեսություն:

Սակայն սույն ձեռնարկը, ի տարբերություն ավանդական կառուցվածքով դասագրքերի, պարունակում է նաև տնտեսական իրավիճակների նկարագրեր, որոնք հնարավորություն են տալիս ըմբռնելու և յուրացնելու գրքի հետագա բաժիններում ձևակերպված մաթեմատիկական մոդելների էությունը և դրանց համարժեքությունը իրականությանը:

Ընդհանրապես, կառավարման գիտության և գործույթների հետազոտման խնդիրների բազմազանությունը դժվարեցնում է այդ բնագավառի բոլոր ուղղությունների ներկայացումը մեկ գրքի սահմաններում: Առաջարկվող գիրքը նույնպես չէր կարող զերծ մնալ դրանից: Բայց և այնպես, հեղինակները, լուծելով յուրատեսակ ուսապարկի խնդիր, գտել են ծավալի լավագույն բաշխումն ըստ թեմաների՝ ապահովելով շարունակական կապը բաժինների միջև:

Առաջարկվող գիրքը մասամբ կլրացնի այն մեծ բացը, որ առկա է հայերեն լեզվով մասնագիտական գրականության ստեղծման բնագավառում: Այն շարադրված է գրավիչ, հստակ լեզվով, մաթեմատիկական բավարար խստությամբ:

Քաղաքակիրթ հասարակության (հուսանք, որ մենք էլ կդառնանք այդպիսին) տնտեսական համակարգում ներկա և ապագա սերունդների հաջող գործունեության համար գիտական մեթոդների կիրառումը անհրաժեշտություն է: Այս գիրքը խիստ օգտակար կլինի բոլոր մասնագետների համար, ովքեր առնչվում են գործույթների հետազոտման և կառավարման գիտության մաթեմատիկական եղանակների ուսումնառությանը և օգտագործմանը:

Հենրի Ներսիսյան
ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս

Ստեփան Մարկոսյան
ֆիզիկա-մաթեմատիկական
գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր

ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

*

Մելս (Սամվել) Ա.Սահակյան, - ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ: Ավարտել է Երևանի պետհամալսարանի մեխ.-մաթ.ֆակուլտետը, Մոսկվայի պետհամալսարանի ասպիրանտուրան, որտեղ և պաշտպանել է թեկնածուական ատենախոսությունը: Աշխատել է Մոսկվայի պետհամալսարանում (1967-1972թթ.), Հայաստանի Գիտությունների ազգային ակադեմիայի հաշվողական կենտրոնում (1972-75թթ.): 1975 թվականից դասավանդել է Երևանի ժողովրդական տնտեսության ինստիտուտում, իսկ 1984 թվականից՝ Երևանի պետական համալսարանում: Եղել է Հայաստանի Հանրապետության Գերագույն խորհրդի պատգամավոր 1990-1995թթ.: Գիտական նախասիրություններն են՝ գործույթների հետազոտում և կառավարում, մակրո և միկրոտնտեսագիտություն (տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական մեթոդներ): Հեղինակ է 60-ից ավելի գիտական հրապարակումների, 4 մենագրությունների, այդ թվում՝ երկու ուսումնական ձեռնարկի: Մասնակցել է մի շարք միջազգային գիտաժողովների աշխատանքներին: Արդի տնտեսագիտական հարցերի շուրջը հանդես է գալիս հանրապետական մամուլում:

* *

Հայկ Լ.Սարգսյան, - տնտեսագիտության դոկտոր, ԵՊՀ-ի պրոֆեսոր: Սովորել է Երևանի, Նովոսիբիրսկի և Մոսկվայի պետհամալսարանների տնտեսագիտության ֆակուլտետներում, ավարտել Մոսկվայի պետհամալսարանի ասպիրանտուրան, որտեղ և պաշտպանել է թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսությունները: 1974թ. դասախոսական աշխատանքի է անցել Երևանի պետհամալսարանում, Երևանի ժողովրդական տնտեսության ինստիտուտում: 1978-88թթ. աշխատել է ՀԽՍՀ-ի գիտությունների ակադեմիայի տնտեսագիտության ինստիտուտում: 1990-92թթ.եղել է Հայաստանի Հանրապետության էկոնոմիկայի առաջին փոխնախարար: Հրապարակել է շուրջ 70 գիտական աշխատություն և երկու մենագրություն:

Գիտական հետաքրքրությունների ոլորտներն են՝ մակրոտնտեսագիտությունը, սոցիալական ու տնտեսական համակարգերի վերլուծությունը և կառավարումը: Մասնակցել է մի շարք միջազգային գիտաժողովների աշխատանքներին: 1996 թվականից Երևանի պետհամալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետի կառավարման և գործարարության ամբիոնի վարիչն է:

* * *

Սարգիս Դ.Սարգսյան - տնտեսագիտության թեկնածու, ԵրԺՏԻ-ի պրոֆեսոր: Սովորել է Երևանի պետհամալսարանի ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետում, ավարտել է Սանկտ Պետերբուրգի (Լենինգրադի) պետհամալսարանի ասպիրանտուրան: 1967 թվականից դասավանդել է Երևանի պետհամալսարանում, իսկ 1975 թվականից՝ Երևանի ժողովրդական տնտեսության ինստիտուտում: Թեկնածուական ատենախոսությունը պաշտպանել է Երևանի ժողովրդական տնտեսության ինստիտուտի գիտական խորհրդում: Գիտական հետաքրքրությունների ոլորտն է տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական մոդելավորումը: Հեղինակ է 20-ից ավելի գիտական աշխատությունների, մեկ ուսումնական ձեռնարկի: 1992 թվականից ԵրԺՏԻ-ում էկոնոմիկայի մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի վարիչն է: Մասնակցել է մի շարք միութենական գիտաժողովների աշխատանքներին:

* * * *

Ռաֆայել Ն.Տոնոյան - ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ: Սովորել է Երևանի և Մոսկվայի պետհամալսարանների մեխանիկա-մաթեմատիկական ֆակուլտետներում, ավարտել է Մոսկվայի պետհամալսարանի ասպիրանտուրան: Աշխատել է ԽՍՀՄ գիտությունների ակադեմիայի Նովոսիբիրսկի բաժանմունքի մաթեմատիկայի ինստիտուտում: Թեկնածուական ատենախոսությունը պաշտպանել է Ուկրաինայի գիտությունների ակադեմիայի կիբեռնետիկայի ինստիտուտում: 1967 թվականից աշխատում է Երևանի պետհամալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում, երկար տարիներ եղել է մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոնի վարիչ, ֆակուլտետի դեկան: Գիտական հետաքրքրությունների ոլորտը՝ դիսկրետ մաթեմատիկան է: Հեղինակ է 12 գիտական աշխատությունների և 8 ուսումնական ձեռնարկների: Մասնակցել է մի շարք միջազգային և միութենական գիտաժողովների աշխատանքներին:

I. ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԻՐԱՎԻՃԱԿՆԵՐ ԵՎ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Յուրաքանչյուր անհատ ձգտում է իր
հիմնական միջոցներն օգտագործել այնպես, որ
ստացվող արդյունքը լինի որքան հնարավոր է մեծ:
Ա. Սմիթ,"Ազգերի հարստությունը" 1776թ

Տնտեսության կառավարման ամենատարբեր ասպարեզներում առաջանում են այնպիսի իրավիճակներ, երբ պահանջվում է ընտրել տարբերակներից լավագույնը:

Ընտրության կայացման գործընթացները հետազոտվում են *նկարագրային* և *կանոնական* (*նորմատիվ*) հայեցակետերով, այն է՝ ինչպես է կատարվում ընտրությունը և ինչպես պետք է կատարել ընտրությունը:

Լավագույն որոշումների կայացման մաթեմատիկական մոդելների կիրառությունների շարադրումից առաջ ներկայացվում է հանրահայտ "տնտեսական շրջապտույտը": Դա բացատրվում է երկու պատճառով:

Նախ՝ ռացիոնալ տնտեսավարումը, ռացիոնալ գործունեությունը (economizing)կարելի է ըմբռնել կանոնական եղանակների և օպտիմացման մաթեմատիկական մոդելների կիրառման միջոցով: Սահմանափակ ռեսուրսների բաշխման միջոցով առաջադրված նպատակներին հասնելու հիմնախնդիրներ և դրանցով պայմանավորված իրավիճակներ առաջանում են շրջապտույտի մասնակից գրեթե բոլոր տնտեսական գործակալների՝ տնային տնտեսությունների, ձեռնարկությունների, կառավարության համար: Շրջապտույտի դիտարկումը առավել առարկայական ու տեսանելի է դարձնում միկրոտնտեսագիտական վերլուծություններում օպտիմացման եղանակների կիրառությունները:

Երկրորդ պատճառն այն է, որ շրջապտույտը կազմավորող միկրոտնտեսական օբյեկտների փոխադարձ կապերի ու ազդեցությունների ուսումնասիրությամբ է, որ բացահայտվում են մակրոտնտեսական որակական փոփոխությունները, և ամբողջական պատկերացում է ստեղծվում համապարփակ տնտեսական երևույթների մասին:

Ձեռնարկի ներկա գլխում քննարկվում են տարաբնույթ տնտեսական իրավիճակների որոշ մոդելներ: Դրանց հետազոտումը, լավագույն լուծումների փնտրման եղանակները կտրվեն հաջորդ գլուխներում բերված օպտիմացման մաթեմատիկական եղանակները ներկայացնելուց հետո:

§ 1. Տնտեսական շրջապտույտ

Տնտեսական ռեսուրսների (աշխատանքի, ձեռնարկատիրական ունակության, կապիտալի, հողի) սահմանափակության հետևանքով հասարակության առջև ծառանում է ընտրություն կատարելու հարցը, թե ինչ արտադրել և ինչ քանակությամբ, ինչ տեխնիկա և տեխնոլոգիա օգտագործել, արդյունքի ստեղծման համար հասարակության որ խավերի վրա հենվել, որպեսզի ապահովվի տնտեսության արդյունավետ գործունեությունը և այլն:

Ամեն մի հասարակություն տնտեսության կազմակերպման հիմնախնդիրը լուծում է յուրովի: Վարչահրամայական տնտեսությանը բնորոշ է կենտրոնացված պլանավորումը: Շուկայական տնտեսությունում ի՞նչ, ինչպե՞ս և ու՞մ համար հարցերը լուծվում են շուկայական առաջարկով ու պահանջարկով: Խառը տնտեսական համակարգում գլխավոր դերը խաղում է շուկան, որի գործողությունը զուգորդվում է կենտրոնացված որոշումների ազդեցություններով:

Շուկայական տնտեսությունում գործում են տնտեսական գործունեության առանձնահատուկ խթաններ ու սկզբունքներ, որոնց հիմքն են ազատ ձեռնարկչությունը, աշխատելու ցանկություն ունեցող յուրաքանչյուր անձի համար զբաղմունքի ազատ ընտրությունը, ամեն մի գնորդի համար սպառման բարիքների ազատ ընտրությունը (ընտանիքի բյուջեի սահմաններում):

Գործարարության և շուկայական ընտրության խթանը տնտեսական շահն է: Ձեռնարկիչները ձգտում են առավելագույն շահույթի կամ երբեմն էլ նվազագույն կորուստների: Արտադրության գործոնների տիրապետողները հետամուտ են գործարարության ոլորտում դրանց օգտագործման դիմաց առավելագույն հատույցի ստացմանը:

Տնտեսագիտության դասընթացում շուկայական տնտեսության շրջապտույտն ուսումնասիրելիս տեսել ենք, թե գներն ինչպես են հավասարակշռում արտադրությունը և սպառումը (կամ առաջարկն ու պահանջարկը): Ձեզ հայտնի են նաև հիմնական տնտեսական գործակալները:

Տնտեսությունն ամբողջությամբ ներկայացվում է որոշակի տնտեսական գործակալների (հաստատությունների) համախմբի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը լուծում է տնտեսավարման իր առջև ծառացած հիմնախնդիրները:

Ամեն մի իրական տնտեսությունում նման հաստատությունները բազմաթիվ են, սակայն դրանցից տնտեսագիտության ուսումնասիրման առարկա են դառնում միայն հիմնօրինակային հաստատությունները: Սրանք ինքնուրույն որոշումներ կայացնող տնտեսական միավորներ են, որոնք ընդգրկում են.

Տնային տնտեսությունները՝ անհատը կամ ընդհանուր տնտեսություն վարող մարդկանց խմբերը (որպես կանոն՝ ընտանիքը), որոնք արտադրության գործոնների սեփականատեր են և ձգտում են առավելագույնս բավարարել իրենց պահանջմունքները:

Ձեռնարկությունները՝ իրավական անձի իրավունքներից օգտվող հիմնական տնտեսական միավորները (անհատական ձեռնարկություն, գործընկերություն և ընկերակցություն), որոնք ձգտում են առավելագույնի հասցնել շահույթը, իսկ արտադրության գործոնները օգտագործում են արտադրանք թողարկելու և այն ուրիշ ձեռնարկություններին, տնային տնտեսություններին ու կառավարությանը վաճառելու համար:

Տնտեսությունում կարևոր տնտեսական գործառույթներ իրականացնող հաստատություն է *կառավարությունը*:

Տնային տնտեսությունների ու ձեռնարկությունների միջև կատարվող փոխանակության "կապակցող օղակի" դերում են ապրանքների ու ծառայությունների, արտադրության գործոնների և ֆինանսական միջոցների շուկաները: Փոխանակությունը բնութագրող հոսքերը կախված են ֆինանսական հաստատություննե- րի և կառավարության ազդեցության չափերից:

Տնտեսության՝ որպես ամբողջական համակարգի ուսումնասիրությունը պահանջում է քննարկել այդ համակարգի առանձին "մասնակիցների" (դրանց խմբերի) տարաբնույթ նպատակները և խնդիրները: Այդ խնդիրները մեծ մասամբ հանգում են հնարավոր այլընտրանքային որոշումներից (լուծումներից) մեկի ընտրությանը: Այդպիսի որոշումների կայացմամբ ձևավորվում են շրջապտույտի հոսքերը (օգտագործվող աշխատանքի և թողարկվող արտադրանքի քանակությունը, պարտավորությունների դիմաց վճարումները և այլն): Հատկանշական է, որ շրջապտույտի յուրաքանչյուր մասնակից իր որոշումները կայացնելիս լուծում է լավագույն տարբերակի ընտրության որոշակի խնդիրներ: Այլ կերպ ասած՝ մասնակիցների կողմից լավագույն որոշումների ընդունումը ելնում է առաջադրված նպատակներից ու դրանց հասնելու սահմանափակումներից:

Վերոհիշյալ տնտեսական գործակալները սերտորեն փոխազդում են ապրանքների և ծառայությունների, արտադրության գործոնների և ֆինանսական շուկաներում: Թե դա ինչպես է իրագործվում, դիտարկենք տնտեսագիտությունից ձեզ հայտնի ցուցանիշների շրջանակներում:

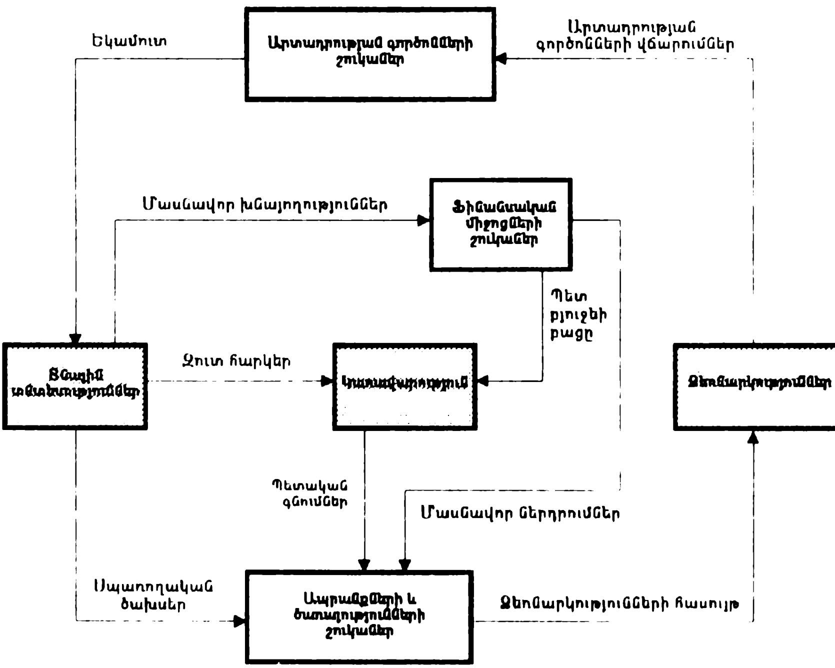
Ազգային արտադրության, ծախսերի և եկամուտների փոխկապակցության մեջ, ինչպես հայտնի է, համախառն ներքին արդյունքը (Ա) հաշվարկվում է որպես սպառողական ծախսերի (Ս), ներդրումների (Ն) և ապրանքների ու ծառայությունների վրա կառավարության ծախսերի (Կ) գումար՝ Ա=Ս+Ն+Կ:

Նշված հավասարումը վերաբերում է փակ տնտեսությանը: Այն միայն պարզեցնում է ստորև քննարկվող հոսքերի նկարագրությունը (նկ. 1): Տնտեսական միավորների միջև վճարումների հոսքերի կամ եկամուտների ու ծախսումների հոսքերի շրջապտույտի մակրոտնտեսական դիտարկման անհրաժեշտությունը պայմանավորված է նրանով, որ տնտեսական տարաբնույթ միավորների համար ձևակերպվելիք խնդիրները, որքան էլ միմյանցից տարբերվեն, ուղղված են մակրոտնտեսական հավասարակշռության ապահովմանը: Մակրոտնտեսական հավասարակշռությունը այն հենքն է, որին միաձուլվելով՝ տնտեսական տարաբնույթ միավորների համար ձևակերպված խնդիրները ապահովում են տնտեսական ենթահամակարգերի նպատակամետ գործունեությունը:

Վերը բերված հավասարման մեջ սպառումը (Ս) տնային տնտեսությունների կողմից գնվող ապրանքներն ու ծառայություններն են, ներդրումները (Ն)՝ ձեռնարկությունների կողմից արտադրական կարողությունների (շենքեր, մեքենաներ, սարքավորումներ և այլն) ձեռք բերման ուղղությամբ կատարվող ծախսումներն են: Ներդրումները ներառում են նաև բնակարանային շինարարությունը և արտադրական պաշարներում տեղի ունեցող փոփոխությունները: Կառավարության ծախսերի (Կ) կազմում են ծառայությունների (օր՝ կրթության, առողջապահության) և ապրանքների (օր՝ փամփուշտ և դասագիրք) դիմաց կատարվող վճարումները: Այստեղ չեն ընդգրկվում տրանսֆերտ (փոխանցիկ) վճարումները (օր՝ կենսաթոշակները և նպաստները) և սուբսիդիաները (լրահատկացումները):

Ինչպե՞ս են գոյանում (Ս+Ն+Կ) ազգային ծախսերի վճարման ռեսուրսները: Աղբյուրը մեկն է ՝ ազգային եկամուտը: Գոյություն ունեն վճարումների հոսքեր ձեռնարկություններից՝ դեպի այլ տնտեսական միավորներ, իսկ հետո՝ նորից դեպի ձեռնարկություններ: Մեր բերած եկամուտների ու ծախսումների հոսքերի շրջապտույտի նկարագրությունը չի ներառել տնտեսության կարևոր հատվածներից մեկը՝ փոխառությունների շուկան: Տնային տնտեսությունները իրենց խնայողությունները փոխ են տալիս դրամատներին: Ձեռնարկությունները սովորաբար ավելի շատ ներդրումներ են կատարում, քան շահույթն է՝ դրամական միջոցները՝ փոխ առնելով դրամատներից: Կառավարությունները նույնպես ծախսում են ավելի շատ, քան գանձվող հարկերն ու տուրքերն են, ունենում են պակասուրդով բյուջեներ:

Վճարումների հոսքերի ամբողջական պատկերման համար անհրաժեշտ է ընդգրկել նաև ֆինանսական միջոցների շուկան: Վերջինիս միջոցով տնային տնտեսությունների ու ձեռնարկությունների խնայողություններով ֆինանսավորվում են ներդրումները և բյուջեի պակասուրդը (եթե կա): Ֆինանսական միջոցների շուկայում վարկերի (փոխառությունների) առաջարկն ու պահանջարկը հավասարակշռող գնի դերը կատարում է շահադրույքը: Տնտեսությունում վճարումների նկարագրված հոսքերը պատկերված են նկ. 1.1-ում (տե՛ս, [22]):



Նկ. 1.1 Դրամական միջոցների շրջապտույտը տնտեսությունում

Նկարագրությունը պարզեցնելու համար ենթադրենք, թե ամբողջ արտադրանքը թողարկում են ձեռնարկությունները: Գործարար խնայողության գծով ազգային եկամուտը (national profit on business saving) գնում է ֆինանսական միջոցների շուկա:

Տնային տնտեսությունները, ունենալով տնտեսան ռեսուրսներ, դրանք տրամադրում են ձեռնարկություններին, որոնք, իրենց հերթին, ունեն պահանջարկ արտադրության գործոնների նկատմամբ: Արտադրության գործոնների դիմաց վճարումը ձեռնարկությունների համար ծախք է, իսկ տնային տնտեսությունների համար՝ եկամուտ: Տնային տնտեսությունները անհրաժեշտ ապրանքների ու ծառայությունների պահանջարկ են ներկայացնում ապրանքների ու ծառայությունների շուկայում և արտադրության գործոնների վաճառքից ստացած եկամուտը ծախսում այդ ապրանքների ու ծառայությունների ձեռքբերման համար: Ձեռնարկությունները, առաջարկելով և իրացնելով թողարկված արտադրանքը, ստանում են համապատասխան եկամուտ, որով կրկին ձեռք են բերում արտադրության գործոններ, և գործընթացը շարունակվում է վերը նկարագրված տրամաբանությամբ: Նկատենք, որ եկամուտների և ծախսումների միաժամանակյա հոսքերն անընդհատ կրկնվում են, և այդպես ձևավորվում է եկամուտների ու ծախսումների հոսքերի շրջապտույտը:

Շրջապտույտի արդյունքում, ըստ էության, ձևավորվում են արտադրության ընդհանուր ծավալը, ընդհանուր եկամուտը և ընդհանուր զբաղվածությունը:

Տնային տնտեսությունների, ձեռնարկությունների ռացիոնալ տնտեսավարման ցուցադրման հաջող օրինակ են գլխի վերջում բերված աղյուսակները (տե՛ս, [13]): Առանձնահատկություններից ելնելով՝ արհմիությունների և կառավարության՝ որպես հաստատությունների, ռացիոնալ տնտեսական գործունեության աղյուսակները չեն բերվում:

Աղյուսակներում *նորմատիվ կանոններն* այն սկզբունքներն են, որոնց հիման վրա իրականացվում է տրված սահմանափակումների պայմաններում նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեքն ապահովող ռացիոնալ տնտեսավարման միջոցների ընտրությունը:

§ 2. Մոդելները և մոդելավորումը որոշումներ կայացնելիս

Համակարգային վերլուծության, մասնավորապես որոշումների կայացման եղանակները հենվում են որոշակի փաստերի, երևույթների ուսումնասիրության նկարագրման վրա: Այդ նկարագրությունները միշտ հարաբերական են, սահմանափակված են ուսումնասիրվող առարկայի մասին մեր ունեցած գիտելիքներով:

"Մոդել" տերմինը վերջին տասնամյակներում լայնորեն օգտագործվում է տնտեսական (և այլ) համակարգերը ճանաչելու, դրանց գործընթացները կանխատեսելու և կառավարման խնդիրները հետազոտելու համար: Մոդել, մոդելավորում բառերի գործածության ժամանակ մենք նկատի ենք ունենալու որոշակի նկարագրություն, որն արտացոլում է ուսումնասիրվող օբյեկտի այն առանձնահատկությունները, որոնք հետաքրքրում են բուն հետազոտողին:

Նկարագրությունների ճշգրտությունը և որակը որոշվում են նախ և առաջ մոդելի *համապատասխանությամբ* այն պահանջներին, որ առաջադրվում են հետազոտողի կողմից: Կարևորվում են նաև այն արդյունքները, որ ակնկալվում են ստանալ մոդելի կիրառման միջոցով: Մոդելի որակից են կախված իրավիճակի վերլուծությունը, որոշումներ կայացնելը:

Մոդելը պետք է բավական ճիշտ արտացոլի երևույթները, սակայն դա դեռ բավարար չէ: Այն պետք է լինի նաև "գործունակ", պիտանի՝ օգտագործման համար:

Այս առանձնահատկություններով հանդերձ, գոյություն ունեն մոդելների կառուցման և հետազոտման համընդհանուր սկզբունքներ:

Մոդելավորումը որպես գիտական ճանաչման մեթոդ: Մեր կողմնորոշումները, ինչպես ցույց է տալիս գրքի վերնագիրը, ուղղված են կառավարման որոշումների կայացման մաթեմատիկական եղանակների հետազոտմանը:

Գործույթների հետազոտումը և կառավարման գիտությունը, որը մասնավորապես պարունակում է հանրային և մասնավոր ձեռնարկությունների ղեկավարների կողմից արդյունավետ որոշումներ կայացնելու հանձնարարականներ, հետազոտման իրենց զինանոցում պետք է ունենան ուսումնասիրվող օբյեկտի ճանաչման, որոշակի խնդրի մոդելի ձևակերպման և լուծման մեթոդներ: Նկատենք, որ գործարարության կառավարման դպրոցներում գործույթների հետազոտումը և կառավարման գիտությունը երբեմն նույնացվում են (տե՛ս, [35]):

Դժվար չէ տեսնել, որ մեզանից յուրաքանչյուրի կողմից ընդունվող կամ մեր շրջապատում որոշումների կայացման իրադրություններում միևնույն "մասնակիցներն" են, որոնց թվում են՝

1. *Փոփոխականների և պարամետրերի բազմությունները*, որոնք տրոհվում են՝
   - թույլատրելի փոփոխականների, որոնց արժեքներն ընտրում է որոշում կայացնողը;
   - "արտաքին" կամ արտածին փոփոխականների, որոնց արժեքների որոշումը հիմնախնդրի մոդելավորման շրջանակներից դուրս է: Այդ փոփոխականները որոշում կայացնողի կողմից վերահսկելի չեն:
   - պարամետրերի բազմության, որոնց արժեքները դիտարկվող խնդրի շրջանակներում շատ որոշակի են:
2. *Մոդելը*, որպես տարբեր փոփոխականներն ու պարամետրերը կապակցող հարաբերակցությունների բազմություն:

3. *Նպատակային ֆունկցիան*, որի համար փնտրվում է նվազագույն կամ առավելագույն արժեքը՝ կախված փոփոխականների ու պարամետրերի ընդունած արժեքներից:
4. *Հաշվողական եղանակները*, որոնց միջոցով որոշում կայացնողը կարողանում է գնահատել տարբեր լուծումների արդյունքները:

Դիտարկված որոշումների կայացման եղանակները հաճախ քանակական են: Մենք չենք ենթադրում, որ անխտիր բոլոր որոշումների կայացման խնդիրները բերվում են քանակական վերլուծության: Սակայն որտեղ դրա հնարավորությունը կա, այդ վերլուծությունը անհրաժեշտ է կատարել՝ գտնվելով կառավարչի դերում, և այն կապահովի արդյունավետ որոշման կայացում:

Մոդելների ողջ բազմությունը ընդունված է բաժանել երկու խոշոր դասի՝ առարկայական և երևակայական մոդելներ: Առաջին խումբ մոդելներն ունեն բնական կամ արհեստական ծագում (քարտեզ, հողմացույց, շոգեքարշի մանրակերտ և այլն): Առարկայական մոդելների կիրառությունները տնտեսագիտության մեջ սահմանափակ են: Այստեղ բացակայում է հասարակական մակարդակին բնորոշ արտերևույթը՝ աշխատանքը: Այդ է պատճառը, որ երբ նկարագրվում են կենսաբանական համակարգերում տեղի ունեցող գործընթացները, ապա խոսվում է նպատակահարմար գործողությունների (ի տարբերություն մարդկային հասարակության մեջ ընթացող *նպատակամետ* գործողությունների) մասին:

Երևակայական մոդելների դասը գիտական ճանաչման մեջ հիմնականում դրսևորվում է այնպիսի մոդելներով, որոնք օգտվում են մաթեմատիկայի լեզվից:

Երբ հիմնախնդիրը ձևակերպված է, ապա քանակական վերլուծության համար անհրաժեշտ է ունենալ օբյեկտի մաթեմատիկական մոդելը:

Մոդելի փոփոխական մեծությունները սահմանելի և չափելի են: Տնտեսական երևույթների (ժամանակի մեջ գործընթացների) ուսումնասիրության ժամանակ որպես կարևոր փոփոխականներ կարող են հանդես գալ ապրանքի գինը և քանակը, շահադրույքը, փողի փոխանակման դրույքը և այլն: Փոփոխականների և պարամետրերի միջոցով ձևավորվում են մոդելի սահմանափակումները և նպատակային ֆունկցիան:

Որպես օրինակ քննարկենք ընտանիքի սպառողական վարքը նկարագրող մոդելը: Մոդելում որպես սպառող հանդես է գալիս որոշակի տիպի ընտանիք: Վերջինս բնութագրվում է սպառվող բարիքների (ապրանքների և ծառայությունների) հավաքածուի նկատմամբ նախապատվելիության (գերադասելիության) հարաբերությամբ կամ օգտակարության ֆունկցիայով, ինչպես նաև բյուջետային սահմանափակումով: Բյուջետային սահմանափակումը ցույց է տալիս, որ ապրանքների ձեռք բերման դրամական ծախսերը չեն կարող գերազանցել ընտանիքի դրամական եկամուտը:

Եթե սպառվող ապրանքների հավաքածուն ներկայացվում է $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ ոչ բացասական վեկտորի միջոցով, ապա սպառման լավագույն վարքի մոդելը հանգում է այնպիսի $\bar{x}$-ի ընտրությանը, որը բավարարում է ընտանիքի բյուջեի սահմանափակմանը, և որի դեպքում սպառողի օգտակարության ֆունկցիան ստանում է իր առավելագույն արժեքը:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար կատարենք հետևյալ նշանակումները.

- $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ -ն սպառվող ապրանքների գների վեկտորն է,
- S -ը ընտանիքի եկամուտն է,
- $u(\bar{x})$ -ը՝ ընտանիքի օգտակարության ֆունկցիան:

Մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

Գտնել ոչ բացասական $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվեր, որոնք բավարարում են $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \le S$ անհավասարմանը, և որոնց համար $u(\bar{x})$ ֆունկցիան ընդունում է իր առավելագույն արժեքը:

Ընտանիքի սպառողական վարքի $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորի թույլատրելի արժեքների բազմությունը բերված մոդելում որոշվում է գների $\bar{p}$ վեկտորի և S եկամտի միջոցով: Ընտանիքի սպառման գերադասելիության կառուցվածքի որոշումից կամ $u(\bar{x})$ օգտակարության ֆունկցիան տալուց հետո մենք պետք է կարողանանք լուծել խնդիրը: Կախված $u(\bar{x})$ օգտակարության ֆունկցիայի տեսքից՝ մենք կունենանք մաթեմատիկական ծրագրման տարբեր բարդության խնդիրներ:

Գործույթների հետազոտմանը բնորոշ եղանակներով որոշումների կայացման գիտական մշակումները մեծապես կիրառվում էին երկրորդ աշխարհամարտի տարիներին: Սակայն դրանց ծիլերն ի հայտ են եկել շատ ավելի վաղ: Մասնավորապես, մաթեմատիկական մեթոդների կիրառման առաջին պարզագույն մոդելները տակավին առաջարկել են Ֆ.Քենեն, 18-րդ և Լ.Վալրասը, 19-րդ դարերում: Առավել բարդ մոդելները 20-րդ դարի 30-40-ական թվականներին առաջարկել են Ջ.ֆոն Նեյմանը, Լ.Կանտորովիչը, Ջ.Դանցիգը և այլ գիտնականներ: Չնայած այդ հետազոտություններին տրված բարձր գնահատականներին, այդ մոդելները, որպես կառավարման որոշումների կայացման արդյունավետ միջոցներ, գործադրվեցին միայն վերջին տասնամյակներում, որը պայմանավորված է հետզհետե ուժեղացող տնտեսական մրցակցությամբ, ինչպես նաև տեղեկագիտության և համակարգիչների ընձեռած հնարավորություններով՝ այլընտրանքային լուծումներից լավագույնն ընտրելու համար:

Մոդելների կիրառման դժվարությունները պայմանավորված են նրանով, որ դժվար է սոցիալ-տնտեսական գործընթացների համար, որոնցում առկա են սոցիալական, մարդկային, հոգեբանական գործոններ, կառուցել մի համապարփակ համակարգ: Դժվարությունները պայմանավորված են տնտեսության մասին մեր գիտելիքների սահմանափակությամբ, ինչպես նաև այն փաստերի ոչ ամբողջական նկարագրությամբ, որոնց հետ գործ ունի տնտեսագետը:

Մոդելավորման եղանակը ենթադրում է առարկայի նախնական ուսումնասիրություն, նրա էական բնութագրերի առանձնացման վրա հիմնված մոդելի կառուցում, մոդելի փորձառական և տեսական վերլուծություն, ստացված արդյունքների համադրում մոդելավորվող օբյեկտի տվյալների հետ, մոդելի կատարելագործում:

Որպես գիտական ճանաչողության արդյունավետ միջոց, մոդելավորումը հետազոտում է սոցիալ-տնտեսական գործընթացների և երևույթների փոփոխության օրինաչափությունները, և դրա հիման վրա առաջարկվում են զարգացման բնույթին վերաբերող որոշակի վարկածներ: Մաթեմատիկական մոդելավորումը հնարավորություն է տալիս հետազոտել տնտեսական կամ սոցիալական բարդ համակարգերի գործունեության սկզբունքները, մշակել դրանց մաթեմատիկական մոդելները, ստուգել և ճշգրտել տեսական դրույթները, զարգացման տարբերակների հնարավոր բազմությունից ընտրել լավագույնը՝ ըստ որոշակի օպտիմալության հայտանիշի:

Ինչքան էլ ռեսուրսները սահմանափակ լինեն, միշտ կարելի է գտնել դրանց օգտագործման լավագույն ձևը: Այս իմաստով օպտիմումի հասկացությունը հաճախ դառնում է թյուրըմբռնման պատճառ: Դա պայմանավորված է նրանով, որ այն արտահայտվում է միայն նախօրոք ձևակերպված նպատակներով: Եվ այս տեսակետից տնտեսական օպտիմումը հասանելի է դառնում տնտեսամաթեմատիկական մոդելի (և ոչ թե իրական համակարգի) առումով:

Տնտեսության կառավարումը բարելավելու հիմնական ուղիներն են՝ հեռանկարային և ընթացիկ ծրագրերի մշակումը, տնտեսության հավասարակշիռ զարգացման ապահովումը, գնաճի մեղմումը և այլ խնդիրներ, որոնց լուծման համար անխուսափելիորեն կիրառվում են մաթեմատիկական մեթոդներ և մոդելներ: Մոդելներով կանխագուշակումների անխուսափելիությունը պայմանավորվում է նաև նրանով, որ լայնընդգրկուն տնտեսափորձերն անթույլատրելի են և կարող են թանկ նստել հասարակության վրա:

Թվարկված հիմնահարցերը վկայում են, որ տնտեսության կառավարման խնդիրները խիստ բարդացել են, ուստի չի կարելի բավարարվել տնտեսական ղեկավարների սոսկ ներըմբռնողական բարեմտությամբ, որն առաջանում է կառավարման բարդ որոշումներ կայացնելու ճանապարհին: Բազմաթիվ սահմանափակումների ճշգրիտ հաշվառումը, մոդելի մեջ ներմուծվող արտածին պարամետրերի բազմատարբերակ վարկածներից դրանց ընտրությունը և նպատակային ֆունկցիաների ձևակերպումը հնարավոր են դարձնում լավագույն որոշումների կայացումը անկախ նրանից, թե կառավարման որ օղակի համար է ձևակերպվում խնդիրը: Դրա համար անհրաժեշտ է ունենալ տնտեսագետների, համակարգչային մասնագետների, մաթեմատիկոսների համատեղ ջանքերով համադասված մշակումներ, "մարդ-մեքենա" համակարգեր: Այդ ժամանակ այնքան էլ ուժգին չի հնչի Ջ. Կլարկի այն ասույթը, որ "Ամեն ինչ, բացի բանականությունից, ենթակա է նվազող հատույցի օրենքին":

Մաթեմատիկական ծրագրում (ՄԾ): Կառավարման, որոշումների կայացման, գործույթների հետազոտման խնդիրները սովորաբար հանգում են այնպիսի թվերի համախմբի ընտրությանը, որոնք որոշակի նպատակի (ֆունկցիայի) առավելագույն կամ նվազագույն արժեք են տալիս՝ փոփոխականների որոշակի սահմանափակումների պայմաններում: Ի տարբերություն դասական տեսության էքստրեմումի խնդիրների, ՄԾ-ում հիմնական ուշադրությունը դարձվում է այն խնդիրներին, որոնցում առկա են փոփոխականների փոփոխման տիրույթը որոշող սահմանափակումներ:

ՄԾ խնդրի նպատակային ֆունկցիան ուսումնասիրվող խնդրի նպատակի մաթեմատիկական նկարագրությունն է: Այն, որպես կանոն, n-չափանի էվկլիդյան տարածությունում որոշված ֆունկցիա է:

Եթե $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորը բավարարում է մոդելի սահմանափակումներին, այն համարվում է թույլատրելի, իսկ բոլոր թույլտարելի վեկտորները կազմում են լուծումների (հնարավորությունների) S թույլատրելի բազմությունը:

ՄԾ խնդիրը թույլատրելի լուծումների S բազմությունից այնպիսի $\bar{x}$ վեկտորի ընտրությունն է, որի դեպքում $f(\bar{x})$ նպատակային ֆունկցիան ստանում է նվազագույն կամ առավելագույն արժեք S բազմության վրա: Այդ խնդիրը կգրենք հետևյալ կերպ՝

$f(\bar{x}) \to \mathbf{min}$, երբ $\bar{x} \in S$, կամ

$f(\bar{x}) \to \mathbf{max}$, երբ $\bar{x} \in S$, որտեղ S -ը n -չափանի էվկլիդյան տարածության ենթաբազմություն է:

ՄԾ ընդհանուր խնդրում առանձնացվում են երեք հիմնական տեսքերը՝ ՄԾ դասական խնդիր, ոչ գծային ծրագրման խնդիր (ոչ ԳԾ խնդիր) և ԳԾ խնդիր:

ՄԾ դասական խնդրում S բազմությունը նկարագրող բոլոր սահմանափակումները ներկայացվում են հավասարումների տեսքով՝

$$g_i(\bar{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \ i = 1,2,\dots,m:$$

որտեղ $g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})$ հայտնի ֆունկցիաներն են, իսկ $b_1, b_2, \dots, b_m$ -ը՝ տրված թվեր են:

Ոչ ԳԾ խնդրում սահմանափակումների համակարգը ներկայացվում է փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանով $(x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0)$, և անհավասարումներով կամ հավասարումներով որոշվող սահմանափակումներով՝

$$g_i(\bar{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, \ i = 1,2,\dots,m:$$

Ոչ ԳԾ խնդիրների կարևոր դաս է ուռուցիկ ծրագրման խնդիրը, որում նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումները նկարագրող ֆունկցիաները ուռուցիկ են:

ԳԾ խնդրի նպատակային ֆունկցիան գծային ֆունկցիա է՝ $f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \bar{c}\bar{x}$, որտեղ տրված է $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ վեկտորը և փնտրվում է $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ վեկտորը, և կան երկու տեսքի սահմանափակումներ՝

1. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, \ i = 1,2,\dots,m,$

2. $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0:$

Հետևաբար, ԳԾ խնդիրը ոչ ԳԾ խնդրի մասնավոր դեպքն է, որում նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումները գծային են:

Հաճախ ՄԾ ամեն մի խնդրի համապատասխանեցվում է նրա երկակի խնդիրը, որոնց համատեղ ուսումնասիրությունը արգասաբեր է ինչպես լավագույն լուծումների փնտրման թվային մեթոդների, այնպես է որակական վերլուծության առումով:

Երկակիության տեսությունն ուսումնասիրում է օպտիմացման կառուցակարգի տարբեր կողմերը բնութագրող երկակի խնդիրների զույգի միջև կապը: Երկակիության տեսության հետևությունները արտադրության լավագույն ծրագիրը համադրում են արտադրության գործոնների գնահատականների հետ: Այս տեսությունը սերտորեն կապված է խաղերի տեսության հետ, որն այս կամ այն իմաստով բացահայտում է լավագույն վարվելակերպը (ստրատեգիան) ներհակային (կոնֆլիկտային) կամ անորոշ իրավիճակներում:

ՄՏ միջոցով ձևակերպվում և լուծվում են տնտեսության, կառավարման, նախագծման, ռազմական գործի և այլ կարևոր խնդիրներ:

Մենք թվարկեցինք օպտիմացման խնդիրների միայն մի մասը, որոնց հետազոտման եղանակները շարադրված են սույն ձեռնարկում: Օպտիմալ կառավարման, զանգվածային սպասարկման, պաշարների կառավարման, նմանակման (իմիտացիոն) և այլ եղանակները տեղ կգտնեն ներկա ձեռնարկի 2-րդ մասում:

§ 3. Բարիքների արտադրությունը, բաշխումը և սպառումը տնտեսության մեջ. Պարետոյի փոխզիջումներ

Այս բաժնում կքննարկենք տնտեսագիտության տեսանկյունից ավելի հետաքրքիր և արժեքավոր բարիքների կամ արդյունքի բաշխման որոշ խնդիրներ: Այդ խնդիրների «զարգացումը» դիտարկենք երկու անձանց՝ Ռոբինզոնի և Ուրբաթի տնտեսության օրինակով:

Նախ, դիտարկենք մեկ մարդու տնտեսությունը: Մարդը բնության մեջ միայնակ է, զբաղվում է հավաքչությամբ, ստեղծում որոշակի բարիքներ, բավարարում իր պահանջմունքները: Հասկանալի է, որ այդպիսի տնտեսությունը վերացական հասկացություն է: Նման տնտեսությունում խիստ պարզունակ է ներկայացված բարիքների բաշխման հիմնախնդիրը, չկան ներհակներ (կոնֆլիկտներ), չկա շահերի բախում:

Ուրբաթի հայտնվելը արդեն էապես փոխում է իրավիճակը: Երկու անձից բաղկացած հասարակության այսպես կոչված բարեկեցության ֆունկցիան արդեն ինքնին հայտնի չէ, չի ներկայացվում փորձի վրա հիմնված տվյալներով: Երկու անձինք, որոնք, ի դեպ, հանդես են գալիս և՛ արտադրողի և՛ սպառողի դերերով, արդեն կարող են վարել իրենց տնտեսությունը: Վերջինս կբնութագրվի երկու մասնակիցների միջև առաջացող որոշակի տնտեսական հարաբերություններով: Այդ հարաբերությունների ամբողջական պատկերի բացահայտումը, որքան էլ հետաքրքիր լինի, դուրս է քննարկվող խնդիրների համատեքստից, ուստի մենք կդիտարկենք սոսկ տնտեսությունը վարելու եղանակները:

Օրինակ, Ռոբինզոնը վարձում է Ուրբաթին, կամ, մեկ ուրիշ դեպք՝ գործատուն ինքը Ուրբաթն է: Մյուս դեպքը. նրանցից յուրաքանչյուրը առանձին- առանձին վարում է իր տնտեսությունը և, անհրաժեշտության դեպքում, փոխանակում որոշակի բարիքներ.

փոխանակում են արտադրված ապրանքները, փոխադարձաբար ծառայություններ են մատուցում:

Քննարկենք առավել իրատեսական վարկածը, երբ նրանք համատեղ են վարում տնտեսությունը: Այս պարագայում Ռոբինզոնը և Ուրբաթը պայմանավորվում են մեկ ընդհանուր նպատակի շուրջ (որոշակի նպատակային ֆունկցիայի միջոցով արտահայտվող), և բնական պետք է համարվի նպատակային ֆունկցիայի արժեքը առավելագույնի հասցնելու նրանց ձգտումը:

Տնտեսությունը վարելու հիշյալ դեպքերում բաց է մնում այն հարցը, թե ինչպես են համաձայնեցվում մասնակիցների շահերը կամ նրանք ինչ փոխզիջումների են դիմում արդյունքների բաշխման առումով: Չէ՛ որ Ռոբինզոնը և Ուրբաթը անմիջական շահագրգռված են իրենց աշխատանքի արդյունքի գնահատման հարցում: Նկատենք, որ այս հարցադրումը ընդհանրական բնույթ է կրում. եթե որևէ տեղամասում (կոլեկտիվում) աշխատողների թիվը մեկից ավելի է, ապա շահերի համաձայնեցումը անխուսափելի է (այլ հարց է, թե դրանք ինչպիսի լուծումներ են պարունակում՝ հատկապես մեր առօրյա դիտարկումներում):

Այսպիսով, Ռոբինզոնի և Ուրբաթի տնտեսությունում, կախված տնտեսավարման ձևից, առաջանում են այնպիսի իրավիճակներ, երբ անհրաժեշտ է որոշակի իմաստով լավագույն իրավիճակին հասնելու պայմանները նկարագրել գին, ապրանք, ծախսված ռեսուրսներ տերմիններով՝ դրանց բովանդակալից մեկնաբանությամբ:

Այստեղ չի տրվի այն հարցի պատասխանը, թե որ տնտեսական կառուցակարգերը կապահովեն տնտեսական հավասարակշռություն, թերևս այդ հարցը կարող էր մասնակիորեն արտացոլվել ստորև քննարկվող մոդելում:

Բարիքների բաշխման և սպառման մոդելավորումը (տե՛ս, [20]): Տնտեսավարման մասնակիցները, ինչպես օրինակ, անհատ ձեռներեցը, ֆիրմայի կառավարիչը, ամեն քայլափոխի ինչ-որ որոշումներ են կայացնում լավագույն տարբերակների ընտրության առումով:

Մեր կողմից քննարկվող խնդրի տեսական ձևակերպումներում (ինչպես և այս բաժնից դուրս արտադրական գործընթացներին վերաբերող մոդելներում) հաճախ են օգտագործվում այնպիսի վարկածներ, ըստ որոնց ձեռնարկությունները ընտրում են առավելագույն շահույթ ապահովող արտադրական կամ տեխնոլոգիական գործընթացներ: Նույնը կարող է վերաբերել սպառողական վարքին: Մեզ հայտնի է այն դրույթը, ըստ որի սպառողը (դիցուք՝ անհատը) իր օգտակարության ֆունկցիան առավելագույնի է հասցնում բյուջետային սահմանափակումների պայմաններում:

Այս ամենը, սակայն, իրական կյանքում տեղի է ունենում "մոտավոր դատողություններով", և որոշում կայացնողը (լինի նա անհատ ձեռներեց, ֆիրմայի կառավարիչ, բարձրաստիճան պաշտոնյա, թե սովորական սպառող) գործում է ռացիոնալ՝ իրավիճակի իր ընկալմանը համապատասխան: Ամերիկացի հոգեբան, տնտեսագետ Գ. Սայմոնը այդ դրույթը որակել է որպես սահմանափակ բանականության վարկած: Ի դեպ, այդ դրույթից հետևող մշակումների համար նա 1978թ. արժանացել է տնտեսագիտության բնագավառի Նոբելյան մրցանակի:

Դիտարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ կան $j = 1,2,\dots,m$ արտադրական գործընթացներ և $i = 1,2,\dots,n$ անհատներ: Մոդելում արտադրության գործընթացը ներկայացվում է որպես ինչ-որ արդյունքներ այլ արդյունքների վերամշակելու, ձևափոխելու գործընթաց:

Արտադրության գործընթացը, այսինքն՝ արդյունքների ձևափոխման գործընթացը կբնորոշվի $(a_1,\dots,a_l)$ վեկտորի միջոցով, որտեղ $1,2,\dots,l$-ը արդյունքների համարներն են, իսկ $a_1,\dots,a_l$ թվերը ցույց են տալիս այդ արդյունքների թողարկման կամ ծախսի մեծությունը: Եթե $a_k < 0$, ապա k-րդ արդյունքը ծախսվում է $|a_k|$ քանակությամբ: Եթե որևէ արդյունք և՛ ծախսվում է, և՛ թողարկվում, ապա վեկտորի համապատասխան տարրը թողարկման և ծախսի տարբերությունն է:

Այստեղ արդյունք հասկացությունը գործածվում է լայն առումով: Որպես արդյունքների մեծություններ, հանդես են գալիս ծառայությունները, աշխատանքի տեսակները, բնական ռեսուրսները, տեղեկատվությունը, սարքավորումները և այլն: Եթե ձեռնարկությունը հեռուստաստուդիան է, ապա վերջինս, տնօրինելով շենքերը, սարքավորումները և ծախսելով սպասարկու անձնակազմի աշխատանքը, էլեկտրաէներգիա և այն ամենը, ինչ բնորոշ է այդ արտադրության կազմակերպմանը, թողարկում է հեռուստածրագրեր:

Արտադրական գործընթացները համարակալված են $1,2,\dots,m$ թվերով և հայտնի են նրանց բնորոշ վեկտորները՝ $\bar{a}_i = (\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{il})$, $i = 1,2,\dots,m$: Ենթադրվում է, որ բացի արտադրական գործընթացները բնորոշող վեկտորներից տրված են սկզբնական ռեսուրսներ: Այդ ռեսուրսները ներկայացվում են $\bar{b} = (b_1,\dots,b_l)$ հավաքածուի միջոցով:

Յուրաքանչյուր արտադրական գործընթաց կարող է կիրառվել տարբեր լարունությամբ: Կենթադրենք, որ երբ s-րդ արտադրական գործընթացը օգտագործվում է h_s լարունությամբ, ապա արդյունքի ձևափոխումը կներկայացվի $(h_s\alpha_{s1}, h_s\alpha_{s2}, \ldots, h_s\alpha_{sl})$ վեկտորի միջոցով:

Եթե $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$-ը արտադրական գործընթացների կիրառման վեկտորն է, ապա արտադրական գործընթացների շնորհիվ ստացված արդյունքը կլինի.

$$\overline{y} = (h_1\overline{a}_1 + h_2\overline{a}_2 + \ldots + h_m\overline{a}_m + \overline{b}):$$

Տնտեսությունում անհատները ($i = 1, 2, \ldots, n$) բնութագրվում են ոչ միայն արդյունքների նկատմամբ իրենց պահանջմունքներով, այլև աշխատանքի հմտություններով, արդյունքների սկզբնական պաշարներով: Կենթադրենք, որ հայտնի են $\overline{\omega}_i = (\omega_{i1}, \ldots, \omega_{il})$, որտեղ ω_{ik}-ն i-րդ անհատի կողմից տնօրինվող k-րդ արդյունքի քանակությունն է: Եթե k-ն աշխատանքի տեսակ է, ապա ω_{ik}-ն աշխատանքի մեծությունն է, որի կրողն է i-րդ անհատը:

Համապատասխանաբար u_i-ն i-րդ անհատի օգտակարության թվային ֆունկցիան է: Եթե $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_l)$ վեկտորն արդյունքների հավաքածու է, ապա օգտակարության $u_i(\overline{x})$ ֆունկցիան բնութագրում է $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_l)$ հավաքածուի համար i-րդ անհատի բավարարվածության կամ օգտակարության աստիճանը:

Սովորաբար, յուրաքանչյուր i անհատ ընտրում է սպառողական բարիքների իր հավաքածուն՝ $\overline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{il})$, որը ոչ բացասական վեկտոր է:

Արտադրությունն ընտրում է արտադրական գործընթացների լարունությունները՝ $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ վեկտորը, որով և սկզբնական պաշարների միջոցով միարժեքորեն որոշվում է $\overline{y}$ արդյունքը: $\overline{y}$-ի բաղադրիչները պարտադիր չէ, որ լինեն դրական:

$z = (\overline{y}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ վեկտորների հավաքածուն կանվանենք *տնտեսության վիճակ*: Այն հավասարակշռված է, եթե բավարարվում է $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n = \overline{y} + \overline{\omega}$ պայմանը: Դա նշանակում է, որ արդյունքի համար տեղի ունի նյութական հաշվեկշռություն. ընդհանուր արտադրությունը հավասար է ընդհանուր սպառմանը՝ ներառյալ նաև սպառողների սկզբնական պաշարները:

Յուրաքանչյուր z հաշվեկշռված վիճակի համապատասխանեցնենք $u = (u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots u_n(x_n))$ վեկտոր-ֆունկցիան, որի բաղադրիչները սպառողների օգտակարության մեծություններն են տվյալ վիճակում:

Այսպիսով, երբ սահմանեցինք z հաշվեկշռված վիճակների բազմությունը և սպառողների օգտակարության ֆունկցիաները, անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր սպառողի համար ձևակերպել նպատակ: Բնական է ենթադրել, որ սպառողներից ամեն մեկը ձգտում է առավելագույնի հասցնել իր օգտակարության ֆունկցիան՝ $u_i = u_i(\bar{x}_i)$:

Ինքնին հասկանալի է, որ նշված հարցադրման մեջ կա ներքին հակասություն. սպառողների մի մասի բարեկեցության էական բարելավումը, որպես կանոն, իրագործվում է մյուս մասի բարեկեցության հաշվին:

Այնուհանդերձ գիտությունը մշակել է որոշ ընդհանուր չափանիշներ, որոնք կոչված են գնահատելու, թե բարեկեցությունը որքանով է բարձրանում, առաջարկվող տնտեսական քաղաքականության արդյունքում ձևավորվող փոխզիջումների շնորհիվ:

Իսկ թե ինչպիսիք են այդ փոխզիջումները, դա կքննարկենք ստորև:

Պարետոյի փոխզիջումներ: Բազմաչափանիշային խնդիրների վերլուծության արդյունավետ մեթոդներից մեկը առաջարկվել է իտալացի տնտեսագետ Պարետոյի կողմից 1904 թ:

Մասնավոր դեպքում ենթադրենք, որ ոչ թե անհատներն են ընտրում իրենց սպառողական բարիքների վեկտորը, այլ ինչ-որ մեկն իր "անտեսանելի ձեռքով", որոշել է բոլոր անհատներին տրամադրել նույն $\bar{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորը:

Ենթադրենք նաև, որ գոյություն ունի մեկ այլ $\bar{x}$ վեկտոր, որի դեպքում բոլոր անհատների համար $u_i(\bar{x}) \geq u_i(\bar{x}^*)$:

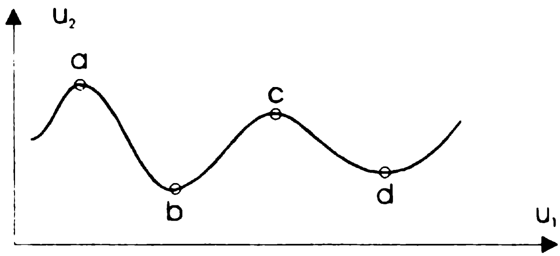
Ակնհայտ է, որ բոլոր անհատները $\bar{x}$-ը կգերադասեն $\bar{x}^*$-ից, ուստի այն բոլոր $\bar{x}^*$ վեկտորները, որոնք բավարարում են վերը նշված անհավասարությանը, ընդունելի չեն ոչ մեկի համար: Սակայն այն $\bar{x}^*$ վեկտորները, որոնց համար գոյություն չունի անհավասարությանը բավարարող $\bar{x}$ բոլոր $u_i(\bar{x})$ չափանիշների համար, չդիտարկել չի կարելի, որովհետև կանտեսվի առնվազն մեկի շահը:

$\bar{x}$ վեկտորի բոլոր այդպիսի արժեքների բազմությունը անվանվում է Պարետոյի բազմություն:

Պարզության համար դիտարկենք երկու սպառողների համար որոշված օգտակարության ֆունկցիայի $u=(u_1,u_2)$ դեպքը, որի ժամանակ՝

$$u_1(\bar{x}) \to \max, \quad u_2(\bar{x}) \to \max:$$

Պարզ է, որ x փոփոխականի ամեն մի թույլատրելի արժեքի համապատասխանում է (u_1,u_2) հարթության մեկ կետ (տե՛ս, նկ. 1.2) և $u_1=u_1(\bar{x})$, $u_2=u_2(\bar{x})$ պարամետրական հավասարումները որոշում են ինչ-որ *abcd* կոր:



Նկ. 1.2

Պարետոյի բազմությանը կպատկանեն կորի *ab* և *cd* մասերը: *bc* կտորը ակնհայտորեն չի պատկանում Պարետոյի բազմությանը, որովհետև u_1-ի աճին համընթաց մեծանում է նաև u_2-ը:

Որոշումների կայացման խնդիրներում Պարետոյի լուծում ասելով նկատի է առնվում այնպիսի $\bar{x}$ վեկտորների ընտրությունը, որոնք պատկանում են Պարետոյի բազմություններին: Դժվար չէ տեսնել, որ Պարետոյի լուծումը չի առանձնացնում միակ լուծում, այլ սոսկ նեղացնում է այլընտրանքների բազմությունը, որը համեմատաբար հեշտացնում է որոշում կայացնելը:

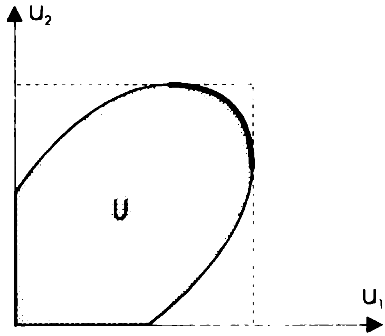
Վերադառնալով բարիքների բաշխման և սպառման մեր կողմից դիտարկվող մոդելին: Նշենք, որ օգտակարության տիրույթը՝

$$U=\{\bar{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)/\,u_i=u_i(\bar{x}_i),\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_n=\bar{y}+\bar{\omega}\}$$

բազմությունը, որպես կանոն, ուռուցիկ բազմություն է, և ունի նկար 1.3-ում բերված տեսքը:

Նկարում ստվերագծված պատկերի թավ եզրագիծը Պարետոյի կետերի բազմությունն է:

Այս դեպքում կասենք, որ $\bar{u}$ պատկանում է U բազմության Պարետոյի եզրագծին միայն այն դեպքում, երբ գոյություն չունի $\bar{u}' \in U$, որը բավարարում է $\bar{u}' \ge \bar{u}$, $\bar{u}' \ne \bar{u}$ պայմաններին:



Նկ. 1.3

Սահմանումից հետևում է, որ օգտակարության U տիրույթի այն կետերը, որոնք Պարետոյի եզրագծին չեն պատկանում, բոլոր անհատներին չեն կարող բավարարել, քանի որ կարելի է բարելավել նրանցից գոնե մեկի վիճակը (հիշենք, որ նրանցից ամեն մեկը ձգտում էր $u_i(x^i)$ օգտակարության ֆունկցիայի առավելագույն արժեքին), չվատացնելով մյուսների վիճակը:

Պետք է, իհարկե, նկատել, որ Պարետոյի օպտիմալության բոլոր կետերը չէ, որ ձեռնտու կարող են լինել այդ անհատների հասարակությանը: Հասարակությունը սովորաբար չի համակերպվում և "դուրս կմղի" բաշխման այնպիսի եղանակը, որի դեպքում իր բոլոր անդամները աշխատում են մեկ մարդու համար՝ ապահովելով նրա օգտակարության ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը:

Այսպիսին է Պարետոյի լուծումների կամ օպտիմալության մեկնաբանությունը, որի բազմազան կիրառությունները արդյունավետ են տնտեսագիտական և ընդհանրապես մարդկային հասարակության մեջ ընթացող նպատակամետ գործողություններն ու գործընթացները նկարագրելիս:

Պարետոյի սկզբունքը կամ հայտանիշը պնդում է, որ որևէ մեկին վնաս չպատճառող և որոշ մարդկանց օգուտ բերող (իրենց սեփական սուբյեկտիվ գնահատմամբ) ամեն մի քաղաքականություն ինքնին բարելավում է:

Այսպիսի պնդումը հետաքրքիր է իր վերլուծական եզրահանգումներով:

Կտրոնների օրինակը: Սահմանափակ սննդամթերքի բաշխման ժամանակ, եթե ստիպված ենք այն նորմավորել, սովորաբար ավելի լավ է կիրառել կտրոններ, քան՝ ֆիքսված նորմաներ: Այս դրույթը հետևում է Պարետոյի օպտիմալության հայտանիշից: Եթե յուրաքանչյուր բնակչին տրվում է, դիցուք, 10 կտրոն այն պայմանով, որ մեկ կիլոգրամ կարագի համար պետք է տրվի 3 կտրոն, իսկ մեկ կիլոգրամ շաքարի համար 1 կտրոն, այնուամենայնիվ սպառողը դեռ պահպանում է ընտրության որոշակի ազատություն: Ննդամթերքի գինը արտահայտելով կտրոնների ավելի շատ քանակությամբ՝ կարելի է իհարկե նպատակահարմար ձևով սահմանափակել յուրաքանչյուր սննդամթերքի սպառումը:

Կտրոնները յուրաքանչյուր սպառողի հնարավորություն են տալիս օգուտ ստանալ այն առումով, որ նա կարող է իր ցանկությամբ որոշել գնելիք սննդամթերքի քանակությունները՝ ընդսմին ոչ որի վնաս չպատճառելով:

Փորձեք բացատրել, թե ինչպիսի՞ սահմանափակող հանգամանքներ կային, երբ դժվարին 1991-1992 թթ. մեզանում կիրառվող կտրոնային համակարգը ամրագրում էր յուրաքանչյուր անձի համար նույն քանակությամբ սննդամթերքի ձեռքբերման իրավունքը:

Ապրանքների լավագույն բաշխման օրինակը նույնպես կարող է բերվել պարետո հայտանիշի կիրառությանը:

Դիցուք x և y քանակությամբ առաջին և երկրորդ տեսակի ապրանքները պետք է լավագույն ձևով բաշխել 2 սպառողների միջև: Սահմանենք առաջին սպառողի օգտակարության ֆունկցիան որպես $u_1 = f_1(x_1, y_1)$, և երկրորդ սպառողինը՝ $u_2 = f_2(x_2, y_2)$: Տվյալ դեպքում x_1-ը առաջին, իսկ x_2-ը երկրորդ սպառողի մոտ եղած առաջին տեսակի ապրանքի քանակությունն է, իսկ y_1-ը և y_2-ը, համապատասխանաբար, երկրորդ տեսակի ապրանքի քանակությունն է, որը տնօրինում են առաջին և երկրորդ սպառողները:

Տեսնենք, թե որքան կարելի է մեծացնել առաջին սպառողի u_1 օգտակարությունը, չնվազեցնելով մյուս սպառողի u_2 օգտակարությունը: Տվյալ դեպքում խնդիրն այն է, որ առավելագույն արժեք ստանա $u_1 = f_1(x_1, y_1)$-ը, երբ

1) $f_2(x_2, y_2) = u_2^0 (const)$, այսինքն՝ երկրորդ սպառողին չպետք է վնաս պատճառվի, և

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = x^0 \\ y_1 + y_2 = y^0 \end{cases}$, այսինքն՝ սևեռվում է x և y ապրանքների ընդհանուր քանակությունը:

Այս տիպի խնդիրների լուծման եղանակներին դուք կծանոթանաք ձեռնարկի 5-րդ գլխում:

Եթե առաջին ապրանքի սահմանային օգտակարությունը առաջին սպառողի համար $Mu_{x1} = f'_{1x_1}$ է, և նույն կերպ՝ $Mu_{x2} = f'_{2x_2}$, $Mu_{y1} = f'_{1y_1}$ և $Mu_{y2} = f'_{2y_1}$, ապա առաջարկում ենք ցույց տալ, որ ապրանքները սպառողների միջև լավագույն ձևով են բաշխվում, երբ երկու ապրանքների սահմանային օգտակարությունների հարաբերակցությունները երկու սպառողների համար էլ նույնն են՝

$$Mu_{x1} / Mu_{y1} = Mu_{x2} / Mu_{y2}:$$

Խնդիր: Առաջարկում ենք ոչ ԳԾ խնդրի հետազոտումը յուրացնելուց հետո վերադառնալ այս հավասարմանը, ցույց տալ, թե ինչպես են որոշվում վերը բերված հարաբերակցությունները և ինչպես են մեկնաբանվում տնտեսագիտորեն:

Դժվար չէ նկատել, որ ապրանքների լավագույն բաշխման քննարկված օրինակում Պարետոյի հայտանիշի կիրառությունը հնարավոր է դարձնում ինչ-որ չափով դատել, թե սպառողների միջև ապրանքները ինչպես պետք է բաշխվեն՝ ոչինչ չասելով նրանց միջև եկամտի բաշխման մասին: Մոտեցումը հետևյալն է.

Այն դեպքերում, երբ ապրանքները երկուսն էին, և մենք ցանկանում էինք մաքսիմացնել u_1 և u_2, առավելագույն արժեքին էինք հասցնում դրանցից մեկը՝ (u_1), մյուսը թողնելով անփոփոխ (u_2-ը հաստատուն մեծություն է): Պարետոյի հայտանիշի այսպիսի կիրառությունը որոշում է լավագույն պայմանները մեկ սպառողի համար՝ վնաս չպատճառելով մյուս սպառողին: Պարետոյի հայտանիշի կիրառությունները որոշումների կայացման տնտեսագիտական հիմնախնդիրների վերլուծություններում բազմազան են:

Երբ խոսքը վերաբերում է որոշակի ընդհանրացումներին, մասնավորապես տնտեսական քաղաքականությանը, ապա չի կարելի շատ ակնկալիք ունենալ օպտիմալության Պարետոյի հայտանիշի կիրառություններից: Այն հատկապես կիրառելի չէ այնպիսի հանձնարարականների նկատմամբ, որոնք շահույթ են բերում ինչ-որ մարդկանց և վնաս՝ ուրիշներին: Այլ կերպ ասած, Պարետոյի հայտանիշը օգտակար է միայն այն դեպքում, երբ այն բացառում է առանձին անձանց օգտակարության համադրման կարևոր հիմնախնդիրը, այսինքն՝ դիտարկվում են միայն այն դեպքերը, երբ որևէ մեկին վնաս չի պատճառվում, այնպես որ այդ հիմնախնդիրը չի էլ առաջանում:

§ 4. Տնտեսական իրավիճակների մոդելներ

Ստորև դիտարկվում են այնպիսի խնդիրներ, որոնք դասակարգվում են ոչ թե տնտեսական գործակալների մոտ իրենց առաջացման բնույթով, այլև մաթեմատիկական մոդելների կառուցվածքներով (ԳԾ խնդիր, դիսկրետ օպտիմացման, ուռուցիկ ծրագրման և այլ խնդիրներ):

4.1 Գծային ծրագրման խնդիրներ: ԳԾ խնդրին բերվող բազմաթիվ տնտեսական իրավիճակներից այս բաժնում կդիտարկենք արտադրության գծային մոդելը և դիետի խնդիրը:

Արտադրության գծային մոդելը: Ենթադրենք ինչ-որ ձեռնարկության արտադրության ծրագիր է մշակվում: Հայտնի են նրա տեխնոլոգիական հնարավորությունները ու առկա ռեսուրսների քանակությունները: Դիցուք, արտադրության գործընթացում մասնակցում են $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ռեսուրսներ (մետաղ, էլեկտրաէներգիա, աշխատանք և այլն), որոնք կարող են ինչպես ծախսվել, այնպես էլ թողարկվել: Արդյունքները թողարկվում են այսպես կոչված գծային տեխնոլոգիական եղանակներով: Վերջինս յուրօրինակ “դեղատոմս” է, որը ցույց կտա, թե տվյալ տեխնոլոգիական եղանակը ինչ համամասնություններով է օգտագործում ռեսուրսները:

P տեխնոլոգիական գործընթացը, որը ներառում է n ռեսուրսներ, որոշվում է $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի հավաքածուի միջոցով: G_j ռեսուրսը տվյալ տեխնոլոգիական գործընթացում օգտագործվող է, եթե a_j-ն բացասական է և թողարկվող, եթե a_j-ն դրական է: Արտադրության գծային մոդելն ունի $P_1, P_2, \ldots, P_m$ տեխնոլոգիական գործընթացները և նկարագրվում է a_{ij} թվերի $m \times n$ մատրիցի միջոցով, որտեղ a_{ij}-ն G_j ռեսուրսի քանակն է, որն օգտագործվում է (երբ $a_{ij} < 0$) կամ թողարկվում է (երբ $a_{ij} > 0$) P_i տեխնոլոգիական գործընթացի միավոր լարունության կիրառման դեպքում: a_{ij} թվերից աղյուսակը կանվանենք արտադրողականությունների մատրից:

Ասենք, որ P_i գործընթացի մակարդակը կամ լարունությունը x_i է, եթե ռեսուրսներն օգտագործվում կամ թողարկվում են $a_{i1}x_i, a_{i2}x_i, \ldots, a_{in}x_i$ քանակներով:

	G_1	G_2	...	G_n
P_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
P_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
...	...	...		...
P_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Մոդելում արտադրական պլանը որոշվում է որպես $P_1, P_2, \ldots, P_m$ տեխնոլոգիական գործընթացներին համապատասխանող ոչ բացասական $x_1, x_2, \ldots, x_m$ լարունությունների հավաքածու: Տրված արտադրական պլանի համար G_j ռեսուրսի (արդյունքի) թողարկվող քանակը բոլոր գործընթացներում նրա թողարկումների գումարն է՝ $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m$:

Ձևակերպենք *նվազագույն ծախսերով տրված պահանջարկի բավարարման արտադրության գծային մոդելը*: Ենթադրենք պահանջվում է թողարկել առնվազն δ_j միավոր G_j ռեսուրսից և հայտնի է, որ P_i գործընթացը միավոր լարունությամբ կիրառման դեպքում ձեռնարկության ծախսերը կազմում են γ_i, իսկ x_i լարունության դեպքում՝ $\gamma_i x_i$ (այստեղ կրկին կատարում ենք բավականին խիստ ենթադրություն. ծախսերը համեմատական են լարունություններին):

Խնդիրը հանգեց արտադրության այնպիսի պլանի ընտրությանը, որը կապահովի δ_j պահանջարկը և նվազագույնի կհասցնի ծախսերը: Այսպիսով, փնտրվում են ոչ բացասական $x_1, x_2, \ldots, x_m$ թվեր, որոնց համար $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_m x_m$ արտահայտությունն ստանում է իր նվազագույն արժեքը $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m \geq \delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ սահմանափակումների դեպքում: (Նկատենք, որ δ_j-ի նշանի սահմանափակում չկա: Առաջարկում ենք այն ինքնուրույն մեկնաբանել):

Դիետի խնդիրը: Սննդամթերքի սպառման լավագույն կառուցվածքը կարող է որոշվել այսպես կոչված "դիետի խնդրի" լուծումով, որի մաթեմատիկական մոդելը նույնպես ԳԾ խնդիր է:

Ենթադրենք՝ տրված է միավոր ժամանակահատվածում (ամիս, եռամսյակ, տարի) կենսապահովման պահանջարկը որոշակի անհրաժեշտ սննդանյութերի նկատմամբ (օրինակ՝ սպիտակուցներ, ճարպեր, ածխաջրեր, վիտամիններ, հանքային աղեր և այլն): Հայտնի են թե՛ այդ սննդանյութերի քանակն առկա սննդամթերքների մեջ և թե՛ օգտագործվող սննդամթերքների միավորի գինը: Խնդիրն այնպիսի կերաբաժնի որոշումն է, որը կբավարարի անհրաժեշտ սննդանյութերի պահանջարկը և միաժամանակ կլինի ամենաէժանը:

Ենթադրենք՝ ընդհանուր դեպքում ունենք $j = 1,2,\dots,n$ սննդամթերքներ, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է $i = 1,2,\dots,m$ տիպի սննդանյութեր: Հայտնի է, որ կերաբաժնում պետք է լինի առնվազն b_1 միավոր առաջին սննդանյութից, b_2 միավոր երկրորդ սննդանյութից և այլն, և, վերջապես, b_m միավոր m-րդ նյութից: Հայտնի է, որ j-րդ սննդամթերքի միավորը պարունակում է a_{ij} քանակություն i-րդ սննդսւնյութից: Տրված են նաև առկա սննդամթերքների c_j գները ($j = 1,2,\dots,n$): Եթե նշանակենք x_j-ով j-րդ սննդամթերքի այն քանակությունը, որը ծրագրում ենք մտցնել կերաբաժնի մեջ, ապա i-րդ սննդանյութի քանակությունը նրանում կլինի $a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n$, և քանի որ այն պետք է բավարարի նվազագույն պահանջարկը, ուստի՝

$$a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n \ge b_i\,,\ (i = 1,2,\dots,m):$$

Կերաբաժնի գինը կներկայացվի հետևյալ տեսքով.

$$z = c_1x_1+\dots+c_nx_n:$$

Խնդիրը հանգեց այնպիսի ոչ բացասական $x_1, x_2, \dots, x_n$ թվերի ընտրությանը, որոնք բավարարում են անհավասարությունների հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \ge b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$$

և որոնց համար $z = c_1x_1+\dots+c_nx_n$ ֆունկցիան ստանում է նվազագույն արժեք:

4.2 Դիսկրետ օպտիմացման խնդիրներ: Ձեռնարկությունների գործունեության կազմակերպման և պլանավորման շատ խնդիրներում պահանջվում է որոշակի արտադրական ռեսուրսների նպատակահարմար օգտագործման ապահովում: Թվարկենք դրանցից մի քանիսը.

արտադրանքի առաքման կամ հումքի մատակարարման արդյունավետ եղանակների որոնում,

տրված աշխատատեղերում աշխատանքների կամ աշխատողների բաշխման արդյունավետ կազմակերպում,
կատարվելիք աշխատանքների հերթականության որոշում (ինքնաթիռների չվացուցակի կազմում կամ համակարգիչների ծրագրային համակարգերի աշխատանքի կազմակերպում):

Նշված տիպի խնդիրները գործնականում լուծվում են առաջին հայացքից խելացի թվացող և որոշումների կայացման չափորինակ դատողությունների վրա հիմնված եղանակներով: Սակայն ստացված լուծումները հաճախ անհաջող են լինում և պահանջում են չուացուցիչ ծախսեր կամ աշխատանքային ռեսուրսներ: Այդ խնդիրների մեծ մասն ունի որոշակի առանձնահատկություն. նպատակին հասնելու հնարավորությունների քանակը վերջավոր, բայց բավականաչափ մեծ թիվ է և, հետևաբար, բոլոր հնարավորություններն ուսումնասիրելու, դրանցից լավագույնն ընտրելու բնական թվացող եղանակն անիրագործելի է:

Դիտարկենք այդ բնույթի մի քանի խնդիրներ:

Առավելագույն զուգակցման խնդիր: Պարի դպրոցն ավարտում են m տղաներ և n աղջիկներ: Ավարտական հանդեսի կազմակերպման համար անհրաժեշտ է նրանցից ընտրել պարազույգեր (հանդեսի ընթացքում զույգերը չեն փոխվում): Կան իրար համակրող տղաներ ու աղջիկներ (այդ զգացմունքը փոխադարձ է) և իրար չհամակրողներ. այդպիսիներից պարազույգ կազմելը բացառվում է:

Հանդեսի կազմակերպիչները ցանկանում են, որ մասնակցող պարազույգերի քանակը լինի ըստ հնարավորին շատ: Դպրոցն ավարտող տղաներից և աղջիկներից ի՞նչ եղանակով պետք է ընտրել առավելագույն թվով պարազույգեր:

Նշված խնդրի մաթեմատիկական մոդելի ձևակերպման համար տղաներին համարակալենք $1,2,\ldots,m$, իսկ աղջիկներին $1,2,\ldots,n$ թվերով և դիտարկենք A աղյուսակը (մատրիցը), որն ունի m տող և n սյուն: Այդ աղյուսակի i-րդ տողի ($1 \le i \le m$) և j-րդ սյան ($1 \le j \le n$) հատման վանդակում գրենք a_{ij} թիվը, որտեղ

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{եթե i - րդ տղան համակրում է j - րդ աղջկան,} \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Հեշտ է նկատել, որ (i-րդ տղա, j-րդ աղջիկ) պարային զույգին համապատասխանում է աղյուսակի $a_{ij} = 1$ տարրը և ընդհակառակը, աղյուսակի ամեն մի 1 բնորոշում է մի պարազույգ: Քանի որ յուրաքանչյուր տղա և յուրաքանչյուր աղջիկ կարող է հանդես գալ ամենաշատը մեկ պարազույգում, ուստի պարազույգերի ընտրությունը նշանակում է 1-երի ընտրություն աղյուսակի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից: Այսպիսով, առավելագույն թվով պարազույգեր կազմելու մեր խնդիրն ունի հետևյալ մաթեմատիկական ձևակերպումը.

Տրված է $m \times n$ կարգի $A=(a_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $a_{ij}=0$ կամ 1: Անհրաժեշտ է այդ մատրիցում ընտրել առավելագույն թվով 1-եր, որոնցից ցանկացած երկուսը գտնվում են տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում:

Նշանակումների խնդիր: Տրված են n աշխատանքային տեղեր և n աշխատողներ: Ենթադրենք, որ հայտնի է աշխատողներից յուրաքանչյուրի արդյունավետությունը (միավոր ժամանակում ստացվող եկամուտը) յուրաքանչյուր աշխատանքատեղում աշխատելուց: Անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր աշխատողի հանձնարարել մեկ աշխատանք և յուրաքանչյուր աշխատանք հանձնարարել մեկ աշխատողի այնպես, որ ընդհանուր արդյունավետությունը՝ աշխատողների արդյունավետությունների գումարը, լինի առավելագույնը: Նշված խնդրի մաթեմատիկական մոդելի նկարագրման համար $1,2,\dots,n$ թվերով համարակալենք աշխատատեղերն ու աշխատողներին և դիտարկենք $n \times n$ կարգի $A=(a_{ij})$ մատրիցը, որտեղ a_{ij}-ն i-րդ աշխատատեղում j-րդ աշխատողի արդյունավետությունն է ($1 \le i \le n, 1 \le j \le n$):

Ձևակերպված խնդրի պայմաններին բավարարող աշխատատեղում աշխատողների բաշխումը կորոշվի $1,2,\dots,n$ տարրերի $\pi:\{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ տեղադրության միջով, որտեղ $\pi(k)$-ն k-րդ աշխատանքը կատարողն է:

Հետևաբար, վերը նշված առավելագույն արդյունավետությունն ապահովող բաշխումը գտնելու խնդիրն ունի հետևյալ մաթեմատիկական ձևակերպումը:

Տրված է $n \times n$ կարգի $A=(a_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $a_{ij} \ge 0$: Անհրաժեշտ է գտնել $1,2,\dots,n$ տարրերի այն π տեղադրությունը, որի համար $\sum_{k=1}^{n} a_{k\pi(k)}$ գումարը ստանում է առավելագույն արժեքը:

Քանի որ $1,2,\dots n$ տարրերի տեղադրությունների քանակը $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n!$ է, ուստի լավագույն լուծման գոյությունն ակնհայտ է. վերջավոր թվով տեղադրություններին համապատասխանող գումարներից ամենամեծը կա:

Կարելի է առաջարկել լավագույն լուծում գտնելու հետևյալ եղանակը. յուրաքանչյուր π տեղադրության համար հաշվում ենք $\sum_{k=1}^{n} a_{k\pi(k)}$ գումարը և ընտրում այն տեղադրությունը, որի համար հաշվված գումարի արժեքը ամենամեծն է:

Սակայն գործնականում այն իրագործել հնարավոր չէ, քանի որ պահանջվում է անհնելի թվով (օրինակ $n = 20$ դեպքում՝ առնվազն $20 \cdot 20! > 10^{19}$) գործողություն:

Նեղ տեղերի խնդիր: Բաշխման խնդիրներում, հաճախ, անհրաժեշտ է հաշվի առնել աշխատանքների կատարման հերթականությունը որոշող տեխնոլոգիական սահմանափակումները: Նախորդ՝ նշանակումների խնդրում այդպիսի սահմանափակումներ չկային. դիտարկվող աշխատանքները կատարվում էին միմյանցից անկախ: Մյուս ծայրահեղ դեպքը հոսքագիծն է. այն կազմված է $1,2,\ldots,n$ համարներով աշխատատեղերից, յուրաքանչյուր դետալ սկզբում մշակվում է առաջին, այնուհետև երկրորդ, երրորդ և հաջորդական տեղերում: n-րդ տեղում ստացվում է պատրաստի արտադրանքը: Եթե i-րդ տեղում միավոր ժամանակում մշակվում է h_i դետալ, ապա $h_1, h_2, \ldots, h_n$ թվերից նվազագույնը ցույց կտա հոսքնթաց գծում միավոր ժամանակում արտադրվող պատրաստի արտադրանքի քանակը: Բնական է հոսքնթաց գծի արտադրողականության հետևյալ սահմանումը. i-րդ աշխատատեղի արտադրողականությունը՝ h_i-ն միավոր ժամանակում, այդտեղ մշակված դետալների քանակն է, իսկ $h = \min(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ հոսքագծի արտադրողականությունն է:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. Տրված են $1,2,\ldots,n$ համարներով աշխատատեղերից կազմված հոսքագիծը և n թվով աշխատողներ. հայտնի են աշխատողներից յուրաքանչյուրի արտադրողականությունը յուրաքանչյուր տեղում: Անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր աշխատողի նշանակել մեկ աշխատատեղում՝ յուրաքանչյուր տեղում նշանակելով մեկ կատարողի այնպես, որ հոսքագծի արտադրողականությունը լինի առավելագույնը:

Այս խնդրի մաթեմատիկական մոդելի նկարագրման համար $1,2,\ldots,n$ համարներով համարակալենք աշխատողներին և դիտարկենք $n \times n$ կարգի $A = (a_{ij})$ մատրիցը, որտեղ a_{ij}-ն i-րդ աշխատատեղում j-րդ աշխատողի արտադրողականությունն է ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$):

Խնդրի պայմաններին բավարարող աշխատատեղերում աշխատողների բաշխումը կորոշվի $1,2,\ldots,n$ տարրերի $\pi:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ տեղադրության միջոցով, որտեղ $\pi(k)$-ն k-րդ աշխատատեղում աշխատողն է:

Հետևաբար, վերը նշված նեղ տեղերի խնդիրն ունի հետևյալ մաթեմատիկական ձևակերպումը.

Տրված է $n\times n$ կարգի $A=(a_{ij})$ մատրից, որտեղ $a_{ij}\geq 0$: Անհրաժեշտ է գտնել $1,2,\ldots,n$ տարրերի π տեղադրություն, որի համար $\min\{a_{1,\pi(1)},a_{2,\pi(2)},\ldots,a_{n,\pi(n)}\}$ արտահայտությունը ստանում է իր առավելագույն արժեքը:

Նեղ տեղերի խնդրի ձևակերպումը շատ նման է նշանակումների խնդրի ձևակերպմանը (տրված մատրիցի համար անհրաժեշտ է գտնել տեղադրություն), սակայն նպատակային ֆունկցիաները էապես տարբերվում են միմյանցից:

Շրջիկ գործակալի խնդիր: Տրված են n քաղաքներ, որոնցից մեկում գտնվում է գործակալը: Նա պետք է շրջագայի այդ քաղաքները՝ յուրաքանչյուրում լինելով մեկ անգամ, և վերադառնա մեկնակետ քաղաքը: Խնդիրը հետևյալն է. ի՞նչ հերթականությամբ պետք է այցելի այդ քաղաքները, որպեսզի անցած ճանապարհը լինի նվազագույնը:

Համարակալենք քաղաքները $1,2,3,\ldots,n$ և ենթադրենք, որ գործակալը սկզբում 1 քաղաքում էր: d_{ij}-ով նշանակենք i-րդ քաղաքից j-րդ քաղաք տանող ճանապարհի երկարությունը: Եթե գործակալն ընտրել է $1,i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}$ հերթականությունը (1 քաղաքից գնում է i_1, i_1-ից՝ i_2, i_2-ից՝ i_3 և այլն, իսկ i_{n-1}-ից վերադառնում 1 քաղաքը), ապա անցած ճանապարհը կլինի $d_{1i_1}+d_{i_1i_2}+d_{i_2i_3}+\ldots+d_{i_{n-1}1}$: Հետևաբար խնդրի մաթեմատիկական մոդելը հետևյալն է.

Տրված է $D=(d_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $d_{ij}\geq 0$ և $d_{ii}=0$ ($1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$): Անհրաժեշտ է գտնել $2,3,\ldots,n$ տարրերի այնպիսի $i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}$ տեղափոխություն, որի համար $d_{1i_1}+d_{i_1i_2}+\ldots+d_{i_{n-1}1}$ արտահայտությունը ստանա իր ամենափոքր արժեքը:

Քանի որ $2,3,\ldots,n$ տարրերից տեղափոխությունների քանակը $(n-1)!$ է, ուստի գործակալը պետք է $(n-1)!$ հնարավոր տարբերակներից ընտրի մեկը: n-ի փոքր արժեքների համար խնդիրը կարելի է լուծել բոլոր տարբերակների քննարկումով: Պարզ է, որ մեծ n-երի դեպքում բոլոր տարբերակների քննարկումը գործնականորեն անիրագործելի է:

(4) *Տրանսպորտային խնդիր*: Դիտարկենք որևէ արտադրանք թողարկող m ձեռնարկություններ (հետագայում կասենք m արտադրողներ) և նրանց արտադրանքը սպառող n ձեռնարկություններ (հետագայում՝ n սպառողներ): Սևեռենք ժամանակի միավոր (օր, շաբաթ, ամիս կամ եռամսյակ) և ենթադրենք, որ հայտնի է, թե միավոր ժամանակում արտադրողներից յուրաքանչյուրն ինչքան է արտադրում, իսկ սպառողներից յուրաքանչյուրին ինչքան արտադրանք է անհրաժեշտ ստանալ արտադրողներից (ինչքան է սպառում): Ենթադրենք նաև, որ արտադրողից սպառողին արտադրանքի տեղափոխման ծախսերը տեղափոխվող արտադրանքի քանակից կախված են գծայնորեն: Անհրաժեշտ է որոշել, թե որ արտադրողից, ինչքան արտադրանք պետք է տրամադրել ամեն մի սպառողի, որպեսզի.

- յուրաքանչյուր սպառող ստանա իրեն անհրաժեշտ քանակությամբ արտադրանք.
- յուրաքանչյուր արտադրողից վերցվող արտադրանքի քանակը շատ չլինի իր արտադրածից.
- արտադրանքը սպառողներին հասցնելու տրանսպորտային ծախսերը լինեն նվազագույնը:

Նշված խնդիրը հայտնի է տրանսպորտային (երբեմն Հիչկոկի) խնդիր անունով: Նրա մաթեմատիկական մոդելի ձևակերպման համար $1,2,\ldots,m$ թվերով համարակալենք արտադրողներին, $1,2,\ldots,n$ թվերով՝ սպառողներին և ենթադրենք, որ.

- a_i-ն միավոր ժամանակում i-րդ արտադրողի արտադրած արտադրանքի քանակն է, $1 \le i \le m$;
- b_j-ն միավոր ժամանակում j-րդ սպառողին անհրաժեշտ արտադրանքի քանակն է, $1 \le j \le n$;
- c_{ij}-ն i-րդ արտադրողից j-րդ սպառողին միավոր արտադրանքի տեղափոխման ծախսերն է:

x_{ij}-ով նշանակենք i-րդ արտադրողից j-րդ սպառողին հասցվող արտադրանքի քանակը: Այդ դեպքում $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ գումարը կլինի i-րդ արտադրողից ($1 \le i \le m$) վերցված արտադրանքի քանակը, իսկ

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ գումարը՝ j-րդ սպառողին ($1 \le j \le n$) տրված արտադրանքի քանակը:

Այսպիսով, վերը նշված տրանսպորտային խնդրի մաթեմատիկական մոդելը հետևյալն է.

Տրված են $a_1, a_2, \ldots a_m$; $b_1, b_2, \ldots b_n$ ոչ բացասական թվերը և $m \times n$ կարգի (c_{ij}) ոչ բացասական տարրերով մատրիցը ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$): Անհրաժեշտ է գտնել $x_{ij} \ge 0$ թվեր այնպես, որ

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\ , \ i = 1,2,\ldots,m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j\ , \ j = 1,2,\ldots,n\ ,$$

և որի համար $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij}$ արտահայտությունը ստանում է իր նվազագույն արժեքը:

Դժվար չէ ստուգել, որ տրանսպորտային խնդիրը ԳԾ խնդիր է, սակայն սահմանափակումների պարզագույն տեսքը (համապատասխան մատրիցի տարրերը 0, 1 կամ -1 են) հնարավորություն է տալիս այն լուծելու ավելի պարզ և արդյունավետ ալգորիթմի միջոցով:

4.3 Ոչ գծային ծրագրման խնդիրներ:

Արժեթղթերի ընտրության խնդիրը: Տնտեսության մեջ ներդրումներ կարող են անել բազմաթիվ սուբյեկտներ: Ենթադրենք՝ դուք “Քիմնյութ” և ”Գունմետ” ձեռնարկությունների ֆոնդային բորսայի բրոքերային գրասենյակի մակլեր եք և խորհրդատվություն ստանալու համար՝ թե որ ձեռնարկություններում ներդրումներ կատարել (“Քիմնյութի” և ”Գունմետի” բաժնետոմսերով) ձեզ է դիմում հաճախորդը: Չսահմանափակելով այս ձեռնարկություններում ներդրվող փողի քանակությունը՝ հաճախորդը հետևյալ պայմաններն է առաջադրում.

- ինքը շահագրգռված է ինչպես շահաբաժնի, այնպես էլ արժեթղթի արժեքի աճով,
- ներդրվող փողի գումարը որոշելիս, հարկային սանդղակի դրույքաչափերից ելնելով, պահանջում է շահաբաժնի համեմատությամբ արժեթղթի արժեքի աճը հաշվարկել $\alpha > 1$ գործակցով,

ռիսկի նկատառումներից ելնելով՝ մտցնել "ռիսկի ցուցանիշներ"՝ $v_1 = \beta x_1^2$, $v_2 = \gamma x_2^2$ և $v_1 + v_2 = \delta$ (β, γ, δ դրական մեծություններ են):

Ձեր խնդիրն է x_1 և x_2 փոփոխականներն այնպես ընտրել, որ բավարարվեն նշված պայմանները, իսկ շահաբաժնի և արժեթղթերի արժեքի տարեկան աճի կշռված մեծությունը լինի առավելագույնը: Ենթադրվում է, որ կարճաժամկետ գործարքները արգելվում են:

Ենթադրենք՝ բանիմաց խորհրդատվության նպատակով կատարած հետազոտությամբ դուք պարզել եք, որ հաջորդ տարի "Քիմնյութում" սպասվում է հավելաճ k_1 տոկոս՝ արժեթղթի արժեքի և s_1 տոկոս՝ շահաբաժնի համար, իսկ "Գունմետ" ձեռնարկությունում հավելաճը կազմելու է համապատասխանաբար k_2 և s_2 տոկոս: Որոշակիության համար կընդունենք, որ $k_1 < k_2$ և $s_1 > s_2$:

Առաջարկվում է ինքնուրույն ձևակերպել նշված երկու ձեռնարկություններում ներդրումների լավագույն բաշխման մաթեմատիկական մոդելը:

Ուղևորահոսքերի գնահատման խնդիր: Տնտեսությունում հազվադեպ չեն այնպիսի իրավիճակները, երբ փոփոխականներին բնորոշ է վարքի հավանական բնույթը: Դիտարկվող "ուղևորահոսքերի" խնդիրը դասվում է այդպիսի իրավիճակների շարքին: Խնդիրը բովանդակում է "առավելագույն անորոշություն" նպատակային ֆունկցիա:

Ենթադրենք, որ քաղաքում կա n համայնք, և քաղաքապետարանին հետաքրքրում է տրանսպորտային միջոցների լավագույն բաշխումը ըստ երթուղիների: P_i-ով նշանակենք i-րդ համայնքի աշխատող բնակիչների թիվը, W_j-ով j-րդ համայնքում աշխատողների թիվը, x_{ij}-ով i-րդ համայնքում բնակվող և j-րդ համայնքում աշխատողների թիվը: Պարզ է, որ

$$\sum_j x_{ij} = P_i, \quad \sum_i x_{ij} = W_j:$$

P_i, W_j հայտնի մեծություններ են և մենք պետք է գնահատենք ուղևորահոսքերը՝ x_{ij}: Քանի որ n^2 անհայտների դեպքում ունենք $2n$ հավասարումներ, հարմար լուծման ընտրությունն անհնար է թվում: Այդուհանդերձ, տարաբաշխման "անորոշության պարագան" հնարավորություն է ընձեռում գործնականում բավականին մեծ ճշգրտությամբ որոշել x_{ij}-ի արժեքները: Տրված սահմանափակումների պայմաններում ուղևորահոսքերի նկարագրությունը անորոշության չափի (էնտրոպիայի) մաքսիմումի հիման վրա իրականացվում է

$$H = -\sum_{i,j} x_{ij} \ln x_{ij}$$

նպատակային ֆունկցիայի միջոցով, որի համար փնտրվում է առավելագույն արժեքը:

"Առավելագույն անորոշության" բովանդակալից մեկնաբանությունը տե՛ս, մասնավորապես, [24]-ում:

Խնդիրներ:

1) Ոչ ԳԾ խնդրի հետազոտումը յուրացնելուց հետո առաջարկում ենք վերադառնալ ուղևորահոսքերի դիտարկված խնդրին և համոզվել, որ H ֆունկցիան իր առավելագույն արժեքն է ընդունում, երբ

$$x_{ij} = \frac{P_i W_j}{N}, \text{ որտեղ } n = \sum_i P_i = \sum_j W_j :$$

2) Փորձեք "ուղևորահոսքերի" խնդիրը վերաիմաստավորել այլ բնույթի տնտեսական իրավիճակների համար՝ տեղեկատվության հոսքերը կապի միջոցներում, տնտեսության բազմարդյունք հոսքերը, տնտեսության ստվերայնության հոսքերը ըստ ոլորտների և այլն: Անորոշության մաքսիմումի հայտանիշով կարելի է փնտրել ոչ միայն հոսքերը տրված պայմաններով, այլև հոսքերի փոփոխման պայմանները ցանկալի ուղղություններով:

Ներդրումների բաշխման խնդիր: Ձեռնարկության ղեկավարությունը ուսումնասիրում է իր երեք մասնաճյուղերի վերակառուցման խնդիրը: Այդ նպատակով նախատեսված է 6 մլն դրամ: Մասնաճյուղի վերակառուցման յուրաքանչյուր տարբերակ բնութագրվում է c_i ծախքով և r_i սպասվելիք եկամտով $i = 1,2,3$, որոնց արժեքները բերված են աղյուսակ 1.1-ում:

Նախագիծ	Ձեռնարկություն					
	1		2		3	
	c_1	r_1	c_2	r_2	c_3	r_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	6	3	10	1	5
3	2	8	4	11		
4			5	14		

աղյուսակ 1.1

Առաջին տողի 0-ական ծախքերը նշանակում են, որ մասնաճյուղում վերակառուցում չի նախատեսված:

Խնդիրն այն է, որ ձեռնարկության ղեկավարությունը պետք է որոշի, թե ամեն մի մասնաճյուղում ինչքան ներդրումներ կատարի, որպեսզի 6 մլն դրամի սահմաններում ստանա առավելագույն եկամուտ: Իհարկե, այս խնդիրը կարելի է լուծել հատարկման եղանակով դիտարկելով բոլոր հնարավոր տարբերակները, որոնց քանակը $3 \times 4 \times 2 = 24$ է: Պարզ է նաև, որ ոչ բոլոր տարբերակներն են ընդունելի, որովհետև ընդհանուր ծախքը կարող է գերազանցել 6 մլն դրամից: Օրինակ, 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերի համար 3-րդ, 4-րդ և 2-րդ նախագծերից կազմված տարբերակը թույլատրելի չէ, որովհետև ընդհանուր ծախսը 2+5+1=8 (մլն դրամ) է, մինչդեռ ղեկավարությունը կարող է ներդնել ընդամենը 6 մլն դրամ:

Ռեսուրսների բաշխման խնդիր: Ձեռնարկության գործունեության ծրագրերը կազմելիս հաճախ հանդիպում ենք իրավիճակների, երբ անհրաժեշտ է ինչ-որ քանակությամբ ռեսուրսներ բաշխել՝ տարբեր արտադրատեսակներ թողարկելու համար: Դիցուք՝ պետք է արտադրել N տեսակի արտադրանք, և n-րդ $(n = 1,2,\dots,N)$ տեսակի արտադրանքի x_n քանակի թողարկման համար պահանջվում է $c_n(x_n)$ քանակությամբ ռեսուրս, իսկ սպասվելիք շահույթը $p_n(x_n)$ է: Պահանջվում է կազմել թողարկման այնպիսի $(x_1^*, x_2^*,\dots,x_N^*)$ ծրագիր, որ օգտագործվող ռեսուրսի ընդհանուր ծախքը չգերազանցի k միավորը, և սպասվելիք ընդհանուր շահույթը լինի առավելագույնը: Նկարագրված խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կունենա այսպիսի տեսք.

$$p_1(x_1) + p_2(x_2)+\dots+p_N(x_N) \to \max,$$

$$c_1(x_1) + c_2(x_2)+\dots+c_n(x_n) \le k,$$

$$0 \le x_n \le b, \; n = 1,2,\dots,N:$$

Այստեղ k-ն և b-ն տրված մեծություններ են, $c_n(x_n)$ և $p_n(x_n)$ ֆունկցիաները ոչ բացասական են, ընդ որում $c_n(0) = 0$, $p_n(0) = 0$, երբ $n = 1,2,\dots,N$:

Բազմաքայլ գործընթացներում որոշումների կայացումը անորոշության պայմաններում: Վերը դիտարկված ներդրումների և ռեսուրսների բաշխման օրինակներում լավագույն որոշումների կայացման մոդելները ելնում էին իրավիճակի դետերմինացված պայմաններից: Սակայն քննարկվող իրավիճակը հաշվի է առնում որոշումների կայացման գործընթացի հավանական բնույթը: Վերջինս պայմանավորված է ապագա իրավիճակների անորոշությամբ: Այդպիսի իրավիճակները նկարագրող մոդելներից մեկը հենվում է մարկովյան գործընթացների վրա (տե՛ս, [34]): Որոշումների կայացման մարկովյան գործընթացի կիրառությունը դիտարկենք բրուտի գործելակերպի օրինակով:

Բրուտի խնդիր: Ամեն շաբաթ բրուտը ամանեղեն է պատրաստում (օրինակ՝ գինու կարաս) և շաբաթվա վերջին հանում վաճառքի: Բրուտը իր գործը ձեռնակելիս կարող է գտնվել երկու վիճակներից մեկում. կարասը շաբաթվա վերջին վաճառվում է կամ չի վաճառվում: Եթե վաճառվում է, կասենք, որ բրուտը գտնվում է "լավ" կամ 1 վիճակում, իսկ հակառակ դեպքում՝ "վատ" կամ 2 վիճակում: Իր փորձից ելնելով՝ նա գիտե, որ եթե նախորդ շաբաթ գտնվել է լավ վիճակում, ապա p_{11} հավանականությամբ կարող է հայտնվել լավ, իսկ $p_{12} = 1 - p_{11}$ հավանականությամբ՝ վատ վիճակներում: p_{ij} վեկտորի թվակալները համընկնում են բրուտի վիճակների համարների հետ: Եթե նախորդ շաբաթ նա գտնվել է վատ վիճակում, ապա համապատասխան հավանականություններն են՝ p_{21} վատ վիճակից անցում լավ վիճակի և $p_{22} = 1 - p_{21}$ վատ վիճակից անցում վատ վիճակի:

Այսպիսով, բրուտին հայտնի է վիճակից վիճակ անցնելու հավանականությունների $P = (p_{ij})$ 2×2 մատրիցը:

Ենթադրենք, որ բրուտին հայտնի է նաև այն եկամուտը, որ կունենա վիճակից վիճակ անցնելիս: Այն տրվում է եկամուտների R 2×2 մատրիցով: Եկամուտների մատրիցի տարրը բացասական է, երբ չվաճառված կարասը չի վաճառվում (վատ վիճակից անցնում է վատ վիճակի):

P մատրիցով բրուտը կարողանում է որոշել, թե n շաբաթ հետո ինքն ինչ հավանականությամբ կհայտնվի լավ կամ վատ վիճակում, իսկ P և R մատրիցներով՝ գնահատել սպասվելիք եկամուտը:

Լավ վիճակում հայտնվելու հավանականությունը մեծացնելու նպատակով բրուտը հնարավորություն ունի դիմելու գովազդի: Բնական է, որ այդ դեպքում կփոխվեն եկամուտների և անցման հավանականությունների R և P մատրիցները: Ենթադրենք՝ դրանք են P' և R':

Այժմ բրուտը գտնվում է "բազմաքայլ" գործընթացով պայմանավորված որոշումների կայացման վիճակում. ամեն շաբաթվա սկզբին նա պետք է որոշի՝ գովազդ անե՞լ, թե՞ ոչ: Ակնհայտ է, որ գովազդի ծախսերը փոխում են նրա եկամուտները:

Բրուտի առջև ծառանում է մի նոր խնդիր. ամեն շաբաթվա սկզբին ինչպիսի՞ որոշում կայացնել, որպեսզի *n* շաբաթների համար ընտրի լավագույն վարքը, որի դեպքում սպասվելիք ընդհանուր եկամուտը կլինի առավելագույնը:

Այսպիսով, բրուտի գործելակերպը *n* շաբաթների համար նկարագրվում է վիճակից վիճակ անցումներով և դրանց հավանականություններով, որոնք կախված են գովազդի մասին որոշում կայացնելուց, որն էլ իր հերթին ազդում է սպասվելիք եկամտի ընդհանուր գումարի վրա:

Նկարագրված գործընթացը որոշումների կայացման՝ մարկովի գործընթացների դասին պատկանող խնդիր է, որի լուծման եղանակին կծանոթանաք ձեռնարկի 7-րդ գլխում:

4.4 Խաղերի տեսության խնդիրներ: Տնտեսական որոշ իրավիճակներում լավագույն լուծումները փնտրվում են *ներհակի* կամ անորոշության պայմաններում:

Ներհակի հետ անորոշության կապը պարզաբանելու համար դիտարկենք հետևյալ իրավիճակը: Երբ շուկա է հանվում ինչ-որ ապրանք, նրա մասին կարող են հայտնի լինել՝ ճշգրիտ պահանջարկը, պահանջարկի ծավալների արժեքների հնարավոր վիճակագրական բաշխումը և, վերջապես, պահանջարկի սահմանները՝ դրանց արժեքների բնութագրերի բացակայության պայմաններում: Երրորդ դեպքը որակվում է որպես անորոշություն. այն բնորոշ է, օրինակ, սեզոնային ապրանքներին, երբ պահանջարկը կախված է բնակլիմայական պայմաններից ("ներհակ բնության դեմ"): Այդպիսի անորոշությունը բնութագրվում է շուկայում մրցակցության պայմաններով (ոչ կատարյալ մրցակցություն, մրցակցություն քչերի միջև), որի արդյունքում բավարարվում է պահանջարկի անհայտ մի մասը:

Ներհակային իրավիճակներում խելամիտ որոշումների կայացման սկզբունքները խաղերի տեսության հիմնախնդիրներն են: Խաղերի տեսությունը հիմնադրել է Ջ.Ֆոն Նեյմանը: Խաղերի տեսությունում որոշումներ կայացնող անձերը խաղացողներն են, նպատակային ֆունկցիան՝ յուրաքանչյուր խաղացողի համար տարբեր է (երբեմն միմյանց հակադիր): Խաղացողներից յուրաքանչյուրի նպատակն իր շահումի ֆունկցիայի մաքսիմացումն է: 1960-ական թվականներից ուշադրություն դարձվեց խաղացողների մեծ զանգվածով խաղերին, որոնցում առանձին խաղացողը չէր կարող էապես ազդել ընդհանուր ելքի վրա: Խաղերի այդօրինակ մոդելները հատկանշական էին այնպիսի իրադրությունների համար, որոնցում կային մեծ թվով շատ "փոքր" անհատներ (սպառողները՝ տնտեսությունում, ընտրողները՝ քվեարկություններում):

Խաղերի տեսությունը, սահմանումներից մեկի համաձայն, մի քանի մարդկանց մասնակցությամբ ներհակային իրավիճակների հանգուցալուծման մոդել է, որում ներհակի հաղթահարման համար կիրառվում է երկու հիմնական եղանակ՝ համաձայնություն և հաշտություն:

Խաղային յուրաքանչյուր մոդել պետք է նկարագրի, թե ո՛վ և ինչպե՛ս է մասնակցում ներհակին, ով ինչ կերպ է շահագրգռված ներհակի այս կամ այն ելքում: Ենթադրվում է, որ խաղի մասնակիցը կարող է այլընտրանքների ինչ-որ հավաքածուից կատարել որոշակի ընտրություն:

Այսպիսով, *խաղը* դա բոլոր խաղացողների (անձեր կամ դրանց խմբերը, ձեռնարկություններ, երկրներ և այլն) հայտնի կանոնների համախումբ է, որոնցով սահմանվում է, թե ինչ կարող է անել յուրաքանչյուր խաղացող, և ինչպիսին են հետևանքները ու շահումները նրանց առանձին գործողությունների արդյունքում: Խաղում *քայլը* դա խաղի այն պահն է, երբ ամեն մի խաղացող պետք է հնարավոր տարբերակներից մեկի ընտրություն կատարի: Խաղացողի շահումը սովորաբար կախված է ոչ միայն իր կողմից կայացված ընտրությունից, այլ նաև մյուս խաղացողների ընտրությունից:

Խաղերի տեսության կենտրոնական հասկացությունն է վարվելակերպը, որը սահմանվում է որպես նախքան խաղի սկիզբը ձևակերպված կանոնների հավաքածու, որոնք որոշում են տարբերակի ընտրությունը հնարավոր առաջացող իրադրություններում:

Խաղային մոդելները դասակարգվում են ելնելով այս կամ այն հայտանիշներից՝ խաղացողների կամ վարվելակերպերի թվից, վճարային ֆունկցիայի հատկություններից և այլն:

Մինչ այժմ դիտարկված մոդելները (ՄԾ խնդիրները) կարելի է դիտարկել որպես մեկ խաղացողով խաղային մոդելներ: Եթե խաղացողների թիվը երեք և ավելի է, կարող են ստեղծվել երկու և ավելի խաղացողների դաշնախմբեր, որոնք հետապնդում են ընդհանուր նպատակ և համաձայնեցնում են իրենց վարվելակերպերը:

Գործնականում, շատ հաճախ, դաշնախումբը գնահատում է իրադրությունն այն շահումով, որը նա ստանում է այդ իրադրությունում: Դաշնախումբը երկու իրադրություններից նախընտրում է այն, որում մեծ է իր շահումը:

Խաղերի տեսությունը սահմանում է խաղացողների ու դաշնախմբերի լավագույն վարվելակերպերի սկզբունքներն այս կամ այն դասին պատկանող խաղային մոդելի շրջանակներում, քննարկում է այդ սկզբունքներով պայմանավորված իրավիճակների գոյությունը և դրանց փնտրման եղանակները: Խաղերի տեսության հակամարտ և ոչ հակամարտ որոշ խնդիրների հետ դուք կծանոթանաք ձեռնարկի վերջին գլխում:

Խաղերի տեսության կիրառությունները բազմազան են ռազմական գործում, տնտեսությունում (օրինակ, շուկայում ձեռնարկության վարվելակերպերի որոշման խնդիրներում, հավասարակշիռ վիճակների հասնելու խնդիրներում և այլն) տեխնիկական գիտություններում:

*

* *

Ամփոփման փոխարեն: Գործույթների հետազոտման և կառավարման գիտության խնդիրներին նվիրված այս ներածական գլխում ծանոթացանք տնտեսությունում "մոդելավորման և դրա շուրջ" հարցերի նեղ շրջանակի հետ: Քննարկվեցին տնտեսական իրավիճակների մոդելավորման որոշ սկզբունքներ ձևակերպվեցին մաթեմատիկական ծրագրման այս կամ այն դասին պատկանող որոշ մոդելներ, որոնց լավագույն լուծումների փնտրման արդյունավետ եղանակները կներկայացվեն գրքի հաջորդ բաժիններում:

Քննարկումից դուրս են մնացել գործույթների հետազոտման արդյունքների կիրառություններին վերաբերող շատ հարցեր, որոնց թվում են.

- ինչպե՞ս ծառայեցնել գործույթների հետազոտումը կառավարչին և գործարարությանը,
- ինչպե՞ս ղեկավարել գործույթների հետազոտման նախագծի մշակումը և նախագիծն իրականացնող ստորաբաժինը,
- ինչպիսի՞ն են գործույթների հետազոտման և կառավարման գիտության ձեռքբերումները և ո՞րն է ապագան:

Հուսով ենք, որ հարցերի այդ շրջանակը կլուսաբանվի գրքի երկրորդ մասում:

	Դասական տնտեսագիտություն	Տնտեսագիտության նոր դասական և այլ տեսություններ
Նպատակային ֆունկցիա	Սպառողի օգտակարության ֆունկցիան՝ կախված բոլոր ապրանքների և ծառայությունների սպառման մակարդակներից	Օգտակարությունը՝ կախված ինչպես ապագա, այնպես էլ ընթացիկ սպառումից, ժամանցից և այլն
Նպատակին հասնելու միջոցներ (գործիքներ)	Բոլոր ապրանքների և ծառայությունների սպառման մակարդակները	Խնայողությունները Մասնագիտության ընտրությունը
Սահմանափա-կումներ	Ֆինանսական. ապրանքների և ծառայությունների ընդհանուր ծախսերը չեն գերազանցում ընդհանուր եկամուտը, ապրանքների և ծառայությունների գները և անձնական եկամտի մեծությունը տրված են	Տրված են առաջարկի կորերը, այլ ոչ գները (մենագնում)
Նորմատիվ կանոններ	Ապրանքների և ծառայությունների միջև անձնական եկամուտը բաշխեք այնպես, որ սահմանային օգտակարության հարաբերությունը գնին լինի նույնը՝ բոլոր ապրանքների և ծառայությունների համար	Խնայեցե՛ք, կախված ընթացիկ և ապագայում սպասվող եկամուտներից, ինչպես նաև նույն ժամանակահատված-ներում սպառումից՝ հաշվի առնելով գների դինամիկան

աղյուսակ 1.2.

Ձեռնարկությունը որպես ռացիոնալ
տնտեսական գործունեության հաստատություն

	Դասական տնտեսագիտություն	Տնտեսագիտության նոր դասական և այլ տեսություններ
Նպատակային ֆունկցիա	Ձեռնարկության շահույթի ֆունկցիան՝ կախված արտադրանքի թողարկումից և գործոնային ծախքերից	Այն ձեռնարկություններում, որոնց կառավարիչները միևնույն ժամանակ սեփականատերերը չեն, նպատակային ֆունկցիան կարող է լինել իրացման ծավալը
Նպատակին հասնելու միջոցներ (գործիքներ)	Արտադրանքի թողարկման և գործոնային ծախքերի մակարդակներ	Գովազդային գործունեության մակարդակը Ապրանքանյութական պաշարները
Սահմանափակումներ	Տեխնոլոգիական. արտադրանքի թողարկումը կախված է գործոնային ծախքերից (արտադրական ֆունկցիա)	Տրված է պահանջարկի կորը, այլ ոչ թե թողարկվող արտադրանքի գները (մենավաճառ) Տրված են առաջարկի կորերը, այլ ոչ թե գործոնների ծախսերի գները (մենագնում) Շահույթը չի կարող իջնել որոշակի մակարդակից Այլ ֆիրմաների գործողությունները (խմբաշնորհ)
Նորմատիվ կանոններ	Սահմանային եկամուտները հավասարեցրեք բոլոր ծախքերի գծով ձեռք բերված գործոնների գներին	Մրցակցության համար օգտագործեք ոչ միայն գները, այլև այլ եղանակներ, օրինակ՝ գովազդը. Ապրանքանյութական պաշարներն այնպես օգտագործեք, որ, չնայած վաճառքի տատանումներին, ապահովվի արտադրության կայունությունը

աղյուսակ 1.3

II. ՆԱԽԱԳԻՏԵԼԻՔ

*Դեպի մոլորություն տանում են
հազարավոր ուղիներ, իսկ դեպի
ճշմարտություն՝ միայն մեկը:*
Ժ.Ռուսո

1. Գծային հանրահաշիվ: Ենթադրում ենք, որ ընթերցողը ծանոթ է գծային հանրահաշվի դասընթացի հիմնական գաղափարներին և փաստերին (գծային և էվկլիդյան տարածություններ, վեկտորների համախմբի գծայնորեն կախվածություն և անկախություն, տարածության հենք, վեկտորների սկալյար արտադրյալ, երկու վեկտորների կազմած անկյուն, ուղղահայաց վեկտորներ, մատրիցների արտադրյալ, գծային հավասարումների համակարգ, նրա լուծման գոյությունը և եղանակները):

E^n-ով կնշանակենք իրական թվերի դաշտի վրա սահմանված n-չափանի էվկլիդյան տարածությունը:

Ենթադրենք $\bar{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in E^n$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in E^n$:

Նրանց սկալյար արտադրյալը նշանակենք $\bar{a}\bar{b}$ և հիշենք, որ $\bar{a}\bar{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n$:

$\|\bar{a}\|$-ով կնշանակենք $\bar{a}$ վեկտորի երկարությունը՝ $\|\bar{a}\|=\sqrt{\bar{a}\bar{a}}$:

Ենթադրենք A-ն $m\times n$ մատրից է. $A=(a_{ij})$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$: $\bar{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$-ը կանվանենք $A=(a_{ij})$ մատրիցի i-րդ տողի վեկտոր, իսկ $\bar{a}^j=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})$-ն՝ j-րդ սյան վեկտոր:

Վերհիշենք A $m\times n$ մատրիցի և $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ վեկտորի արտադրյալի՝ $A\cdot\bar{x}$ վեկտորի սահմանումը.

$$A\cdot\bar{x}=(\bar{a}_1\bar{x}.\bar{a}_2\bar{x},\ldots,\bar{a}_m\bar{x})=x_1\bar{a}^1+x_2\bar{a}^2+\ldots+x_n\bar{a}^n,$$

ինչպես նաև $\bar{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ վեկտորի և A մատրիցի արտադրյալի՝ $\bar{y}\cdot A$ վեկտորի սահմանումը.

$$\bar{y}\cdot A=(\bar{a}^1\bar{y},\bar{a}^2\bar{y},\ldots,\bar{a}^n\bar{y})=y_1\bar{a}_1+y_2\bar{a}_2+\ldots+y_m\bar{a}_m:$$

Նշենք, որ $(\bar{y}\cdot A)\bar{x}=\bar{y}(A\cdot\bar{x})=\bar{y}A\bar{x}$:

Դիցուք $\bar{x}\in E^n$: Կասենք, որ $\bar{x}$ վեկտորը

- դրական է (կգրենք $\bar{x}>0$), եթե նրա բոլոր բաղադրիչները դրական թվեր են,
- ոչ բացասական է (կգրենք $\bar{x}\geq 0$), եթե նրա բոլոր բաղադրիչները ոչ բացասական թվեր են:

Ենթադրենք $\bar{x}^1,\bar{x}^2\in E^n$: Կասենք, որ $\bar{x}^1$ վեկտորը մեծ է $\bar{x}^2$ վեկտորից և կգրենք $\bar{x}^1>\bar{x}^2$, եթե $\bar{x}^1-\bar{x}^2>0$:

Նման եղանակով կսահմանվի $\bar{x}^1\geq\bar{x}^2$ անհավասարությունը:

Նշված սահմանումները հնարավորություն են տալիս ամփոփ տեսքով գրելու գծային հավասարումների կամ անհավասարումների համակարգերը: Այսպես, օրինակ, գծային անհավասարումների

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq\beta_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leq\beta_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq\beta_m\end{cases}$$

համակարգը կարելի է գրել $\bar{a}_i\bar{x}\leq\beta_i$, $i=1,2,\ldots,m$, կամ $A\bar{x}\leq\bar{b}$, կամ $x_1\bar{a}^1+x_2\bar{a}^2+\ldots+x_n\bar{a}_n\leq\bar{b}$ տեսքերով, որտեղ $A=(a_{ij})$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$:

Սահմանում: $M\subseteq R^n$ բազմությունն անվանենք ուռուցիկ, եթե ցանկացած $\bar{x},\bar{y}\in M$ կետերի և $0\leq\lambda\leq 1$ թվի համար $\lambda\bar{x}+(1-\lambda)\bar{y}\in M$, կամ որ նույնն է, եթե բազմության ցանկացած $\bar{x}$ և $\bar{y}$ կետերի հետ միասին բազմությանն են պատկանում նաև այդ կետերը միացնող հատվածի բոլոր կետերը:

Թվարկենք այս սահմանումից բխող մի քանի պնդումներ.

- երկու ուռուցիկ բազմությունների հատումը ուռուցիկ է,
- գծային հավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունն ուռուցիկ է,
- գծային անհավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունն ուռուցիկ է:

Ենթադրենք $\bar{p}\in E^n$, իսկ α-ն իրական թիվ է. $\bar{p}\cdot\bar{x}=\alpha$ հավասարման լուծումների բազմությունն անվանենք հիպերհարթություն:

Ակնհայտ է, որ հիպերհարթությունը ուռուցիկ բազմություններ է:

Թեորեմ 1 (անջատվող հիպերհարթության մասին): Եթե $M \subseteq E^n$ բազմությունը ուռուցիկ, փակ բազմություն է և $\bar{b} \notin M$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\bar{p} \cdot \bar{x} = \alpha$ հիպերհարթություն, որ $\bar{p} \cdot \bar{b} < \alpha$ և $\forall(\bar{x} \in M)$ $\bar{p} \cdot \bar{x} \geq \alpha$:

↦ Դիցուք՝ $\bar{x}^0$-ն M բազմության որևէ կետ է: Սահմանենք $S(\bar{x}^0) = \{\bar{x} | \bar{x} \in S, \|\bar{x} - \bar{b}\| \leq \|\bar{x}^0 - \bar{b}\|\}$, բազմությունը և դիտարկենք M բազմության վրա որոշված $h(\bar{x}) = \|\bar{b} - \bar{x}\| = (\bar{b} - \bar{x})(\bar{b} - \bar{x})$ ֆունկցիան:

Քանի որ $S(\bar{x}^0)$-ն փակ, սահմանափակ բազմություն է, իսկ $h(\bar{x})$-ը՝ այդ բազմության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա, ապա գոյություն ունի $\bar{c} \in S(\bar{x}^0)$ այնպես, որ $\forall(x \in S(x_0))$ $(h(\bar{c}) \leq h(\bar{x}))$:

Մյուս կողմից, եթե $\bar{x} \in M \setminus S(x^0)$, ապա $h(\bar{x}) \geq h(\bar{x}^0) \geq h(\bar{c})$, այսինքն $h(\bar{c})$-ն $h(\bar{x})$ ֆունկցիայի նվազագույն արժեքն է M բազմության վրա: Այսպիսով, M բազմության ցանկացած $\bar{x}$ վեկտորի համար $(\bar{b} - \bar{x})(\bar{b} - \bar{x}) \geq (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c})$: Քանի որ $\bar{c} \in M$, իսկ M-ը ուռուցիկ բազմություն է, ապա M բազմության ցանկացած $\bar{x}$ վեկտորի և ցանկացած $0 \leq \lambda \leq 1$ թվի համար $\lambda\bar{x} + (1 - \lambda)\bar{c} \in M$, և, հետևաբար,

$$(b - \lambda\bar{x} - (1 - \lambda)\bar{c})(b - \lambda\bar{x} - (1 - \lambda)c) \geq (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}),$$

կամ որ նույնն է,

$$(\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) + 2\lambda(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{x}) + \lambda^2)(\bar{c} - \bar{x})(\bar{c} - \bar{x}) \geq (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}):$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք $(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{x}) \geq 0$:

Եթե ընդունենք $\bar{p} = \bar{c} - \bar{b}$ և $\alpha = \bar{p}\bar{c}$, ապա ստացված անհավասարությունից անմիջապես հետևում է, որ $\forall(\bar{x} \in M)$, $\bar{p}\bar{x} \geq \alpha$: Մյուս կողմից, քանի որ $\bar{p} \neq \bar{0}$, ունենք $\bar{p}\bar{b} - \alpha = \bar{p}\bar{b} - \bar{p}\bar{c} = -\bar{p}(\bar{c} - \bar{b}) = -\bar{p}\bar{p} < 0$: ↲

Նկատենք նաև, որ M բազմության $\bar{c}$ կետը բավարարում է $\bar{p}\bar{x} = \alpha$ անջատող հիպերհարթության հավասարմանը և, հետևաբար, պատկանում է այդ հիպերհարթությանը:

Դիտողություն: Անջատող հիպերհարթության մասին թեորեմը մենք կօգտագործենք նաև հետևյալ ձևակերպումով.

Թեորեմ 1': Եթե $M \in E^n$ բազմությունը ուռուցիկ փակ բազմություն է և $b \notin M$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\overline{px} = a$ հիպերհարթություն, որ $\overline{pb} \le a$ և $\forall(\bar{x} \in M)(\overline{px} > a)$:

Դիցուք՝ A-ն $m \times n$ մատրից է, $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^n$-ը նրա սյուն վեկտորներն են, իսկ $M = \{y | y = \alpha_1 a^1 + \ldots + \alpha_n a^n; \alpha_1 \ge 0, \ldots, \alpha_n \ge 0\}$ բազմությունը այդ սյուն վեկտորների, բոլոր հնարավոր ոչ բացասական գործակիցներով գծային համակցությունների ենթաբազմություն: Հեշտ է ստուգել, որ M-ը ուռուցիկ, փակ բազմություն է:

Թեորեմ 2 (Ֆարկաշ): Կա՛մ $A\bar{x} = \bar{b}$ հավասարումների համակարգն ունի ոչ բացասական լուծում, կա՛մ նրա $\bar{y}A \ge \bar{0}$, $b\bar{y} < 0$ անհավասարումների համակարգն ունի լուծում:

$\mapsto$ Նախ ցույց տանք, որ այդ երկու համակարգերը միաժամանակ լուծում ունենալ չեն կարող: Իրոք, եթե $\bar{x}^0 \ge 0$, $A\bar{x} = \bar{b}$ իսկ $\bar{y}^0$-ն $\bar{y}A \ge \bar{0}$, $\bar{y}b < 0$ անհավասարումների համակարգի լուծումներ են, ապա $(\bar{y}^0 A)\bar{x}^0 \ge 0$, որը հակասում է $\bar{y}^0(A\bar{x}^0) = \bar{y}^0 b < 0$ պայմանին:

Ենթադրենք, որ $A\bar{x} = \bar{b}$, կամ, որ նույնն է, $x_1\bar{a}^1 + \ldots + x_n\bar{a}^n = \bar{b}$ հավասարումների համակարգը ոչ բացասական լուծում չունի, և ցույց տանք, որ այդ դեպքում լուծում կունենա $\bar{y}A \ge 0$, $\bar{y}\bar{b} < 0$, կամ, որ նույնն է, $\overline{ya}^j \ge 0$, $\bar{y}\bar{b} < 0$, $j = 1, \ldots, n$ անհավասարումների համակարգը: Քանի որ, ըստ ենթադրության, $\bar{b}$ վեկտորը հնարավոր չէ ներկայացնել $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n$ վեկտորների ոչ բացասական գործակիցներով գծային համակցության միջոցով, ուստի $\bar{b}$-ն չի պատկանում վերը սահմանած փակ ուռուցիկ բազմությանը: Բայց այդ դեպքում, թեորեմ 1-ի համաձայն, գոյություն կունենա $\overline{py} = \alpha$ անջատող հիպերհարթություն, ինչպես նաև M բազմության պատկանող այնպիսի $\bar{c}$ կետ, որ $\forall(\bar{y} \in M)$ $\overline{py} \ge \alpha$, $\overline{pb} < \alpha$ և $\overline{pc} = \alpha$:

Քանի որ ցանկացած $\lambda \geq 0$ թվի համար $\lambda \cdot \bar{c} \in M(A)$, ապա $\bar{p}(\lambda\bar{c}) \geq \alpha$: Սակայն $p(\lambda\bar{c}) = \lambda \cdot \bar{p}\bar{c} = \lambda\alpha$, այսինքն, $\lambda\alpha \geq \alpha$, ուստի $\alpha = 0$ և քանի որ $\bar{a}^j \in M$, ապա $p\bar{a}^j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$: ⌟

2. *Մաթեմատիկական անալիզ*: Ենթադրենք, որ ընթերցողը ծանոթ է մեկ կամ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների անընդհատության, աճանցյալի, դիֆերենցիալի գաղափարներին, դիֆերենցելի ֆունկցիաների հատկություններին, Թեյլորի բանաձևին, անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմին:

Դիցուք՝ $f(\bar{x})$ ֆունկցիան որոշված է E^n-ում, իսկ $S \subseteq E^n$:

Սահմանում: Կասենք $\bar{x}^*$-ը f ֆունկցիայի (տեղային) մինիմումի կետ է, եթե $\exists u(\bar{x}^*)\forall(\bar{x} \in u(\bar{x}^*))(f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x}))$, որտեղ $u(\bar{x}^*)$-ը $\bar{x}^*$ կետի շրջակայք է: Երբ $(f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x}))$ անհավասարությունը բավարարում է ցանկացած $\bar{x} \in E^n$ կետի համար $\bar{x}^*$-ը կանվանենք f ֆունկցիայի բացարձակ մինիմումի կետ:

Սահմանում: Կասենք $\bar{x}^*$-ը f ֆունկցիայի պայմանական (S-ի նկատմամբ) (տեղային) մինիմումի կետ է, եթե $\exists u(\bar{x}^*)\forall(\bar{x} \in u(\bar{x}^*) \cap S)(f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x}))$: Եթե $f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x})$ անհավասարությունը բավարարվում է ցանկացած $\bar{x} \in S$ կետի համար, $\bar{x}^*$ կանվանենք համապարփակ մինիմումի կետ (S-ի նկատմամբ):

- Եթե $(\leq)$ նշանը փոխարինենք $(\geq)$ նշանով, ապա կստանանք համապատասխան սահմանումները "մաքսիմումի" վերաբերյալ:
- Եթե $(\leq)$ կամ $(\geq)$ նշանը փոխարինենք $(<)$ կամ $(>)$ նշանով, ապա կստանանք "խիստ մինիմումի" կամ "խիստ մաքսիմումի" հասկացությունները:
- Եթե ընթացիկ շարադրանքից հասկանալի է, թե ինչպիսի մինիմումի (մաքսիմումի) մասին է խոսքը, ապա "պայմանական" բառը չենք օգտագործի:
- Եթե կարևոր չէ նշել, որ $\bar{x}^*$ մաքսիմումի թե մինիմումի կետ է, կօգտագործենք "էքստրեմում" հասկացությունը:

Ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիա: Ինչպես գիտենք $S \in E^n$ բազմությունը ուռուցիկ է, եթե $\forall(\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in S)$ $\forall\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$ $(\bar{x} = \alpha\bar{x}^1 + (1-\alpha)\bar{x}^2 \in S)$:

Սահմանում: S ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $f(\bar{x})$ ֆունկցիան կանվանենք ուռուցիկ (գոգավոր), եթե $(\forall\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in S)$ $\forall\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$

$$\alpha f(\bar{x}^1) + (1-\alpha) f(\bar{x}^2) \ge f(\alpha\bar{x}^1 + (1-\alpha)\bar{x}^2)$$

$$(\alpha f(\bar{x}^1) + (1-\alpha) f(\bar{x}^2) \le f(\alpha\bar{x}^1 + (1-\alpha)\bar{x}^2)):$$

Սահմանում: Դիֆերենցելի $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներից կազմված վեկտորը կանվանենք $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի գրադիենտ՝

$$\mathbf{grad} f(x) = \nabla f(\bar{x}) = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \ldots, \partial f / \partial x_n):$$

Ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիաների վերաբերյալ ճշմարիտ են հետևյալ թեորեմները (ապացույցը, տե՛ս, [1]):

Թեորեմ 3: $\{(\bar{x}, \beta) \in R^{n+1} | f(\bar{x}) \le \beta\}$ $(\{(\bar{x}, \beta) \in R^{n+1} | f(\bar{x}) \ge \beta\})$ վեկտորների բազմությունն ուռուցիկ է:

Թեորեմ 4: Ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիաների գումարն ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիա է:

Թեորեմ 5: Որպեսզի S ուռուցիկ բազմության վրա որոշված դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ (գոգավոր), անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$f(\bar{x}) \ge f(\bar{x}^0) + \nabla f(\bar{x}^0)(\bar{x} - \bar{x}^0)$$

$$(f(\bar{x}) \le f(\bar{x}^0) + \nabla f(\bar{x}^0)(\bar{x} - \bar{x}^0)):$$

Թեորեմ 6: S ուռուցիկ բազմության վրա որոշված $f(\bar{x})$ ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիայի համար տեղային և համապարփակ էքստրեմումի կետերը համընկնում են:

Քառակուսային ֆունկցիա է կոչվում $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականներից ցանկացած երկրորդ կարգի համասեռ բազմանդամ՝ $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$:

Եթե վերցնենք $c_{ii} = q_{ii}$, $c_{ij} = (q_{ij} + q_{ji})/2$, $i \neq j$, ապա $Q(\bar{x}) = \bar{x}C\bar{x}$, որտեղ $C = (c_{ij})$ սիմետրիկ $n \times n$ մատրից է:

Սահմանում: Կասենք՝ Q քառակուսային ֆունկցիան

- դրական որոշված է, եթե $\forall x$ $(\bar{x} \neq 0)$ $\bar{x}C\bar{x} > 0$,
- բացասական որոշված է, եթե $\forall x$ $(\bar{x} \neq 0)$ $\bar{x}C\bar{x} < 0$,
- կիսադրական որոշված է, եթե $\forall \bar{x}$ $\bar{x}C\bar{x} \geq 0$,
- կիսաբացասական որոշված է, եթե $\forall x$ $\bar{x}C\bar{x} \leq 0$:

Թեորեմ 7: Որպեսզի քառակուսային ֆունկցիան լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի կիսադրական որոշված:

Հետագայում դրական (բացասական) որոշված քառակուսային ձևի մատրիցը կանվանենք դրական (բացասական) որոշված:

Թեորեմ 8: Որպեսզի C մատրիցը լինի դրական որոշված, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա բոլոր գլխավոր մինորները լինեն դրական (Սիլվեստրի պայմանը):

Թեորեմ 9: Որպեսզի C մատրիցը լինի կիսաբացասական որոշված, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գլխավոր մինորները լինեն նշանափոխ (բացասական, դրական և այլն):

Էքստրեմումի կետի որոշ պայմաններ:

Մեկ փոփոխականից ֆունկցիայի համար ճշմարիտ է.

Թեորեմ 10: Եթե x_0 ստացիոնար կետում $f(x)$ ֆունկցիայի առաջին $(n-1)$ կարգի ածանցյալները զրո են, իսկ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ապա $x = x_0$-ն $f(x)$-ի համար

- շրջման կետ է, եթե n-ը կենտ է
- էքստրեմումի կետ է, եթե n-ը զույգ է, ընդ որում մաքսիմումի, եթե $f^{(n)}(x_0) < 0$ և մինիմում, եթե $f^{(n)}(x_0) > 0$:

Դիցուք՝ $f(\bar{x})$-ը E^n-ում որոշված այնպիսի ֆունկցիա է, որ նրա առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները $\bar{x} \in E^n$ կետում անընդհատ են:

Թեորեմ 11: Եթե $\bar{x}^*$-ը էքստրեմումի կետ է, ապա $\nabla f(x^*) = 0$:

Տեղին է հիշեցնել, որ կետերը, որոնք բավարարում են $\nabla f(\bar{x}) = 0$ պայմանը, կոչվում են ստացիոնար:

Թեորեմ 12: x^* ստացիոնար կետը f ֆունկցիայի մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է, եթե այդ կետում Հեսսի՝ $H(\bar{x})=(f''_{x_i x_j})$ մատրիցը համապատասխանաբար դրական (բացասական) որոշված է:

$\mapsto$ $f(\bar{x})$ ֆունկցիան $\bar{x}^*$ կետի շրջակայքում վերլուծենք Թեյլորի բանաձևի մնացորդային $0<\theta<1$ անդամով:

$$f(\bar{x}^*+\Delta\bar{x})-f(\bar{x}^*)=\nabla f(\bar{x}^*)\Delta\bar{x}+\frac{1}{2}\Delta\bar{x}H(\bar{x}^*+\theta\Delta\bar{x})\Delta\bar{x}:$$

Դիցուք՝ $\bar{x}^*$-ը մաքսիմումի կետ է, $f(\bar{x}^*+\Delta x)<f(x^*)$ բոլոր $\Delta\bar{x}\neq 0$-ի համար, հետևաբար $\frac{1}{2}\Delta\bar{x}H(x^*+\theta\Delta\bar{x})\Delta\bar{x}<0$ և H (Հեսսեի) անընդհատությունից հետևում է, որ $H(\bar{x}^*)<0$, քանի որ $\Delta\bar{x}^T H(\bar{x})\Delta\bar{x}$-ը քառակուսային ձև է, ապա $\Delta\bar{x}^T H(\bar{x})\Delta\bar{x}<0$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $H(\bar{x}^*)$-ը բացասական որոշված մատրից է: ┘

Այսպիսով, որպեսզի $\bar{x}^*$ ստացիոնար կետում լինի մաքսիմումի կետ, բավարար է, որ Հեսսեի մատրիցը այդ կետում լինի բացասական որոշված: Հիշեցնենք, որ H մատրիցը դրական է որոշված, եթե նրա բոլոր գլխավոր մինորները (գլխավոր անկյունագծով դասավորված) դրական են, և բացասական է որոշված, եթե անկյունագծային մինորների նշանները համընկնում են $(-1)^k$, $k=1,2,\ldots,m$ նշանի հետ:

1.3 Նյուտոնի եղանակը: $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի համար $\nabla f(\bar{x})=0$ հավասարման լուծումը ընդհանրապես հանգեցնում է ոչ գծային հավասարումների համակարգի լուծմանը. կապված է որոշակի դժվարությունների հետ: Այդ պատճառով շատ կարևոր է այդպիսի հավասարումների լուծումները գտնելու ալգորիթմ ունենալը: Ստորև մենք կդիտարկենք այդպիսի ալգորիթմներից մեկը՝ Նյուտոնի ալգորիթմը:

Դիցուք՝ ունենք ոչ գծային հավասարումների համակարգ.

$$f_i(\bar{x})=0\,,\ i=1,2,\ldots,n$$

և $\bar{x}^k$-ն տրված կետ է: Օգտվելով Թեյլորի բանաձևից՝ մեր համակարգը կարելի է ներկայացնել հետևյալ մոտավոր տեսքով.

$$f_i(\bar{x}^k)+\nabla f_i(\bar{x}^k)(\bar{x}-\bar{x}^k)=0\,,\ i=1,2,\ldots,n\,,$$

կամ մատրիցային տեսքով

$$A_k + B_k(\bar{x} - \bar{x}^k) = 0,$$

որտեղ B_k -ն Յակոբիի մատրիցն է,

$$B_k = \begin{Vmatrix} \nabla f_1(\bar{x}^k) \\ \nabla f_2(\bar{x}^k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \nabla f_m(\bar{x}^k) \end{Vmatrix}, \text{ իսկ } A_k = (f_1(\bar{x}^k), \ldots, f_m(\bar{x}^k)):$$

Եթե $\nabla f_i(\bar{x})$, $i = 1,2,\ldots,n$ գծորեն անկախ են, ապա B_k մատրիցը չվերածվող է, և վերջին հավասարումից հետևում է.

$$\bar{x} = \bar{x}_k - \bar{B}_k^{-1} A_k \qquad (*)$$

Այսպիսով, $f_i(x) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ հավասարումների համակարգի մոտավոր լուծում գտնելու համար առաջին քայլում վերցնում ենք $\bar{x} = \bar{x}_0$ սկզբնական արժեքը, իսկ այնուհետև k -ի 0, 1, 2, ... արժեքների համար, եթե հայտնի է $\bar{x}^k$ -ն, ապա (*)-ի միջոցով ստանում ենք $\bar{x}^{k+1}$ -ը: Գործընթացն ավարտվում է, երբ երկու հաջորդական արժեքների տարբերության բացարձակ արժեքը՝ $\left|x^m - x^{m-1}\right|$ փոքր է պահանջվող ճշտությունից: Այդ դեպքում $\bar{x}^m$ -ը մեր ոչ գծային հավասարումների մոտավոր լուծումն է:

3. *Դիսկրետ մաթեմատիկա:* Դիցուք՝ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ -ն որևէ վերջավոր բազմություն է: (u,v) պայմանանշանը $u,v \in V$ կանվանենք V բազմության տարրերից *կարգավոր զույգ*: Երկու (u,v) և (u',v') կարգավոր զույգերը հավասար կհամարենք միմիայն $u = u'$ և $v = v'$ դեպքում:

V^2 -ով նշանակենք V բազմության տարրերից բոլոր կարգավոր զույգերի բազմությունը՝ $V^2 = \{(u,v) / u \in V \text{ և } v \in V\}$:

Դիտարկենք $E \subseteq V^2$ բազմությունը, որը բավարարում է $\forall(u \in V)((u,u) \notin E)$ պայմանին:

(V,E) զույգը կանվանենք կողմնորոշված գրաֆ կամ օրգրաֆ և կնշանակենք $\vec{G} = (V,E)$: V բազմության տարրերը կանվանենք օրգրաֆի գագաթներ, E բազմության տարրերը՝ աղեղներ:

Այսպիսով, $\vec{G}$ օրգրաֆը որոշվում է գագաթների $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ և աղեղների $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ բազմություններով: Յուրաքանչյուր $e\in E$ աղեղ ունի $e=(u,v)$ տեսքը, որտեղ $u,v\in V$: u գագաթը կանվանենք (u,v) աղեղի սկիզբ, v գագաթը՝ աղեղի ծայր:

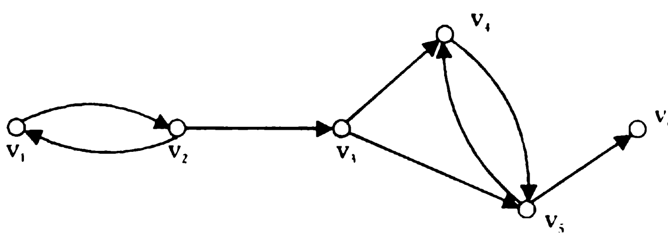
Հետագայում $\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆը հարթության վրա հաճախ պատկերելու ենք հետևյալ կերպ. գագաթներից յուրաքանչյուրին համապատասխանեցնելու ենք հարթության կետ (տարբեր գագաթներին՝ տարբեր կետեր), $e=(u,v)$ աղեղը պատկերելու ենք u և v գագաթներին համապատասխանող կետերը միացնող, անընդհատ գծի միջոցով, որը չի անցնում որևէ այլ գագաթի համապատասխանող կետով, սլաքով նշելով v ծայրակետը:

Այսպես, օրինակ՝ $\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆը, որտեղ

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_1),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_4,v_5),(v_5,v_4),(v_5,v_6)\}$

կարելի է պատկերել հետևյալ ձևով (նկ. 2.1):



նկ. 2.1

$\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆի գագաթների $v_1,v_2,v_3,\dots,v_{k-1},v_k$ հաջորդականությունն անվանենք v_1-ից v_k ուղի, եթե $(v_1,v_2),(v_2,v_3),\dots,(v_{k-1},v_k)$-ն $\vec{G}$ օրգրաֆի միմյանցից տարբեր աղեղներ են:

Կասենք, որ v_1-ից v_k ուղին *պարզ ուղի* է, եթե նրանում գագաթները չեն կրկնվում (բացի, թերևս, $v_1=v_k$ դեպքից): v_1-ից v_k ուղին կանվանենք փակ ուղի կամ *օրցիկլ*, եթե $v_1=v_k$: Այսպես, օրինակ՝ վերը պատկերված գրաֆում $v_2,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_4$

հաջորդականությունը v_2-ից v_4 ուղի է, իսկ v_2, v_3, v_5, v_4 հաջորդականությունը՝ v_2-ից v_4 պարզ ուղի:

$\vec{G} = (V, E)$ օրգրաֆի գագաթների $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ հաջորդականությունը կանվանենք v_1-ից v_k ճանապարհ, եթե

$$\forall(1 \le i \le k-1)((v_i, v_{i+1}) \in E \text{ կամ } (v_{i+1}, v_i) \in E)$$

և ճանապարհը կազմող աղեղները միմյանցից տարբեր են: $(v_i, v_{i+1}) \in E$ դեպքում աղեղը կանվանենք ճանապարհի ուղիղ աղեղ, իսկ $(v_{i+1}, v_i) \in E$ դեպքում՝ հակառակ աղեղ:

Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր ուղի ճանապարհ է, բայց հակառակը ճիշտ չէ:

Կասենք, որ v_i-ից v_k ճանապարհը *պարզ ճանապարհ է*, եթե նրանում գագաթները չեն կրկնվում (բացի, թերևս, $v_1 = v_k$ դեպքից):

v_1-ից v_k ճանապարհն անվանենք փակ ճանապարհ կամ *ցիկլ*, եթե $v_1 = v_k$: Այսպես, օրինակ՝ վերը պատկերված օրգրաֆում $v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_2$ հաջորդականությունը v_6-ից v_2 ճանապարհ է, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2 հաջորդականությունը՝ v_6-ից v_2 պարզ ճանապարհ, իսկ v_3, v_5, v_4, v_3 հաջորդականությունը՝ ցիկլ: Ընդունում ենք, որ մեկ տարր պարունակող u հաջորդականությունը միաժամանակ u-ից u ուղի է և u-ից u ճանապարհ:

Հեշտ է ստուգել, որ եթե $\overline{G} = (V, E)$ օրգրաֆում

- գոյություն ունի u-ից v ուղի, ապա գոյություն կունենա նաև u-ից v պարզ ուղի,
- գոյություն ունի u-ից v ճանապարհ, ապա գոյություն կունենա նաև u-ից v պարզ ճանապարհ:

Կասենք, որ $\overline{G} = (V, X)$ օրգրաֆը *կապակցված է*, եթե նրա ցանկացած u, v գագաթների համար գոյություն ունի u-ից v ճանապարհ:

Հետագայում, որպես կանոն, դիտարկելու ենք միայն կապակցված օրգրաֆներ և անընդհատ չենք կրկնի կապակցված բառը:

Մենք կդիտարկենք նաև չկողմնորոշված գրաֆներ, որոնք սահմանվում են որպես (V, X) զույգ, որտեղ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$-ն գագաթների բազմությունն է, իսկ $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_q\}$-ը կողերի բազմությունը: Յուրաքանչյուր $x\in X$ կող երկու տարրանոց ենթաբազմություն է V-ից՝ ունի $x=\{u,v\}$ տեսքը $u\in V$, $v\in V$ և $u\neq v$: Դասավորությունը նշանակություն չունի. $\{u,v\}$ կամ $\{v,u\}$ գրելաձևերից յուրաքանչյուրը կօգտագործենք նույն կողի համար: Եթե $\{u,v\}$-ն կող է, ապա կասենք, որ u և v գագաթները հարևան են:

Հետագայում չկողմնորոշված գրաֆ բառակապակցության փոխարեն կօգտագործենք *գրաֆ* բառը և այն կնշանակենք $G=(V,X)$ պայմանանշանով:

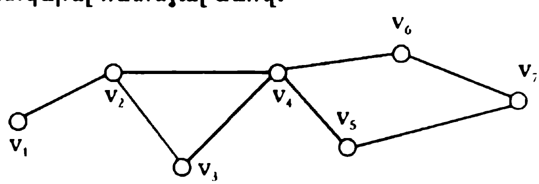
$G=(V,X)$ գրաֆը հարթության վրա կպատկերենք՝ գագաթներից յուրաքանչյուրին համապատասխանեցնելով կետ (տարբեր գագաթներին տարբեր կետեր), իսկ ամեն մի $x=\{u,v\}$ կողին՝ u և v գագաթները միացնող և մյուս գագաթներին համապատասխանող կետերով չանցնող անընդհատ գիծ:

Այսպես, օրինակ, $G=(V,X)$ գրաֆը, որտեղ

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$

$X=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_2,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_4,v_6\},\{v_6,v_7\},\{v_5,v_7\}\}$

կարելի է պատկերել հետևյալ ձևով.



նկ. 2.2

$G=(V,X)$ գրաֆի գագաթների $v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{k-1},v_k$ հաջորդականությունը կանվանենք v_1-ից v_k *ճանապարհ*, եթե $\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\}$-ն G գրաֆի միմյանցից տարբեր կողեր են:

Կասենք, որ v_1-ից v_k ճանապարհը *պարզ ճանապարհ* է, եթե նրանում գագաթները չեն կրկնվում (բացի, թերևս, $v_1=v_k$ դեպքից):

v_1-ից v_k ճանապարհը կանվանենք փակ ճանապարհ, կամ *ցիկլ*, եթե $v_1=v_k$:

$v_5, v_4, v_3, v_2, v_4, v_6, v_7$ հաջորդականությունը v_5-ից v_7 ճանապարհ է, v_5, v_4, v_6, v_7 հաջորդականությունը՝ v_5-ից v_7 պարզ ճանապարհ, իսկ v_5, v_4, v_6, v_7, v_5-ը՝ ցիկլ:

$G = (V, X)$ գրաֆը կանվանենք *կապակցված*, եթե նրա ցանկացած u և v գագաթների համար գոյություն ունի u-ից v ճանապարհ:

III. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԵՎ ԵՐԿԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամեն ինչ լավին է ձգտում
ազատ մրցակցությամբ այս գծային
աշխարհներից լավագույնում:
Դ. Գեյլ

§ 1. Գծային ծրագրման խնդիր

Ենթադրենք՝ տրված են $A = (a_{ij})$ $m \times n$ մատրիցը, m-չափանի $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ և n-չափանի $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ վեկտորները: $(A, \bar{b}, \bar{c})$ եռյակի համար ձևակերպենք երկու խնդիր:

Սովորական տեսքի գծային ծրագրման (ԳԾ) մաքսիմացման խնդիր: Գտնել n-չափանի $\bar{x}$ ոչ բացասական վեկտոր, որը բավարարի $A\bar{x} \le \bar{b}$ անհավասարումների համակարգին և որի համար $\bar{x} \cdot \bar{c}$ սկալյար արտադրյալի արժեքն առավելագույնը լինի:

Վերը ձևակերպված խնդիրը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\bar{x} \cdot \bar{c} \to \max, \tag{1.1}$$

$$A\bar{x} \le \bar{b}, \ \bar{x} \ge 0: \tag{1.2}$$

Կանոնական տեսքի ԳԾ մաքսիմացման խնդիր: Գտնել n-չափանի $\bar{x}$ ոչ բացասական վեկտոր, որը բավարարի է $A\bar{x} = \bar{b}$ հավասարումների համակարգին և որի համար $\bar{x} \cdot \bar{c}$ սկալյար արտադրյալի արժեքն առավելագույնը լինի:

Վերը ձևակերպված խնդիրը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\bar{x} \cdot \bar{c} \to \max, \tag{2.1}$$

$$A\bar{x} = \bar{b}, \ \bar{x} \ge 0: \tag{2.2}$$

$f(\bar{x}) = \overline{xc}$ ֆունկցիան կանվանենք ԳԾ խնդրի նպատակային ֆունկցիա:

Հիշեցնենք, որ առաջին գլխի §4-ում ձևակերպված "դիետի" և "տրանսպորտային" խնդիրները սովորական տեսքի մինիմացման ԳԾ խնդիրներ են:

(1.2) կամ (2.2) սահմանափակումներին բավարարող $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ վեկտորն անվանենք համապատասխան խնդրի թույլատրելի լուծում, իսկ այն լուծումը, որի համար $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{c}$ նպատակային ֆունկցիան ստանում է իր առավելագույն արժեքը, լավագույն լուծում: Լուծել ԳԾ խնդիրը նշանակում է գտնել նրա լավագույն լուծումը և նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքն այդ կետում:

Նկատենք, որ $A\bar{x} \le \bar{b}$ անհավասարումների համակարգի ձախ մասում մտցնելով լրացուցիչ $\bar{x}' = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ փոփոխականներ, կստանանք $A\bar{x} + \bar{x}' = b$ հավասարումների համակարգ, որն ունի ոչ բացասական լուծում, եթե և միայն եթե $A\bar{x} \le \bar{b}$ անհավասարումների համակարգն ունի ոչ բացասական լուծում:

Այսպիսով, եթե մենք կարող ենք լուծել կանոնական տեսքի ԳԾ խնդիրներ, ապա կկարողանանք լուծել նաև սովորական տեսքի ԳԾ խնդիրներ:

Առաջին հայացքից կարող է թվալ, որ (2.1)-(2.2) պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կարելի է լուծել դիֆերենցիալ հաշվի հայտնի եղանակներով, որոնք նկարագրված են մաթեմատիկական անալիզի դասընթացներում: Սակայն հիշենք, որ դիֆերենցիալ հաշվի եղանակները հնարավորություն են տալիս որոշելու նպատակային ֆունկցիայի միայն էքստրեմումի այն կետերը, որոնք ընկած են դիտարկվող տիրույթի ներսում, այլ ոչ թե եզրին: Մյուս կողմից, ինչպես հետագայում կնկատենք, ԳԾ խնդրի լավագույն լուծումները, որպես կանոն, միշտ գտնվում են որոշման տիրույթի եզրին: Հետևաբար, ԳԾ խնդրի լուծման և հետազոտման համար անհրաժեշտ են որակապես նոր եղանակներ: Սույն գլխի հաջորդ պարագրաֆները նվիրված են հենց այդ եղանակներին:

§ 2. Գծային ծրագրման խնդրի երկրաչափական մեկնաբանումը

Պարզագույն դեպքում, երբ ԳԾ խնդիրը պարունակում է ընդամենը մեկ կամ երկու փոփոխական, դժվար չէ այն մեկնաբանել և լուծել երկրաչափական եղանակով: Զնայած նշված դեպքերը գործնական նշանակություն ունենալ չեն կարող, այնուամենայնիվ դրանց ուսումնասիրումն անհրաժեշտ է՝ ինչպես ԳԾ խնդրի մի շարք կարևոր հատկությունները բացահայտելու, այնպես էլ ընդհանուր դեպքում նրա լուծման եղանակները երկրաչափորեն ընկալելու տեսակետից:

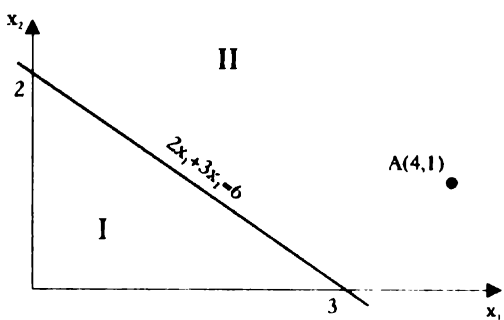
Նախքան երկու փոփոխականներով ԳԾ խնդրի հետազոտումն սկսելը, երկրաչափորեն նկարագրենք երկու փոփոխականներով առաջին աստիճանի $ax_1 + bx_2 \leq c$ անհավասարման լուծումների բազմությունը:

Ակնհայտ է, որ այդ անհավասարմանը բավարարող յուրաքանչյուր (x_1, x_2) թվազույգ իրենից կներկայացնի կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգով որոշված x_1ox_2 հարթության կետ, իսկ լուծումների բազմությունը՝ $ax_1 + bx_2 = c$ ուղիղով առաջացած կիսահարթություններից մեկը: Որպեսզի որոշենք $ax_1 + bx_2 \leq c$ անհավասարման լուծումների բազմությանը համապատասխանող կիսահարթությունը, բավական է կիսահարթություններից մեկին պատկանող որևէ ներքին A կետի ($ax_1 + bx_2 = c$ ուղղին չպատկանող) կոորդինատները տեղադրել տրված անհավասարման մեջ: Եթե այդ կետի կոորդինատները բավարարեն տվյալ անհավասարությանը, ապա որոնելի կիսահարթությունը կլինի հենց այն, որին պատկանում էր A կետը, հակառակ դեպքում՝ մյուս կիսահարթությունը:

Օրինակ 1: Որոշել $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ անհավասարման լուծումների բազմություն հանդիսացող կիսահարթությունը:

Կառուցենք $2x_1 + 3x_2 = 6$ ուղիղ գիծը (գծ. 1) և վերցնենք II կիսահարթությանը պատկանող $A(4.1)$ ներքին կետը:

Այս կետի կոորդինատները չեն բավարարում տրված անհավասարմանը, ուստի $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ անհավասարման լուծումներին համապատասխանող կետերի երկրաչափական տեղը կլինի $A(4.1)$ կետը չպարունակող I կիսահարթությունը (տե՛ս, նկ. 3.1):



Նկ. 3.1

Այժմ երկու փոփոխականներով ԳԾ խնդիրը դիտարկենք ընդհանուր տեսքով՝

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to ext \qquad (2.1)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = 1, \dots, m: \qquad (2.2)$$

Նախ որոշենք այս խնդրի (2.2) անհավասարումների համակարգին բավարարող կետերի բազմության երկրաչափական տեղը x_1ox_2 հարթության մեջ: Ինչպես տեսանք, (2.2)-ի յուրաքանչյուր սահմանափակմանը բավարարող կետերի բազմությունը այդ սահմանափակմանը համապատասխանող ուղիղ գծով առաջացած կիսահարթություններից մեկն է, ուստի (2.2) համակարգին բավարարող բոլոր կետերի բազմությունն իրենից կներկայացնի այդ կիսահարթությունների հատումից ստացված բազմությունը:

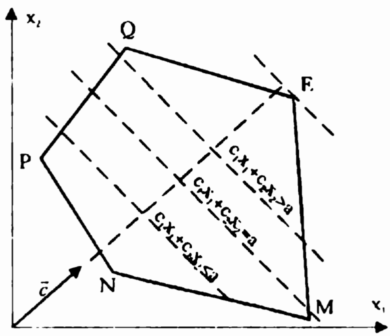
Կիսահարթությունների այդ ընդհանուր մասն անվանենք (2.1)-(2.2) խնդրի թույլատրելի տիրույթ: Հասկանալի է, որ խնդրի թույլատրելի տիրույթը կարող է լինել ինչպես դատարկ բազմություն, այնպես էլ կետ, հատված, ճառագայթ, ուղիղ գիծ, բազմանկյուն և այլն:

Դժվար չէ համոզվել, որ բոլոր դեպքերում թույլատրելի տիրույթին պատկանող կամայական երկու կետերը միացնող հատվածը նույնպես պատկանում է այդ տիրույթին, այսինքն՝ եթե թույլատրելի տիրույթը դատարկ չէ, ապա այն ուռուցիկ բազմություն է (տե՛ս, գլ. 2, §1):

Ենթադրենք՝ (2.1)-(2.2) խնդրի թույլատրելի տիրույթը *MNPQE* բազմանկյունն է (գծ. 2), և փորձենք գտնել խնդրի լավագույն լուծումը: Պարզ է, որ $z = c_1x_1 + c_2x_2$ նպատակային ֆունկցիան $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ ուղիղ գծի յուրաքանչյուր կետում կընդունի միևնույն a հաստատուն արժեքը: a պարամետրին տալով տարբեր թվային արժեքներ՝ կստանանք զուգահեռ ուղիղների ընտանիք ($z = c_1x_1 + c_2x_2$ ֆունկցիայի մակարդակային կորեր):

Մեզ անհրաժեշտ է գտնել թույլատրելի տիրույթի (*MNPQE* բազմանկյան) այն կետերը, որոնք պատկանում են a պարամետրի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքներին համապատասխանող մակարդակային կորերին՝ կախված նրանից, թե (2.1)-(2.2) խնդիրը մաքսիմացմա՞ն, թե՞ մինիմացման խնդիր է: Հեշտ է տեսնել, որ a-ի արժեքները (հետևաբար, նաև նպատակային ֆունկցիայի ընդունած արժեքները) անսահմանորեն կաճեն, եթե $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ ուղիղը ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխենք $\bar{c} = (c_1, c_2)$ նորմալի ուղղությամբ, և անսահմանորեն կնվազեն, եթե այն զուգահեռ տեղափոխենք $\bar{c}$ գրադիենտի հակառակ ուղղությամբ:

Հետևաբար, որպեսզի որոշենք մաքսիմացման խնդրի լավագույն լուծումները, անհրաժեշտ է $c_1x_1+c_2x_2=a$ ուղիղը $\bar{c}(c_1,c_2)$ վեկտորի ուղղությամբ ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխել, այնքան, քանի դեռ թույլատրելի տիրույթի հետ ընդհանուր կետ ունի: Թույլատրելի տիրույթի հատումը մակարդակի կորի հետ այն դիրքում, երբ նրա հետագա զուգահեռ տեղափոխումը *MNPQE* բազմանկյան հետ չի հատվում, կլինի խնդրի լավագույն լուծումների բազմությունը: Ըստ նկար 3.2-ի *E*-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ (*P*,*N*) հատվածի յուրաքանչյուր կետ մինիմումի կետ է:



Նկ. 3.2

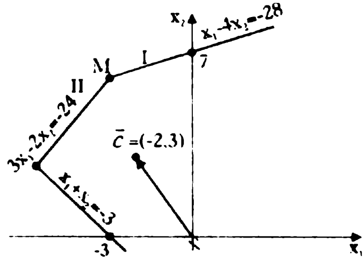
Օրինակ 2: Լուծել ԳԾ խնդիրը

$$z=-2x_1+3x_2\to ext,$$

$$\begin{cases} x_1-4x_2\ge -28, \\ 3x_1-2x_2\ge -24,, \\ x_1+x_2\ge 3: \end{cases}$$

Որպեսզի կառուցենք խնդրի թույլատրելի տիրույթը, նախ որոշենք յուրաքանչյուր սահմանափակմանը համապատասխանող կիսահարթությունը և այնուհետև՝ դրանց ընդհանուր մասը (տե՛ս, Նկ. 3.3):

Ինչպես երևում է նկարից, *M* կետը $z=-2x_1+3x_2$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետն է նրա թույլատրելի տիրույթում, և քանի որ *M*-ը (I) և (II) ուղիղների հատման կետն է, ուստի լուծելով այդ ուղիղներին համապատասխանող հավասարումների համակարգը, կստանանք *M* կետի կոորդինատները՝ $x_1=-4$, $x_2=6$:



Նկ. 3.3

Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը հաշվելով այս կետում՝ կստանանք $z_{max} = 24$: Նույն նկարից երևում է, որ $z = -2x_1 + 3x_2$ նպատակային ֆունկցիան խնդրի թույլատրելի տիրույթում ներքևից անսահմանափակ է, հետևաբար՝ մինիմացման խնդիրը լուծում չունի:

ԳԾ խնդրի հետազոտման և լուծման վերոհիշյալ երկրաչափական մեկնաբանումը հնարավորություն է տալիս անելու հետևյալ եզրահանգումները.

- խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը ուռուցիկ է, եթե այն դատարկ չէ,
- մաքսիմացման (մինիմացման) պահանջով խնդիրը լավագույն լուծում ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ թույլատրելի տիրույթը դատարկ չէ, իսկ նպատակային ֆունկցիան այդ տիրույթի վրա վերևից (ներքևից) սահմանափակ է,
- եթե խնդիրն ունի լուծում, և թույլատրելի տիրույթի գագաթների բազմությունը դատարկ չէ, ապա լավագույն լուծում է նաև այդ տիրույթի գագաթներից գոնե մեկը:

Ինչպես կերևա հետագա շարադրանքից, փոփոխականների քանակից անկախ, նշված հատկություններով օժտված է ցանկացած ԳԾ խնդիր:

§3. Գծային ծրագրման երկակիության տեսություն

Այս պարագրաֆի հիմնական նյութի շարադրանքին անցնելուց առաջ հարկ ենք համարում ուշադրություն հրավիրել այն փաստի վրա, որ, որպես կանոն, յուրաքանչյուր տնտեսագիտական խնդրի համար կարելի է ձևակերպել մեկ այլ տնտեսագիտական խնդիր, կամ, ինչպես ընդունված է անվանել՝ երկակի խնդիր, որը սերտ կապի մեջ է տրված ուղիղ խնդրի հետ, և որի հետազոտումը հնարավորություն է տալիս կատարել սկզբնական խնդրի վերաբերյալ ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական արժեքավոր վերլուծություններ:

Ասվածը պարզաբանելու նպատակով, որպես սկզբնական՝ այսպես կոչված ուղիղ խնդիր դիտարկենք 1-ին գլխի §4-ից մեզ արդեն ծանոթ "դիետի" խնդրին համանման "նորմալ կերի" խնդիրը:

Նորմալ կերի խնդիրը և նրա մաթեմատիկական մոդելը: Անասնապահական "Ա" ֆերման, որը վարսակի, եգիպտացորենի և առվույտի խառնուրդով է կերակրելու խոշոր եղջերավոր անասուններին, հետամուտ է որոշելու կերաբաժնի այնպիսի կառուցվածք, որը պարունակի սպիտակուցների, կալցիումի և վիտամինների նախապես սահմանված նվազագույն չափերը. միևնույն ժամանակ նվազագույնի հասցնելով կերաբաժնի վրա կատարվող ծախսերը, երբ հայտնի են վարսակի, եգիպտացորենի և առվույտի գները, ինչպես նաև դրանցից յուրաքանչյուրի պարունակած սննդային տարրերի քանակությունները (աղյուսակ 3.1):

Կերատեսակ կգ-ով	Սննդային տարրեր մգ-ներով			Կերատեսակի գինը
	սպիտակուց	կալցիում	վիտամիններ	
Վարսակ	50	6	2	3
Առվույտ	20	4	1	2
Եգիպտացորեն	180	3	1	5
Սննդամթերքների տարրերի նվազագույն քանակը	2000	120	44	

աղյուսակ 3.1

Նկարագրված խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 20x_2 + 180x_3 \ge 2000, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 120, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 44, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{cases}$$

որտեղ x_1, x_2 և x_3-ը համապատասխանաբար կերաբաժնի պարունակած վարսակի, առվույտի և եգիպտացորենի քանակություններն են, իսկ $f(x_1,x_2,x_3)$-ը՝ դրանց վրա կատարված ծախսը (կերաբաժնի գինը):

"Նորմալ կերի" դիտարկված խնդրի պայմաններից հետևում է, որ անասնապահական "Ա" ֆիրման օրաբաժինը կարող է կազմել ոչ միայն և ոչ անպայման վարսակի, եգիպտացորենի խառնուրդով, այլ նաև մեկ ուրիշ տարբերակով, այն է՝ սպիտակուցի, կալցիումի և վիտամինների խառնուրդով:

Նկատի ունենալով այս հանգամանքը, ենթադրենք ինչ-որ “Բ” ֆիրմա, հաշվի առնելով “1” աղյուսակում բերված տվյալները, ծրագրում է, “Ա” ֆերմային վաճառելու ակնկալիքով, կազմակերպել սպիտակուցի, կալցիումի և վիտամինների արտադրություն: Բնականաբար, “Բ” ֆիրմայի առջև ծառանում է հետևյալ խնդիրը.

Հաշվի առնելով “նորմալ կերի” ուղիղ խնդրի “1” աղյուսակում բերված տվյալները, սպիտակուցի, կալցիումի և վիտամինների ինչպիսի մրցունակ գներ սահմանել (մրցունակ՝ վարսակի, եգիպտացորենի և առվույտի գների նկատմամբ), որպեսզի մեկ կերաբաժնի հաշվով նշված իրացումից ստացվելիք հասույթը լինի առավելագույնը:

Այս խնդրի մաթեմատիկական մոդելը հետևյալն է.

$$\tilde{f}(y) = 2000y_1 + 120y_2 + 44y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 50y_1 + 6y_2 + 2y_3 \le 3, \\ 20y_1 + 4y_2 + y_3 \le 2, \\ 180y_1 + 3y_2 + y_3 \le 5, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, \end{cases}$$

որտեղ y_1, y_2, y_3 -ը համապատասխանաբար սպիտակուցի, կալցիումի և վիտամինների գներն են, իսկ $\tilde{f}(y_1, y_2, y_3)$-ը՝ մեկ կերաբաժնի հաշվով դրանց իրացումից ստացվելիք հասույթը:

Այս փոխկապակցված խնդիրների տնտեսագիտական լուրջ վերլուծության համար կարևոր է ստացված ԳԾ խնդիրների միջև գոյություն ունեցող որակական և քանակական առնչությունների բացահայտումը, որն էլ կազմելու է այս պարագրաֆի բովանդակությունը:

Գծային ծրագրման երկակի խնդիրներ: Ենթադրենք՝ տրված է սովորական տեսքով հետևյալ ԳԾ խնդիրը.

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{3.1}$$

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = 1,\ldots,m, \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n: \tag{3.3}$$

Հետևելով վերևում նկարագրված խնդիրներին համապատասխանող մոդելների միջև նկատված օրինաչափություններին՝ դիտարկենք (3.1)-(3.3) խնդրի հետ սերտորեն առնչված հետևյալ ԳԾ խնդիրը.

$$\tilde{f}(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min, \qquad (3.4)$$

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{mj} y_m \geq c_j, \; j = 1, \ldots, n, \qquad (3.5)$$

$$y_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, m: \qquad (3.6)$$

(3.1)-(3.3) և (3.4)-(3.6) խնդիրները կանվանենք ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգ:

Պայմանականորեն այդ խնդիրներից մեկը (օրինակ՝ (3.1)-(3.3)-ը) անվանելու ենք ուղիղ խնդիր, իսկ մյուսը (նշված դեպքում՝ (3.4)-(3.6)-ը)՝ տրված ուղիղ խնդրին համապատասխանող երկակի խնդիր:

Այժմ ներկայացնենք տրված խնդրի երկակի խնդիր կազմելու կանոնները այն դեպքի համար, երբ որպես ելակետային ուղիղ խնդիր վերցված է մաքսիմացման (3.1)-(3.3) խնդիրը:

Նախ, ուղիղ խնդրի (3.2) համակարգի յուրաքանչյուր i-րդ սահմանափակմանը համապատասխանեցվում է երկակի խնդրի y_i փոփոխականը: Որպես երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիա վերցվում է b_i գործակիցներով y_i փոփոխականներից կախված գծային ֆունկցիան:

Ինչ վերաբերում է երկակի խնդրի (3.5) համակարգի j-րդ սահմանափակմանը՝ $j = 1, 2, \ldots, n$, ապա այն ամբողջությամբ որոշվում է ուղիղ խնդրի x_j փոփոխականին համապատասխանող $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, c_j$ գործակիցներից կազմված սյան և x_j փոփոխականի նշանի վրա դրված սահմանափակման միջոցով, իսկ երկակի խնդրի y_i փոփոխականի վրա դրված սահմանափակման անհավասարության նշանը վերցվում է ուղիղ խնդրի i-րդ սահմանափակման անհավասարության նշանին հակառակ:

Լեմ 1 (Հիմնական անհավասարություն): Եթե $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ վեկտորները համապատասխանաբար (3.1)-(3.3) և (3.4)-(3.6) երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումներ են, ապա՝

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i: \qquad (3.7)$$

↦ Քանի որ $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորները երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումներ են, ապա նրանք համապատասխանաբար կբավարարեն (3.2)-(3.3) և (3.5)-(3.6) անհավասարումների համակարգին: Հաշվի առնելով, որ $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, ապա (3.2)-ի

-րդ անհավասարության երկու կողմերը y_i-ով բազմապատկելուց հետո կունենանք.

$$a_{i1}x_1y_i + a_{i2}x_2y_i + \ldots + a_{im}x_ny_i \le b_iy_i,\ i = 1,2,\ldots,m: \qquad (3.8)$$

Գումարելով նույն նշանի (3.8) անհավասարությունները՝ կունենանք

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_jy_i \le \sum_{i=1}^{m} b_iy_i: \qquad (3.9)$$

Նույն ձևով, (3.5)-ի j-րդ անհավասարության երկու կողմերը բազմապատկելով x_j-ով և գումարելով նույն նշանի անհավասարությունները՝ կունենանք.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_jy_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_jx_j: \qquad (3.10)$$

(3.9) և (3.10) անհավասարություններից հետևում է, որ երկակի խնդիրների զույգի ցանկացած թույլատրելի լուծումների համար ճիշտ է (3.7) հիմնական անհավասարութունը: ┘

Հետևանք 1: Մաքսիմացման խնդրի նպատակային ֆունկցիայի ամեն մի հնարավոր արժեք, որն ստացվում է խնդրի ցանկացած թույլատրելի լուծման համար, չի կարող գերազանցել երկակի խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմության վրա մինիմացվող նպատակային ֆունկցիայի ընդունած ամեն մի արժեքին:

Լեմ 2: Եթե $\bar{x}^*$ և $\bar{y}^*$ վեկտորները համապատասխանաբար (3.1)-(3.3) և (3.4)-(3.6) երկակի խնդիրների այնպիսի թույլատրելի լուծումներ են, որոնց համար $c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + \ldots + b_ny_n^*$, ապա $\bar{x}^*$ վեկտորը (3.1)-(3.3) խնդրի լավագույն լուծումն է, իսկ $\bar{y}^*$ վեկտորը՝ (3.4)-(3.6) խնդրի լավագույն լուծումը:

↦ (3.7) հիմնական անհավասարությունից հետևում է, որ (3.1)-(3.3) խնդրի ցանկացած $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ թույլատրելի լուծման համար ճիշտ է $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \le b_1y_1^* + \ldots + b_my_m^*$ անհավասարությունը: Սակայն քանի որ ըստ պայմանի $b_1y_1^* + \ldots + b_my_m^* = c_1x_1^* + \ldots + c_nx_n^*$, ապա ցանկացած $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ թույլատրելի լուծման համար ճիշտ է $c_1x_1 + \ldots c_nx_n \le c_1x_1^* + \ldots c_nx_n^*$ անհավասարությունը, այսինքն՝ $\bar{x}^*$ թույլատրելի լուծումն իսկապես (3.1)-(3.3) խնդրի լավագույն լուծումն է: Նույն ձևով, օգտվելով հիմնական անհավասարությունից, երկակի խնդրի ցանկացած $\bar{y}^*$ թույլատրելի լուծման համար կունենանք $b_1y_1+\ldots+b_my_m \geq b_1y_1^*+\ldots+b_my_m^*$, այսինքն՝ $\bar{y}^*$ վեկտորը (3.4)-(3.6) խնդրի լավագույն լուծումն է: ⌟

Լեմ 3: Եթե (3.1)-(3.3), (3.4)-(3.6) ԳԾ երկակի խնդիրներից մեկն ունի լավագույն լուծում, ապա մյուսն ունի թույլատրելի լուծում:

↦ Ենթադրենք՝ (3.1)-(3.3) խնդիրն ունի $\bar{x}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ լավագույն լուծումը և ցույց տանք, որ (3.4)-(3.6) խնդիրն ունի թույլատրելի լուծում: Իրոք, եթե (3.4)-(3.6) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ է, կնշանակի (3.5)-(3.6) համակարգն անհամատեղելի է: Այդ դեպքում անհամատեղելի կլինի նաև հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{1j}y_1+\ldots+a_{mj}y_m - u_j = c_j,\ j = 1,2,\ldots,n, \\ y_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m, \\ u_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n: \end{cases} \tag{3.11}$$

Գծային համակարգի անհամատեղելիության Ֆարկաշի թեորեմից (տե՛ս, գլ. 2, §1) հետևում է, որ այս դեպքում համատեղելի կլինի հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{i1}z_1+\ldots+a_{in}z_n \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m, \\ c_1z_1+\ldots+c_nz_n < 0, \\ -z_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n: \end{cases} \tag{3.12}$$

Դիցուք՝ $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_n)$ վեկտորը (3.12) համակարգի որևէ լուծում է, իսկ $\bar{x} = \bar{x}^* - \bar{z}$: Հեշտ է ստուգել, որ $\bar{x} = (x_1^* - z_1,\ldots,x_n^* - z_n)$ վեկտորը բավարարում է (3.2)-(3.3) համակարգին, այսինքն՝ (3.1)-(3.3) խնդրի թույլատրելի լուծում է: Եվ քանի որ $c_1z_1+\ldots+c_nz_n < 0$, իսկ $\bar{c}\cdot\bar{x} = c_1x_1^*+\ldots+c_nx_n^* - (c_1z_1+\ldots+c_nz_n)$, ապա $\bar{c}\cdot\bar{x} > c_1x_1^*+\ldots+c_nx_n^*$:

Վերջինս հակասում է այն ենթադրությանը, որ $\bar{x}^*$ վեկտորը (3.1)-(3.3) խնդրի լավագույն լուծումն է: ⌟

Լեմ 4: Եթե (3.2)-(3.3) և (3.5)-(3.6) համակարգերից յուրաքանչյուրն առանձին-առանձին համատեղելի է, այսինքն՝ եթե երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ չեն, ապա համատեղելի է նաև հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i,\ i = 1,\ldots,m, \\ a_{1j}y_1+\ldots+a_{mj}y_m \geq c_j,\ j = 1,\ldots,n, \\ c_1x_1+\ldots+c_nx_n \geq b_1y_1+\ldots+b_my_m, \\ x_j \geq 0, y_i \geq 0, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n: \end{cases} \tag{3.13}$$

$\mapsto$ Եթե ենթադրենք, որ (3.13) համակարգն անհամատեղելի է, ապա անհամատեղելի կլինի նաև հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n + p_i = b_i,\ i=1,\ldots,m, \\ a_{1j}y_1+\ldots+a_{mj}y_j - q_j = c_j,\ j=1,\ldots,n, \\ c_1x_1+\ldots+c_nx_n - (b_1y_1+\ldots+b_my_m) - \theta = 0, \\ x_j \geq 0, q_j \geq 0, j=1,\ldots,n; y_i \geq 0, p_i \geq 0, i=1,\ldots,m, \theta \geq 0: \end{cases} \tag{3.14}$$

Գծային համակարգի անհամատեղելիության Ֆարկաշի թեորեմից (տե՛ս, գլ. 2, §1) կհետևի, որ այդ դեպքում համատեղելի պետք է լինի հետևյալ համակարգը.

$$a_{1j}u_1+\ldots+a_{mj}u_m + c_j\eta \geq 0,\ j=1,\ldots,n, \qquad (\text{ա})$$

$$a_{i1}v_1+\ldots+a_{in}v_n - b_i\eta \geq 0,\ i=1,\ldots,m, \qquad (\text{բ})$$

$$u_i \geq 0, i=1,\ldots,m, -v_j \geq 0, j=1,\ldots,n, -\eta \geq 0, \qquad (\text{գ}) \tag{3.15}$$

$$b_1u_1+\ldots+b_mu_m + c_1v_1+\ldots+c_nv_n + 0\cdot\eta < 0: \qquad (\text{դ})$$

Այսպիսով, (3.13) համակարգի համատեղելիությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ (3.15) համակարգն անհամատեղելի է: Իսկ (3.15) համակարգի անհամատեղելիությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ եթե որևէ $(m+n+1)$-չափանի $\overline{w} = (u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n, \eta)$ վեկտորի բաղադրիչները բավարարում են (3.15)-ի (ա), (բ), (գ) անհավասարումներին, ապա (դ) անհավասարմանը բավարարել չեն կարող:

Իսկապես, եթե նշված $\overline{w}$ վեկտորի բաղադրիչները բավարարում են (ա), (բ), (գ) անհավասարումներին, և $\eta < 0$, ապա հեշտ է ստուգել, որ $x_j = v_j / \eta$, $j = 1,\ldots,n$ և $y_i = -u_i / \eta$, $i = 1,\ldots,m$ թվերը համապատասխանաբար կբավարարեն (3.2)-(3.3) և (3.5)-(3.6) համակարգերին, ուրեմն և հիմնական անհավասարությանը՝

$$(c_1v_1+\ldots+c_nv_n)/\eta \leq (-b_1u_1-\ldots-b_mu_m)/\eta: \tag{3.16}$$

Եթե (3.16) անհավասարության երկու կողմը բազմապատկենք η-ով, կստանանք՝ $c_1v_1+\ldots+c_nv_n \geq -(b_1u_1+\ldots+b_mu_m)$:

Վերջին անհավասարությունից կհետևի, որ $\overline{w}$ վեկտորը չի բավարարում (դ) անհավասարմանը:

Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ $\eta = 0$ և ցույց տանք, որ եթե $\overline{w} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n, 0)$ վեկտորը բավարարում է (ա), (բ), (գ) անհավասարումներին, այսինքն եթե

$$a_{1j}u_1+\ldots+a_{mj}u_m \geq 0,\ j=1,\ldots,n, \tag{3.17}$$

$$a_{i1}v_i+\ldots+a_{in}v_n \geq 0,\ i=1,\ldots,m, \tag{3.18}$$

$$u_i \geq 0, i = 1,\ldots,m, v_j \leq 0, j = 1,\ldots,n,$$

ապա $b_1u_1+\ldots+b_mu_m + c_1v_1+\ldots+c_nv_n \geq 0$:

Դրա համար վերցնենք (3.2)-(3.3) համակարգի ցանկացած $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ լուծում (ըստ պայմանի այն համատեղելի է), (3.17)-ի երկու կողմերը բազմապատկենք x_j-ով, $j = 1,\ldots,n$ և գումարենք ըստ j-ի: Արդյունքում կստանանք, որ $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_ix_j \geq 0$:

Սակայն, քանի որ $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_ix_j = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)u_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_iu_i$, ապա $\sum_{i=1}^{m} b_iu_i \geq 0$: Նույն ձևով, եթե վերցնենք (3.5)-(3.6) համակարգի որևէ $(y_1, y_2,\ldots, y_m)$ լուծում, (3.18)-ի երկու կողմերը բազմապատկենք y_i-ով, $i = 1,\ldots,m$ և կատարենք նույն գործողությունները ու ձևափոխությունները, կստանանք, որ $\sum_{j=1}^{n} c_jv_j \geq 0$: Ստացված անհավասարությունից հետևում է, որ $\overline{w}$ վեկտորը $\eta = 0$ պայմանի դեպքում ևս չի բավարարում (դ) անհավասարմանը: ┘

Ապացուցված լեմը փաստորեն երաշխավորում է ուղիղ և երկակի խնդիրների այնպիսի $\overline{x}$ և $\overline{y}$ թույլատրելի լուծումների գոյությունը, որոնց համար $\overline{c} \cdot \overline{x} \geq \overline{b} \cdot \overline{y}$: Սակայն քանի որ ըստ հետևանք 1-ի ուղիղ և երկակի խնդիրների ցանկացած թույլատրելի լուծումների, այդ թվում $\overline{x}$ և $\overline{y}$ վեկտորների համար $\overline{c} \cdot \overline{x} \leq \overline{b} \cdot \overline{y}$, ապա կունենանք, որ $\overline{c} \cdot \overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{y}$, այսինքն՝ $\overline{x}$ և $\overline{y}$ վեկտորները համապատասխանաբար կլինեն ուղիղ և երկակի խնդիրների լավագույն լուծումներ (տե՛ս, լեմ 2-ը):

Հետևանք 2: Եթե ԳԾ (3.1)-(3.3) և (3.4)-(3.6) երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ չեն, ապա երկու խնդիրներն էլ ունեն լավագույն լուծումներ՝ նպատակային ֆունկցիաների հավասար լավագույն արժեքներով:

Ստացված արդյունքների ամբողջությունը ամփոփ ձևով ներկայացվում է ԳԾ խնդիրների երկակիության տեսության առաջին թեորեմի միջոցով:

Թեորեմ 1: Եթե ԳԾ խնդիրն ունի լավագույն լուծում, ապա նրա երկակի խնդիրը նույնպես կունենա լավագույն լուծում և, բացի այդ, երկակի խնդիրների նպատակային ֆունկցիաների լավագույն արժեքները կլինեն իրար հավասար:

Թեորեմի ապացույցն ստացվում է 3-րդ լեմի, այնուհետև 4-րդ լեմի և հետևանք 2-ի միջոցով:

Երկակի խնդիրների մինչև այժմ նկարագրված բոլոր հատկությունները վերաբերում էին լավագույն լուծումների գոյությանը կամ նպատակային ֆունկցիաների առավելագույն և նվազագույն արժեքներին: Սակայն պարզվում է, որ երկակի խնդիրների լավագույն լուծումներն օժտված են մի շարք այնպիսի հատկություններով, որոնք արտահայտվում են խնդրի սահմանափակումներին յուրահատուկ ձևով բավարարելու միջոցով: Երկակի խնդիրների լավագույն լուծումների այն հատկությունները (առնչված խնդրի սահմանափակումներին բավարարելու առանձնահատկություններով), որոնց ուսումնասիրումը հետաքրքրում է մեզ, կազմում են երկակիության տեսության երկրորդ (հավասարակշռության) թեորեմի բովանդակությունը:

Թեորեմ 2: Որպեսզի ԳԾ (3.1)-(3.3) և (3.4)-(3.6) երկակի խնդիրների $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ և $(y_1^*,\dots,y_n^*)$ թույլատրելի լուծումները հանդիսանան այդ խնդիրների լավագույն լուծումներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց բաղադրիչները բավարարեն հետևյալ պայմաններին.

$$\begin{aligned}&(a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \dots + a_{mj}y_m^* - c_j)\cdot x_j^* = 0,\ j = 1,\dots,n,\\ &(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \dots + a_{in}x_n^* - b_i)\cdot y_i^* = 0,\ i = 1,\dots,m.\end{aligned} \qquad (3.19)$$

$\mapsto$ *Անհրաժեշտություն*: Քանի որ $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ և $(y_1^*,\dots,y_n^*)$ վեկտորները համապատասխանաբար (3.1)-(3.3) և (3.4)-(3.6) երկակի խնդիրների լավագույն լուծումներ են, ապա ըստ երկակիության առաջին թեորեմի՝

$$c_1x_1^* + c_2x_2^* + \dots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \dots + b_my_m^* : \qquad (3.20)$$

Մյուս կողմից, որպես թույլատրելի լուծումներ, այդ վեկտորների բաղադրիչները պետք է բավարարեն հիմնական անհավասարությանը.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* : \qquad (3.21)$$

(3.20) և (3.21) առնչություններից հետևում է

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* : \tag{3.22}$$

Ստացված (3.22) հավասարությունների շղթան համարժեք է հետևյալ հավասարությունների զույգին.

$$\sum_{1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0 , \tag{3.23}$$

$$\sum_{i=1} (\sum_{j=1} a_{ij} x_j^* - b_i) y_j^* = 0 : \tag{3.24}$$

Քանի որ

$$\begin{aligned} &(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - c_j) x_j^* \geq 0, \ (j = 1,\dots,n), \\ &(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) y_i^* \leq 0, \ (i = 1,\dots,m), \end{aligned} \tag{3.25}$$

ապա (3.23)-(3.24)-ից կհետևի, որ լավագույն լուծումների բաղադրիչները բավարարում են (3.19) անհրաժեշտ պայմաններին:

Բավարարություն: Դիցուք՝ $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ և $(y_1^*,\dots,y_m^*)$ թույլատրելի լուծումները բավարարում են (3.19) պայմաններին, այսինքն՝

$$\begin{aligned} &c_j x_j^* = (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j^*, \ (j = 1,\dots,n), \\ &b_i y_i^* = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) y_i^*, \ (i = 1,\dots,m): \end{aligned} \tag{3.26}$$

Գումարելով (3.26) հավասարություններն առանձին-առանձին, ըստ j-ի, $j = 1,\dots,n$ և ըստ i-ի, $i = 1,\dots,m$, կստանանք հետևյալ գումարային հավասարությունները.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j^* , \ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) y_i^* :$$

Այսպիսով, ստացվեց, որ $c_1 x_1^* + \dots + c_n x_n^* = b_1 y_1^* + \dots + b_m y_m^*$, իսկ դա ըստ 2-րդ լեմի նշանակում է, որ $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ և $(y_1^*,\dots,y_m^*)$ վեկտորները լավագույն լուծումներ են: ⌋

Ապացուցված թեորեմի (3.19) անհրաժեշտ և բավարար պայմաններից հետևում է, որ եթե (3.1)-(3.3) խնդրի գոնե մեկ լավագույն լուծման համար $x_j^* \neq 0$, ապա երկակի խնդրի ցանկացած $(y_1^*,\dots,y_m^*)$ լավագույն լուծման համար $a_{1j} y_1^* + \dots + a_{mj} y_m^* = c_j$:

Արդյո՞ք ինչ-որ իմաստով ճիշտ է նաև հակառակը: Վերոհիշյալ հարցի հստակ ձևակերպման համար ԳԾ խնդրի սահմանափակումները տարբերակենք հետևյալ սկզբունքով:

Սահմանում: ԳԾ խնդրի i-րդ (j-րդ) սահմանափակումը կանվանենք կոշտ սահմանափակում, եթե նրա բոլոր լավագույն լուծումներն այդ սահմանափակմանը բավարարում են որպես հավասարություն: Հակառակ դեպքում՝ ոչ կոշտ սահմանափակում:

ԳԾ խնդրի սահմանափակումների այսպիսի տարբերակման դեպքում երկակիության տեսության երկրորդ թեորեմից անմիջականորեն հետևում է, որ եթե երկակի խնդիրների $x_j \geq 0$ և $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m - c_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots,n$ սահմանափակումներից մեկը, ինչպես նաև $y_i \geq 0$ և $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i \leq 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ սահմանափակումներից մեկը կոշտ չէ, ապա մյուսը կոշտ է: Պարզվում է, որ այս իմաստով ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը. եթե երկակի խնդիրների նշված սահմանափակումների զույգից մեկը կոշտ է, ապա մյուսը կոշտ չէ (ապացույցը տե՛ս, [23]-ում):

Ավարտելով երկակի խնդիրների լուծումների զուտ մաթեմատիկական առնչությունների հետազոտումը՝ նկատենք, որ եթե ԳԾ ուղիղ խնդիրը որոշակի տնտեսագիտական խնդրի մաթեմատիկական մոդել է, ապա, որպես կանոն (ինչպես այս պարագրաֆի սկզբում դիտարկված "նորմալ կերի" խնդրի դեպքում), նրան համապատասխանող երկակի խնդրին կարելի է տալ սկզբնական խնդրի բովանդակությամբ պայմանավորված տնտեսագիտական մեկնաբանում: Դեռ ավելին, երկակի խնդիրների միջև գոյություն ունեցող այն բոլոր կապերը, որոնք հետևում են երկակիության լեմերից ու թեորեմներից, նույնպես ստանում են որոշակի տնտեսագիտական մեկնաբանում:

§ 4. Գծային ծրագրման խնդրի հենքային լուծումներ

ԳԾ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմության հենքային լուծումների ենթաբազմությունը և նրա հատկությունները ուսումնասիրելու համար դիտարկենք կանոնական տեսքով հետևյալ ԳԾ խնդիրը.

$$\overline{cx} \to \max, \tag{4.1}$$

$$A\bar{x} = \bar{b}, \tag{4.2}$$

$$\bar{x} \geq 0, \tag{4.3}$$

որտեղ A-ն $m \times n$ կարգի մատրից է:

Ուշադրության արժանի է այն դեպքը, երբ $A\bar{x}=\bar{b}$ հավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունն անվերջ է, և այս դեպքում, անշուշտ, հետաքրքրական է (4.1)-(4.3) խնդրի համար տալ հետևյալ հարցերի պատասխանները.

- խնդիրը թույլատրելի լուծումներ ունի՞, և եթե այո, ապա՝
- խնդիրը լավագույն լուծումներ ունի՞, և եթե այո, ապա՝
- ինչպե՞ս գտնել լավագույն լուծումներից գոնե մեկը:

Նշված հարցերի հետազոտումն իրականացվում է մի թվային եղանակով, որը հայտնի է ԳԾ խնդրի լուծման սիմպլեքս եղանակ անվանումով, և որի հիմքում ընկած են ԳԾ խնդրի այսպես կոչված հենքային թույլատրելի լուծումների բազմությանը վերաբերող երկու թեորեմներ՝ գոյության թեորեմը և հիմնական թեորեմը:

Այդ նպատակով դիտարկենք ԳԾ խնդրի սահմանափակումների (4.2)-(4.3) համակարգը և առաջին հերթին փորձենք նկարագրել գծայնորեն անկախ m հավասարումներից բաղկացած (4.2) համակարգի լուծումների բազմությունը, $m \le n$ պայմանի դեպքում: Դրա համար (4.2) համակարգի x_j անհայտի գործակիցներից կազմված սյունը նշանակենք $\bar{a}^j$-ով $(j=1,\ldots,n)$, ազատ անդամներից կազմված $\bar{b}$ սյունը՝ $\bar{a}^0$-ով և համակարգը ներկայացնենք

$$x_1\bar{a}^1+x_2\bar{a}^2+\ldots+x_n\bar{a}^n=\bar{a}^0 \qquad (4.4)$$

վեկտորական տեսքով:

Ենթադրենք՝ (4.2) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը m է: Այդ դեպքում կարելի է ընտրել $\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_m}$ գծայնորեն անկախ սյուներ, և ամեն մի m-չափանի վեկտոր, այդ թվում և $\bar{a}^j$ $(j=0,1,\ldots,n)$ սյուն վեկտորները ներկայացնել որպես $\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_m}$ հենքի գծային համակցություն:

Դիցուք՝

$$\bar{a}^j=x_{1j}\bar{a}^{s_1}+\ldots+x_{mj}\bar{a}^{s_m},\ (j=0,1,\ldots,n), \qquad (4.5)$$

իսկ $N=\{j|j\neq s_i, i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n\}$: Լուծենք հավասարումների (4.2) համակարգը հենքին համապատասխանող $x_{s_1},\ldots,x_{s_m}$ անհայտների նկատմամբ. դրանք այսուհետև կանվանենք հենքային անհայտներ, իսկ մնացած x_j $(j\in N)$ անհայտները՝ ազատ անհայտներ: Տեղափոխելով x_j $(j\in N)$ ազատ անհայտները (4.4) հավասարման աջ մաս և տեղադրելով $\bar{a}^j$ $(j=0,1,\dots,n)$ վեկտորների վերլուծության (4.5) արտահայտությունները՝ կստանանք.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{s_i}\bar{a}^{s_i} = \sum_{i=1}^{m} x_{i0}\bar{a}^{s_i} - \sum_{j\in N} x_j(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\bar{a}^{s_i}) = \sum_{i=1}^{m}(x_{i0} - \sum_{j\in N} x_{ij}x_j)\bar{a}^{s_i},$$

հետևաբար, $\sum_{i=1}^{m}(x_{s_i} - x_{i0} + \sum_{j\in N} x_{ij}x_j)\bar{a}_{s_i} = \bar{0}$:

Հաշվի առնելով $\bar{a}^{s_1},\dots,\bar{a}^{s_m}$ վեկտորների գծային անկախությունը՝ կստանանք, որ

$$x_{s_i} = x_{i0} - \sum_{j\in N} x_{ij}x_j\ ,\ i=1,2,\dots,m: \tag{4.6}$$

Այսպիսով, մեզ հետաքրքրող սահմանափակումների (4.2)-(4.3) համակարգի լուծումների բազմությունը կնկարագրվի x_j $(j\in N)$ ազատ անհայտներին տրվող այն բոլոր ոչ բացասական արժեքներով, որոնց (4.6)-ի միջոցով որոշված x_{s_i} $(i=1,2,\dots,m)$ հենքային անհայտների արժեքները նույնպես կստացվեն ոչ բացասական:

Մասնավոր դեպքում, եթե $\bar{a}^0$ վեկտորի վերլուծության x_{i0} գործակիցները բացասական չեն, ապա ազատ անհայտների զրոյի հավասար արժեքներին համապատասխանող

$$\alpha_j = \begin{cases} x_{i0}, & \text{եթե } j=s_i, i=1,\dots,m \\ 0, & \text{եթե } j\in N \end{cases} \tag{4.7}$$

առնչություններով որոշված վեկտորը կբավարարի (4.2)-(4.3) համակարգին:

Սահմանում 1: Այն հենքը, ըստ որի $\bar{a}^0$ վեկտորի վերլուծության x_{i0} գործակիցները բացասական չեն, կանվանենք թույլատրելի հենք, իսկ (4.7) առնչություններով որոշված $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ վեկտորը՝ թույլատրելի հենքային լուծում, կամ ավելի կարճ՝ հենքային լուծում:

Սահմանում 2: ԳԾ խնդիրն անվանենք չվերածվող, եթե նրա բոլոր հենքային լուծումների դրական բաղադրիչների թիվը m է:

Դիտողություն 1: Առաջին սահմանումից հետևում է, որ հենքային լուծման դրական բաղադրիչներին համապատասխանող սյուն վեկտորները գծայնորեն անկախ են: Հեշտ է ստուգել, որ ճիշտ է նաև հակառակը: Հետևաբար, որպեսզի (4.2)-(4.3) համակարգի լուծումը լինի հենքային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա դրական բաղադրիչներին համապատասխանող սյուն վեկտորները լինեն գծայնորեն անկախ:

Քանի որ $m\times n$ A մատրիցի n սյուներից m գծայնորեն անկախ սյուներ կարելի է ընտրել ոչ ավելի, քան C_n^m եղանակներով, ապա տարբեր, առավել ևս թույլատրելի հենքերի թիվը, հետևաբար (4.7) բանաձևով նրանց համապատասխանող հենքային լուծումների թիվը չի կարող գերազանցել C_n^m թվից, այսինքն՝ հենքային լուծումների բազմությունը *վերջավոր է*:

Օրինակ 1: Գտնել համակարգի հենքային լուծումները

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3-x_4=-5\\ x_1-2x_2+2x_3+x_4=8\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0:\end{cases}$$

$\bar{a}^0$ վեկտորը վերլուծենք ըստ $\bar{a}^1,\bar{a}^2$ գծայնորեն անկախ վեկտորների՝

$$\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}=x_{01}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+x_{02}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\text{ հետևաբար, }\begin{cases}2x_{01}+3x_{02}=-5,\\ x_{01}-2x_{02}=8:\end{cases}$$

Լուծելով համակարգը՝ կունենանք $x_{01}=2$, $x_{02}=-3$: Քանի որ $x_{02}<0$, ապա $\{\bar{a}^1,\bar{a}^2\}$-ը թույլատրելի հենք չէ:

$\bar{a}^1,\bar{a}^3$ սյուները գծայնորեն կախյալ են և հենք լինել չեն կարող:

Դիտարկենք $\bar{a}^1,\bar{a}^4$ գծայնորեն անկախ սյուները, և $\bar{a}^0$ վեկտորը վերլուծենք ըստ $\{\bar{a}^1,\bar{a}^4\}$ հենքի: Լուծելով $\bar{a}^0=x_{01}\bar{a}^1+x_{04}\bar{a}^4$ վեկտորական հավասարումը՝ կունենանք $x_{01}=1, x_{04}=7$, հետևաբար, $\{\bar{a}^1,\bar{a}^4\}$-ը թույլատրելի հենք է, որին համապատասխանող հենքային լուծումը կլինի (1,0,0,7) վեկտորը: Նույն ձևով $\{\bar{a}^2,\bar{a}^3\}$ հենքի համար կունենանք $x_{02}=-3$, $x_{03}=1$: $\{\bar{a}^2,\bar{a}^4\}$ հենքի համար՝ $x_{02}=3, x_{04}=14$ և $\{\bar{a}^3,\bar{a}^4\}$ հենքի համար՝ $x_{03}=0{,}5; x_{04}=7$: Այսպիսով, տրված համակարգի հենքային լուծումներն են (1,0,0,7), (0,3,0,14) և (0;0;0,5;7) վեկտորները:

Թեորեմ 1: Եթե (4.2)-(4.3) համակարգն ունի լուծում, ապա ունի նաև հենքային լուծում:

$\mapsto$ Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ (4.2)-(4.3) համակարգի այնպիսի լուծման գոյությունը, որի դրական բաղադրիչներին համապատասխանող սյուն վեկտորները լինեն գծայնորեն անկախ (տե՛ս, դիտողություն 1):

Երբ $n = 1$, ապա թեորեմի ապացույցն ակնհայտ է: Ենթադրենք՝ թեորեմի պնդումը ճիշտ է $k < n$ դեպքում և ցույց տանք, որ ճիշտ կլինի նաև $k = n$ պայմանի դեպքում: Դիցուք՝ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը (4.2)-(4.3) համակարգի լուծումն է: Եթե α_j բաղադրիչներից գոնե մեկը հավասար լինի զրոյի, ապա կհանգենք $k < n$ դեպքին: Հետևաբար, կարող ենք ենթադրել, որ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը բավարարում է

$$\alpha_1 \cdot \bar{a}^1 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{a}^n = \bar{a}^0,\ \alpha_j > 0,\ j = 1,\ldots,n \tag{4.8}$$

պայմաններին: Մյուս կողմից, եթե $\bar{a}^1,\ldots,\bar{a}^n$ վեկտորները գծայնորեն անկախ են, կնշանակի $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ վեկտորը հենքային լուծում է: Հետևաբար, այս դեպքում ևս թեորեմի պնդումը ճիշտ է:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ $\bar{a}^1,\ldots,\bar{a}^n$ վեկտորները գծայնորեն կախյալ են: Այս դեպքում պարզ է, որ գոյություն կունենան ոչ բոլորը միաժամանակ զրոյի հավասար $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ թվեր, այնպես, որ

$$\lambda_1 \cdot \bar{a}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \bar{a}_n = \bar{0}: \tag{4.9}$$

Ընդ որում, կարելի է ենթադրել, որ λ_j թվերից գոնե մեկը դրական է (հակառակ դեպքում բավական է (4.9)-ը բազմապատկել (-1)-ով):

Դիցուք՝ $\theta_0 = \min\limits_{\lambda_j>0}(\alpha_j / \lambda_j)$: Հարկ եղած դեպքում, փոխելով անհայտների համարակալումը՝ կունենանք $\theta_0 = \alpha_1 / \lambda_1$: Այնուհետև (4.9)-ը բազմապատկենք θ_0 թվով և հանենք (4.8)-ից, արդյունքում կունենանք $(\alpha_2 - \theta_0\lambda_2) \cdot \bar{a}_2 + \ldots + (\alpha_n - \theta_0\lambda_n) \cdot \bar{a}^n = \bar{a}^0$, և քանի որ $\gamma_j = \alpha_j - \theta_0\lambda_j \ge 0$, $j = 2,3,\ldots,n$, ապա $x_1\bar{a}^1 + x_2\bar{a}^2 + \ldots + x_n\bar{a}^n = \bar{a}^0$ համակարգի համար $(0,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ վեկտորը այնպիսի ոչ բացասական լուծում է, որի դրական բաղադրիչների թիվը փոքր է n-ից: ┘

Դիտողություն 2: Հենքային լուծման գոյության ապացույցն ընդգրկում է նաև տրված $\bar{x} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ թույլատրելի լուծման միջոցով $\bar{z} = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ հենքային լուծումն ստանալու մի այնպիսի եղանակ, որի դեպքում եթե $S(\bar{x}) = \{j|\alpha_j = 0, j = 1,\ldots,n\}$ և $S(\bar{z}) = \{j|\gamma_j = 0, j = 1,\ldots,n\}$, ապա $S(\bar{x}) \subseteq S(\bar{z})$:

Թեորեմ 2 (Հիմնական թեորեմ): Եթե ԳԾ (4.1)-(4.3) խնդիրն ունի լավագույն լուծում, ապա ունի նաև լավագույն հենքային լուծում:

↦ Հարկ եղած դեպքում փոխելով փոփոխականների համարակալումը, կարող ենք ենթադրել, որ (4.1)-(4.3) խնդրի լավագույն k դրական բաղադրիչներով լուծումը $\bar{x}^* = (x_1^*,\ldots,x_k^*,0,\ldots,0)$ $(1 \le k \le n)$ վեկտորն է: Համաձայն երկակիության տեսության թեորեմ 1-ի՝ (4.1)-(4.3) խնդրի երկակի խնդիրը ևս կունենա լավագույն լուծում: Դիցուք՝ $\bar{y}^*$ վեկտորը երկակի խնդրի լավագույն լուծումն է: Այդ դեպքում $\bar{x}^* = (x_1^*,\ldots,x_k^*,0,\ldots,0)$ վեկտորը, որպես (4.1)-(4.3) խնդրի լավագույն լուծում, կբավարարի հավասարակշռության թեորեմի օպտիմալության անհրաժեշտ և բավարար $(\bar{a}_j \bar{y}^* - c_j)x_j^* = 0$, $j = 1,2,\ldots,k$ պայմաններին:

Եթե $\bar{x}^*$ վեկտորը հենքային լուծում չէ, ապա ըստ թեորեմ 1-ի գոյություն ունի այնպիսի $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0)$ հենքային լուծում, որի համար $S(\bar{x}^*) \subseteq S(\bar{z})$ (տե՛ս, դիտողություն 2): Հետևաբար, $\bar{z}$ հենքային լուծումը ակնհայտորեն կբավարարի լավագույն լուծում լինելու $(\bar{a}_j \cdot y^* - c_j)z_j = 0$, $(j = 1,\ldots,n)$ բավարար պայմաններին: ↲

Առաջին հայացքից թվում է, թե օգտվելով հիմնական թեորեմից՝ կարելի էր առաջարկել ԳԾ խնդիրը լուծելու հետևյալ ուղին. գտնել նրա հենքային լուծումները (որոնք վերջավոր թվով են) և համեմատելով ընտրել լավագույն լուծումը: Սակայն գործնականում խնդրի լուծման այդ եղանակն անիրագործելի է, որովհետև նախ, ինչպես կտեսնենք հետագայում, յուրաքանչյուր հենքային լուծման որոշումը կապված է ծավալուն հաշվարկների հետ, երկրորդ, որ առավել լուրջ հանգամանք է, որ հենքային լուծումների թիվը, վերջավոր լինելով հանդերձ, գործնական խնդիրների համար հաճախ կարող է այնքան մեծ լինել, որ հնարավոր չլինի որոշել խնդրի լավագույն լուծումը:

Սակայն եթե հնարավոր լիներ խելամիտ ու նպատակասլաց ձևով էապես կրճատել դիտարկվող հենքային լուծումների քանակը՝ խուսափելով բոլոր հենքային լուծումները կուրորեն համեմատելուց, ապա խնդրի լուծման հնարավորությունը առավել իրական կլիներ: Հենց այս գաղափարի կոնկրետ իրականացման ձևերն էլ կազմում են ԳԾ խնդրի լուծման այսպես կոչված սիմպլեքս եղանակի ողջ բովանդակությունը: Դրանց բացահայտմանը ձեռնամուխ ենք լինելու հաջորդ պարագրաֆներում:

§5. Հենքային լուծման օպտիմալության հայտանիշը

ԳԾ խնդրի լավագույն լուծումը որոնելիս, բոլոր հենքային լուծումները հատարկելուց խուսափելու համար, կարևոր է ունենալ հենքային լուծման օպտիմալության (խնդրի լավագույն լուծումը լինելու) եթե ոչ անհրաժեշտ և բավարար, ապա գոնե բավարար պայմանները՝ այսպես կոչված օպտիմալության հայտանիշը:

Դիցուք՝ վեկտորների $\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_m}$ համախումբը կանոնական տեսքով հետևյալ ԳԾ խնդրի

$$\bar{c}\cdot\bar{x} = c_1x_1+\ldots+c_nx_n \rightarrow ext \tag{5.1}$$

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n = b_i, i = 1,\ldots,m \tag{5.2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n \tag{5.3}$$

թույլատրելի հենք է, իսկ

$$\alpha_j = \begin{cases} x_{i0}, & \text{եթե } j=s_i, i=1,\ldots,m \\ 0, & \text{եթե } j\in N=\{j|j\neq s_i, i=1,\ldots,m\} \end{cases}$$

բանաձևով որոշված $\bar{a}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը՝ այդ հենքին համապատասխանող, (5.2)-(5.3) համակարգի հենքային լուծումը: $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ հենքային լուծման համար սահմանենք

$$\Delta_j = c_{s_1}x_{1j}+\ldots+c_{s_m}x_{mj} - c_j,\ j\in N$$

գնահատականները, որտեղ x_{ij} -երը $\bar{a}^j$ սյուն վեկտորի վերլուծության գործակիցներն են ըստ $\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_m}$ հենքի:

Օպտիմալության հայտանիշ: Եթե $\bar{a}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ հենքային լուծման Δ_j, $(j\in N)$ գնահատականները բացասական չեն, ապա $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը (5.1)-(5.3) խնդրի լավագույն լուծումն է, եթե վերջինս մաքսիմացման խնդիր է:

$\mapsto$ Քանի որ (5.1)-(5.3) խնդրի ցանկացած $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ թույլատրելի լուծում բավարարում է $x_{s_i} = x_{i0} - \sum_{j\in N} x_{ij}x_j$, $i=1,\ldots,m$ հավասարումների համակարգին (տե՛ս, (4.6)-ը), ապա

$$\begin{aligned}\bar{c}\cdot\bar{x} &= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{s_i} + \sum_{j\in N} c_jx_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}(x_{i_0} - \sum_{j\in N} x_{ij}x_j) + \sum_{j\in N} c_jx_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{i0} + \sum_{j\in N}(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij})x_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{i0} - \sum_{j\in N}\Delta_jx_j:\end{aligned} \tag{5.4}$$

Այն փաստից, որ $\Delta_j \ge 0$, $j \in N$ և $x_j \ge 0$, $j = 1,\ldots,n$ հետևում է, որ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0}$: Այսպիսով ստացվեց, որ ցանկացած $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, թույլատրելի լուծման համար՝ $\bar{c}\cdot\bar{x} \le \bar{c}\cdot\bar{a}$: ⅃

Դիտողություն: (5.4)-ից նաև հետևում է, որ եթե $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ հենքային լուծման Δ_j, $(j \in N)$ գնահատականները դրական չեն, ապա $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը (5.1)-(5.3) խնդրի լավագույն լուծումն է, եթե վերջինս մինիմացման խնդիր է:

Եթե տրված հենքային լուծման Δ_j $(j \in N)$ գնահատականները չեն բավարարում օպտիմալության հայտանիշի բավարար պայմաններին, ապա պարզ է, որ լավագույն լուծման որոնումը շարունակելու համար անհրաժեշտ է փնտրել մեկ այլ հենքային լուծում:

Սահմանում: (5.1)-(5.3) խնդրի երկու թույլատրելի հենքերն անվանենք հարևան հենքեր, իսկ նրանց համապատասխանող հենքային լուծումները՝ հարևան հենքային լուծումներ, եթե այդ հենքերը տարբերվում են միայն մեկ վեկտորով: Ավելորդ չէ նշել, որ հարևան հենքային լուծումները կարող են համընկնել, եթե խնդիրը վերածվող է:

Տրված հենքային լուծմանը հարևան հենքային լուծումը որոշելու համար հարկ է լինելու օգտվել m-չափանի վեկտորական տարածության հենքերին վերաբերող մի քանի հատկություններից, որոնք էապես կիրառվելու են ԳԾ խնդիրների լուծման սիմպլեքս եղանակի հիմնավորման և կիրառման ամբողջ ընթացքում: Հենքերի այդ մի քանի հատկությունները, որոնք սովորաբար չեն պարզաբանվում բարձրագույն հանրահաշվի դասական դասընթացներում, ստորև ներկայացված են երեք լեմով:

Ենթադրենք վեկտորների

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m \tag{5.5}$$

համախումբը R^m տարածության հենք է, իսկ $\bar{q}$-ն կամայական m-չափանի վեկտոր: Վերլուծենք $\bar{q}$-ն ըստ (5.5) հենքի

$$\bar{q} = \alpha_1\bar{p}_1 + \alpha_2\bar{p}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{p}_k + \ldots + \alpha_m\bar{p}_m, \tag{5.6}$$

և (6.5) հենքի $\bar{p}_k$ վեկտորը փոխարինենք $\bar{q}$ վեկտորով:

Լեմ 1: Որպեսզի վեկտորների

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{k-1}, \bar{q}, \bar{p}_{k+1}, \ldots, \bar{p}_m \tag{5.7}$$

համախումբը նույնպես լինի R^m տարածության հենք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\alpha_k \neq 0$:

$\mapsto$ *Անհրաժեշտություն*: Եթե (5.7) համախումբը հենք է, ապա իսկապես $\alpha_k \neq 0$: Հակառակ դեպքում (5.6)-ից կհետևեր, որ $\bar{q}$ վեկտորը գծայնորեն կախված է $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{k-1}, \bar{p}_{k+1}, \ldots, \bar{p}_m$ վեկտորներից, այսինքն՝ (5.7) համախումբը հենք լինել չի կարող:

Բավարարություն: Ենթադրենք $\alpha_k \neq 0$,

$$\beta_1 \cdot \bar{p}_1 + \ldots + \beta_{k-1} \cdot \bar{p}_{k-1} + \beta_k \cdot \bar{q} + \beta_{k+1} \cdot \bar{p}_{k+1} + \ldots + \beta_m \cdot \bar{p}_m = \bar{0} \quad (5.8)$$

և ցույց տանք, որ $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$: Նախ ցույց տանք, որ $\beta_k = 0$: Իրոք, եթե $\beta_k \neq 0$, ապա (5.8)-ից կունենանք

$$\begin{aligned} -\bar{q} = (\beta_1 / \beta_k) \cdot \bar{p}_1 + \ldots + (\beta_{k-1} / \beta_k) \cdot \bar{p}_{k-1} + \\ + (\beta_{k+1} / \beta_k) \cdot \bar{p}_{k+1} + \ldots + (\beta_m / \beta_k) \bar{p}_m: \end{aligned} \quad (5.9)$$

Գումարելով (5.6)-ին (5.9)-ը, կստանանք.

$$\begin{aligned} \bar{o} = (\alpha_1 + (\beta_1 / \beta_k)) \bar{p}_1 + \ldots + (\alpha_{k-1} + (\beta_{k-1} / \beta_k)) \bar{p}_{k-1} + \\ + \alpha_k \bar{p}_k + \ldots + (\alpha_m + (\beta_m / \beta_k)) \bar{p}_m: \end{aligned} \quad (5.10)$$

Սակայն քանի որ $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_k, \ldots, \bar{p}_n$, վեկտորները գծայնորեն անկախ են, ապա (5.10)-ից կհետևի, որ $\alpha_k = 0$, որը հակասում է տրված պայմանին: Ուրեմն $\beta_k = 0$: Այդ դեպքում (5.8)-ից կհետևի, որ $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$: ┘

Լեմ 2: Եթե $\beta_1, \ldots, \beta_m$ և $\beta'_1, \ldots, \beta'_m$ թվերը համապատասխանաբար կամայական $\bar{p}$ վեկտորի վերլուծության գործակիցներն են ըստ (5.5) և (5.7) հենքերի, ապա

$$\beta'_k = (\beta_k / \alpha_k), \ \beta'_i = \beta_i - (\beta_k / \alpha_k) \alpha_i, \ i \neq k, \ i = 1, 2, \ldots, m, \quad (5.11)$$

որտեղ α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ թվերը $\bar{q}$ վեկտորի վերլուծության գործակիցներն են ըստ (5.5) հենքի:

$\mapsto$ Ըստ պայմանի ունենք

$$\bar{p} = \beta_1 \cdot \bar{p}_1 + \beta_2 \cdot \bar{p}_2 + \ldots + \beta_k \cdot \bar{p}_k + \ldots + \beta_m \cdot \bar{p}_m \quad (5.12)$$

$$\bar{p} = \beta'_1 \cdot \bar{p}_1 + \beta'_2 \cdot \bar{p}_2 + \ldots + \beta'_k \cdot \bar{q}_k + \ldots + \beta'_m \cdot \bar{p}_m \quad (5.13)$$

$$\bar{q} = \alpha_1 \cdot \bar{p}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{p}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{p}_k + \ldots + \alpha_m \cdot \bar{p}_m, \ (\alpha_k \neq 0): \quad (5.14)$$

(5.13)-ի մեջ $\bar{q}$ վեկտորի փոխարեն տեղադրելով (5.14)-ը և խմբավորելով ըստ $\bar{p}_i$-երի՝ $i = 1, \ldots, m$, կունենանք

$$\overline{p} = (\beta_1' + \alpha_1\beta_k')\overline{p}_1 + \ldots + (\beta_{k-1}' + \alpha_{k-1}\beta_k')\overline{p}_{k-1} + $$
$$+ \alpha_k\beta_k'\overline{p}_k + \ldots + (\beta_m' + \alpha_m\beta_k')\overline{p}_m:$$

Համադրելով ստացված արտահայտությունը (5.12)-ի հետ և հաշվի առնելով, որ $\overline{p}$ վեկտորն ըստ տրված հենքի կարելի է վերլուծել միակ ձևով՝ կստանանք $\alpha_k \cdot \beta_k' = \beta_k$, $\beta_i' + \alpha_i\beta_k' = \beta_i$ $(i \neq k, i = 1,\ldots,m)$, այսինքն՝ (5.11)-ը: ⌟

Լեմ 3: Ենթադրենք $\overline{p}$ վեկտորի վերլուծության $\beta_1,\ldots,\beta_m$ գործակիցները ըստ (5.5) հենքի բացասական չեն և (5.6) վերլուծության մեջ $\alpha_k \neq 0$: Որպեսզի $\overline{p}$ վեկտորի վերլուծության $\beta_1',\ldots,\beta_m'$ գործակիցները ըստ (5.7) հենքի ևս բացասական չլինեն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (ա) $\alpha_k > 0$, (բ) $\min\limits_{\alpha_i > 0}(\beta_i / \alpha_i) = (\beta_k / \alpha_k)$:

↦ *Անհրաժեշտություն*: Համաձայն լեմ 2-ի $\beta_k' = \beta_k / \alpha_k$ և եթե $\beta_k \geq 0$, $\beta_k' \geq 0$ ապա պարզ է, որ $\alpha_k > 0$: Այնուհետև, քանի որ $\beta_i' = \beta_i - (\beta_k / \alpha_k)\alpha_i \geq 0$, $(i \neq k, i = 1,\ldots,m)$, ապա $\beta_i / \alpha_i \geq \beta_k / \alpha_k$, եթե $\alpha_i > 0$, $(i = 1,2,\ldots,m)$:

Ստացված անհավասարությունը նշանակում է, որ ճիշտ է նաև (բ) պայմանը:

Բավարարություն: Քանի որ ըստ (ա) պայմանի $\alpha_k > 0$, ապա $\beta_k \geq 0$ պայմանից կհետևի, որ $\beta_k' = \beta_k / \alpha_k \geq 0$: Այնուհետև, քանի որ $\beta_i' = \beta_i - \beta_k'\alpha_i$, ապա $\beta_i' \geq \beta_i \geq 0$, եթե $\alpha_i \leq 0$: Իսկ եթե $\alpha_i > 0$, ապա ըստ (բ) պայմանի $\beta_i / \alpha_i \geq \beta_k / \alpha_k$, հետևաբար $\beta_i' = \alpha_i(\beta_i / \alpha_i - \beta_k / \alpha_k) \geq 0$: ⌟

Ենթադրենք՝ վեկտորների $\overline{a}^{s_1},\ldots,\overline{a}^{s_m}$ համախումբը (5.1)-(5.3) խնդրի թույլատրելի հենք է, իսկ $\overline{a}^{l}$ վեկտորն այդ հենքին չպատկանող այնպիսի վեկտոր, որի վերլուծության գործակիցներից գոնե մեկն ըստ այդ հենքի դրական է:

Եթե $\min\limits_{x_{il} > 0}(x_{i0} / x_{il}) = x_{k0} / x_{kl}$, ապա ըստ 3-րդ լեմի, $\overline{a}^{s_k}$ վեկտորը փոխարինելով $\overline{a}^{l}$ վեկտորով, կունենանք տրված հենքի հարևան թույլատրելի հենքը: Ընդ որում, եթե

$$\alpha_j = \begin{cases} x_{i0}, \text{եթե } j = s_i, i = 1,...,m \\ 0, \quad \text{եթե } j \in N \end{cases} \tag{5.12}$$

կոորդինատներ ունեցող կետը սկզբնական հենքային լուծումն է, ապա հարևան հենքային լուծման $\alpha_j^{'}$ կոորդինատները ըստ 2-րդ լեմի կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$\alpha_j^{'} = \begin{cases} x_{i0} - (x_{k0} / x_{kl}) \cdot x_{il}, \text{ եթե } j = s_i, i = 1,...,m \\ x_{k0} / x_{kl}, \quad \text{եթե } j = l \\ 0, \quad \text{եթե } j \neq l, j \in N: \end{cases} \tag{5.13}$$

Հաշվենք (5.1) նպատակային ֆունկցիայի արժեքը (5.13)-ով որոշված կետում

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{'} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}(x_{i0} - \frac{x_{k0}}{x_{kl}} x_{il}) + \sum_{j \in N} c_j \alpha_j^{'} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0} - \frac{x_{k0}}{x_{kl}} \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{il} +$$

$$+ c_l \frac{x_{k0}}{x_{kl}} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0} - \frac{x_{k0}}{x_{kl}} [\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{il} - c_l] = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j - \frac{x_{k0}}{x_{kl}} \cdot \Delta_l:$$

Այսպիսով՝

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j^{'} = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j - \frac{x_{k0}}{x_{kl}} \Delta_l: \tag{5.14}$$

(5.14) բանաձևից հետևում է, որ եթե $\bar{a}^l$ վեկտորին համապատասխանող Δ_l գնահատականը փոքր է զրոյից, ապա (5.13)-ով որոշված վեկտորը կլինի այն հարևան հենքային լուծումը, որի համար նպատակային ֆունկցիայի արժեքի աճը $|(x_{k0} / x_{kl}) \cdot \Delta_l|$ է: Իսկ եթե $\Delta_l > 0$, ապա (5.13)-ով որոշված վեկտորի համար նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կնվազի $(x_{k0} / x_{kl}) \cdot \Delta_l$-ի չափով: Նշված հանգամանքն այն երաշխիքն է, որ հնարավորություն է տալիս խուսափել բոլոր հարևան հենքային լուծումները հատարկելուց և էապես կրճատել դիտարկվող հենքային լուծումների թիվը:

Հարկ է նշել, որ կարելի է բերել ԳԾ խնդիրների մտացածին օրինակներ, որոնց համար նման մոտեցումը չի բացառում բոլոր կամ համարյա բոլոր հենքային լուծումների հատարկումը:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ հենքին չպատկանող $\bar{a}^l$ վեկտորի, ըստ տրված հենքի, վերլուծության գործակիցները $x_{il} \leq 0$ $(i = 1,2,...,m)$: Այս դեպքում ըստ 3-րդ լեմի $\bar{a}^l$ վեկտոր պարունակող, տրված հենքին հարևան թույլատրելի հենք գոյություն չունի, սակայն ճիշտ է (5.1)-(5.3) խնդրի վերաբերյալ հետևյալ լեմը:

Լեմ 4: Եթե $\bar{a}^l$ վեկտորի՝ ըստ (5.1)-(5.3) խնդրի թույլատրելի հենքի վերլուծության x_{il} $i=1,\ldots,m$ գործակիցները դրական չեն և $\Delta_l < 0$ $(\Delta_l > 0)$, ապա խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմության վրա (5.1) նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է վերևից (ներքևից):

↦ Օգտվելով (5.2) հավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունը ներկայացնող (4.6) բանաձևից՝

$$x_{s_i} = x_{i0} - \sum_{j \in N} x_{ij} x_j \ , \ i = 1,2,\ldots,m$$

որոշենք (5.2) համակարգի այն բոլոր լուծումների ենթաբազմությունը, որոնք ստացվում են ազատ անհայտների $x_l = \theta$, $x_j = 0$, $(j \in N, j \neq l)$ արժեքների համար: Դժվար չէ ստուգել, որ ստացված

$$x_j(\theta) = \begin{cases} x_{i0} - \theta x_{il}, & \text{եթե } j = s_i, i = 1,\ldots,m \\ \theta, & \text{եթե } j = l \\ 0, & \text{եթե } j \in N, j \neq l \end{cases} \qquad (5.15)$$

վեկտորը ցանկացած ոչ բացասական θ-ի համար (5.1)-(5.3) խնդրի թույլատրելի լուծում է:

Հաշվենք (5.1) նպատակային ֆունկցիայի արժեքը (5.15)-ով որոշված կետում.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j(\theta) = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}(x_{i0} - \theta \cdot x_{il}) + c_l \cdot \theta = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \cdot x_{i0} - \theta \cdot \Delta_l :$$

Այսպիսով,

$$\lim_{\theta \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j(\theta) = \begin{cases} +\infty, & \text{եթե } \Delta_l < 0 \\ -\infty, & \text{եթե } \Delta_l > 0, \end{cases}$$

ինչ որ պետք էր ապացուցել: ↲

Հետևանք: Եթե հերթական հենքին չպատկանող գոնե մեկ $\bar{a}^l$ վեկտորի վերլուծության գործակիցները՝ $x_{il} \le 0$, $i = 1,\ldots,m$ և $\Delta_l < 0$, $(\Delta_l > 0)$, ապա բացառելով մնացած հենքային լուծումների դիտարկումը՝ բացահայտվում է մաքսիմացման (մինիմացման) խնդրի լուծում չունենալու փաստը:

§ 6. Սիմպլեքս ալգորիթմ

ԳԾ խնդիրների լուծման սիպլեքս եղանակը համառոտակի կարելի է բնութագրել որպես խնդրի լուծում գտնելու կամ լուծում չլինելու փաստը բացահայտելու վերջավոր և ամենակարևորը, որպես կանոն, բոլոր հենքային լուծումների հատարկումը բացառող, կարգավորված հաջորդական գործողությունների շարք:

Նկարագրենք (5.1)-(5.3) խնդրի լուծման սիմպլեքս եղանակը մաքսիմացման դեպքի համար:

Նախնական քայլ: Որոշել (5.1)-(5.3) խնդրի որևէ $B^{(0)} = \{\bar{a}^{s_1}, \ldots, \bar{a}^{s_m}\}$ սկզբնական թույլատրելի հենքը (թե ինչպես որոշել $B^{(0)}$ հենքը, տե'ս, §7):

Քայլ 1: Որոշել, ըստ հերթական $B^{(p)}$ թույլատրելի հենքի, $\bar{a}^j$ $(j = 0,1,\ldots,n)$ վեկտորների վերլուծության $x_{ij}^{(p)}$, $(i = 1,\ldots,m)$ գործակիցները, (5.2) հավասարումների համակարգը հենքային $x_{s_1},\ldots,x_{s_m}$ անհայտների նկատմամբ լուծելու, իսկ եթե $p \ge 1$, հաշվողական տեսակետից ավելի հարմար

$$x_{ij}^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{x_{ij}^{(p-1)}}{x_{kl}^{(p-1)}}, i = k, j = 0,1,\ldots,n \\ x_{ij}^{(p-1)} - \dfrac{x_{kj}^{(p-1)}}{x_{kl}^{(p-1)}} x_{il}^{(p-1)}, i \ne k, i = 1,\ldots,m \end{cases} \quad (6.1)$$

անդրադարձ բանաձևի միջոցով (տե'ս, (5.11)-ը):

Քայլ 2: Հաշվել $\Delta_j^{(p)} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ij}^{(p)} - c_j$, $j \in N$: (6.2)

Քայլ 3: Որոշել $M^{(p)} = \{j | \Delta_j^{(p)} < 0\}$ բազմությունը: Եթե $M^{(p)} = \varnothing$, ապա ըստ հենքային լուծման օպտիմալության հայտանիշի՝

$$x_j^{(p)} = \begin{cases} x_{i0}^{(p)}, \text{եթե } j = s_1,\ldots,s_m \\ 0, \quad \text{եթե } j \ne s_i, i = 1,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

կոորդինատներ ունեցող հենքային լուծումը կլինի լավագույն լուծում, իսկ $\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{i0}^{(p)}$ նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեք. այսինքն խնդրի լուծումն ավարտված է:

Քայլ 4: Եթե $M^{(p)} \ne \varnothing$, ապա որոշել $R_j^{(p)} = \{i | x_{ij}^{(p)} > 0\}$, $j \in M^{(p)}$ բազմությունները: Եթե $R_j^{(p)}$ բազմություններից գոնե մեկը դատարկ է, ապա ըստ §5-ի 4-րդ լեմի (5.1) նպատակային ֆունկցիան թույլատբելի լուծումների բազմության վրա անսահմանափակ է վերևից, և խնդրի հետազոտումն ավարտված է, քանի որ այն լուծում չունի:

Քայլ 5: Եթե $R_j^{(p)} \neq \varnothing$, $j \in M^{(p)}$, ապա նշել $M^{(p)}$ բազմությանը պատկանող ցանկացած l թիվ, և այդ թվին համապատասխանող $\dfrac{x_{0k}}{x_{kl}^{(p)}} = \min\limits_{x_{il}^{(p)}>0} \dfrac{x_{0i}^{(p)}}{x_{il}^{(p)}}$ պայմանով որոշված k թիվը:

Քայլ 6: Փոխարինել $B^{(p)}$ թույլատրելի հենքի $\bar{a}^{s_k}$ վեկտորը $\bar{a}^{l}$ վեկտորով և $B^{(p)}$ հենքի հարևան $B^{(p+1)} = \{\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_{k-1}},\bar{a}^{l},\bar{a}^{s_{k+1}},\ldots,\bar{a}^{s_m}\}$ թույլատրելի հենքի համար կրկնել քայլերի հաջորդականությունը (սկսած առաջին քայլից):

Եթե (5.1)-(5.3) խնդիրը վերածվող չէ, այսինքն նրա հենքային լուծումներից յուրաքանչյուրի համար $x_{k0}^{(p)} > 0$, իսկ $\Delta_l < 0$, ապա ըստ

$$f(x^{(p+1)}) = f(x^{(p)}) - \frac{x_{k0}^{(p)}}{x_{kl}^{(p)}}\Delta_l^{(p)}$$

բանաձևի (տե՛ս, (5.14)) հեշտ է համոզվել, որ սիմպլեքս եղանակով որոշված հաջորդական հարևան հենքային լուծումների համար

$$f(x^{(p+1)}) > f(x^{(p)}),\ p = 0,1,\ldots: \qquad (6.3)$$

Մյուս կողմից, քանի որ (5.1)-(5.3) խնդրի հենքային լուծումների թիվը վերջավոր է, ապա իրարից տարբեր հարևան հենքային լուծումներին համապատասխանող (6.3) հաջորդականությունը նույնպես կլինի վերջավոր: Հետևաբար, վերջավոր թվով բազմակրկնություններից հետո կամ կորոշվի լավագույն հենքային լուծումը (երբ $\Delta_j \geq 0$, $j \in N$, տե՛ս 3-րդ քայլը), կամ կբացահայտվի նպատակային ֆունկցիայի վերևից անսահմանափակ լինելու փաստը (տե՛ս, 4-րդ քայլը):

Այսպիսով, կարելի է պնդել, որ ցանկացած չվերածվող ԳԾ խնդրի հետազոտումը կավարտվի սիմպլեքս ալգորիթմի վերջավոր թվով բազմակրկնությունների միջոցով: Որպեսզի հնարավոր լինի իրականացնել սիմպլեքս ալգորիթմի հերթական $(p+1)$-րդ բազմակրկնությունը, արդեն ընտրված $B^{(p+1)}$ թույլատրելի հենքի համար, անհրաժեշտ է ունենալ $\bar{a}^{j}$ վեկտորների վերլուծության $x_{ij}^{(p)}$ $(i = 1,\ldots,m; j = 0,\ldots,n)$ գործակիցները և օպտիմալության հայտանիշի

$\Delta_j^{(p)}$ $(j \in N)$ գնահատականները ըստ $B^{(p)}$ հենքի: Հարմար է, որ վերլուծության $x_{ij}^{(p)}$ գործակիցները, $\Delta_j^{(p)}$ գնահատականները և խնդրի այլ պարամետրերը ամփոփ ձևով ներկայացվեն, այսպես կոչված, սիմպլեքս աղյուսակի միջոցով: Նկարագրենք p-րդ բազմակրկնությանը համապատասխանող ընթացիկ սիմպլեքս աղյուսակի կառուցվածքը:

Ընթացիկ սիմպլեքս աղյուսակ

հենք	$c_հ$	$\bar{a}^0$	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	...	$\bar{a}^l$	...	$\bar{a}^n$	θ
	-1	c_0	c_1	c_2	...	c_l	...	c_n	
$\bar{a}^{s_1}$	c_{s_1}	x_{10}	x_{11}	x_{12}	...	x_{1l}	...	x_{1n}	
$\bar{a}^{s_2}$	c_{s_2}	x_{2n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2l}	...	x_{2n}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$\bar{a}^{s_k}$	c_{s_k}	x_{k0}	x_{k1}	x_{k2}	...	x_{kl}	...	x_{kn}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$\bar{a}^{s_m}$	c_{s_m}	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{ml}	...	x_{mn}	
	Δ_j	Δ_0	Δ_1	Δ_2	...	Δ_l	...	Δ_n	

Ընթացիկ սիմպլեքս աղյուսակի առաջին տողում գրված են -1 թիվը, նպատակային ֆունկցիայի c_0 ազատ անդամը և $c_1, c_2, \dots, c_n$ գործակիցները, իսկ վերջին տողում՝ ընթացիկ հենքային լուծմանը համապատասխանող նպատակային ֆունկցիայի Δ_0 արժեքը և այդ հենքային լուծման օպտիմալության հայտանիշի $\Delta_1, \dots, \Delta_l, \dots, \Delta_n$ գնահատականները:

Աղյուսակի “հ” սյունակում նշված են հերթական թույլատրելի հենքի ոչ անպայման կարգավորված $\bar{a}^{s_1}, \dots, \bar{a}^{s_m}$ վեկտորները, “$c_հ$”-ի սյունակում՝ նպատակային ֆունկցիայի հենքային փոփոխականների $c_{s_1}, \dots, c_{s_m}$ գործակիցները, իսկ հաջորդ յուրաքանչյուր $\bar{a}^j$ -ին համապատասխանող սյունակում գրված են $\bar{a}^j$ $(j = 0,1,\dots,n)$ վեկտորի վերլուծության x_{ij} գործակիցներն ըստ ընթացիկ $\bar{a}^{s_1}, \dots, \bar{a}^{s_m}$ հենքի: Վերջին “θ” սյունակը լրացվում է միայն այն տողերի x_{i0} / x_{il} հարաբերություններով, որոնք համապատասխանում են ընտրված $\bar{a}_l$ սյունակի x_{il} դրական տարրերին:

Համառոտակի նկարագրենք բերված սիմպլեքս աղյուսակի միջոցով հաջորդ $(p+1)$-րդ բազմակրկնությանը համապատասխանող սիմպլեքս աղյուսակն ստանալու եղանակը: Ենթադրենք՝ ընթացիկ սիմպլեքս աղյուսակի վերջին տողում գոյություն ունի գոնե մեկ այնպիսի $\Delta_l < 0$ գնահատական, որին համապատասխանող $\bar{a}^l$-ի սյունակի x_{il} $(i = s_1,\ldots,s_m)$ թվերից գոնե մեկը դրական է (հակառակ դեպքում, եթե $\Delta_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$ կամ եթե $\Delta_l < 0$, սակայն $x_{il} \leq 0$, $i = s_1,\ldots,s_m$, ապա խնդրի հետազոտումն ավարտված կլիներ): "θ" սյունակում լրացված թվերի նվազագույնին համապատասխանող k-րդ տողի $\bar{a}^{s_k}$ վեկտորը փոխարինելով $\bar{a}^l$ վեկտորով՝ կունենանք հաջորդ թույլատրելի հարևան հենքը: Պարզ է, որ $(p+1)$-րդ սիմպլեքս աղյուսակի առաջին տողը կմնա անփոփոխ, "հ" սյան $\bar{a}^{s_k}$ հենքային վեկտորը կփոխարինվի $\bar{a}^l$ վեկտորով, "$c_հ$" սյան c_{s_k} գործակիցը c_l-ով, իսկ աղյուսակի մնացած տարրերը կհաշվարկվեն սիմպլեքս աղյուսակի ձևափոխման (6.1), (6.2) և (5.14) բանաձևերով:

§ 7. Սկզբնական թույլատրելի հենքի որոշումը

Ենթադրենք՝ տրված է կանոնական տեսքի ԳԾ խնդիր.

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{7.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{7.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{7.3}$$

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $b_i \geq 0$, $(i = 1,2,\ldots,m)$: Այս խնդրի սկզբնական թույլատրելի հենքը գտնելու համար միաժամանակ դիտարկենք հետևյալ օժանդակ խնդիրը.

$$\tilde{f} = -x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m} \to \max \tag{7.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{7.5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,(n+m) \tag{7.6}$$

Քանի որ $x_j = 0$, $(j = 1,2,\ldots,n)$, $x_{n+i} = b_i$, $(i = 1,2,\ldots,m)$ թվերը բավարարում են (7.5)-(7.6) սահմանափակումներին և թույլատրելի լուծումների բազմության վրա $\tilde{f} \le 0$, ապա օժանդակ խնդիրն ունի լավագույն լուծում:

Բացի այդ, հեշտ է տեսնել, որ $\bar{a}^{n+1}, \bar{a}^{n+2}, \ldots, \bar{a}^{n+m}$ միավոր վեկտորների համախումբը օժանդակ խնդրի թույլատրելի հենք է, և ըստ այդ հենքի $\bar{a}^j$ $(j = 0,1,\ldots,n)$ վեկտորների վերլուծության x_{ij} գործակիցները հավասար կլինեն a_{ij}-ի: Այսպիսով, ունենալով թույլատրելի հենքը՝ օժանդակ խնդիրը կարելի է լուծել սիմպլեքս եղանակով և որոշել ինչպես $\tilde{f}_{\max}$-ը, այնպես էլ $\bar{a}^{s_1}, \bar{a}^{s_2}, \ldots, \bar{a}^{s_m}$ լավագույն հենքը: Նկարագրենք այն բավարար պայմանները, որոնց առկայության դեպքում (7.4)-(7.6) խնդրի լավագույն հենքը (7.1)-(7.3) խնդրի համար թույլատրելի հենք է:

Լեմ 1: Որպեսզի (7.1)-(7.3) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ չլինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\tilde{f}_{\max} = 0$:

↦ *Անհրաժեշտություն*: Ենթադրենք, որ (7.1)-(7.3) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ չէ, և $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորը այդ թույլատրելի լուծումներից մեկն է: Այդ դեպքում հեշտ է նկատել, որ $(m+n)$-չափանի $\bar{\eta} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$ վեկտորը (7.4)-(7.6) խնդրի թույլատրելի լուծում է, որի համար $\tilde{f}(\bar{\eta}) = 0$: Մյուս կողմից, (7.4)-(7.6) խնդրի ամեն մի թույլատրելի լուծման համար $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_{n+m}) \le 0 = \tilde{f}(\bar{\eta})$: Հետևաբար, $\bar{\eta}$ վեկտորը օժանդակ խնդրի լավագույն լուծումն է, իսկ $\tilde{f}_{\max} = 0$:

Բավարարություն: Ենթադրենք՝ $\tilde{f}_{\max} = 0$: Այս դեպքում ակնհայտ է, որ (7.4)-(7.6) խնդրի լավագույն լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $\bar{\eta}^* = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, 0, 0, \ldots, 0)$:

Քանի որ $\bar{\eta}^*$ վեկտորի կոորդինատները բավարարում են օժանդակ խնդրի սահմանափակումներին, ապա $\bar{\eta}^*$ վեկտորի $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ կոորդինատներն էլ կբավարարեն (7.2)-(7.3) համակարգին, որն էլ կնշանակի, որ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ չէ: ↵

Լեմ 2: Եթե $\tilde{f}_{\max}=0$, ապա գոյություն ունի $\bar{a}^1,\bar{a}^2,\ldots,\bar{a}^n$ վեկտորների բազմությանը պատկանող օժանդակ խնդրի $\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_m}$ լավագույն հենք:

$\mapsto$ Եթե $\tilde{f}_{\max}=0$, ապա, ինչպես տեսանք, (7.4)-(7.6) խնդրի լավագույն լուծման վերջին m բաղադրիչները հավասար կլինեն զրոյի, հետևաբար, եթե խնդիրը չվերածվող է, ապա լեմը ճիշտ է: Իսկ եթե խնդիրը վերածվող է, ապա նրան համապատասխանող հենքերից լեմի պայմաններին բավարարող հենքը կարելի է որոշել վերջավոր թվով սիմպլեքս ձևափոխությունների միջոցով:

Այսպիսով, լուծելով (7.4)-(7.6) օժանդակ խնդիրը՝ կամ կհայտնաբերենք, որ (7.1)-(7.3) խնդիրը թույլատրելի լուծումներ չունի ($\tilde{f}_{\max}\neq 0$), կամ կորոշենք այն $\bar{a}^{s_1},\ldots,\bar{a}^{s_m}$ լավագույն հենքը, որը կբավարարի լեմի պայմաններին: Եվ քանի որ $\bar{a}^0$ վեկտորի վերլուծության գործակիցները ըստ այդ հենքի կլինեն ոչ բացասական, ապա այն կդառնա (7.1)-(7.3) խնդրի համար թույլատրելի հենք:

Նկարագրենք §3-ի սկզբում դիտարկված "նորմալ կերի" խնդրին համապատասխանող ԳԾ խնդիրը կամ այդ խնդրին համարժեք, կանոնական տեսքով

$$f=3x_1+2x_2+5x_3\to\min$$

$$\begin{cases}50x_1+20x_2+180x_3-x_4=2000\\ 6x_1+4x_2+3x_3-x_5=120\\ 2x_1+x_2+x_3-x_6=44\\ x_j\geq 0;\ j=1,2,\ldots,6,\end{cases}\tag{7.7}$$

ԳԾ խնդրի լուծման սիմպլեքս եղանակը: Նկատենք, որ (7.7) ԳԾ խնդրի x_4,x_5,x_6 փոփոխականները արտահայտում են կերաբաժնի պարունակած սպիտակուցի, կալցիումի և վիտամինների նվազագույն քանակություններին գերազանցող մեծություններ:

(7.7) խնդրի սկզբնական թույլատրելի $B^{(0)}$ հենքը որոշելու համար լուծենք դրան համապատասխանող օժանդակ խնդիրը (տե'ս, §7) կամ այդ խնդրին համարժեք հետևյալ ԳԾ խնդիրը.

$$\tilde{f}=x_7+x_8+x_9\to\min$$

$$\begin{cases}50x_1+20x_2+180x_3-x_4+x_7=2000,\\ 6x_1+4x_2+2x_3-x_5+x_8=120,\\ 2x_1+x_2+x_3-x_6+x_9=44,\\ x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,9,\end{cases}\tag{7.8}$$

որտեղ x_7, x_8, x_9 փոփոխականները սրտահայտում են՝ թե ինչքանով են պակաս վարսակի, առվույտի և եգիպտացորենի համակցությամբ կերաբաժնի սպիտակուցի, կալցիումի և վիտամինների նվազագույն քանակությունները, իսկ $\tilde{f}$ ֆունկցիան՝ ձրի կերատեսակների առկայության պայմաններում վճարովի (մեկի հավասար պայմանական գներով) սննդային տարրերով բաղկացած կերաբաժնի գինը:

Եթե $\tilde{f}_{\min} = 0$, կնշանակի կերատեսակների համակցությամբ (առանց վճարովի սննդային տարրերի) "նորմալ կերի" խնդրի պահանջներին բավարարող կերաբաժին գոյություն ունի, հակառակ դեպքում՝ եթե $\tilde{f}_{\min} > 0$, ապա կնշանակի դրանց համակցությամբ այդպիսի կերաբաժին գոյություն չունի, այսինքն՝ (7.7) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը դատարկ է, և, հետևաբար, այդ խնդիրը լուծում չունի: Կազմենք (7.8) խնդրի $\bar{a}^7, \bar{a}^8, \bar{a}^9$ միավոր վեկտորներից բաղկացած թույլատրելի հենքին համապատասխանող սիմպլեքս աղյուսակը:

հ	$c_հ$	$\bar{a}^0$	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	$\bar{a}^3$	$\bar{a}^4$	$\bar{a}^5$	$\bar{a}^6$	$\bar{a}^7$	$\bar{a}^8$	$\bar{a}^9$	θ
	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
$\bar{a}^7$	1	2000	50	20	180	-1	0	0	1	0	0	40
$\bar{a}^8$	1	120	6	4	3	0	-1	0	0	1	0	20
$\bar{a}^9$	1	44	2	1	1	0	0	-1	0	0	1	22
	Δ_j	2164	58	25	184	-1	-1	-1	0	0	0	

աղյուսակ 3.2

Ստացված աղյուսակի թվային տարրերին կարելի է տալ "նորմալ կերի" խնդրի բովանդակությանը համապատասխանող իմաստային մեկնաբանումներ: Աղյուսակի "$\bar{a}^0$"-ին համապատասխանող սյունակի հաջորդական երեք թվերը, սկսած երկրորդից, ցույց են տալիս միայն վճարովի սննդային տարրերից բաղկացած կերաբաժնի կառուցվածքը (2000 մգ սպիտակուց, 120 մգ կալցիում, 44 մգ վիտամիններ), իսկ 2164 թիվը՝ այդ կերաբաժնի համար ծախսվելիք գումարը: Աղյուսակի "$\bar{a}^1$"-ին համապատասխանող սյունակի հաջորդական երեք թվերը, սկսած երկրորդից, ցույց են տալիս կերաբաժնի մեջ սննդային տարրերի այն չափաքանակները (50 մգ սպիտակուց, 6 մգ կալցիում, 2 մգ վիտամիններ), որոնք կարելի է փոխարինել 1 կգ վարսակով, իսկ 58 թիվը ցույց է տալիս այդպիսի փոխարինման հետևանքով կերաբաժնի մեջ սննդային տարրերի փոխարինված չափաքանակներին համապատասխանող ծախսերի և այդ փոխարինման համար 1 կգ վարսակի գնի չափով կատարված ծախսի տարբերությունը ($\mathbf{50 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 58}$):

Այսպիսով, տրված թույլատրելի կերաբաժնի մեջ վարսակի յուրաքանչյուր 1 կգ-ի օգտագործման դեպքում կերաբաժնի վրա կատարվելիք ծախսերը կրճատվում են 58-ով: Սակայն վարսակի առավելագույն քանակությունը, որով կարելի է փոխարինել տրված կերաբաժնի սննդային տարրերը, չի կարող 2000:50=40, 120:6=20, 44:2=22 թվերի յուրաքանչյուրից ավելին լինել (տե՛ս, աղյուսակի "θ"-սյունակը), քանի որ վարսակով կարելի է փոխարինել սննդային տարրերի միայն կերաբաժնի պարունակած քանակությունները: Նման մեկնաբանություններ կարելի է տալ 1-ին սիմպլեքս աղյուսակի նաև մյուս սյունակներում գրված թվային մեծություններին:

Շարունակելով կերաբաժնի մեջ վարսակի օգտագործման հետևանքների քննարկումը՝ նշենք, որ դրա մեջ վարսակի առավելագույն թույլատրելի 20 կգ-ի օգտագործումը կհանգեցնի կերաբաժնի կառուցվածքի այնպիսի փոփոխության, որ վճարովի կալցիումն ամբողջությամբ կփոխարինվի 20 կգ վարսակի պարունակած կալցիումով:

Տրված $\bar{a}^7, \bar{a}^8, \bar{a}^9$ հենքի $\bar{a}^8$ վեկտորը փոխարինելով $\bar{a}^1$ վեկտորով, այնուհետև՝ ստացված $\bar{a}^7, \bar{a}^1, \bar{a}^9$ հենքի $\bar{a}^9$ վեկտորը $\bar{a}^5$ վեկտորով և, վերջապես, $\bar{a}^7, \bar{a}^1, \bar{a}^5$ հենքի $\bar{a}^7$ վեկտորը $\bar{a}^6$ վեկտորով՝ կստանանք հարևան թույլատրելի հենքեր, որոնց կհամապատասխանեն հետևյալ երեք սիմպլեքս աղյուսակները.

հ	$c_հ$	$\bar{a}^0$	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	$\bar{a}^3$	$\bar{a}^4$	$\bar{a}^5$	$\bar{a}^6$	$\bar{a}^7$	$\bar{a}^8$	$\bar{a}^9$	θ
	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
$\bar{a}^7$	.1	1000	0	-80/6	155	-1	50/6	0	1	-50/6	0	1000/155
$\bar{a}^1$	0	20	1	4/6	3/6	0	-1/6	0	0	1/6	0	
$\bar{a}^9$	1	4	0	-2/6	0	0	2/6	-1	0	-2/6	1	12
	Δ_j	1004	0	-82/6	155	-1	52/6	-1	0	-58/6	0	

աղյուսակ 3.3

հ	$c_հ$	$\bar a^0$	$\bar a^1$	$\bar a^2$	$\bar a^3$	$\bar a^4$	$\bar a^5$	$\bar a^6$	$\bar a^7$	$\bar a^8$	$\bar a^9$	θ
	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
$\bar a^7$	1	900	0	-5	155	-1	0	**25**	1	0	-25	36
$\bar a^1$	0	22	1	1/2	1/2	0	0	-1/2	0	0	1/2	
$\bar a^5$	0	12	0	-1	0	0	1	-3	0	-1	3	
	Δ_j	900	0	-5	155	-1	0	25	0	-1	-26	

աղյուսակ 3.4

հ	$c_հ$	$\bar a^0$	$\bar a^1$	$\bar a^2$	$\bar a^3$	$\bar a^4$	$\bar a^5$	$\bar a^6$	$\bar a^7$	$\bar a^8$	$\bar a^9$
	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$\bar a^6$	0	36	0	-1/5	31/5	-1/25	0	1	1/25	0	-1
$\bar a^1$	0	40	1	**2/5**	18/5	-1/50	0	0	1/50	0	0
$\bar a^5$	0	120	0	-8/5	93/5	-3/25	1	0	3/25	-1	0
	Δ_j	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

աղյուսակ 3.5

$\bar a^6,\bar a^1,\bar a^5$ հենքին համապատասխանող կերաբաժինը վճարովի սննդային տարրեր չի պարունակում և նրա վրա կատարված ծախսերի գումարը զրո է ($\tilde f_{\min}=0$): Հետևաբար $\bar a^6,\bar a^1,\bar a^5$, հենքը (7.7) խնդրի թույլատրելի հենք է, որին համապատասխանող սիմպլեքս աղյուսակը 3.5-րդ աղյուսակից ստանալու համար բավական է վերականգնել կերատեսակների իրական գները և հաշվել այդ գներին համապատասխանող $\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_6$ թվերը:

հ	$c_հ$	$\bar a^0$	$\bar a^1$	$\bar a^2$	$\bar a^3$	$\bar a^4$	$\bar a^5$	$\bar a^6$	θ
	-1	0	3	2	5	0	0	0	
$\bar a^6$	0	36	0	-1/5	**31/5**	-1/25	0	1	36:31/5
$\bar a^1$	3	40	1	2/5	18/5	-1/50	0	0	40:2/5
$\bar a^5$	0	120	0	-8/5	93/5	-3/25	1	0	120:93/5
	Δ_j	120	0	-4/5	29/5	-3/50	0	0	

աղյուսակ 3.6

Այսպիսով, (7.7) խնդրի $\bar{a}^6, \bar{a}^1, \bar{a}^5$ թույլատրելի հենքին համապատասխանող սիմպլեքս աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը.

Աղյուսակ 3.6-ում կերաբաժնի կառուցվածքը բնութագրող "$\bar{a}^0$" սյունակի թվերից հետևում է, որ կերաբաժինը պարունակում է 40 կգ վարսակ, որի հետևանքով կերաբաժնի մեջ վիտամինների պահանջվող նվազագույն քանակությանը գերազանցող մեծությունը 36 մգ է, կալցիումինը՝ 120 մգ, իսկ գինը՝ 120: Առվույտը բնութագրող "$\bar{a}^2$" սյունակի թվերից հետևում է, որ 1 կգ առվույտը կարող է փոխարինել 2/5 կգ վարսակի, ընդ որում կերաբաժնում վիտամինների հավելուրդը կաճի 1/5 մգ-ով, կալցիումինը՝ 8/5 մգ-ով, իսկ այդ փոխարինման հետևանքով կերաբաժնի վրա կատարված ծախսերը կաճեն 4/5 միավորով: Եգիպտացորենը բնութագրող "$\bar{a}^3$"-ի սյունակի թվերից հետևում է, որ 1 կգ եգիպտացորենը կարող է փոխարինել 18/5 կգ վարսակի (կերաբաժնի մեջ օգտագործվելիք վարսակի քանակությունը կնվազի 3,6 կգ-ով), 31/5 մգ վիտամինների և 93/5 մգ կալցիումի, իսկ այդ փոխարինման հետևանքով կերաբաժնի վրա կատարված ծախսերը կնվազեն 29/5 միավորով:

$\{\bar{a}^6, \bar{a}^1, \bar{a}^5\}$ հենքի $\bar{a}^6$ վեկտորը փոխարինելով $\bar{a}^3$ վեկտորով՝ կստանանք հետևյալ սիմպլեքս աղյուսակը.

հ	$c_հ$	$\bar{a}^0$	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	$\bar{a}^3$	$\bar{a}^4$	$\bar{a}^5$	$\bar{a}^6$
	-1	0	3	2	5	0	0	0
$\bar{a}^3$	5	180/31	0	-1/31	1	-1/155	0	5/31
$\bar{a}^1$	3	592/31	1	16/31	0	1/310	0	-18/31
$\bar{a}^5$	0	12	0	-1	0	0	1	-3
	Δ_j	2676/31	0	-19/31	0	-7/310	0	-29/31

աղյուսակ 3.7

Ինչպես տեսնում ենք, կերաբաժնի կառուցվածքի ցանկացած փոփոխություն հանգեցնում է կերաբաժնի համար կատարվելիք ծախսերի աճի հետևաբար, տրված հենքին համապատասխանող $x_1^* = 592/31$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 180/31$ վեկտորը լավագույն լուծումն է, իսկ 2676/31=86,32-ը՝ նվազագույն ծախսը: Շարունակելով խնդրի հետազոտումը՝ որոշենք §3-ում բերված "նորմալ կերի" խնդրին համապատասխանող երկակի խնդրի y_1^*, y_2^*, y_3^* լավագույն լուծումը:

Հավասարակշռության թեորեմի համաձայն (տե՛ս, §3) անհրաժեշտ է և բավարար, որ y_1^*, y_2^*, y_3^* վեկտորը բավարարի հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases}(50y_1 + 6y_2 + 2y_3 - 3)x_1^* = 0\\(20y_1 + 4y_2 + y_3 - 2)x_2^* = 0\\(180y_1 + 3y_2 + y_3 - 5)x_3^* = 0\\(6x_1^* + 4x_2^* + 3x_3^* - 120)y_2 = 0\\y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\end{cases}$$

կամ

$$\begin{cases}50y_1 + 6y_2 + 2y_3 = 3\\20y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 2\\180y_1 + 3y_2 + y_3 = 5\\y_2 = 0\\y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0\end{cases}$$

համակարգին:

Երկակի խնդրի լավագույն լուծումը կլինի $y_1^* = 7/310$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 29/31$: Սա նշանակում է, որ կերաբաժնի պարունակելիք կալցիումի նվազագույն քանակության աճը չի հանգեցնի կերաբաժնի գնի աճի: Ինչ վերաբերում է կերաբաժնի պարունակելիք սպիտակուցի և վիտամինների նվազագույն քանակություններին, ապա դրանցից յուրաքանչյուրի նվազագույն քանակությունները ±1 մգ-ով փոփոխելու դեպքում կերաբաժնի նվազագույն գինը համապատասխանաբար կփոխվի ±7/310, ±29/31 միավորով:

§ 8. Խնդիրներ և վարժություններ

Լուծել հետևյալ ԳԾ խնդիրները.

1. Ձեռնարկությունն իր երեք տեսակ սահմանափակ ռեսուրսներով պատրաստվում է արտադրել երկու տեսակ արտադրանք, որոնցից յուրաքանչյուրի համար կարելի է օգտագործել երկու տարբեր տեխնոլոգիաներ: Որոշել, թե որ արտադրանքից ինչ տեխնոլոգիայով և ինչքան պետք է արտադրել, որպեսզի սպասվելիք շահույթը լինի առավելագույնը, եթե հա՛յտնի են յուրաքանչյուր տեխնոլոգիայով միավոր արտադրանքի համար ռեսուրսների ծախսերը, սպասվելիք շահույթները և ռեսուրսների պաշարները, որոնք բերված են 3.8 աղյուսակում:

Ռեսուրս	Միավոր արտադրանքի վրա կատարվող ծախսը				Ռեսուրսների պաշարները
	"Ա" արտադրանքի վրա		"Բ" արտադրանքի վրա		
	I տեխնոլոգիա	II տեխնոլոգիա	I տեխնոլոգիա	II տեխնոլոգիա	
մեքենա	5	4	3	2	100000
արկղ	3	4	8	8	12000
աշխատող	1	1	1	1	20000
Միավոր արտադրանքից սպասվելիք շահույթը	40	50	80	70	

աղյուսակ 3.8

2. Իր բյուջեից ամսական հատկացնելով 4 մլն. դրամ՝ ձեռնարկությունը ցանկանում է գովազդել իր արտադրանքը՝ օգտվելով հեռուստատեսությունից և ռադիոյից: Այդ գումարը պետք է երկու օբյեկտների միջև այնպես բաշխել, որ գովազդը ապահովի ձեռնարկության արտադրանքի առավելագույն իրացումը: Հայտնի է որ հեռուստատեսությամբ և ռադիոյով գովազդի մեկ րոպեն արժե համապատասխանաբար 20000 և 2000 դրամ: Նախորդ ժամանակաշրջանի փորձը վկայում է, որ հեռուստագովազդի մեկ րոպեն ապահովում է 25 անգամ շատ արտադրանքի իրացում, քան ռադիոգովազդինը, բայց, չնայած դրան, ձեռնարկությունը որոշել է ռադիոցանցն օգտագործել 2 անգամ ավելի հաճախ, քան հեռուստատեսությունը:

Օգտագործելով խնդրի տեղեկությունները՝

- որոշել գովազդին հատկացվող այն գումարի սահմանը, որը գերազանցելիս լավագույն լուծումը չի փոխվի,
- որոշել այն պայմանները, որոնցում գովազդը կարելի է իրականացնել միայն ռադիոյով:

3. Բանկն իր ունեցած ազատ դրամական միջոցները կարող է օգտագործել երկու նախագծերի ֆինանսավորման համար: 1-ին նախագիծը երաշխավորում է ներդրումից մեկ տարի անց յուրաքանչյուր 100 դրամի դիմաց 70 դրամ շահույթ, 2-րդ նախագիծը՝ յուրաքանչյուր 100 դրամի դիմաց 200 դրամ շահույթ, բայց երկու տարի անց: 1-ին նախագիծը ֆինանսավորելու դեպքում ներդրումներ կարելի է կատարել ամեն տարի, իսկ 2-րդի դեպքում՝ երկու տարին մեկ: 40 մլն. դրամ կապիտալը երկու նախագծերի միջև ըստ տարիների ինչպե՞ս բաշխել, որ սպասվող շահույթը, ներդրումները կատարվելուց երեք տարի անց, լինի առավելագույնը:

4. Ցանկապատ ձևավորող վարպետը 220 սմ երկարությամբ մետաղյա ձողերից կտրում է 90, 100, 120 սմ երկարությամբ ձողեր:

կազմել կտրման առավել նպատակահարմար տարբերակներ, և գտնել, թե որ տարբերակով քանի ձող պետք է կտրել, որպեսզի կորուստները լինեն նվազագույն, եթե հայտնի է, որ վարպետին անհրաժեշտ են նշված ձողերի հետևյալ քանակությունները.

I-ից 300, II-ից՝ 500, III-ից՝ 600 հատ:

5. Ձեռնարկությունը, որը պատրաստում է ծիրանի անուշեղեն, պարտավորվել է սեզոնի ընթացքում պատվիրատուին մատակարարել 0,18տ չիր, 0,8տ ջեմ և 1,2տ մուրաբա: Հումքը կարելի է ձեռք բերել Արագածոտնի կամ Արմավիրի մարզերում (մեկ տոննայի համար վճարելով համապատասխանաբար՝ 110 հազ. և 100 հազ. դրամ): Փորձը ցույց է տվել, որ Արագածոտնի մարզի ծիրանի մեկ տոննայից ստացվում է 0,03տ չիր, 0,1տ ջեմ և 0,48տ մուրաբա, իսկ Արմավիրի շրջանի ծիրանից համապատասխանաբար՝ 0,01, 0,2 և 0,3: Որոշել, թե ձեռնարկությունը ո՛ր մարզից ինչքա՛ն ծիրան գնի, որպեսզի պատվերը կատարի նվազագույն ծախսումներով:

Մարզերից մեկում ծիրանի գինը ամրագրելով, իսկ մյուսում փոփոխելով որոշել՝ ե՞րբ է նպատակահարմար հումք ձեռք բերել

- միայն Արմավիրի մարզից,
- միայն Արագածոտնի մարզից:

6. Հրուշակեղենի "Անի" ֆաբրիկան, որի կարողությունը հնարավորություն է տալիս մեկ ամսում արտադրել 5տ հրուշակեղեն, պատրաստվում է արտադրել շոկոլադ և կարամել այնպիսի հարաբերակցությամբ, որ առավելագույնի հասցնի իր շահույթը: Շուկայի ուսումնասիրությունից պարզվել է, որ շոկոլադի պահանջարկը մեկ ամսում 2 տոննայից ավելի չի լինի, իսկ կարամել կսպառվի 3 տոննայից ոչ պակաս: Գտնել շոկոլադի և կարամելի արտադրության լավագույն քանակությունները, եթե՝

- երկու արտադրատեսակների մեկ տոննայից ստացվող շահույթները հավասար են,
- շոկոլադի մեկ տոննայից ստացվող շահույթը 1,5 անգամ ավելի է, քան 1տ կարամելի իրացումից ստացվող շահույթը,
- համապատասխան շահույթների հարաբերությունն է 3:5:

7. Սպառողը կարագ և պանիր գնելու համար կարող է իր եկամտից հատկացնել ամսական 5 հազ. դրամից ոչ ավելի: Պանրի մեկ կիլոգրամն արժե 1,3 հազ., իսկ կարագինը՝ 1,4 հազ. դրամ: Սպառողը յուրաքանչյուր տեսակի մթերքից օգտագործում է ամսական 1,5կգ-ից ոչ պակաս: Գտնել սպառման այն տարբերակը,

որի դեպքում առավելագույնի է հասցվում սպառողի օգտակարության՝ $S(x_1,x_2)=2x_1+3x_2$ ֆունկցիան, որտեղ x_1,x_2-ը կարագի և պանրի քանակություններն են:

Ի՞նչ կկատարվի, եթե կարագը թանկանա 2%-ով, իսկ պանրի գինը մնա հաստատուն:

Հետևյալ խնդիրները լուծել երկրաչափորեն.

1) $x_1+3x_2\to\min$
$$\begin{cases}x_1+x_2\ge 1\\2x_1-x_2\le 3\\x_1-x_2\le 1\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

2) $x_1+x_2\to\max$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 1\\3x_1+x_2\le 2\\x_1-x_2\ge 0\\2x_1-x_2\ge 1\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

3) $x_1+x_2\to\min$
$$\begin{cases}-x_1+2x_2\le 2\\5x_1+2x_2\ge 10\\5x_1-2x_2\le 0\\5x_1+2x_2\le 10\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

4) $2x_1+3x_2\to\max$
$$\begin{cases}5x_1+2x_2\ge 10\\-x_1+2x_2\le 4\\4x_1-3x_2\le 12\\7x_1-4x_2\le 28\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

5) $4x_1+x_2\to\max$
$$\begin{cases}x_1-x_2\ge -2\\6x_1+7x_2\le 42\\2x_1-3x_2\le 6\\x_1+x_2\le 6\\x_2\ge 0\end{cases}$$

6) $x_1+2x_2\to\min$
$$\begin{cases}-x_1+x_2\le 2\\5x_1+2x_2\ge 10\\5x_1-2x_2\le 10\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

7) $2x_1-x_2\to\max$
$$\begin{cases}-x_1+2x_2\le 4\\2x_1-x_2\le 6\\3x_1+8x_2=24\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

8) $x_1-x_2\to\max$
$$\begin{cases}1\le x_1+x_2\le 2\\2\le x_1-2x_2\le 3\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

9) $x_1+x_2\to\min$
$$\begin{cases}2\le x_1\le 3\\1\le x_2\le 2\\0\le x_1+x_2\le 3\\-1\le x_1-x_2\le 0:\end{cases}$$

Օգտագործելով ԳԾ խնդիրների երկրաչափական մեկնաբանումը՝ որոշել λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում խնդիրը կունենա ա) միակ լուծում, բ) անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Խնդիրը լուծում չի ունենա ա) լուծումների բազմությունը դատարկ լինելու պատճառով, բ) լուծումների բազմության վրա նպատակային ֆունկցիայի անսահմանափակության պատճառով:

1) $2x_1+\lambda x_2\to\max$
$$\begin{cases}-x_1+x_2\le 3\\x_1+2x_2\le 12\\3x_1-x_2\le 15\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

2) $x_1+x_2\to\max$
$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2\le 1\\\lambda x_1-x_2\le 1\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

3) $-x_1+\lambda x_2\to\max$
$$\begin{cases}x_1+x_2\le 2\\x_1-2x_2\le 1\\x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

4) $x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 - 3x_2 \le 1 \\ \lambda x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5) $x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le \lambda \\ 0 \le x_1 \le 1 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6) $2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ \lambda x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7) $x_1 - \lambda x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8) $2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge \lambda \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9) $x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - \lambda x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Օպտիմալության հայտանիշի միջոցով ստուգել x_0 գագաթի լավագույն լուծում լինելը հետևյալ խնդիրների համար.

1) $-4x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \\ \bar{x}_0 = (0,1,1) \end{cases}$$

2) $-x_1 - 4x_2 + 7x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \\ \bar{x}_0 = (2,1,0) \end{cases}$$

3) $x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \\ \bar{x}_0 = (0,1,3) \end{cases}$$

4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4 \\ \bar{x}_0 = (1,1,0,0) \end{cases}$$

Լուծել հետևյալ ԳԾ խնդիրները՝ սկզբնական թույլատրելի հենք վերցնելով տրված վեկտորների համախումբը

1) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4 \\ (\bar{a}^3, \bar{a}^4) \end{cases}$$

2) $x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4 \\ (\bar{a}^1, \bar{a}^3) \end{cases}$$

3) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,6 \\ (\bar{a}^4, \bar{a}^5) \end{cases}$$

4) $x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \\ (\bar{a}^2, \bar{a}^3) \end{cases}$$

Լուծել ԳԾ խնդիրները՝ որպես ելակետային հենքային լուծում վերցնելով պայմաններում նշված $\bar{x}_0$ -ն

1) $x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \\ \bar{x}_0 = (1,0,1,0) \end{cases}$$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \\ \bar{x}_0 = (0,1,0,1) \end{cases}$$

3) $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \\ \bar{x}_0 = (0,0,1,1) \end{cases}$$

4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \\ \bar{x}_0 = (0,0,0,1) \end{cases}$$

Լուծել ԳԾ խնդիրները սիմպլեքս եղանակով

1) $x_1 + x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

3) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

4) $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_3 - x_4 = 3 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Կազմել հետևյալ ԳԾ խնդիրների երկակի խնդիրները

1) $x_1 + 10x_2 - 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{cases}$$

2) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 2 \\ x_1 - x_3 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{cases}$$

4) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

5) $x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

6) $2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Երկակի խնդիրների երկրաչափական վերլուծությամբ պարզել հետևյալ խնդիրների լավագույն լուծման գոյությունը, և եթե լուծում ունեն, գտնել նպատակային ֆունկցիաների լավագույն արժեքները

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

2) $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,4 \end{cases}$$

3) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \end{cases}$$

4) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

5) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 - x_6 \geq 8 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,6 \end{cases}$$

6) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 2 \\ x_1 - x_3 + x_5 \leq 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

7) $6x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8) $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \geq 4 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

Որոշել, թե $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորները արդյոք տրված ԳԾ և դրանց երկակի խնդիրների լավագույն լուծումնե՞րն են

1) $x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

$\bar{x} = (1,0,1), \bar{y} = (9/2, -7/2)$

2) $-2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 2x_4 = 8 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$\bar{x} = (10,0,0,6), \bar{y} = (-2,-5)$

3) $x_1+x_2+x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3 \le 2 \\ 4x_1+2x_2+x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,3 \end{cases}$$

$\bar{x}=(0,1/3,1), \bar{y}=(1/3,1/3)$

4) $x_1+4x_2+x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1+12x_2+2x_3=9 \\ 3x_1+10x_2+4x_3=11 \\ x_j \ge 0\ j=1,2,3 \end{cases}$$

$\bar{x}=(1,0,2), \bar{y}=(3/14,1/14)$

Որոշել, թե տրված վեկտորներից ո՞րն է ԳԾ խնդրի լավագույն լուծումը, եթե հայտնի է նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը

1) $f=2x_1-3x_2+6x_3+x_4 \to ext$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24 \\ x_1-x_2+2x_3 \ge 10 \\ x_1+2x_2+4x_3 \le 22 \\ x_j \ge 0\ j=1,\ldots,4 \end{cases}$$

$\bar{x}^1=(35/2,11/2,0), \bar{x}^2=(0,0,5,3,4)$

$\bar{x}^3=(0,0,11/2,35), f_{ext}=68$

2) $f=5y_1-2y_2-6y_3+4y_4+2y_5 \to ext$

$$\begin{cases} 2y_1-y_2+y_3+2y_4 \ge 12 \\ 3y_1+2y_2-2y_3+5y_4+y_5=30 \\ -y_1+3y_2+5y_3+y_4 \ge 16 \\ y_i \ge 0,\ i=1,\ldots,5 \end{cases}$$

$\bar{y}^1=(5,0,0,1,10), \bar{y}^2=(0,0,0,2,20)$

$\bar{y}^3=(4,0,4,0,26), f_{ext}=48$

Օգտագործելով երկակիության 2-րդ թեորեմը՝ հետևյալ խնդիրների համար ստուգել տրված $\bar{x}$ վեկտորի լավագույն լուծում լինելը

1) $x_1+6x_2+8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=2 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \\ x_i \ge 0,\ i=1,2,3 \end{cases}$$

$\bar{x}=(1,1,0)$

2) $x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$\bar{x}=(1,0,1,-1)$

3) $x_1-8x_2+2x_3-x_4+3x_5+x_6 \to \max$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6 \le 6 \\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4-5x_5+6x_6 \le 0 \\ x_1+4x_2+x_3-x_4-x_5-x_6=1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$\bar{x}=(0,0,1,0,1,-1)$

4) $2x_1-x_2+4x_3-6x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_4 \le 15 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4 \ge -4 \\ x_2+3x_3-x_4 \ge 0 \\ x_i \ge 0,\ i=1,2,\ldots,4 \end{cases}$$

$\bar{x}=(3,0,1,3)$

IV. ԴԻՍԿՐԵՏ ՕՊՏԻՄԱՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Թե ի՛նչ մաքառումի, կամ ի՛նչ չտեսնված
Հեքիաթային ու բարձր մեծագործության
Ճանապարհ ես ընտրել, - մեզ կպատմես միայն
Վերադարձիդ, եթե վերադառնաս և
ոտքդ չդիպչի փորձության:
Ե.Չարենց

§ 1. Օպտիմացման որոշ խնդիրներ գրաֆների համար

ա) *Կարճագույն ուղու խնդիր*: Դիտարկենք $\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆը և ենթադրենք, որ նրա յուրաքանչյուր $(u,v)\in E$ աղեղի համապատասխանեցված է $d(u,v)\geq 0$ թիվ, որը կանվանենք *աղեղի երկարություն (կշիռ)*: Մենք կօգտագործենք երկարություն բառը, չնայած *չենք ենթադրի*, որ ցանկացած u, v, w գագաթների համար բավարարվում են $d(u,v)=d(v,u)$ և $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$ պայմանները:

$\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆի տրված $v_0,v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_k$ *ուղու երկարություն* կանվանենք $d(v_0,v_1)+d(v_1,v_2)+\dots+d(v_{k-1},v_k)$ թիվը:

Շատ գործնական խնդիրներ հանգում են $\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆում տրված v_0 և u_0 գագաթների համար v_0-ից u_0 այն ուղին գտնելուն, որի երկարությունն ամենափոքրն է (ենթադրվում է, որ v_0-ից u_0 ուղի գոյություն ունի): Ձևակերպված խնդիրը կանվանենք *v_0-ից u_0 կարճագույն ուղին գտնելու խնդիր*: Ստորև կառաջարկվի ալգորիթմ նրա երկարությունը հաշվելու համար:

Ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում յուրաքանչյուր $v\in V$ գագաթի վերագրվում է $l(v)$ թիվ. այն v_0-ից v գագաթը արդեն գտած ուղու երկարությունն է: Այս տվյալը փոփոխվում է v_0-ից v ավելի կարճ ուղի գտնելիս: Ինչ-որ պահից ալգորիթմը եզրակացնում է, որ արդեն գտնվել է v_0-ից v կարճագույն ուղին և v գագաթին վերագրված $l(v)$ նշումը այլևս չի փոփոխվում:

$\bar{G}=(V,E)$ օրգրաֆում v_0-ից v կարճագույն ուղին գտնելու ալգորիթմը:

Սկզբնական արժեքների վերագրում

1-ին քայլ. v_0 գագաթին վերագրվում է $l(v_0)=0$ թիվը. այս նշումը համարվելու է *հիմնական* (փոփոխման ենթակա չէ): Մնացած $v \neq v_0$ գագաթներին վերագրվում է $l(v)=\infty$ *ժամանակավոր* նշումը:

Որպես հաջորդ քայլում դիտարկվող p գագաթ ընդունում ենք v_0-ն՝ $p=v_0$:

Նշումների փոփոխում:

2-րդ քայլ. Դիտարկվում է p գագաթը, որի արդյունքում $\{u/(p,u)\in E\}$ բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր u գագաթ ստանում է նոր, *ժամանակավոր* նշում՝ $\min(l(u),l(p)+d(p,u))$:

3-րդ քայլ. Ժամանակավոր նշում ունեցող գագաթներից ընտրում ենք այն u^* գագաթը, որի նշումն ամենափոքրն է, $l(u^*)$ նշումը համարում ենք հիմնական (հետագայում չփոփոխվող) և որպես հաջորդ դիտարկվող p գագաթ ընդունում u^*-ը՝ $p=u^*$:

Ավարտի պահի որոշում կամ կրկնում

4-րդ քայլ. եթե $p=u_0$, ապա $l(p)$-ն v_0-ից u_0 կարճագույն ուղու երկարությունն է և ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը, *հակառակ դեպքում* վերադարձ 2-րդ քայլին:

Ապացուցենք, որ նշված ալգորիթմն իրոք գտնում է v_0-ից v կարճագույն ուղու երկարությունը:

Ընդունենք, որ ալգորիթմի աշխատանքի որևէ փուլում հիմնական նշումներ ունեն $V_1 \subseteq V$ բազմության գագաթները, և յուրաքանչյուր $v \in V_1$ գագաթի $l(v)$ նշումը v_0-ից v կարճագույն ուղու երկարությունն է: Ցույց տանք, որ ալգորիթմի 3-րդ քայլում ընտրված u^* գագաթի համար $l(u^*)$-ը կլինի v_0-ից u^* կարճագույն ուղու երկարությունը:

Եթե v_0-ից u^* կարճագույն ուղու բոլոր գագաթները (u^*-ից բացի) պատկանում են V_1 բազմությանը, ապա u^* գագաթի ընտրությունից հետևում է, որ $l(u^*)$-ը v_0-ից u^* կարճագույն ուղու երկարությունն է: Եթե v_0-ից u^*-ը կարճագույն ուղին պարունակում է

u^*-ից տարբեր գագաթներ $V \setminus V_1$ բազմությունից, ապա նշենք այդ ուղու V_1-ին չպատկանող առաջին՝ u_1 գագաթը և նկատենք, որ

v_0-ից u^* կարճագույն ուղու երկարությունը հավասար է v_0-ից u_1 ուղու և u_1-ից u^* ուղու երկարությունների գումարին և այն փոքր չէ v_0-ից u_1 կարճագույն ուղու երկարությունից:

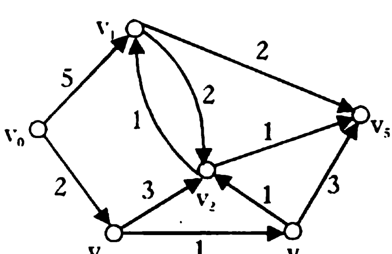
u^* գագաթի ընտրման կանոնից հետևում է, որ $l(u^*) \le l(u_1)$ և, հետևաբար, $l(u^*)$-ը իրոք v_0-ից u^* կարճագույն ուղու երկարությունն է:

Դիտողություն. քանի որ առաջարկված ալգորիթմում հաստատուն գնահատական ստացած յուրաքանչյուր u գագաթի համար $l(u)$-ն v_0-ից u կարճագույն ուղու երկարությունն է, ապա պարզ է, որ v_0-ից դեպի բոլոր գագաթներ տանող կարճագույն ուղիները գտնելու համար բավական է ալգորիթմի 4-րդ քայլի հետևյալ ձևափոխությունը.

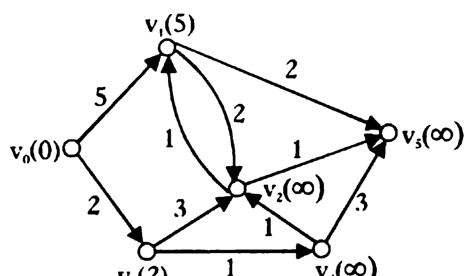
4^**-րդ քայլ. եթե բոլոր գագաթների նշումները հիմնական են, ապա յուրաքանչյուր գագաթի նշումը* v_0*-ից դեպի այդ գագաթ կարճագույն ուղու երկարությունն է, և ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը: Հակառակ դեպքում՝ վերադարձ 2-րդ քայլին:*

$\vec{G}$ օրգրաֆում որևէ գագաթից դեպի մնացած գագաթներ տանող կարճագույն ուղիները գտնելու ալգորիթմի աշխատանքը պարզաբանող օրինակ:

Դիտարկենք նկար 4.1-ում պատկերված օրգրաֆը, որտեղ աղեղի կողքին գրված թիվը նրա երկարությունն է (կշիռը), և գտնենք v_0 գագաթից դեպի մնացած գագաթները տանող կարճագույն ուղիների երկարությունը:



Նկ. 4.1

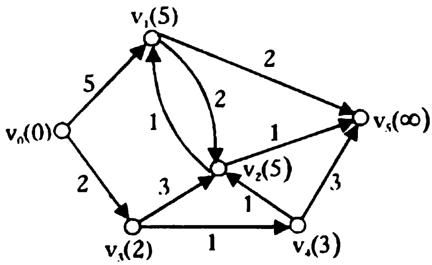


Նկ. 4.2

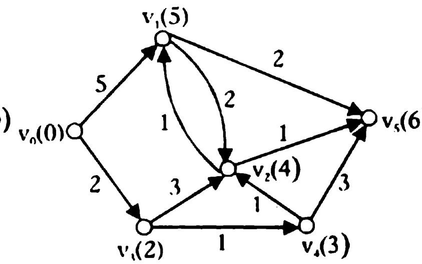
Առաջին քայլում v_0 գագաթին վերագրվում է (0), մնացած գագաթներին՝ (∞) և երկրորդ քայլում դիտարկվում է v_0 գագաթը, որի արդյունքում ստացվում է նկ. 4.2-ում պատկերված վիճակը:

v_3 գագաթի նշումը ամենափոքրն է, այն այլևս չի փոփոխվելու և հաջորդ քայլում դիտարկվում է v_3 գագաթը (կատարվում է ալգորիթմի 2-րդ քայլը $p = v_3$ դեպքում): Արդյունքում նոր նշումներ են ստանում $v_4(3)$ և $v_2(5)$ գագաթները (նկ. 4.3):

Նշված, բայց չդիտարկված գագաթներից ամենափոքր նշումն ունի v_4 գագաթը. այն դառնում է հաստատուն նշում ունեցող, և հաջորդ քայլում դիտարկվում է v_4 գագաթը (կատարվում է ալգորիթմի 2-րդ քայլը $p = v_4$ դեպքում): Արդյունքում նոր նշումներ են ստանում $v_2(4)$ և $v_5(6)$ գագաթները (նկ. 4.4):

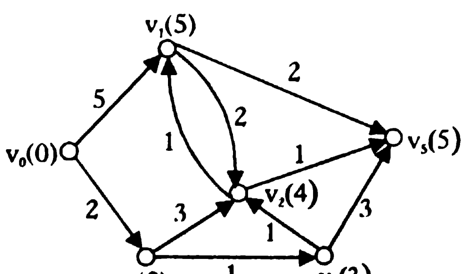


Նկ. 4.3



Նկ. 4.4

Նշված և չդիտարկված գագաթներից ամենափոքր նշումն ունի $v_2(4)$ գագաթը. այդ նշումն այլևս չի փոփոխվելու և հաջորդ քայլում դիտարկվում է v_2 գագաթը (նորից կատարվում է ալգորիթմի 2-րդ քայլը $p = v_2$ դեպքում): Արդյունքում նոր նշում է ստանում $v_5(5)$ գագաթը:



Նկ. 4.5

Նշված և չդիտարկված v_1 և v_2 գագաթները ունեն միևնույն 5 նշումը, և հեշտ է նկատել, որ նրանց դիտարկումից նոր նշումներ չեն առաջանա. նկ. 4.5-ում պատկերված գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթի նշում v_0-ից այդ գագաթ տանող կարճագույն ուղու երկարությունն է:

բ) *Կարճագույն ճանապարհի խնդիր.* դիտարկենք $G=(V,X)$ գրաֆը և ենթադրենք, որ նրա յուրաքանչյուր $x=\{u,v\}\in X$ կողի համապատասխանեցված է $d(x)\geq 0$ թիվ, որը կանվանենք x կողի երկարություն (կշիռ): $G=(V,X)$ գրաֆի $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},v_k$ ճանապարհի երկարություն կանվանենք ճանապարհի կողերի երկարությունների գումարը:

Գրաֆում կարճագույն ճանապարհի խնդիրը հետևյալն է. Տրված է $G=(V,X)$ կապակցված գրաֆը, որի կողերից յուրաքանչյուրն ունի երկարություն և նրանում նշված են v_0 և u_0 գագաթներ: Գտնել v_0-ից u_0 ճանապարհը, որի երկարությունն ամենափոքրն է:

Ցույց տանք, որ նշված խնդիրը կարելի է հանգեցնել օրգրաֆում կարճագույն ուղին գտնելու խնդրին: Սահմանենք $\vec{G}$ օրգրաֆը, որի գագաթների բազմությունը համընկնում է $G=(V,X)$ գրաֆի գագաթների բազմությանը, իսկ աղեղների E բազմությունը որոշենք հետևյալ եղանակով՝

$((u,v)\in E)\Leftrightarrow(\{u,v\}\in X)$:

Փաստորեն $\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆը ստացվում է $G=(V,X)$ գրաֆից՝ յուրաքանչյուր $x=\{u,v\}$ կող փոխարինելով աղեղների (u,v) և (v,u) զույգով: (u,v) աղեղի երկարություն համարենք համապատասխան $\{u,v\}$ կողի երկարությունը:

Պարզ է, որ $G=(V,X)$ գրաֆում v_0-ից u_0 յուրաքանչյուր ճանապարհի կհամապատասխանի $\vec{G}=(V,E)$ օրգրաֆում v_0-ից u_0 ուղի: Ընդ որում ճանապարհի և նրան համապատասխանող ուղու երկարությունները միմյանց հավասար են:

Հետևաբար $G=(V,X)$ գրաֆում v_0-ից u_0 կարճագույն ճանապարհը գտնելու փոխարեն բավական է համապատասխան $\vec{G}=(V,X)$ օրգրաֆում գտնել նույն երկարությունն ունեցող, v_0-ից u_0 կարճագույն ուղին: Այն գտնելու ալգորիթմն արդեն նկարագրել ենք:

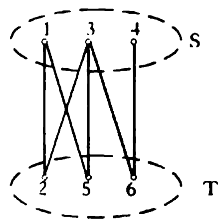
գ) *Երկկողմ գրաֆի առավելագույն զուգակցման խնդիր:* $G=(V,X)$ գրաֆն անվանենք *երկկողմ գրաֆ*, եթե նրա գագաթների բազմությունը հնարավոր է երկու ենթաբազմությունների տրոհել այնպես, որ միևնույն ենթաբազմության գագաթները իրար հարևան չլինեն կամ, որ նույնն է, եթե V բազմությունը կարելի է ներկայացնել $V = S \cup T$ տեսքով, որտեղ $S \cap T = \varnothing$ և բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

եթե $(\{u,v\} \in X)$ և $(u \in S)$, ապա $(v \in T)$,

եթե $(\{u,v\} \in X)$ և $(v \in T)$, ապա $(u \in S)$:

Հետագայում, հաճախ, երկկողմ գրաֆը կնշանակենք $(S,T;X)$ եռյակի միջոցով:

Այսպես, օրինակ՝ $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ գագաթներով և $X = \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,6\}\}$ կողերով գրաֆը երկկողմ է. $V = \{1,3,4\} \cup \{2,5,6\}$ տրոհումը բավարարում է վերը նշված պայմաններին:



Նկ. 4.6

(S,T,X) երկկողմ գրաֆի կողերի $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ենթաբազմությունը կանվանենք *զուգակցում*, եթե նրա ցանկացած երկու կող կից չեն (չունեն ընդհանուր գագաթ):

Վերը պատկերված գրաֆում $\{3,6\}$, $\{1,5\}$ կողերը զուգակցում են: Զուգակցում են կազմում նաև $\{1,2\},\{3,5\}$ և $\{4,6\}$ կողերը:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

Տրված է (S,T,X) երկկողմ գրաֆը: Գտնել այդ գրաֆի այնպիսի զուգակցում, որի կողերի քանակն առավելագույնն է:

Ձևակերպված խնդիրն անվանենք *երկկողմ գրաֆի առավելագույն զուգակցման խնդիր*:

1-ին գլխում քննարկված առավելագույն զուգակցման (առավելագույն թվով պարազույգերի կազմման) խնդիրը հեշտությամբ հանգեցվում է վերը ձևակերպված խնդրին:

Իրոք, նշանակենք տղաների բազմությունը $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, աղջիկների բազմությունը $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ և սահմանենք X զույգերի բազմությունը.

$\{s_i, t_j\} \in X \Leftrightarrow (s_i$ տողն և t_j աղյուսակ համակրում են միմյանց):

Դժվար չէ նկատել, որ առավելագույն թվով պարազույգերի կազմման համար բավական է գտնել կառուցված $(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆի առավելագույն զուգակցումը:

Դիտարկենք $(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆը, որում $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$: Որոշ դեպքերում հարմար է երկկողմ գրաֆը ներկայացնել 0 և 1 տարրերից կազմված հետևյալ (α_{ij}), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ մատրիցի միջոցով.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ եթե } (s_i, t_j) \in X, \\ 0, \text{ եթե } (s_i, t_j) \notin X, \end{cases}$$

որը կանվանենք $(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆին համապատասխանող մատրից:

Պարզ է, որ գրաֆի յուրաքանչյուր $\{s_i, t_j\}$ կողի համապատասխանում է այդ մատրիցի $\alpha_{ij} = 1$ տարրը և ընդհակառակը, իսկ ոչ կից կողերին համապատասխանող 1-երը գտնվում են մատրիցի տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում:

Հետևաբար, երկկողմ գրաֆում առավելագույն զուգակցում գտնելու խնդիրը կարելի է նաև ձևակերպել հետևյալ կերպ.

Տրված է $m \times n$ կարգի (α_{ij}) մատրիցը, որտեղ $\alpha_{ij} = 0$ կամ 1 $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$: Անհրաժեշտ է այդ մատրիցում ընտրել առավելագույն թվով 1-եր, որոնցից ցանկացած երկուսը գտնվում են տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում:

Քննարկենք $(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆում զուգակցում գտնելու մի այլ խնդիր:

Դիցուք $(S,T;X)$ գրաֆի յուրաքանչյուր $x = \{s,t\} \in X$ կողի վերագրված է $d(x) = d(s,t) \ge 0$ թիվ, որը անվանենք կողի կշիռ (երկարություն): $(S,T;X)$ գրաֆի $x_1, x_2, \ldots, x_k$ զուգակցման կշիռ անվանենք $d(x_1) + d(x_2) + \ldots + d(x_k)$ թիվը:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

Տրված է $(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆը, որի յուրաքանչյուր կողի վերագրված է կշիռ: Գտնել այդ գրաֆում այնպիսի զուգակցում, որն ունի առավելագույն կշիռ: Ձևակերպված խնդիրը կանվանենք *երկկողմ գրաֆում առավելագույն կշռով զուգակցում գտնելու խնդիր*:

Նկատենք, որ $\forall(x\in X)(d(x)=1)$ դեպքում ձևակերպված խնդիրը երկկողմ գրաֆի առավելագույն զուգակցում գտնելու խնդիր է:

$(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆում առավելագույն կշռով զուգակցում գտնելու խնդիրը կարելի է ձևակերպել նաև այլ տեսքով:

Դիցուք՝ $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_m\}$, $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ և $d(s_i,t_j)$-ն $\{s_i,t_j\}\in X$ կողի կշիռն է: $(S,T;X)$ գրաֆին համապատասխանեցնենք (d_{ij}), $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ մատրիցը, որտեղ

$$d_{ij}=\begin{cases}d(s_i,t_j), \text{ եթե } \{s_i,t_j\}\in X,\\ 0, \text{ հակառակ դեպքում:}\end{cases}$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆում առավելագույն կշռով զուգակցում գտնելը համարժեք է (d_{ij}), $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից առավելագույն գումար ունեցող տարրեր ընտրելուն:

Նկատենք նաև, որ 1-ին գլխում ձևակերպված *նշանակումների խնդիրը* հանգում է $m=n$ դեպքում երկկողմ գրաֆում առավելագույն կշռով զուգակցում գտնելու խնդրին:

Իրոք, դիցուք՝ $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$-ը աշխատատեղերն են, $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$-ը՝ աշխատողները: Դիտարկենք (S,T,X) գրաֆը, որտեղ $X=\{\{s_i,t_j\}/1\le i\le n, 1\le j\le n\}$ և թող $\alpha_{ij}=d(s_i,t_j)$: Հեշտ է ստուգել, որ (d_{ij}) մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից առավելագույն գումար ունեցող տարրերի ընտրությունը յուրաքանչյուր աշխատողի համար աշխատանքը կորոշի այնպես, որ աշխատողների արդյունավետությունների գումարը լինի առավելագույնը:

Մի անգամ ևս նշենք նշանակումների խնդրի 1-ին գլխում նկարագրված մաթեմատիկական մոդելը:

Տրված է $n\times n$ կարգի $A=(\alpha_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $\alpha_{ij}\ge 0$: Անհրաժեշտ է գտնել $1,2,\ldots,n$ տարրերի π տեղադրությունը, որի համար $\alpha_{1\pi(1)}+\alpha_{2\pi(2)}+\ldots+\alpha_{n\pi(n)}$ գումարն ընդունում է առավելագույն արժեք:

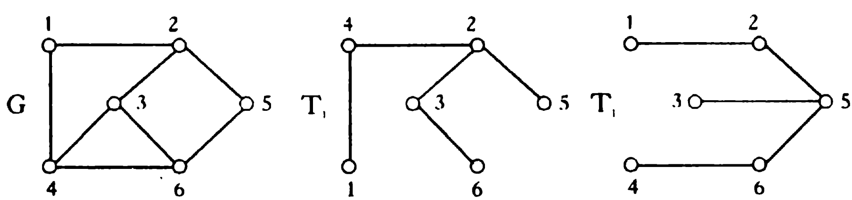
Հետագայում ձևակերպված երկու խնդիրների համար էլ կառաջարկվեն լուծման արդյունավետ ալգորիթմներ:

Դիտողություն. Նշենք, որ ձևակերպված խնդիրները հեշտ չեն: Առաջին հայացքից լավ թվացող ալգորիթմները ընդհանուր դեպքում չեն գտնում լավագույն լուծումը: Այսպես, օրինակ, (d_{ij}), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից առավելագույն գումար ունեցող տարրեր ընտրելու համար շատ բնական է թվում այն ալգորիթմը, որը յուրաքանչյուր քայլում ընտրում է մատրիցի ամենամեծ տարրը, ջնջում այն պարունակող տողն ու սյունը և կրկնում ընտրությունը, մինչև որ ընտրված լինեն բոլոր տողերի կամ սյուների ներկայացուցիչները: Նշված ալգորիթմը ստորև պատկերված մատրիցի համար ընտրում է 60-ը, հետո 30-ը և 4-ը: Ընտրված տարրերի գումարը 94 է: Լավագույնն է 59+59+30=148 ընտրությունը:

$$\begin{pmatrix} 10 & 59 & 4 \\ 20 & 60 & 59 \\ 30 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

դ) *Նվազագույն կմախքային ծառի խնդիր*: Գրաֆն անվանենք ծառ, եթե այն կապակցված է և ցիկլ չի պարունակում: Հեշտ է ստուգել, որ ծառի ցանկացած u և v գագաթների համար գոյություն ունի u-ից v միակ ճանապարհ, և p գագաթ ունեցող ծառն ունի $p-1$ կող: $G=(V,X)$ գրաֆի *կմախքային ծառ* անվանենք այն ծառը, որի գագաթների բազմությունը համընկնում է գրաֆի գագաթների V բազմությանը, իսկ այդ ծառի յուրաքանչյուր կող պատկանում է գրաֆի կողերի բազմությանը:

Այսպիսով, կմախքային ծառն ստացվում է կապակցված գրաֆից որոշակի կողեր դեն նետելով այնպես, որ ստացված գրաֆում ցիկլ չլինի, բայց կապակցվածությունը պահպանվի: Պարզ է, որ նույն $G=(V,X)$ գրաֆից հնարավոր է ստանալ տարբեր կմախքային ծառեր: Այսպես, օրինակ T_1-ը և T_2-ը Նկ. 4.7-ում պատկերված G գրաֆի կմախքային ծառեր են:



Նկ. 4.7

Ենթադրենք, որ $G=(V,X)$ կապակցված գրաֆի յուրաքանչյուր $x=\{u,v\} \in X$ կողի վերագրված է $d(x)=d(u,v) \ge 0$ թիվ՝ կողի երկարությունը (կշիռը): Գրաֆի կմախքային ծառի երկարություն անվանենք նրա կողերի երկարությունների գումարը և դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

Գտնել $G=(V,X)$ գրաֆի այն կմախքային ծառը, որն ամենակարճն է: Նշենք, որ այդպիսի ծառ գոյություն ունի, քանի որ կմախքային ծառերի քանակը վերջավոր է: Այս խնդիրն անվանենք *գրաֆում նվազագույն կմախքային ծառ գտնելու խնդիր*:

Ձևակերպված խնդրին են հանգում մի շարք գործնական խնդիրներ, որոնցում անհրաժեշտ է որոշ բնակավայրեր հեռախոսային կամ այլ տիպի կապի գծերով միացնել այնպես, որ կապն ապահովվի ււծ լինի ցանկացած երկու բնակավայրերի միջև և օգտագործվող հաղորդալարի երկարությունը լինի նվազագույնը:

Ստորև կնկարագրվի *գրաֆում նվազագույն երկարությամբ կմախքային ծառ գտնելու ալգորիթմը*: Ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում, արդեն կառուցված ծառին հերթականորեն ավելացվում են մեկ գագաթ և մեկ կող, որը նոր ավելացված գագաթը միացնում է արդեն կառուցված ծառի որևէ գագաթին:

Դիցուք $G=(V,X)$ կապակցված գրաֆի գագաթների բազմությունը $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ է, $d(v_i,v_j)$-ն $\{v_i,v_j\}$ կողի երկարությունն է (եթե $\{v_i,v_j\}\notin X$, ապա $d(v_i,v_j)$ կհամարենք ∞):

Սկզբնական արժեքների վերագրում.

1-ին քայլ. ընդունում ենք $U=\{v_1\}$ և $Y=\varnothing$:

(U-ն արդեն կառուցված ծառի գագաթների, իսկ Y-ը կողերի բազմությունն է):

Ծառին ավելացվող գագաթի և կողի ընտրություն.

2-րդ քայլ. յուրաքանչյուր $u\in V\setminus U$ գագաթի համար գտնում ենք $u^*\in U$ գագաթ այնպես, որ $d(u^*,v)=\min\limits_{v\in U}d(v,u)$ և u գագաթը նշում $(u^*,\beta(u))$ զույգով, որտեղ $\beta(u)=d(u^*,u)$: Եթե այդպիսի $u^*\in U$ գագաթ նշել հնարավոր չէ, u գագաթը նշում ենք $(-,\infty)$ պայմանանշանով:

3-րդ քայլ. ընտրում ենք այնպիսի $v(v^*,\beta(v))\in V\setminus U$ գագաթ, որի նիշը՝ $\beta(v)=\min\limits_{u\in V\setminus U}\beta(u)$ և v գագաթն ավելացնում U բազմությանը, իսկ $\{v,v^*\}$ կողը՝ Y բազմությանը:

Ավարտի պահի որոշում կամ կրկնում:

4-րդ քայլ. եթե $|U|=n$, ապա ընտրված կողերի Y բազմությունը կկազմի կմախքային ծառ, և ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը, *հակառակ դեպքում* վերադարձ է կատարվում 2-րդ քայլին:

Ակնհայտ է, որ նշված ալգորիթմն ընտրել է կմախքային ծառ: Ապացուցենք, որ այն, իրոք, նվազագույն երկարությամբ կմախքային ծառ է:

Ենթադրենք հակառակը. ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստացված կմախքային ծառը նվազագույն երկարություն չունի: Դիցուք ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստացված ծառի կողերը $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$ են՝ գրված այն հերթականությամբ, որով նրանք մտել են Y բազմության մեջ:

Դիտարկենք նվազագույն կմախքային ծառերի բազմությունը: Ամեն մի նվազագույն կմախքային ծառի համար նշենք այդ ծառին չպատկանող $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$ հաջորդականության ամենափոքր համարով կողը (մեր ենթադրության համաձայն այդպիսին կա): Ընտրենք այն T_0 մինիմալ կմախքային ծառը, որի դեպքում նշված համարը ամենամեծն է, ենթադրենք k է $(1 \le k \le p-1)$: Այսպիսով, T_0 նվազագույն կմախքային ծառը պարունակում է $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ կողերը, չի պարունակում y_k կողը, և, մեր ենթադրության համաձայն, գոյություն չունի $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k$ կողեր պարունակող նվազագույն կմախքային ծառ:

Բայց մենք կկառուցենք T_1 նվազագույն կմախքային ծառ, որը պարունակում է $y_1, y_2, \dots, y_k$ կողեր, և ստացված հակասությունը կապացուցի, որ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստացված ծառը նվազագույն երկարություն ունի:

U_1-ով նշանակենք այն ծառի գագաթների բազմությունը, որի կողերն են՝ $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$:

T_0 ծառի կողերի բազմությանն ավելացնենք $y_k = \{u, v\}$ կողը, $u \in U_1$, $v \notin U_1$: Քանի որ T_0 ծառում գոյություն ունի u-ից v ճանապարհ, ապա y_k կողն ավելացնելուց հետո կառաջանա ցիկլ, որի գագաթներից մեկը $u \in U_1$, իսկ մյուսը՝ $v \notin U_1$: Հետևաբար, գոյություն կունենա ցիկլին պատկանող մի ուրիշ $\{u', v'\}$ կող, այնպես, որ $u' \in U_1$ և $v' \notin U_1$: Հանենք ստացված գրաֆից $\{u', v'\}$ կողը: Արդյունքում ստացված ծառը նշանակենք T_1-ով: Փաստորեն T_1 ծառն ստացվել է T_0-ից $\{u, v\}$ կողը հանելով և $\{u', v'\}$ կողն ավելացնելով:

Ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում կառուցված ծառի կողերի բազմության մեջ մտցվել է $\{u,v\}$ կողը, իսկ $\{u',v'\}$ կողը դիտարկվել է և չի մտցվել: Հետևաբար, $\{u,v\}$ կողի երկարությունը չի գերազանցում $\{u',v'\}$ կողի երակարությանը: Դա նշանակում է, որ T_1 ծառի երկարությունը չի գերզանցում T_0 ծառի երկարությանը: Այնպես որ T_1-ը նվազագույն կմախքային ծառ է, որը պարունակում է $y_1, y_2, \ldots, y_k$ կողերը, և ալգորիթմն իրոք գտնում է նվազագույն երկարությամբ կմախքային ծառ:

Քննարկված խնդրին մոտ է *Շտայների խնդիրը*.

Հարթության վրա տրված են $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \ldots, A_k(x_k,y_k)$ կետերը: Անհրաժեշտ է կառուցել հատվածներ (պարտադիր չէ, որ յուրաքանչյուր հատված անպայման միացնի տրված կետերի որևէ զույգի) այնպես, որ այդ կետերից ցանկացած երկուսը միացված լինեն այդ հատվածներից կազմված բեկյալ գծերով, և բոլոր հատվածների երկարությունների գումարը լինի նվազագույնը:

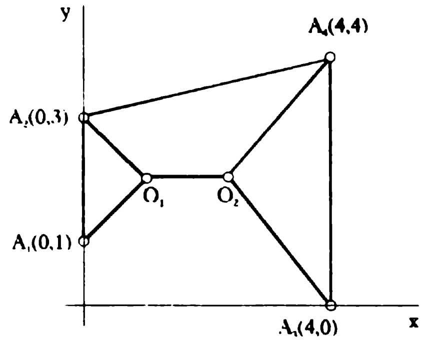
Եթե ձևակերպված խնդրում պահանջվեր, որ տրված կետերն արդյունքում միացված լինեն հատվածներով, այլ ոչ թե հատվածներից կազմված բեկյալներով, ապա հեշտ է ստուգել, որ խնդիրը կհանգեր նվազագույն երկարությամբ կմախքային ծառը գտնելուն մի գրաֆում, որի գագաթներն են $A_1, A_2, \ldots, A_k$, կողերն են այդ կետերը միացնող հատվածները, իսկ կողի կշիռն է համապատասխան հատվածի երկարությունը:

Սակայն $A_1, A_2, \ldots, A_k$ կետերից բացի, այլ կետերում ճյուղավորման հնարավորությունը էապես փոխում է վիճակը: Այսպես, հարթության $A_1(0,1), A_2(0,3), A_3(4,0)$ և $A_4(4,4)$ կետերի համար նվազագույն կմախքային ծառ կհանդիսանա $6+\sqrt{17}$ երկարությամբ $A_1A_2A_4A_3$ բեկյալը, իսկ Շտայների խնդրի լուծում՝ նկ. 4.8-ում պատկերված $4+3\sqrt{3}$ երկարությամբ $A_1, A_2, A_3, A_4, O_1, O_2$ գագաթներով ծառը: Հեշտ է ստուգել, որ $4+3\sqrt{3} < 10 < 6+\sqrt{17}$:

Շտայների խնդիրը դիսկրետ օպտիմացման դժվար խնդիրներից է և մեծ k-երի դեպքում նրա լուծման արդյունավետ եղանակներ չկան:

ե) *Գրաֆի համիլտոնյան ցիկլի խնդիր*: Դիտարկենք $G=(V,X)$ գրաֆը: Այս գրաֆի բոլոր գագաթները պարունակող $u_1, u_2, \ldots, u_p, u_1$ պարզ ցիկլն անվանենք *համիլտոնյան ցիկլ*:

Այսպիսով, համիլտոնյան ցիկլն անցնում է գրաֆի բոլոր գագաթներով՝ յուրաքանչյուրով մեկ անգամ:



Նկ. 4.8

Գրաֆում համիլտոնյան ցիկլ գտնելու խնդիրը հետևյալն է: Տրված է $G=(V,X)$ գրաֆը. պարզել թե այդ գրաֆում արդյոք գոյություն ունի՞ համիլտոնյան ցիկլ:

Նշենք, որ ձևակերպված խնդիրը գրաֆների տեսության դժվար խնդիրներից է. չնայած գրաֆի պարզ ցիկլերի քանակը վերջավոր է, այնուամենայնիվ գրաֆում համիլտոնյան ցիկլի գոյությունը պարզելու արդյունավետ եղանակ հայտնի չէ:

Դիտարկենք գրաֆում համիլտոնյան ցիկլ գտնելու խնդրի մի տարբերակ:

Դիցուք՝ K_n-ը այսպես կոչված *լրիվ գրաֆ է*. նրա գագաթների բազմությունը $\{1,2,\ldots,n\}$ է, և ցանկացած $1 \le i \ne j \le n$ երկու տարբեր գագաթներ հարևան են, $\{i,j\}$-ն կող է: Պարզ է, որ այդ գրաֆում գոյություն ունեն $0{,}5\cdot(n-1)!$ համիլտոնյան ցիկլեր: Ենթադրենք նաև, որ այդ գրաֆի յուրաքանչյուր $\{i,j\}$ կող ունի երկարություն (կշիռ)՝ d_{ij} (ցանկացած $1 \le i,j,k \le n$ արժեքների համար $d_{ij}=d_{ji}$, $d_{ii}=0$ և $d_{ij}+d_{jk} \ge d_{ik}$ պայմաններին բավարարող) և այդ պայմաններում դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

Գտնել K_n լրիվ գրաֆի այն համիլտոնյան ցիկլը, որն ամենակարճն է:

Այս խնդիրն անվանենք շրջիկ գործակալի խնդիր:

Դժվար չէ նկատել, որ այն իրոք համընկնում է 1-ին գլխում ձևակերպված շրջիկ գործակալի խնդրին:

Դիտարկենք հեռավորությունների $n \times n$ կարգի (d_{ij}) մատրիցը: Պարզ է, որ $1,i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},1$ համիլտոնյան ցիկլի $d_{1i_1}+d_{i_1i_2}+\ldots+d_{i_{n-1}1}$ երկարությունն այդ մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից ընտրված տարրերի գումար է:

Սակայն միշտ չէ, որ մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից ընտրված տարրերին համապատասխանում է համիլտոնյան ցիկլ (օրինակ, $d_{11},d_{22},\ldots,d_{nn}$ ընտրությանը համիլտոնյան ցիկլ չի համապատասխանում):

$\pi:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ տեղադրությանը համապատասխանեցնենք $1,2,\ldots,n$ գագաթներով և $\{1,\pi(1)\},\{2,\pi(2)\},\ldots,\{n,\pi(n)\}$ կողերով գրաֆը: Կասենք, որ π տեղադրությունը ցիկլ է, եթե նրան համապատասխանող գրաֆը համիլտոնյան ցիկլ է:

Հեշտ է ստուգել, որ մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից ընտրված տարրերին համապատասխանում է համիլտոնյան ցիկլ, եթե և միայն եթե այդ ընտրության համապատասխան π տեղադրությունը ցիկլ է:

Այժմ կարող ենք առաջարկել շրջիկ գործակալի խնդրի մաթեմատիկական մոդելի նոր ձևակերպում:

Տրված են $1,2,\ldots,n$ բնակավայրերը և նրանց միջև հեռավորությունների $n\times n$ կարգի (d_{ij}) մատրիցը: Անհրաժեշտ է գտնել $1,2,\ldots,n$ տարրերի π տեղադրություն, որը ցիկլ է և որի համար $d_{1\pi(1)}+d_{2\pi(2)}+\ldots+d_{n\pi(n)}$ գումարն ընդունում է նվազագույն արժեք:

Նշենք ձևակերպված խնդրի և նշանակումների խնդրի էական տարբերությունը. նշանակումների խնդրում π-ն փնտրվում էր $1,2,\ldots,n$ տարրերի բոլոր տեղադրությունների բազմությունից, իսկ շրջիկ գործակալի խնդրում՝ ցիկլ տեղադրությունների բազմությունից: Չնայած այս "չնչին" տարբերությանը, նշանակումների խնդրի համար հայտնի են լուծման արդյունավետ ալգորիթմներ, իսկ շրջիկ գործակալի խնդրի լուծման արդյունավետ ալգորիթմի գոյության հարցը դիսկրետ մաթեմատիկայի դժվար և դեռևս չլուծված խնդիրներից է:

Շրջիկ գործակալի խնդրի լուծման համար կարելի է առաջարկել հետևյալ ալգորիթմը: Հերթականորեն դիտարկենք բոլոր համիլտոնյան ցիկլերը՝ հաշվելով նրանց երկարությունը, և ընտրենք այն ցիկլը, որն ամենակարճն է: Բայց բոլոր համիլտոնյան ցիկլերի քանակը $0{,}5(n-1)!$ է և n-ի նույնիսկ ոչ շատ մեծ արժեքների դեպքում այս ալգորիթմը գործնականում անիրագործելի է:

Շրջիկ առևտրականի խնդրի լուծման համար շատ բնական է թվում հետևյալ՝ “ամենամոտ հարևան” ալգորիթմը.

Որպես առաջին գագաթ ընտրում ենք 1-ը: Յուրաքանչյուր k-ի համար $0 \le k < n-1$, եթե արդեն ընտրված են $i_0 = 1, i_1, \ldots, i_{k-1}$ գագաթները, ապա որպես i_k գագաթ ընտրում ենք չընտրված՝ $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ գագաթներից այն, որի և i_{k-1}-ի հեռավորությունն ամենափոքրն է:

Սակայն պարզվում է, որ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստացված $1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1$ համիլտոնյան ցիկլը կարող է լավագույնը (ամենակարճը) չլինել: Ավելին, կան օրինակներ, որոնց համար “ամենամոտ հարևան” ալգորիթմի գտած լուծումը էապես տարբերվում է լավագույն լուծումից:

Ապացուցված է, որ ցանկացած n բնական թվի համար կարելի է նշել հեռավորությունների $n \times n$ կարգի (d_{ij}) մատրից, որի համար “ամենամոտ հարևան” ալգորիթմի գտած համիլտոնյան ցիկլի երկարությունը $(1/3)\log_2(n+1)$ անգամ մեծ է լավագույն լուծումից:

Ստորև կառաջարկվի շրջիկ գործակալի խնդրի լուծման որոշ առումով ավելի լավ ալգորիթմ:

Ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում հերթականորեն կառուցվում են 3,4,5,... գագաթ պարունակող պարզ ցիկլեր: Նրանցից յուրաքանչյուրը ստացվում է արդեն կառուցվածից՝ որոշակի տեղում մեկ գագաթ ավելացնելով:

Ալգորիթմի առաջին քայլում ընտրվում է 1 գագաթին ամենամոտ՝ i_1 գագաթը, կազմվում $1 i_1 1$ հաջորդականությունը և $U = \{1, i_1\}$ բազմությունը:

k-րդ քայլում $(2 \le k \le n-1)$ ունենալով $1, i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, 1$ հաջորդականությունը (ցիկլը) և նրա գագաթների $U = \{1, i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ բազմությունը, ընտրվում է ցիկլին չպատկանող գագաթներից ցիկլին ամենամոտ գագաթը, որը որոշվում է

$$d_{i_e j_0} = \min_{i \in U}(\min_{j \notin U} d_{ij})$$

պայմանից $(i_e \in U, j_0 \notin U)$. կազմվում է նոր $1, i_1, \ldots, i_e, j_0, i_{e+1}, \ldots, i_{k-1}, 1 = 1, i_1, i_2, \ldots, i_k, 1$ ցիկլը, որն ստացվել է ունեցած ցիկլի i_e գագաթից անմիջապես հետո j_0-ն ավելացնելով:

Ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքը $(n-1)$-րդ քայլից հետո ստացված $1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1$ համիլտոնյան ցիկլն է:

Առաջարկված ալգորիթմը ևս միշտ չէ, որ գտնում է լավագույն լուծումը (նվազագույն երկարություննն ունեցող համիլտոնյան ցիկլը): Ցույց տանք, որ այս ալգորիթմը կարող է սխալվել ամենաշատը երկու անգամ. ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստացված համիլտոնյան ցիկլի երկարությունը երբեք չի գերազանցում լավագույն լուծման կրկնապատիկին:

Նկատենք, որ ալգորիթմի յուրաքանչյուր քայլում եղած ցիկլին ավելանում է նախորդ բաժնի ալգորիթմով որոշվող նվազագույն կմախքային ծառի որևէ կող:

Ալգորիթմի k -րդ քայլում եղած ցիկլից հանվել է $\{i_e, i_{e+1}\}$ և ավելացվել $\{i_e, j_0\}, \{j_0, i_{e+1}\}$ կողերը: Քանի որ $d_{j_0 i_{e+1}} \le d_{j_0 i_e} + d_{i_e i_{e+1}}$, ուստի k -րդ քայլում եղած ցիկլի երկարությունը կավելանա ոչ շատ, քան $2d_{i_e j_0}$:

Այսպիսով, ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստացված համիլտոնյան ցիկլի երկարությունը չի գերազանցում նվազագույն կմախքային ծառի երկարության կրկնապատիկին:

Մյուս կողմից, պարզ է, որ նվազագույն համիլտոնյան ցիկլի երկարությունը մեծ է նվազագույն կմախքային ծառի երկարությունից:

Այնպես որ, նշված ալգորիթմը իրոք կարող է "սխալվել" ամենաշատը երկու անգամ:

§2. Հոսք ցանցում

Դիտարկենք $\vec{G} = (V, E)$ օրգրաֆը. նրանում առանձնացնենք երկու գագաթ, որոնցից մեկը հետագայում կնշանակենք s տառով և կանվանենք *ակունք*, իսկ մյուսը՝ t -ով և կանվանենք *հոսարան*: Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր $(u, v) \in E$ աղեղի վերագրված է $c(u, v)$ ոչ բացասական թիվ, որը կանվանենք այդ *աղեղի թողունակություն*:

Ցանց կանվանենք այն օրգրաֆը, որում առանձնացված են s, t գագաթները, և տրված են աղեղների թողունակությունները:

Ցանցի յուրաքանչյուր $u \in V$ գագաթի համար սահմանենք $A(u) = \{v \,/\, (u, v) \in E\}$ և $B(u) = \{v \,/\, (v, u) \in E\}$ բազմությունները:

Կասենք, որ $\vec{G} = (V, E)$ օրգրաֆին համապատասխանող ցանցում տրված է k մեծությամբ հոսք, եթե յուրաքանչյուր $(u, v) \in E$ աղեղի համապատասխանեցված է $f(u, v)$ թիվ այնպես, որ

$$\sum_{v\in A(u)} f(u,v) - \sum_{v\in B(u)} f(v,u) = \begin{cases} h, & \text{եթե } u=s, \\ -h, & \text{եթե } u=t, \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում,} \end{cases}$$

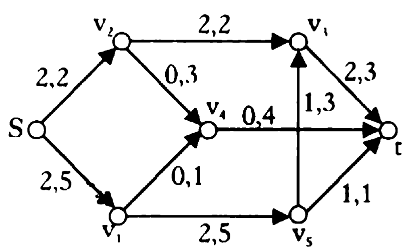
և ցանկացած $(u,v)\in E$ աղեղի համար

$$0 \le f(u,v) \le c(u,v):$$

Այսպես, օրինակ նկ. 4.9-ում պատկերված է մի ցանց, որի գագաթների բազմությունը՝ $V=\{s,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,t\}$, աղեղների բազմությունը՝

$$E=\{(s,v_2),(s,v_1),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_1,v_4)\\ (v_1,v_5),(v_4,t),(v_5,v_3),(v_5,t),(v_3,t)\},$$

իսկ աղեղի կողքին գրված թվերից երկրորդը նրա թողունակությունն է, իսկ առաջինը՝ հոսքի մեծությունը (ցանցում հոսքի մեծությունը 4 է):



Նկ. 4.9

Պայմանավորվածություն նշանակումների մասին: Հետագայում օրգրաֆը և համապատասխան ցանցը կնշանակենք նույն $\tilde{G}=(V,E)$ պայմանանշանով: Գագաթների $S\subseteq V$ և $T\subseteq V$ ենթաբազմությունների համար (S,T)-ով կնշանակենք ցանցի այն աղեղների բազմությունը, որոնց սկիզբը պատկանում է S, իսկ ծայրը՝ T բազմությանը.

$$(S,T)=\{(u,v)\,/\,u\in S, v\in T \text{ և } (u,v)\in E\}:$$

Աղեղների E բազմության վրա որոշված ցանկացած $g(u,v)$ ֆունկցիայի համար կօգտագործենք հետևյալ նշանակումները.

$$\sum_{v\in T} g(u,v) = g(u,T)$$

$$\sum_{u\in S} g(u,v) = g(S,v)$$

$$\sum_{(u,v)\in(S,T)} g(u,v) = g(S,T):$$

Նկատենք, որ եթե $T_1 \subseteq V$ և $T_2 \subseteq V$ ենթաբազմությունները ընդհանուր տարր չունեն, ապա

$$g(S,T_1 \cup T_2) = g(S,T_1) + g(S,T_2):$$

Պարզ է նաև, որ ցանկացած v գագաթի համար

$$(v, A(v)) = (v,V) \text{ և } (B(v),v) = (V,v)$$

Այս նշանակումներով $\vec{G} = (V,E)$ ցանցում h մեծությամբ հոսքը կունենա հետևյալ սահմանումը.

Կասենք, որ $\vec{G} = (V,E)$ ցանցում տրված է h մեծությամբ հոսք, եթե յուրաքանչյուր $(u,v) \in E$ աղեղի համապատասխանեցված է $f(u,v)$ թիվն այնպես, որ

$$f(u,V) - f(V,u) = \begin{cases} h, \text{ եթե } u = s, \\ -h, \text{ եթե } u = t, \\ 0, \text{ մնացած դեպքերում}, \end{cases} \tag{2.1}$$

և ցանկացած $(u,v) \in E$ աղեղի համար

$$0 \le f(u,v) \le c(u,v): \tag{2.2}$$

Ձևակերպենք *հիմնական խնդիրը.*

Գտնել $\vec{G} = (V,E)$ ցանցում առավելագույն մեծությամբ հոսքը:

Նկատենք, որ ցանցում առավելագույն մեծությամբ հոսք գտնելու խնդիրը ԳԾ խնդիր է, սակայն սահմանափակումների պարզ տեսքը հնարավորություն է տալիս նրա լուծման համար առաջարկել սիմպլեքս ալգորիթմից ավելի արդյունավետ ալգորիթմ: Նշենք նաև, որ ցանցում առավելագույն մեծությամբ հոսք միշտ գոյություն ունի. հոսքի մեծությունն անընդհատ ֆունկցիա է՝ որոշված փակ և սահմանափակ բազմության վրա:

Ենթադրենք, որ $\vec{G} = (V,E)$ ցանցի գագաթների $S \subseteq V$ ենթաբազմությունն այնպիսին է, որ $s \in S$ և $t \in \bar{S} = V \setminus S$: *Աղեղների $(S,\bar{S})$ բազմությունն անվանենք կտրվածք $\vec{G} = (V,E)$ ցանցում:*

Նկատենք, որ s-ից t ամեն մի ուղի պարունակում է $(S,\bar{S})$ կտրվածքի որևէ աղեղ: Իրոք, s-ից t ուղու առաջին գագաթը պատկանում է S բազմությանը, վերջին գագաթը՝ $\bar{S}$-ին և պարզ է, որ կգտնվի աղեղ, որի սկիզբը պատկանում է S-ին, իսկ ծայրը՝ $\bar{S}$-ին:

Հետևաբար, եթե $\vec{G} = (V,E)$ ցանցից հեռացնենք $(S,\bar{S})$ կտրվածքների աղեղները, ապա ստացված ցանցում գոյություն չի ունենա s-ից t ուղի:

Պարզ է նաև, որ եթե $\vec{G}=(V,E)$ ցանցից հեռացնենք $(S,\bar{S})\cup(\bar{S},S)$ բազմության աղեղները, ապա ստացված ցանցում գոյություն չի ունենա s-ից t ճանապարհ:

Ենթադրենք, որ $\vec{G}=(V,E)$ ցանցում տրված է h մեծությամբ f հոսք: Ստույգ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ: $\vec{G}=(V,E)$ ցանցի ցանկացած $(S,\bar{S})$ կտրվածքի և h մեծությամբ f թույլատրելի հոսքի համար

$$h=f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S)\le c(S,\bar{S}):$$

↦ Եթե f-ը ցանցում h մեծությամբ հոսք է, ապա այն բավարարում է (2.1) պայմաններին: Գումարելով S-ին պատկանող գագաթներին համապատասխանող հավասարությունները, կստանանք՝

$$h=f(S,V)-f(V,S)$$

Քանի որ $V=S\cup\bar{S}$ և $S\cap\bar{S}=0$, ուստի

$$h=f(S,S\cup\bar{S})-f(S\cup\bar{S},S)=f(S,S)+f(S,\bar{S})-$$
$$-f(S,S)-f(\bar{S},S)=f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S):$$

Թեորեմի պնդման հավասարության դեպքն ապացուցվեց: Նկատենք, որ (2.2) պայմանից կստացվեն $f(\bar{S},S)\ge 0$ և $f(S,\bar{S})\le c(S,\bar{S})$ անհավասարությունները, որոնցից անմիջապես կհետևի թեորեմը: ┘

$c(S,\bar{S})$ թիվը՝ կտրվածքի աղեղների թողունակությունների գումարը, հետագայում կանվանենք $(S,\bar{S})$ *կտրվածքի թողունակություն*:

Նկատենք, որ $\vec{G}=(V,E)$ ցանցի կտրվածքների քանակը վերջավոր է. յուրաքանչյուր կտրվածք որոշվում է ցանցի գագաթների V բազմության S ենթաբազմությամբ: Հետևաբար գոյություն կունենա կտրվածք, որի թողունակությունը ամենափոքրն է. այն անվանենք *նվազագույն կտրվածք*:

Ապացուցված թեորեմում նշվում էր, որ յուրաքանչյուր թույլատրելի հոսքի մեծությունը չի գերազանցում ցանկացած կտրվածքի թողունակությանը: Այստեղից հետևում է, որ *ցանցում առավելագույն հոսքի մեծությունը չի գերազանցում նվազագույն կտրվածքի թողունակությանը*: Ավելին, եթե հաջողվել է ցանցում նշել $(S,\bar{S})$ կտրվածք և h մեծությամբ f թույլատրելի հոսք այնպես, որ եթե $h=f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S)=c(S,\bar{S})$, ապա պարզ է, որ f-ը առավելագույն մեծությամբ հոսք է, իսկ $(S,\overline{S})$-ը՝ նվազագույն կտրվածք:

Ֆորդ-Ֆալկերսոնի թեորեմ: Ցանկացած $\overline{G}=(V,E)$ ցանցում առավելագույն հոսքի մեծությունը հավասար է նվազագույն կտրվածքի թողունակությանը:

$\mapsto$ Ենթադրենք, որ f-ը $\overline{G}=(V,E)$ ցանցում առավելագույն մեծությամբ հոսք է (արդեն նշել ենք, որ այն գոյություն ունի): Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է նշել $(S,\overline{S})$ կտրվածքն այնպես, որ $f(S,\overline{S})=c(S,\overline{S})$ և $f(\overline{S},S)=0$: Իրոք, այս պայմանները ապահովում են $h=f(S,\overline{S})-f(\overline{S},S)=c(S,\overline{S})$ հավասարությունը:

Սահմանենք S բազմությունը հետևյալ կանոնների միջոցով.

- ակունքը պատկանում է S-ին. $s\in S$,
- եթե $u\in S$ և $f(u,v)<c(u,v)$, ապա $v\in S$,
- եթե $u\in S$ և $f(v,u)>0$, ապա $v\in S$:

Ցույց տանք, որ $(S,\overline{S})$-ը կտրվածք է, այսինքն՝ $t\in\overline{S}$: Ենթադրենք հակառակը. $t\in S$:

S-ի սահմանումից հետևում է, որ եթե $v\in S$, ապա ցանցում գոյություն ունի s գագաթը v-ին միացնող ճանապարհ, որի ուղիղ աղեղների համար հոսքը փոքր է թողունակությունից, իսկ հակառակ աղեղների համար հոսքը դրական թիվ է: Իրոք, նշված հատկությունը ստույգ է ակունքի համար, և պահպանվում է բ) և գ) կանոնների միջոցով գագաթ ավելացնելուց:

Դիցուք $s=u_1,u_2,\dots,u_{k-1},u_k=t$ s-ից t այն ճանապարհն է, որի ուղիղ աղեղների վրա հոսքը փոքր է թողունակությունից, իսկ հակառակ աղեղների վրա հոսքը դրական թիվ է: Սահմանենք ε_i թիվը $(i=1,2,3,\dots,k-1)$ հետևյալ եղանակով.

$$\varepsilon_i=\begin{cases}c(u_i,u_{i+1})-f(u_i,u_{i+1}), & \text{եթե } (u_i,u_{i+1})\text{-ը աղեղ է,}\\ f(u_{i+1},u_i), & \text{եթե } (u_{i+1},u_i)\text{-ն է աղեղ:}\end{cases}$$

Սահմանենք նաև $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{k-1}\}$ թիվը և նոր՝ f' հոսք $\overline{G}=(V,E)$ ցանցում.

$$f'(u,v)=\begin{cases}f(u,v)+\varepsilon, \text{եթե } (u,v)\text{-ն նշված ճանապարհի ուղիղ աղեղ է}\\ f(u,v)-\varepsilon, \text{եթե } (u,v)\text{-ն նշված ճանապարհի հակառակ աղեղ է}\\ f(u,v), \text{մնացած դեպքերում:}\end{cases}$$

Հեշտ է ստուգել, որ f'-ը s-ից t հոսք է և նրա մեծությունը $h+\varepsilon$ է: Բայց դա հակասում է f հոսքի առավելագույնության պայմանին:

Հետևաբար՝ $t \in \overline{S}$ և $(S,\overline{S})$-ը կտրվածք է: S բազմության սահմանումից հետևում է, որ.

- եթե $(u,v) \in (S,\overline{S})$, ապա $f(u,v) = c(u,v)$,
- եթե $(u,v) \in (\overline{S},S)$, ապա $f(u,v) = 0$:

Այնպես որ $(S,\overline{S})$ կտրվածքը բավարարում է $f(S,\overline{S}) = c(S,\overline{S})$ և $f(\overline{S},S) = 0$ պայմաններին: ⌟

§ 3. Ցանցում առավելագույն հոսքը գտնելու ալգորիթմ

Ցանցում առավելագույն հոսքը գտնելու ալգորիթմի *ընդհանուր նկարագիրը*:

Ալգորիթմի հիմքում ընկած է $\overline{G} = (V,E)$ ցանցում առավելագույն հոսքի մասին թեորեմի ապացուցման գաղափարը:

Ալգորիթմը, դիտարկելով $\overline{G} = (V,E)$ ցանցում f հոսքը, կամ եզրակացնում է, որ այն առավելագույն է և ավարտում աշխատանքը, կամ էլ կառուցում է նոր հոսք՝ ավելի մեծ մեծությամբ:

Ալգորիթմի աշխատանքի ավարտն ապահովելու համար ենթադրենք, որ՝

ա) $\overline{G} = (V,E)$ ցանցի բոլոր $(u,v) \in E$ աղեղների թողունակությունները ամբողջ թվեր են,

բ) f հոսքի համար ևս, որից ալգորիթմն սկսում է իր աշխատանքը, $f(u,v)$ թվերը ամբողջ են ցանկացած $(u,v) \in E$ աղեղի համար (կարող ենք ալգորիթմն սկսել բոլոր $(u,v) \in E$ աղեղների համար $f(u,v) = 0$ հոսքից):

Ալգորիթմի աշխատանքը կազմակերպվում է երկու փուլով, որոնցից մեկը կանվանենք A գործողություն, մյուսը՝ B գործողություն: A գործողության ընթացքում ստուգվում է, թե f հոսքը արդյոք լավագույնն է, թե ոչ, և եթե լավագույնը չէ, ապա նշվում է այն լավացնելու համար եղանակը:

B գործողությունը կատարվում է, երբ ալգորիթմը եզրակացրել է, որ հոսքը առավելագույնը չէ: Նրա արդյունքում ստացվում է նոր՝

ավելի մեծ մեծությամբ հոսք, որի արժեքը յուրաքանչյուր աղեղի համար դարձյալ ամբողջ թիվ է:

A գործողության նկարագիր

A գործողության ընթացքում ցանցի յուրաքանչյուր գագաթ գտնվում է հետևյալ երեք վիճակներից որևէ մեկում.

ա) դեռևս չի նշվել,

բ) նշվել է, բայց չի դիտարկվել,

գ) նշվել է և դիտարկվել:

A գործողության սկզբում նշված և դիտարկված գագաթների բազմությունը դատարկ է, նշված, բայց չդիտարկված է s գագաթը՝ $s(-,\infty)$ նշումով: Մնացած գագաթները համարվում են դեռևս չնշված:

A գործողության մեկ քայլը որևէ նշված, բայց չդիտարկիված գագաթի դիտարկումն է (առաջին նշվածը առաջինն է դիտարկվում), որի արդյունքում այն դառնում է նշված և դիտարկված, և կարող են նշվել դեռևս չնշված գագաթներ:

S -ից տարբեր յուրաքանչյուր u գագաթի նիշը $(w^*,\varepsilon(u))$ զույգ է, որտեղ ($*$ – ը + է կամ -), իսկ $\varepsilon(u)$ -ն ամբողջ դրական թիվ է:

$u(w^*,\varepsilon(u))$ գագաթի դիտարկման ժամանակ կատարվում է հետևյալը.

եթե $(u,v)\in E$, $f(u,v)<c(u,v)$ և v գագաթը դեռևս չի նշվել, ապա v -ն նշվում է՝ $v(u^+,\varepsilon(v))$, որտեղ

$$\varepsilon(v)=\mathbf{min}(\varepsilon(u),c(u,v)-f(u,v)),$$

եթե $(v,u)\in E$, $f(v,u)>0$ և v գագաթը դեռևս չի նշվել, ապա v -ն նշվում է՝ $v(u^-,\varepsilon(v))$, որտեղ

$$\varepsilon(v)=\mathbf{min}(\varepsilon(u),f(v,u)):$$

A գործողությունը կատարվում է բոլոր նշված, բայց չդիտարկված գագաթների համար, քանի դեռ չի նշվել t գագաթը:

t գագաթի նշման դեպքում *կատարվում է B գործողությունը*: Եթե բո՛լոր նշված, բայց չդիտարկված գագաթների դիտարկումից հետո չի նշվել t գագաթը, ապա *A* գործողությունն ավարտվում է *f հոսքը առավելագույնն է* եզրակացությամբ:

B գործողության նկարագիրը.

B գործողության արդյունքում նշվում է s -ից t ճանապարհ, որի ուղիղ աղեղների վրա հոսքը ավելացվում է $\varepsilon(t)$ -ով, իսկ հակառակ աղեղների վրա նվազեցվում է $\varepsilon(t)$ -ով՝ մնացած աղեղների վրա թողնելով նույնը:

Դա կարելի է անել հետևյալ սխեմայով.

Որպես հերթական գագաթ ընտրվում է t -ն,

1.եթե հերթական գագաթը $v(u^+,\varepsilon(v))$ -ն է, ապա $(u,v)\in E$ աղեղի վրա հոսքը ավելացվում է $\varepsilon(t)$ -ով,

2.եթե հերթական գագաթը $v(u^-,\varepsilon(v))$ -ն է, ապա աղեղի հոսքը պակասեցվում է $\varepsilon(t)$ -ով,

3.որպես հերթական գագաթ ընտրվում է v -ն. եթե հերթական գագաթը s -ն է, B գործողությունը ավարտվում է, հակառակ դեպքում կատարվում է 1-ը:

Արդյունքում s -ից t հոսքի մեծությունն ավելանում է $\varepsilon(t)$ -ով:

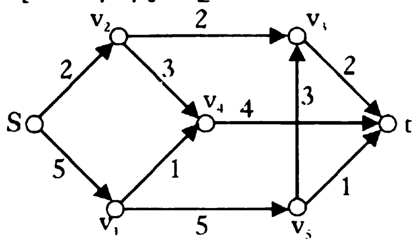
Քանի որ ամեն անգամ B գործողության կատարումից հետո հոսքը ավելանում է առնվազն 1-ով ($\varepsilon(t)$ -ն բնական թիվ է), ուստի պարզ է, որ B գործողությունը անվերջ անգամ չի կարող կատարվել: Հետևաբար, ինչ-որ պահի A գործողությունը կավարտվի, երբ բոլոր նշված և չդիտարկված գագաթները դիտարկվել են և չի նշվել t գագաթը: S -ով նշանակենք նշված և դիտարկված գագաթների բազմությունը $(s\in S)$, $\overline{S}$ -ով մնացած (չնշված) գագաթների բազմությունը $(t\in\overline{S})$: Պարզ է, որ $(S,\overline{S})$ -ը կտրվածք է, ընդ որում կտրվածքի $(u,v)\in E$, $u\in S$, $v\in\overline{S}$ աղեղների համար $f(u,v)=c(u,v)$, իսկ $(v,u)\in E$, $u\in S$, $v\in\overline{S}$ աղեղների համար $f(v,u)=0$ (հակառակ դեպքում u գագաթի դիտարկիումից կնշվեր v գագաթը):

Հետևաբար, իրոք, f հոսքը առավելագույնն է: Այսպիսով, *եթե ցանկացած $(u,v)\in E$ աղեղի համար $c(u,v)$ -ն ամբողջ թիվ է և ալգորիթմն աշխատանքը սկսում է այնպիսի f հոսքից, որ ցանկացած $(u,v)\in E$ աղեղի համար $f(u,v)$ -ն ամբողջ թիվ է, ապա արդյունքում ստացված f_0 առավելագույն հոսքը ևս ցանկացած աղեղի համար ամբողջ թիվ է:*

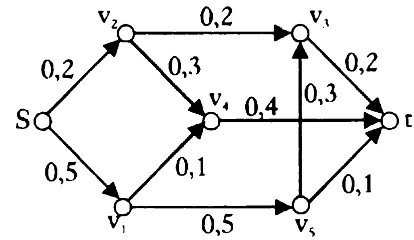
Ալգորիթմի աշխատանքը պարզաբանող օրինակ.

Գտնենք նկ. 4.10-ում պատկերված ցանցում s -ից t առավելագույն մեծությամբ հոսք (յուրաքանչյուր աղեղի կողքին գրված է նրա թողունակությունը):

Որպես սկզբնական թույլատրելի հոսք վերցնում ենք 0 մեծությամբ հոսքը՝ բոլոր աղեղների վրա $f=0$: Նկ. 4.11-ում յուրաքանչյուր աղեղին վերագրված թվազույգի առաջին բաղադրիչը հոսքի մեծությունն է, երկրորդ բաղադրիչը՝ տվյալ աղեղի թողունակությունը:



Նկ. 4.10

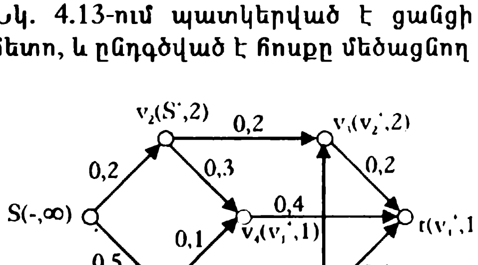


Նկ. 4.11

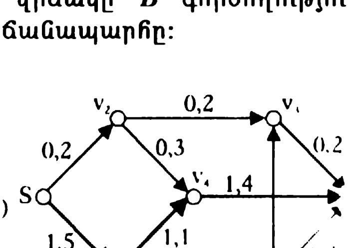
Ցանցի վիճակն առաջին անգամ *A* գործողության ավարտի պահին պատկերված է Նկ. 4.12-ում:

Կատարվել է հետևյալը. նշվել է *s* գագաթը՝ $(s,-\infty)$, դիտարկվել է *s* գագաթը, որի ընթացքում նշումներ են ստացել $v_1(s^+,5)$ և $v_2(s^+,2)$ գագաթները: Դիտարկվել է v_1 գագաթը, որի շնորհիվ նշումներ են ստացել $v_4(v_1^+,1)$ և $v_5(v_1^+,5)$ գագաթները: Դիտարկվել է v_2 գագաթը, որի շնորհիվ նշվել է $v_3(v_2^+,2)$ գագաթը: Դիտարկվել է v_4 գագաթը (առաջին նշվածը առաջինն է դիտարկվում), որի շնորհիվ նշվել է $t(v_4^+,1)$ գագաթը: *A* գործողությունն ավարտվում է *t* գագաթի նշումով. հոսքը հնարավոր է լավացնել:

Կատարվում է *B* գործողությունը. կառուցվում է ճանապարհը, որով հոսքը մեծացվում է 1-ով, և ստացվում է նոր, թույլատրելի հոսք: Նկ. 4.13-ում պատկերված է ցանցի վիճակը *B* գործողությունից հետո, և ընդգծված է հոսքը մեծացնող ճանապարհը:



Նկ. 4.12

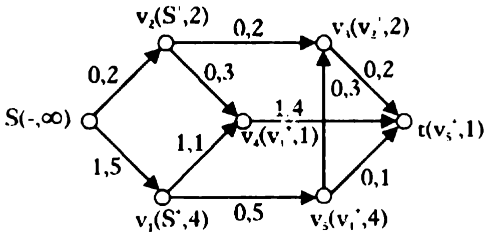


Նկ. 4.13

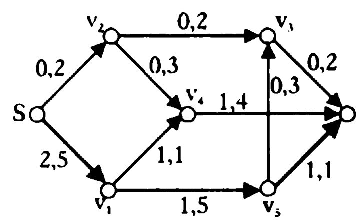
Նոր, թույլատրելի հոսքի համար նորից կատարվում է *A* գործողությունը, որի ավարտի պահին ցանցի տեսքը պատկերված է Նկ. 4.14-ում:

Կատարվել է հետևյալը: Նշվել է $s(-,\infty)$ գագաթը և դիտարկվել, որի արդյունքում նշումներ են ստացել $v_1(s^+,4)$ և $v_2(s^+,2)$ գագաթները: Դիտարկվել են v_1, այնուհետև v_2 գագաթները: Արդյունքում նշումներ են ստացել $v_5(v_1^+,4)$, $v_3(v_2^+,2)$ և $v_4(v_2^+,2)$ գագաթները: v_5 գագաթի դիտարկումից նշվել է $t(v_5^+,1)$ գագաթը: A գործողությունը ավարտվում է t գագաթի նշումով. հոսքը հնարավոր է լավացնել:

Կատարվում է B գործողությունը. նշվում է ճանապարհը, որով հոսքը մեծացվում է 1-ով: Նկ. 4.15-ում պատկերված է ցանցի վիճակը B գործողությունից հետո, ընդգծված է հոսքը լավացնող ճանապարհը:



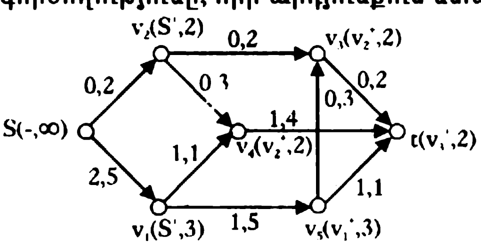
Նկ. 4.14



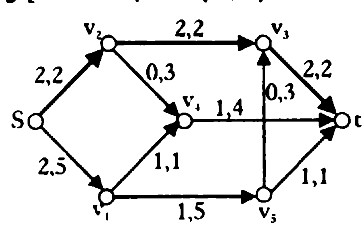
Նկ. 4.15

Նոր հոսքի համար նորից կատարվում է A գործողությունը, որի ավարտի պահին նշվել է t գագաթը, և ցանցն ունի Նկ. 4.16-ում պատկերված տեսքը:

Հոսքը հնարավոր է մեծացնել 2-ով: Կատարվում է B գործողությունը, որի արդյունքում ստացվում է նոր հոսք (Նկ. 4.17):



Նկ. 4.16



Նկ. 4.17

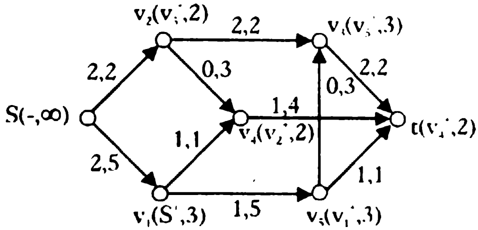
Ստացված հոսքի համար նորից կատարվում է A գործողությունը, որի ավարտի պահին նշվել է t գագաթը՝ $t(v_4^+,2)$ (Նկ. 4.18):

Հետևաբար, հոսքը հնարավոր է ավելացնել 2-ով: Նշված գագաթների

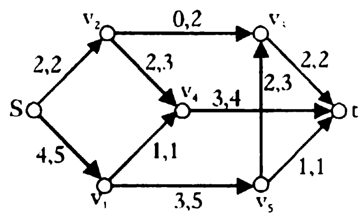
$$t(v_4^+,2), v_4(v_2^+,2), v_2(v_3^-,2), v_3(v_5^+,3), v_5(v_1^+,3), v_1(s^+,3), s$$

հաջորդականությունը միարժեքորեն որոշում է $s, v_1, v_5, v_3, v_2, v_4, t$ ճանապարհը, որի բոլոր աղեղները, բացի (v_2, v_3)-ից, ուղիղ են: Ուղիղ աղեղների հոսքը ավելացվում է 2-ով, իսկ (v_2, v_3)-ի հոսքը՝ պակասեցվում է 2-ով:

Արդյունքում ստացվում է նկ. 4.19-ում պատկերված ցանցը:

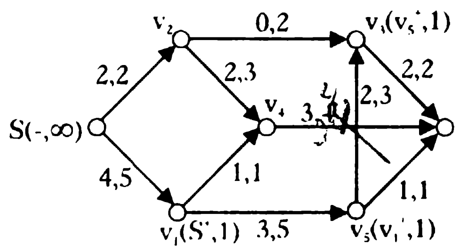


Նկ. 4.18



Նկ. 4.19

Ստացված ցանցի համար ալգորիթմի աշխատանքը դարձյալ սկսվում է A գործողությունից: Արդյունքում ստացվում է հետևյալ իրավիճակը (նկ. 4.20):



Նկ. 4.20

Նշվել և դիտարկվել են s, v_1, v_5, v_3 գագաթները, չկա նշված և չդիտարկված գագաթ: t-ն չի նշվել: Ստացված հոսքը առավելագույնն է, իսկ $(S, \bar{S})$ կտրվածքի թողունակությունը՝ նվազագույն. $S = \{s, v_1, v_3, v_5\}$, $\bar{S} = \{v_2, v_4, t\}$:

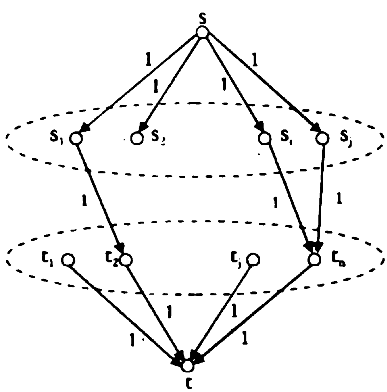
§ 4. Երկկողմ գրաֆի առավելագույն զուգակցման խնդրի լուծում

Դիցուք՝ տրված է $G = (S, T; X)$ երկկողմ գրաֆը, որտեղ $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ և $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$: Այդ գրաֆի առավելագույն զուգակցումը ընդհանուր գագաթներ չունեցող առավելագույն թվով կողերի բազմություն է: Այն գտնելու համար կօգտագործենք ցանցում առավելագույն հոսք գտնելու ալգորիթմը. ունենալով $G=(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆ՝ կկառուցենք $\overline{G}=(V,E)$ ցանց, կգտնենք այդ ցանցում առավելագույն հոսքը, որը հնարավորություն կտա գտնելու G գրաֆի առավելագույն զուգակցումը:

Որպես $\overline{G}$ ցանցի գագաթների բազմություն, ընդունենք $V=\{s\}\cup\{t\}\cup S\cup T$, իսկ աղեղների E բազմությունը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$(u,v)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} u=s \text{ և } v\in S, \\ v=t \text{ և } u\in T, \\ \{u,v\}\in X \text{ և } u\in S, v\in T: \end{cases}$$

Բոլոր $(u,v)\in E$ աղեղների համար ընդունենք $c(u,v)=1$: Կառուցված ցանցը կունենա նկ. 4.21-ում պատկերված տեսքը.



Նկ. 4.21

Օգտագործելով արդեն քննարկված ալգորիթմը՝ այս ցանցում կարող ենք կառուցել f առավելագույն հոսք: Նշենք, որ բոլոր աղեղների վրա այն ընդունում է ամբողջաթիվ արժեքներ՝ 0 կամ 1. բոլոր աղեղների թողունակությունը 1 է և աղեղով հոսքը չի գերազանցում թողունակությանը: Քանի որ s_i, $1\le i\le m$ գագաթից սկսվող (t_j, $1\le j\le n$ գագաթ մտնող) աղեղներից ամենաշատը մեկի վրա է հոսքն ընդունում 1 արժեք, ուստի $G=(S,T;X)$ գրաֆի կողերի

$$X_0=\{\{s,t\}/\{s,t\}\in X \text{ և } f(s,t)=1\}$$

բազմությունը զուգակցում է, և նրա կողերի քանակը հավասար է $\overline{G}=(V,E)$ ցանցում առավելագույն հոսքի մեծությանը:

Հեշտ է նկատել նաև, որ $G=(S,T;X)$ գրաֆի առավելագույն զուգակցման կողերի քանակը չի գերազանցում $\overline{G}=(V,E)$ ցանցում առավելագույն հոսքի մեծությանը: Իրոք, եթե գրաֆի $\{s_{i_1},t_{i_1}\},\{s_{i_2},t_{i_2}\},\dots,\{s_{i_p},t_{i_p}\}$ կողերը զուգակցում են, ապա $\overline{G}=(V,E)$ ցանցի այդ կողերին համապատասխան աղեղները պարունակող s-ից t ուղիների աղեղների վրա հոսքի արժեքն ընդունելով 1, մնացած աղեղների վրա՝ 0, կստացվի s-ից t, p մեծությամբ հոսք:

Այսպիսով, վերը նշված եղանակով գտնված $G=(V,S;X)$ գրաֆի կողերի X_0 բազմությունը առավելագույն զուգակցում է:

Արդեն նշել ենք, որ $G=(S,T;X)$ երկկողմ գրաֆը կարելի է ներկայացնել **0,1** տարրերից (α_{ij}) մատրիցի միջոցով, որտեղ

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\mathbf{1}, \text{ եթե } \{s_i,t_j\}\in X\\ \mathbf{0}, \text{ եթե } \{s_i,t_j\}\notin X:\end{cases}$$

G գրաֆում առավելագույն զուգակցումը գտնելու խնդիրը հանգում էր (α_{ij}) մատրիցում առավելագույն թվով 1-երի ընտրությանը, որոնցից ցանկացած երկուսը գտնվում են տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում:

Հետագայում այդ ձևով ընտրված 1-երը կանվանենք անկախ 1-եր: Եթե (α_{ij}) մատրիցի 0 պարունակող վանդակները համարենք ոչ թույլատրելի, ապա վերը ձևակերպված խնդիրը կունենա հետևյալ տեսքը:

Տրված է $m\times n$ կարգի աղյուսակ, որի որոշ վանդակներ ոչ թույլատրելի են (նշված են): Անհրաժեշտ է մնացած վանդակներում տեղավորել առավելագույն թվով անկախ 1-եր (ցանկացած 2-ը գտնվում են տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում):

Վերը նշվեց, որ այս խնդիրը կարելի է լուծել G գրաֆին համապատասխանող $\vec{G}$ ցանցում առավելագույն հոսքը գտնելու միջոցով: Քանի որ այն մասնավոր տիպի ցանց է, ուստի ստորև կտանք նրանում առավելագույն հոսքը գտնելու ալգորիթմի նոր՝ աղյուսակին հարմարեցված շարադրանքը:

§ 5. Օժանդակ խնդիր

Դիտարկենք $m \times n$ կարգի աղյուսակ, որի որոշ վանդակներ (նշանակենք նրանց բազմությունը Y) համարվում են ոչ թույլատրելի: Ենթադրենք, որ աղյուսակի տողերին համապատասխանեցված են տրված $a_1, a_2, \dots, a_n$, իսկ սյուներին՝ $b_1, b_2, \dots, b_n$ ամբողջ ոչ բացասական թվերը:

Ենթադրենք նաև, որ աղյուսակի յուրաքանչյուր թույլատրելի վանդակում գրված է ոչ բացասական թիվ, այնպես որ յուրաքանչյուր տողի վանդակներում գրված թվերի գումարը չի գերազանցում այդ տողին համապատասխանեցված թվին, և յուրաքանչյուր սյան վանդակներում գրված թվերի գումարը ևս չի գերազանցում այդ սյանը համապատասխանեցված թվին: Այդպիսի աղյուսակն անվանենք $(Y; a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ սահմանափակումներին բավարարող աղյուսակ:

Քննարկելու ենք հետևյալ խնդիրը.

$(Y; a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n)$ *սահմանափակումներին բավարարող աղյուսակներից գտնել այն աղյուսակը, որի վանդակներում գրված բոլոր թվերի գումարը ամենամեծն է:*

Եթե (i, j) վանդակում գրված թիվը նշանակենք f_{ij}, ապա ձևակերպված խնդիրը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

Գտնել $f_{ij} \geq 0$ թվերն այնպես, որ

$$f_{ij} = 0, \text{ երբ } (i, j) \in Y;$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

և որոնց համար $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}$ արտահայտությունը ստանում է իր ամենամեծ արժեքը:

Այն ԳԾ խնդիր է. սակայն սահմանափակումների և նպատակային ֆունկցիայի պարզ տեսքը հնարավորություն է տալիս նրա լուծման համար առաջարկել արդյունավետ ալգորիթմ:

Կառուցենք $\overline{G} = (V, E)$ ցանց, որում առավելագույն հոսքը գտնելու խնդիրը լուծելիս կլուծվի նաև (5.1) խնդիրը:

Որպես ցանցի գագաթների բազմություն ընդունենք
$V=\{s\}\cup\{t\}\cup\{s_1,s_2,\dots,s_m\}\cup\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$:

Սահմանենք ցանցի աղեղների E բազմությունը.

$$(u,v)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} u=s \text{ և } v\in\{s_1,s_2,\dots,s_m\} \\ v=t \text{ և } u\in\{t_1,t_2,\dots,t_n\} \\ u=s_i, v=t_j \text{ և } (i,j)\notin Y \end{cases}$$

Աղեղների թողունակությունը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$c(u,v)=\begin{cases} a_i, \text{ եթե } u=s, v=s_i, i=1,2,\dots,m, \\ b_j, \text{ եթե } v=t, u=t_j, j=1,2,\dots,n \\ M, \text{ եթե } u=s_i, b=t_j \text{ և } (i,j)\notin Y: \end{cases}$$

որտեղ $M=2\cdot\max\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$:

Դժվար չէ ստուգել, որ եթե f-ը կառուցված ցանցի թույլատրելի հոսք է, ապա $f_{ij}=f(s_i,t_j)$ թվերը կհանդիսանան $(Y;a_1,\dots,a_m;b_1,\dots,b_n)$ սահմանափակումներին բավարարող աղյուսակ և ընդհակառակը. նշված սահմանափակումների բավարարող յուրաքանչյուր աղյուսակ միարժեքորեն որոշում է $\overline{G}=(V,E)$ ցանցի թույլատրելի հոսքը: Ընդ որում հոսքի մեծությունը հավասար է աղյուսակի բոլոր թվերի գումարին:

Հետևաբար, (5.1) խնդրի լուծման համար բավական է համապատասխան ցանցում գտնել առավելագույն մեծությամբ հոսքը:

Ստորև կտրվի նշված ցանցում առավելագույն մեծությամբ հոսքը գտնելու ալգորիթմի նոր, աղյուսակի հետ աշխատելուն հարմարեցված շարադրանքը: s_i գագաթի փոխարեն օգտագործվում է i-րդ տող, t_j գագաթի փոխարեն՝ աղյուսակի j-րդ սյուն արտահայտությունները:

Օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմի նկարագիրը.

Ալգորիթմն իր աշխատանքը սկսում է նշված ցանցին համապատասխանող $m\times n$ կարգի աղյուսակից, որի որոշ վանդակներ ոչ թույլատրելի են (ջնջված են՝ նրանց համապատասխանող $f_{ij}=0$ և չեն փոփոխվում), տողերին համապատասխանեցված են $a_1,a_2,\dots,a_m$, սյուներին՝ $b_1,b_2,\dots,b_n$ թվերը: Բոլոր (ij) թույլատրելի վանդակների համար $f_{(ij)}=0$ (պայմանավորվենք 0-ն չգրել և այդ վանդակները անվանենք դատարկ վանդակներ):

A գործողության նկարագիրը

A գործողության ընթացքում աղյուսակի յուրաքանչյուր տող կամ սյուն գտնվում է հետևյալ երեք վիճակներից որևէ մեկում.

ա) դեռևս չի նշվել,

բ) նշվել է, բայց չի դիտարկվել,

գ) նշվել է և դիտարկվել:

A գործողությունը սկսվում է աղյուսակի այն տողերի նշումով, որոնց համար $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} < a_i$: Յուրաքանչյուր այդպիսի տող նշվում է $(-,\varepsilon_i)$ պայմանանշանով, որտեղ $\varepsilon_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}$:

A գործողության մեկ քայլը որևէ նշված, բայց չդիտարկված տողի կամ սյան դիտարկումն է, որի արդյունքում այն դառնում է նշված և դիտարկված, և կարող են նշվել դեռևս չնշված սյուներ կամ տողեր:

$i(j,\varepsilon_i)$ տողի (j -ն սյան համար է կամ -) դիտարկման ժամանակ կատարվում է հետևյալը.

Եթե (i,j) վանդակը թույլատրելի է և j-րդ սյունը նշված չէ, ապա այն նշվում է (i,δ_j) պայմանանշանով, որտեղ $\delta_j = \varepsilon_i$,

$j(i,\delta_j)$, սյան (i -ն տողի համար է) դիտարկման ժամանակ կատարվում է հետևյալը. եթե $f_{ij} > 0$ և i -րդ տողը նշված չէ, ապա այն նշվում է (j,ε_i) պայմանանշանով, որտեղ $\varepsilon_i = \min(\delta_j, f_{ij})$:

A գործողությունը կատարվում է բոլոր նշված, բայց չդիտարկված տողերի ու սյուների համար, քանի դեռ չի նշվել այնպիսի j_0 սյուն, որ $\sum_{i=1}^{m} f_{ij_0} < b_{j_0}$: Այդպիսի սյուն նշելու դեպքում *կատարվում է* B *գործողությունը*:

Եթե բոլոր նշված տողերը և սյուները դիտարկվել են, և չի նշվել որևէ սյուն, որի համար $\sum_{i=1}^{m} f_{ij} < b_j$, ապա A գործողությունն ավարտվում է *աղյուսակում գրված թվերի գումարն ամենամեծն է* եզրակացությամբ:

Ենթադրենք, որ A գործողությունն ավարտվել է j_0 սյան (i_1,δ_{j_0}) նշումով, որտեղ $b_{j_0} - \sum_{i=1}^{m} f_{ij_0} = \delta_0 > 0$:

Այս դեպքում կատարվում է B գործողությունը, որի արդյունքում աղյուսակի որոշ վանդակներում գրված թվերը փոփոխվում են և բոլոր գրված թվերի գումարն ավելանում է առնվազն 1-ով:

B գործողության նկարագիրը

1-ին քայլ. Սահմանվում է $\varepsilon = \min(\delta_0, \delta_{j0})$ թիվը և կազմվում սյուների և տողերի համարների $j_0, i_1, j_1, i_2, \ldots, j_{h-1}, i_h$ հաջորդականությունը, որտեղ

j_k սյունը նշվել է i_{k+1} տողի դիտարկման ժամանակ $(k = 0,1,2,\ldots,h-1)$

i_k տողը նշվել է j_k սյան դիտարկման ժամանակ $(k = 0,1,2,\ldots,h-1)$

i_h տողը նշվել է A գործողության սկզբում:

2-րդ քայլ. $k = 1,2,\ldots,h$ արժեքների համար (i_k, j_{k-1}) վանդակում գրված թվին ավելացվում է ε,

3-րդ քայլ. $k = 1,2,\ldots,h-1$ արժեքների համար (i_k, j_k) վանդակում գրված թվերից հանվում է ε, ավարտվում է B գործողությունը և նոր f_{ij} թվերից կազմված աղյուսակի համար սկսվում է A գործողությունը:

Ընթերցողին ենք թողնում ապացուցելու, որ շարադրվածը ցանցում առավելագույն հոսք գտնելու ալգորիթմն էր, արդյունքում ստացված f_{ij} թվերը համապատասխանում են առավելագույն հոսքին և ամբողջաթիվ են:

§ 6. Նեղ տեղերի խնդրի լուծումը

Առաջին գլխում դիտարկված՝ հոսքագծի աշխատատեղերում աշխատողների արդյունավետ բաշխման հետ կապված *նեղ տեղերի խնդրի* մաթեմատիկական մոդելը հետևյալն է.

Տրված է $n \times n$ կարգի $A = (\alpha_{ij})$ մատրիցը, որտեղ $\alpha_{ij} \geq 0$: Անհրաժեշտ է գտնել $\pi:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ տեղադրություն, որի համար $\min\{\alpha_{1\pi(1)}, \alpha_{2\pi(2)}, \ldots, \alpha_{n\pi(n)}\}$ արտահայտությունն ընդունում է իր առավելագույն արժեքը: $m(A)$-ով նշանակենք այդ արժեքը (ակնհայտ է, որ այն գոյություն ունի):

Տրված A մատրիցի և β թվի համար սահմանենք $A(\beta)$ աղյուսակը. նրա (ij) վանդակը համարենք թույլատրելի, եթե $a_{ij} \geq \beta$, հակառակ դեպքում այդ վանդակը կհամարենք ոչ թույլատրելի:

Ենթադրենք, որ առավելագույն թվով անկախ 1-երի քանակը, որոնց հնարավոր է դասավորել $A(\beta)$ աղյուսակի թույլատրելի վանդակներում, k է: Հեշտ է ստուգել, որ

ա) եթե $k = n$, ապա $m(A) \geq \beta$,

բ) եթե $k < n$, ապա $m(A) < \beta$:

Այսպիսով, $m(A)$-ի արժեքը գտնելու համար բավական է նշել A մատրիցի ամենամեծ β տարրը, որի դեպքում $A(\beta)$ մատրիցում հնարավոր է դասավորել n հատ անկախ 1-եր:

Մյուս կողմից, եթե

$$\beta_0 = \min(\min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}, \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij}),$$

ապա պարզ է, որ $m(A)$-ի արժեքը β_0-ից մեծ լինել չի կարող:

Վերը թվարկված հատկությունների հիման վրա առաջարկվում է նեղ տեղերի խնդրի լուծման հետևյալ ալգորիթմը.

1-ին քայլ. կազմում ենք A մատրիցի β_0-ին չգերազանցող բոլոր տարրերի կարգավորված հաջորդականությունը՝

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots$$

և k պարամետրին վերագրում 0 արժեք:

2-րդ քայլ. կազմում ենք $A(\beta_k)$ աղյուսակը և, օգտագործելով օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմը, նրա թույլատրելի վանդակներում՝ դասավորում առավելագույն թվով 1-եր:

Եթե դասավորված 1-երի քանակը n է, ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը. այդ 1-երը բնորոշում են լավագույն բաշխումը և $m(A) = \beta_k$ պատասխանով, հակառակ դեպքում k-ի արժեքին ավելացվում է 1 և նորից կատարվում 2-րդ քայլը:

Ընթերցողին ենք թողնում ապացուցելու, որ այս ալգորիթմն, իրոք, գտնում է նեղ տեղերի խնդրի լավագույն լուծումը:

Դիտարկենք առաջարկված ալգորիթմի աշխատանքը պարզաբանող օրինակ:

Դիցուք՝ հուքագիծն ունի վեց աշխատատեղ ՝ ա1, ա2, ա3, ա4, ա5, ա6, վեց աշխատողներ՝ կ1, կ2, կ3, կ4, կ5, կ6 և տրված է աշխատողների յուրաքանչյուրի արտադրողականությունը ամեն մի աշխատատեղում:

Անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր աշխատատեղի համար աշխատող ընտրել այնպես, որ հոսքագծի արտադրողականությունը լինի ըստ հնարավորին մեծ (նկ. 4.22):

Պարզ է, որ $\beta_0 = 6$, (2-րդ կատարողի արտադրողականության ամենամեծ արժեքը 6 է, իսկ մնացածներինը՝ վեցից մեծ) և ալգորիթմի առաջին քայլում նշվում է մատրիցի տարրերի $6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$ հաջորդականությունը և ընտրվում նրա առաջին անդամը՝ $\beta_0 = 6$:

Այնուհետև կազմում ենք $A(6)$ աղյուսակը. վանդակը համարվում է թույլատրելի, եթե մատրիցի համապատասխան տարրը վեց է կամ վեցից մեծ:

	կ1	կ2	կ3	կ4	կ5	կ6
ա1	7	6	3	3	2	2
ա2	8	5	4	2	3	3
ա3	8	5	2	3	3	3
ա4	2	3	9	8	5	5
ա5	3	1	6	5	7	8
ա6	2	2	8	4	8	3

A(6)=

		x	x	x	x
	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x
x	x			x	x
x	x		x		
x	x		x		x

Նկ. 4.22

Օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմի միջոցով այս աղյուսակում պետք է դասավորենք առավելագույն թվով անկախ 1-եր: Ստորև կնկարագրենք այդ ալգորիթմի աշխատանքը. պայմանավորվենք տողը կամ սյունը նշելիս չգրել ε-ը, քանի որ այն միշտ 1 է:

Օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմն աշխատանքն սկսում է՝ անկախ 1-երի որևէ թույլատրելի դասավորությունից: Մենք կսկսենք այն դասավորությունից, որն ստացվում է, երբ առաջին հանդիպած թույլատրելի վանդակում գրում ենք 1, և անցնում հաջորդ տողին ու սյանը:

A գործողությունն սկսելու պահին նշվում են աղյուսակի այն տողերը, որոնք 1 չեն պարունակում և աղյուսակն ունի նկ. 4.23-ում պատկերված տեսքը.

Նշված տողերի դիտարկումից հետո նշվում են աղյուսակի առաջին, երրորդ և հինգերորդ սյուները, որոնց դիտարկումից հետո կստանանք նկ. 4.24-ում պատկերված աղյուսակը.

1		x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	(-)
	x	x	x	x	x	(-)
x	x	1		x	x	
x	x		x	1		
x	x		x		x	(-)

Նկ. 4.23

1		x	x	x	x	(1)
	x	x	x	x	x	(-)
	x	x	x	x	x	(-)
x	x	1		x	x	(3)
x	x		x	1		(5)
x	x		x		x	(-)
(2)		(6)		(6)		

Նկ. 4.24

Սկսում ենք դիտարկել դեռևս չդիտարկված առաջին, չորրորդ և հինգերորդ տողերը: Առաջին տողի դիտարկման ժամանակ նշվում է երկրորդ սյունը, որը 1 չի պարունակում, և կատարվում է *B* գործողությունը, որի արդյունքում (1.2) և (2.1) վանդակներում գրվում է 1, իսկ (1.1) վանդակում գրված 1-ը ջնջվում է: Արդյունքում ստացված աղյուսակի համար նորից սկսվում է ալգորիթմի աշխատանքը՝ 1 չպարունակող տողերի նշումով (նկ. 4.25):

Այս նշված տողերի դիտարկումից հետո նշվում են առաջին, երրորդ և հինգերորդ սյուները, որոնց դիտարկումից հետո աղյուսակը կունենա նկ. 4.26-ում պատկերված տեսքը.

	1	x	x	x	x	
1	x	x	x	x	x	
	x	x	x	x	x	(-)
x	x	1		x	x	
x	x		x	1		
x	x		x		x	(-)

Նկ. 4.25

	1	x	x	x	x	
1	x	x	x	x	x	(1)
	x	x	x	x	x	(-)
x	x	1		x	x	(3)
x	x		x	1		(5)
x	x		x		x	(-)
(3)		(6)		(6)		

Նկ. 4.26

Երկրորդ տողը դիտարկելիս ոչ մի սյուն չի նշվում, իսկ չորրորդ տողը դիտարկելիս նշվում է 1 չպարունակող չորրորդ սյունը և կատարվում է *B* գործողությունը, որի արդյունքում (4,4) և (6,3) վանդակներում գրվում է 1, իսկ (4.3) վանդակի 1-ը ջնջվում է: Արդյունքում՝ ստացված աղյուսակի համար նորից սկսվում է ալգորիթմի աշխատանքը՝ 1 չպարունակող տողերի նշումով. Նշվում է միայն երրորդ տողը, որը դիտարկելիս նշվում է առաջին սյունը, որի դիտարկումից հետո՝ երկրորդ տողը: Այդ տողի դիտարկումը ոչինչ չի նշում, և օժանդակ խնդրի ալգորիթմը աշխատանքն ավարտում է՝ *ստացված դասավորությունը լավագույնն է* պատասխանով (նկ. 4.27):

Քանի որ դասավորված 1-երի քանակը փոքր է 6-ից, ուստի անցնում ենք նոր՝ *A* (5) աղյուսակի կառուցմանը և նրանում առավելագույն թվով 1-երի դասավորման խնդրի լուծմանը:

Քանի որ հին աղյուսակի թույլատրելի վանդակները մնում են թույլատրելի, ուստի օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմը կարող ենք սկսել նախորդ քայլում դասավորված 1-երից (նկ. 4.28):

	1	x	x	x	x	
1	x	x	x	x	x	(1)
	x	x	x	x	x	(-)
x	x		1	x	x	
x	x		x	1		
x	x	1	x		x	
(3)						

նկ. 4.27

	1	x	x	x	x	
1		x	x	x	x	
		x	x	x	x	(-)
x	x		1			
x	x			1		
x	x	1	x		x	

նկ. 4.28

Նշված միակ՝ երրորդ տողի դիտարկումից հետո նշվում են առաջին և երկրորդ սյուները, որոնց դիտարկումից հետո՝ առաջին և երկրորդ տողերը: Այդ տողերը դիտարկելիս սյուն չի նշվում, և օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմն աշխատանքն ավարտում է՝ *ստացված դասավորությունը լավագույնն է* պատասխանով:

Դասավորված 1-երի քանակը փոքր է 6-ից, և անցնում ենք նոր՝ *A*(4) աղյուսակի կառուցմանը և նրանում առավելագույն թվով 1-երի դասավորման խնդրի լուծմանը:

Երրորդ տողը դիտարկելիս նշվում են առաջին և երկրորդ սյուները: Այդ սյուները դիտարկելիս նշվում են. առաջին և երկրորդ տողերը, երկրորդ տողը դիտարկվելուց նշվում է երրորդ սյունը, որի դիտարկումից՝ վեցերորդ տողը: Շարունակելով գործընթացը՝ կստանանք նկ. 4.29-ում պատկերված աղյուսակը:

	1	x	x	x	x	(2)
1			x	x	x	(1)
		x	x	x	x	(-)
x	x		1			(4)
x	x			1		(5)
x	x	1			x	(3)
(3)	(3)	(2)	(6)	(6)	(3)	

Նկ. 4.29

	1	x	x	x	x
		1	x	x	x
1		x	x	x	x
x	x				1
x	x			1	
x	x		1		x

Նկ. 4.30

Չորրորդ տողը դիտարկելիս նշվում է 1 չպարունակող վեցերորդ սյունը: Կատարվում է *B* գործողությունը, որի արդյունքում (2,3), (3,1), (6,4) և (4,6) վանդակներում ավելանում է 1, իսկ (2,1), (6,3) և (4,4) վանդակներում գրված 1-երը ջնջվում են: Արդյունքում ստացված աղյուսակում դասավորված է 6 հատ անկախ 1 (նկ. 4.30):

Հետևաբար, (ա1,կ2), (ա2,կ3), (ա3,կ1), (ա4,կ6), (ա5,կ5), (ա6,կ4) բաշխումը, որի դեպքում հոսքագծի արտադրողականությունը 4 է, լավագույնն է:

§ 7. Տրանսպորտային խնդիր

Վերհիշենք առաջին գլխում սահմանված տրանսպորտային խնդրի մաթեմատիկական մոդելը:

Տրված են $a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n$ ոչ բացասական թվերը և $m \times n$ կարգի (c_{ij}) ոչ բացասական տարրերով մատրիցը:

Անհրաժեշտ է գտնել $x_{ij} \geq 0$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ թվեր այնպես, որ բավարարվեն

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i\ , \ i = 1,2,\ldots,m$$

և

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j\ , \ j = 1,2,\ldots,n$$

անհավասարությունները, և $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij}$ արտահայտությունը ստանա իր նվազագույն արժեքը:

Տրանսպորտային խնդիրը ԳԾ խնդիր է, որի համապատասխան $mn \times (m+n)$ կարգի մատրիցի տարրերը 0, 1 և -1 են: Օգտագործելով նրա պարզագույն տեսքը՝ լուծման համար կառաջարկենք մի պարզ և արդյունավետ ալգորիթմ:

Հեշտ է նկատել, որ սպառողների պահանջարկը կարելի է բավարարել եթե և միայն եթե ամբողջ արտադրանքի քանակը փոքր չէ բոլոր պահանջարկների գումարից՝

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j :$$

Մենք կենթադրենք, որ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ և $b_1, b_2, \ldots, b_n$ թվերը բավարարում են $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ պայմանին, ամբողջ արտադրանքի քանակը հավասար է ընդհանուր պահանջարկի քանակին:

Դրանով ընդհանրությունը չենք խախտի. եթե արտադրանքի քանակը մեծ է պահանջարկից, ապա կարող ենք ենթադրել, որ կա $(n+1)$-րդ սպառողը, որին $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ ավելցուկը կտրամադրվի առանց տրանսպորտային ծախսերի:

Ենթադրենք նաև, որ բոլոր a_i, b_j և c_{ij} թվերը *ամբողջ ոչ բացասական* թվեր են և ձևակերպված խնդիրը անվանենք (a_i, b_j, c_{ij}) տրանսպորտային խնդիր:

Ընթերցողին առաջարկում ենք կազմել և համոզվել, որ (a_i, b_j, c_{ij}) տրանսպորտային խնդրի երկակին հետևյալ խնդիրն է.

Գտնել $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ոչ բացասական թվեր այնպես, որ բավարարվեն

$$-\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}\,;\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

անհավասարությունները և

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$$

արտահայտությունը ստանա իր առավելագույն արժեքը:

Երկակի խնդիրն ունի հետաքրքիր մեկնաբանություն, որի նկարագրման համար նորից ձևակերպենք տրանսպորտային խնդիրը:

Ձեռնարկությունն ունի որևէ արտադրանքի m արտադրողներ և այդ արտադրանքն օգտագործող n սպառողներ: Հայտնի է, թե միավոր ժամանակում նրանցից յուրաքանչյուրն ինչքան է արտադրում կամ օգտագործում: Արտադրանքը արտադրողից սպառողին տեղափոխման համար ձեռնարկությունն օգտվում է T_0 տրանսպորտային ձեռնարկության ծառայությունից. վճարելով $x \cdot c_{ij}$ գումար i-րդ արտադրանքից j-րդ սպառողին x քանակի արտադրանք տեղափոխելիս: Անհրաժեշտ է որոշել, թե որ արտադրողից ինչքան պետք է տրամադրվի ամեն մի սպառողի, որպեսզի յուրաքանչյուր սպառող ստանա իրեն անհրաժեշտ քանակի արտադրանքը, յուրաքանչյուր արտադրողից վերցված արտադրանքի քանակը շատ չլինի իր արտադրածից և տրանսպորտային ծախսերը լինեն նվազագույնը:

Ենթադրենք, որ հայտնվել է նոր՝ T_1 տրանսպորտային ձեռնարկություն, որը նոր եղանակով է կազմակերպում արտադրողից սպառողին արտադրանքի տեղափոխումը:

T_1-ն առաջարկում է գնել ողջ արտադրանքը արտադրողներից, տեղափոխել իր միջոցներով և վերավաճառել սպառողներին՝ պահպանելով նրանց պահանջարկը: Նա առաջարկում է նաև i-րդ արտադրողից միավոր արտադրանքի գնման α_i և j-րդ սպառողին նրա վերավաճառման β_j գներն այնպես, որ ձեռնարկությանը նպատակահարմար լինի օգտվելու իր ծառայություններից: Նախկինում միավոր արտադրանքը i-րդ արտադրողից j-րդ սպառողին տեղափոխելուց ձեռնարկությունը ծախսում էր c_{ij} գումար, իսկ T_1 ձեռնարկության ծառայությանը դիմելիս՝ $-\alpha_i + \beta_j$:

Այսպիսով, երկակի խնդրի սահմանափակումները նշանակում են, որ ձեռնարկությունը չի տուժի արտադրանքի տեղափոխումը նոր եղանակով կազմակերպելուց:

Մյուս կողմից, բնական է նաև T_1 տրանսպորտային ձեռնարկության նպատակը. առավելագույնի հասցնել իր շահույթը՝ $-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$, երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիան:

Հիշենք այդ խնդիրների զույգի համար օպտիմալության հայտանիշը.

եթե x_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ բաղադրիչներով վեկտորը տրանսպորտային խնդրի լուծում է, իսկ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$-ը՝ երկակի խնդրի լուծում, ապա նրանք կլինեն համապատասխան խնդիրների լավագույն լուծումը, եթե և միայն եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները $(i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,m)$.

ա) եթե $-\alpha_i + \beta_j < c_{ij}$, ապա $x_{ij} = 0$,

բ) եթե $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i$, ապա $\alpha_i = 0$,

գ) եթե $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > b_j$, ապա $\beta_j = 0$:

Մեր ենթադրության համաձայն $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, և հեշտ է նկատել, որ տրանսպորտային խնդրի և նրա երկակի խնդրի ցանակցած լուծումներ բավարարում են օպտիմալության հայտանիշի բ) և գ) պայմաններին: Իսկ օպտիմալության հայտանիշի ա) պայմանը էապես կօգտագործենք տրանսպորտային խնդրի լուծման առաջարկվող ալգորիթմում:

Դիցուք՝ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)$ վեկտորը (a_i, b_j, c_{ij}) տրանսպորտային խնդրի երկակի խնդրի որևէ լուծում է:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Գտնել $f_{ij} \ge 0$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ թվեր այնպես, որ բավարարվեն

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \le a_i, \quad i = 1,2,...,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \le b_i, \quad j = 1,2,...,n$$

եթե $-\alpha_i + \beta_j < c_{ij}$, ապա $f_{ij} = 0$

պայմանները, և $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}$ արտահայտությունն ստանա իր առավելագույն արժեքը:

Այս խնդիրն անվանենք (α_i, β_j) *օժանդակ խնդիր*:

Հեշտ է տեսնել, որ $(i,j)\in Y \Leftrightarrow -\alpha_i+\beta_j<c_{ij}$ ենթադրության դեպքում այն մեր կողմից արդեն քննարկված օժանդակ խնդիրն է. $(Y,a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n)$ սահմանափակումներին բավարարող այն աղյուսակի գտնելն է, որի վանդակներում գրված բոլոր թվերի գումարը ամենամեծն է:

Տրանսպորտային խնդրից այն էապես տարբերվում է և սահմանափակումներով և նպատակային ֆունկցիայի տեսքով: Սակայն, հեշտ է ստուգել, որ եթե նրա լուծումը բավարարում է (a_i,b_j,c_{ij}) տրանսպորտային խնդրի սահմանափակումներին, ապա այն տրանսպորտային խնդրի լավագույն լուծում է: Այդ փաստը կօգտագործենք ալգորիթմի աշխատանքի ավարտի պահը որոշելու համար:

(a_i,b_j,c_{ij}) *տրանսպորտային խնդրի լուծման ալգորիթմի նկարագիրը.*

1-ին քայլ. դիտարկում ենք տրանսպորտային խնդրին երկակի խնդրի որևէ լուծում. օրինակ

$$\alpha_i=0,\ i=1,2,\ldots,m;\ \beta_j=\min_{1\le i\le m}\alpha_{ij},\ j=1,2,\ldots,n:$$

2-րդ քայլ. կազմում ենք այդ լուծման համապատասխան (α_i,β_j) օժանդակ խնդիրը և այն լուծում արդեն շարադրված օժանդակ խնդրի լուծման ալգորիթմով:

3-րդ քայլ. եթե ստացված $f_{ij}\ (1\le i\le m, 1\le j\le n)$ լուծումը բավարարում է $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}=\sum_{i=1}^{m}a_i$ պայմանին, ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը. ստացված լուծումը տրանսպորտային խնդրի լավագույն լուծումն է պատասխանով, հակառակ դեպքում՝ կատարվում է 4-րդ քայլը:

4-րդ քայլ. կատարվում է C գործողությունը, որի արդյունքում ստացվում է տրանսպորտային խնդրին երկակի խնդրի նոր լուծում և անցնում 2-րդ քայլին:

Այժմ նկարագրենք C գործողությունը և ցույց տանք, որ վերջավոր թվով քայլերից հետո ալգորիթմն իրոք գտնում է տրանսպորտային խնդրի լավագույն լուծումը:

Տրանսպորտային և օժանդակ խնդիրների լուծման ալգորիթմների նկարագրումից հետևում է, որ C գործողությունն սկսվում է, երբ դիտարկված աղյուսակի թույլատրելի վանդակներում գրված f_{ij} թվերին համապատասխան՝ կատարվել է A

գործողությունը. բոլոր նշված տողերը և սյուները դիտարկվել են, և չի նշվել սյուն, որի համար $\sum_{i=1}^{m} f_{ij} < b_j$, իսկ

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} < \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j :$$

I-ով նշանակենք նշված և դիտարկված տողերի, իսկ J-ով՝ նշված և դիտարկված սյուների բազմությունը:

Ենթադրենք, որ $\bar{I} = \{1,2,\dots,m\} \setminus I$ չնշված տողերի, իսկ $\bar{J} = \{1,2,\dots,n\} \setminus J$ չնշված սյուների բազմությունն է:

Նշված ալգորիթմի նկարագրումից հետևում է նաև, որ C գործողությունն սկսվելու պահին բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

ա) եթե $i \in I$ և $j \in \bar{J}$, ապա (ij) վանդակը ոչ թույլատրելի է (հակառակ դեպքում i-րդ տողը դիտարկելիս կնշվեր j-րդ սյունը),

բ) եթե $i \in \bar{I}$ և $j \in J$, ապա $f_{ij} = 0$ (հակառակ դեպքում j-րդ սյունը դիտարկվելիս կնշվեր i-րդ տողը),

գ) եթե $i \in \bar{I}$, ապա $\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = a_i$ (հակառակ դեպքում, առաջին քայլում կնշվեր i-րդ տողը):

Սահմանենք $\delta = \min\limits_{i \in I, j \in \bar{J}} (c_{ij} + \alpha_i - \beta_j)$ թիվը: Քանի որ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ վեկտորը երկակի խնդրի լուծումն է, իսկ $(i \in I)$ և $(j \in \bar{J})$ պայմանին բավարարող վանդակները ոչ թույլատրելի են, ուստի $\delta > 0$:

Կառուցենք $(\alpha_1', \alpha_2', \dots \alpha_m'; \beta_1', \beta_2', \dots \beta_n')$ վեկտորը, որտեղ

$$\alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i, & \text{եթե } i \in I, \\ \alpha_i + \delta, & \text{հակառակ դեպքում,} \end{cases}$$

$$\beta_j' = \begin{cases} \beta_j, & \text{եթե } j \in J, \\ \beta_j + \delta, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Ցույց տանք, որ կառուցած ոչ բացասական վեկտորը (a_i, b_j, c_{ij}) տրանսպորտային խնդրին երկակի խնդրի լուծում է:

Իրոք, քանի որ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$-ը երկակի խնդրի լուծում է և

$$-\alpha_i' + \beta_j' = \begin{cases} -\alpha_i + \beta_j, & \text{եթե } i \in I \text{ և } j \in J \text{ կամ } i \in \bar{I} \text{ և } j \in \bar{J} \\ -\alpha_i + \beta_j - \delta, & \text{եթե } i \in \bar{I} \text{ և } j \in J \\ -\alpha_i + \beta_j + \delta, & \text{եթե } i \in I \text{ և } j \in \bar{J}, \end{cases}$$

ուստի $-\alpha_i' + \beta_j' \le c_{ij}$ պայմանը բավարարվում է բոլոր $i = 1,2,\ldots,m$ և $j = 1,2,\ldots,n$ արժեքների դեպքում ($i \in I$, իսկ $j \in \bar{J}$ դեպքում նշված անհավասարությունը բավարարված է δ-ի սահմանման համաձայն):

C գործողության նկարագիրը. վերը նշվածի համաձայն որոշվում է δ թիվը, և կառուցվում երկակի խնդրի նոր լուծում $(\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_n';\beta_1',,\beta_2'\ldots,\beta_n')$:

Ապացուցենք, որ առաջարկված ալգորիթմը գտնում է տրանսպորտային խնդրի լավագույն լուծումը:

Նախ, պարզ է, որ ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում B գործողությունը կարող է կատարվել ամենաշատը $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ անգամ (ամեն անգամ B-ն կատարելիս $\sum\sum f_{ij}$ արտահայտության արժեքն ավելանում է առնվազն 1-ով):

Մեր ենթադրության համաձայն a_i, b_j, c_{ij} թվերը ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) ամբողջ, ոչ բացասական են և եթե α_i, β_j ամբողջ են, ապա սահմանված δ-ն կլինի ամբողջ դրական թիվ, հետևաբար, α_i', β_j' թվերը նույնպես կլինեն ամբողջ, ոչ բացասական:

Հաշվենք երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիայի արժեքի փոփոխությունը α_i, β_j լուծումից α_i', β_j' լուծմանն անցնելիս.

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i' a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j' b_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = \delta\Big(\sum_{j\in\bar{J}} b_j - \sum_{i\in\bar{I}} a_i\Big),$$

Հեշտ է նկատել, որ

$$\sum_{i\in\bar{I}} a_i = \sum_{i\in\bar{I}} \sum_{j\in\bar{J}} f_{ij} < \sum_{j\in\bar{J}} b_j,$$

հետևաբար, C գործողության արդյունքում երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիայի արժեքը ավելանում է առնվազն 1-ով: Քանի որ այն վերևից սահմանափակ է, ուստի վերջավոր թվով քայլերից հետո ալգորիթմը աշխատանքը կավարտի երրորդ քայլում՝ գտնելով $\sum\sum f_{ij} = \sum a_i$ պայմանին բավարարո f_{ij} թվերը: Ակնհայտ է, որ դրանք կլինեն տրանսպորտային (a_i, b_j, c_{ij}) խնդրի լավագույն լուծումը: ⌋

§ 8. Նշանակումների խնդիր

Առաջին գլխում ձևակերպել ենք նշանակումների խնդիրը:

Ունենք n աշխատատեղեր և n աշխատողներ, և տրված է $n \times n$ կարգի ոչ բացասական տարրերով (α_{ij}) մատրիցը, որտեղ α_{ij}-ն i-րդ աշխատողի արդյունավետությունն է j-րդ աշխատատեղում: Անհրաժեշտ է ամեն մի աշխատողի հանձնարարել մեկ աշխատանք՝ յուրաքանչյուր աշխատանք հանձնարարելով մեկ աշխատողի և այնպես, որ աշխատողների արդյունավետությունների գումարը լինի առավելագույնը: Կամ, որ նույնն է, անհրաժեշտ է գտնել $1,2,\ldots,n$ տարրերի այնպիսի π տեղադրություն, որի համար $\alpha_{1\pi(1)}+\alpha_{2\pi(2)}+$ $+\ldots\alpha_{n\pi(n)}$ գումարն ընդունում է իր առավելագույն արժեքը:

Ենթադրենք, որ α_{ij}-ները ամբողջ թվեր են և ցույց տանք, որ նշանակումների խնդիրը հանգում է արդեն քննարկված տրանսպորտային խնդրի լուծմանը, հետևաբար, այն գտնելու համար օգտագործենք տրասնպորտային խնդրի լուծման ալգորիթմը:

$1,2,\ldots,n$ տարրերի π տեղադրությունը համապատասխանեցնենք 0, 1 տարրերից, $n \times n$ կարգի (x_{ij}), այսպես կոչված, *տեղադրության մատրիցը*, որտեղ

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{եթե } \pi(i)=j,\\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:}\end{cases}$$

Նկատենք, որ ստացված 0, 1 տարրերից $n \times n$ կարգի տեղադրության մատրիցի յուրաքանչյուր տող և յուրաքանչյուր սյուն պարունակում է ճիշտ մեկ հատ 1 և այս պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր մատրից համապատասխանում է տարրերի որևէ $1,2,\ldots,n$ տեղադրության:

Նշանակումների խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

Տրված է $n \times n$ կարգի (α_{ij}) մատրիցը, որտեղ $\alpha_{ij} \geq 0$ և ամբողջ թվեր են: Անհրաժեշտ է գտնել $n \times n$ կարգի այնպիսի (x_{ij}) տեղադրության մատրից, որի համար $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$ արտահայտությունն ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը: Կամ, որ նույնն է, անհրաժեշտ է գտնել $x_{ij} \in \{0,1\}$ թվեր այնպես, որ բավարարվեն

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,,\;\; i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\,,\;\; j = 1,2,\dots,n$$

և $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\alpha_{ij}$ արտահայտությունն ստանա իր ամենամեծ արժեքը:

Այս ձևակերպումով նշանակումների խնդիրը տարբերվում է տրանսպորտային խնդրից. սահմանափակումները պարունակում են = նշանը, $x_{ij} = 0$ կամ 1 պայմաններով և նպատակային ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքը գտնելու պահանջով (տրանսպորտային խնդրում պահանջվում էր գտնել նպատակային ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքը):

Սահմանենք $M = \max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{1\le j\le n}\alpha_{ij}$ և $c_{ij} = M - \alpha_{ij}$ թվերը $(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$: ·

Դիտարկենք հետևյալ տրանսպորտային խնդիրը.

Գտնել $x_{ij} \ge 0$ թվերն այնպես, որ բավարարվեն $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1$, $i = 1,2,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge 1$, $j = 1,2,\dots,n$ պայմանները, և $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ արտահայտությունը ստանա իր ամենամեծ արժեքը:

Այս տրանսպորտային խնդրի համար առաջարկված ալգորիթմը գտնում է x_{ij} լավագույն լուծումը, ընդ որում x_{ij} թվերը ամբողջ են և, հետևաբար, 0 կամ 1 են: Խնդրի սահմանափակումներից բխում է, որ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n$ և հետևաբար x_{ij} թվերը բավարարում են

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\,,\;\; i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,,\;\; j = 1,2,\dots,n$$

նշանակումների խնդրի սահմանափակումներին: Քանի որ նշանակումների խնդրի լուծումների բազմությունն ընկած է տրանսպորտային խնդրի լուծումների բազմության մեջ և

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\alpha_{ij} = n\cdot M - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \ ,$$

ուստի x_{ij} թվերը նշանակումների խնդրի լավագույն լուծումն են:

§9. Ամբողջաթիվ գծային ծրագրման խնդիրներ

Դիտարկենք ԳԾ խնդիրներ, որոնցում փոփոխականները բավարարում են լրացուցիչ պայմանի՝ ընդունում են ամբողջաթիվ արժեքներ: Այդպիսի խնդիրներն անվանենք ամբողջաթիվ գծային ծրագրման (ԱԳԾ) խնդիրներ:

Այսպես, օրինակ, սովորական տեսքի մաքսիմացման ԱԳԾ խնդիրը հետևյալն է.

$\bar{x}\bar{c} \to \max$,

$A\bar{x} \le \bar{b}$,

$x \ge 0$ և $\bar{x}$-ը ամբողջաթիվ վեկտոր է (նրա բոլոր բաղադրիչները ամբողջ թվեր են):

Ակնհայտ է, որ եթե ԱԳԾ խնդրի համապատասխան ԳԾ խնդրի որևէ լավագույն լուծում ամբողջաթիվ վեկտոր է, ապա այն կհանդիսանա լավագույն լուծում նաև ԱԳԾ խնդրի համար: Այդպիսի իրավիճակների մենք հանդիպել ենք §4-ում նկարագրված ալգորիթմի գտած մաքսիմալ մեծությամբ հոսքը ամբողջաթիվ էր, տրանսպորտային խնդիրը լուծելիս ստանում էինք ամբողջաթիվ լավագույն լուծում:

Սակայն միշտ չէ, որ լավագույն լուծումների մեջ կա ամբողջաթիվը: Կան ԳԾ խնդիրներ, որոնք ունեն լավագույն լուծում, իսկ համապատասխան ԱԳԾ խնդիրը թույլատրելի լուծում չունի:

Օրինակ. դիտարկենք կանոնական տեսքի ԳԾ խնդիրը.

$\sqrt{3}x_1 - x_2 \to \max$,

$\sqrt{3}x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3 = 1$,

$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$:

Հեշտ է նկատել, որ նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը 1 է, և խնդրի լավագույն լուծումների բազմությունը $\{((1+\alpha)/\sqrt{3}, \alpha, 0) \,/\, \alpha \ge 0\}$ է: Անմիջականորեն ստուգվում է, որ $\sqrt{3}x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3 = 1$ հավասարումը ոչ բացասական ամբողջաթիվ լուծում չունի, իսկ համապատասխան կանոնական տեսքի ԱԳԾ խնդիրը չունի թույլատրելի լուծում:

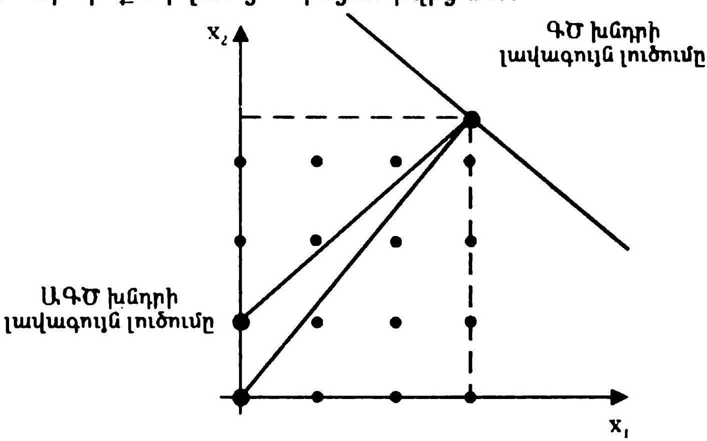
կան նաև ԳԾ խնդիրներ, որոնց և համապատասխան ԱԳԾ խնդիրների լավագույն լուծումներն իրարից բավականաչափ հեռու են:

Դիտարկենք սովորական տեսքի ԳԾ խնդիր.

$x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2nx_2 - (2n+1)x_1 \geq 0, \\ 2nx_2 - (2n+1)x_1 \leq 2n,, \\ (x_1, x_2) \geq 0: \end{cases}$$

Նկ. 4.31-ում պատկերված է այդ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը $n = 3$ դեպքում: $(n, n+0{,}5)$ կետը խնդրի լավագույն լուծումն է: Համապատասխան ԱԳԾ խնդիրն ունի թույլատրելի երկու լուծում՝ (0,0) և (0,1), և պարզ է, որ նրա լավագույն լուծումը (0,1)-ն է: n-ը կարելի է ընտրել այնպես, որ այդ լուծումների տարբերությունը դառնա նախորոք տրված ցանկացած թվից մեծ:



Նկ. 4.31

ԱԳԾ խնդիրները էապես դժվար են համապատասխան ԳԾ խնդիրներից, և նրանց լուծման արդյունավետ ալգորիթմ չկա, և, հետևաբար, անհնար է այդպիսի ալգորիթմի կառուցումը: Սակայն ԱԳԾ խնդիրների որոշակի դասերի համար կան արդյունավետ ալգորիթմներ: Ստորև նկարագրենք դրանցից երկուսը:

Հատումների եղանակ: ԱԳԾ խնդիրը լուծելու համար կազմվում և լուծվում է ԳԾ խնդիրների $խ_0, խ_1, խ_2, \ldots$ հաջորդականությունը, մինչև հերթական լուծած ԳԾ խնդրի լուծումը լինի ամբողջաթիվ վեկտոր:

$խ_0$-ն ԱԳԾ խնդրի համապատասխան ԳԾ խնդիրն է: Եթե i-րդ խնդրի լավագույն լուծումը ամբողջաթիվ վեկտոր է, ապա այն կլինի ԱԳԾ խնդրի լավագույն լուծում: Եթե նրա լուծումը ամբողջաթիվ վեկտոր չէ, ապա կազմվում է նոր ԳԾ խնդիր՝ $խ_{i+1}$: Այն ստացվում է $խ_i$-ի սահմանափակումներին մեկ սահմանափակում ավելացնելով: Այդ սահմանափակումը ընտրվում է այնպես, որ

- $խ_i$-ի համար սիմպլեքս ալգորիթմի միջոցով գտած լավագույն լուծումը չի բավարարում այդ սահմանափակմանը,
- ԱԳԾ խնդրի բոլոր թույլատրելի լուծումները բավարարում են այդ սահմանափակմանը:

Պարզ է, որ ավելացվող սահմանափակման ընտրման եղանակը կբնորոշի ԳԾ խնդիրների $խ_0, խ_1, խ_2, \ldots$ հաջորդականությունը: Կան սահմանափակումների ավելացման տարբեր եղանակներ: Քննարկենք պարզագույնը, որն առաջարկվել է Հոմորիի կողմից:

Դիտարկենք կանոնական տեսքի մաքսիմացման ԱԳԾ խնդիրը.

$\bar{x}\bar{c} \to \max$,

$A\bar{x} = \bar{b}$,

$\bar{x} \geq 0$ և $\bar{x}$-ը ամբողջաթիվ վեկտոր է:

Ենթադրենք, որ $\bar{c}$-ն ամբողջաթիվ վեկտոր է, և համապատասխան ԳԾ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը սահմանափակ է:

Դիցուք՝ ԱԳԾ խնդրին համապատասխան ԳԾ խնդիրը սիմպլեքս ալգորիթմով լուծելիս ստացվել է m վեկտորներից կախված $B \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ հենքային լավագույն լուծումը, որն ամբողջաթիվ չէ:

Դիտարկենք ալգորիթմի ավարտի պահին սիմպլեքս աղյուսակը՝ պարզության համար ենթադրելով, որ $B = \{1,2,\ldots,n\}$:

b	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	.....	$\bar{a}^m$	$\bar{a}^{m+1}$	.....	$\bar{a}^n$
x_{10}	1	0	.....	0	x_{1m+1}	.....	x_{1n}
x_{20}	0	1		0	x_{2m+1}		x_{2n}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
x_{m0}	0	0	.....	1	x_{mm+1}	.....	x_{mn}
Δ_0	Δ_1	Δ_2	.....	Δ_m	Δ_{m+1}	.....	Δ_n

Սիմպլեքս ալգորիթմի աշխատանքի նկարագրի համաձայն ալգորիթմի գտած լավագույն լուծումը $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ վեկտորն է, որտեղ $x_i^* = x_{i0}$, երբ $i \in B$ և $x_i^* = 0$, երբ $i \notin B$: Քանի որ այն ամբողջաթիվ չէ, ուստի գոյություն կունենա $s \in B$ այնպես, որ x_s^*-ը ամբողջ թիվ չէ:

Որպես նոր սահմանափակում վերցվում է

$$\sum_{j\in B}\{x_{s_j}\}x_j \geq \{x_{s_0}\}$$

անհավասարումը, որտեղ $\{a\}$-ով նշանակված է a թվի կոտորակային մասը:

Դժվար չէ համոզվել, որ $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ վեկտորը չի բավարարում այդ անհավասարությանը:

Ապացուցված է (տե՛ս, [5]), որ ԱԳԾ խնդրի ցանկացած թույլատրելի լուծում բավարարում է այդ սահմանափակմանը, և նշված եղանակով սահմանափակումներ ավելացնելու դեպքում վերջավոր թվով $խ_0, խ_1, խ_2, \ldots$ խնդիրներ լուծելուց անպայման կստանանք ԱԳԾ խնդրի լավագույն լուծումը:

Քննարկենք նշված եղանակը պարզաբանող օրինակ.

$$x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$(x_1, x_2) \geq 0$ և ամբողջաթիվ է:

Կազմենք նշված ԱԳԾ խնդրին համապատասխանող կանոնական տեսքի ԳԾ խնդիրը՝ $խ_0$-ն.

$$x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$:

Երրորդ գլխում նկարագրված սիմպլեքս ալգորիթմի միջոցով լուծենք այս խնդիրը (աղյուսակ 1-ը և 2-ը համապատասխանում են ալգորիթմի սկզբին և ավարտին):

12	4	3	1	0
0	-1	1	0	1
0	0	-1	0	0

աղյուսակ 1

12/7	1	0	1/7	-3/7
12/7	0	1	1/7	4/7
12/7	0	0	1/7	4/7

աղյուսակ 2

$խ_0$-ի լավագույն լուծումը՝ (12/7,12/7,0,0)-ն ամբողջաթիվ չէ:

$խ_0$-ին ավելացնում ենք նոր սահմանափակում (աղյուսակ 2-ի երկրորդ տողին համապատասխանող).

$$\{\frac{1}{7}\}x_3 + \{\frac{4}{7}\}x_4 \geq \{\frac{12}{7}\}$$

կամ, որ նույնն է

$x_3 + 4x_4 \geq 5$:

Պարզ է, որ խ$_0$-ին պետք է ավելացնենք նրան համարժեք $x_3 + 4x_4 - x_5 = 0$ հավասարումը $(x_5 \geq 0)$:

Կազմում և լուծում ենք խ$_1$-ը.

$x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + 4x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$:

Այս խնդիրը լուծելուց ստանում ենք լավագույն լուծումը՝ (9/4,1,0,5/4,0) և նրան համապատասխանող աղյուսակ 3-ը:

9/4	1	0	1/4	0	-3/28
1	0	1	0	0	1/7
5/4	0	0	1/4	1	-1/4
13/4	0	0	0	0	1/7

աղյուսակ 3

Քանի որ ստացված լուծումը ամբողջաթիվ չէ, ուստի խ$_1$-ին ավելացնենք նոր սահմանափակում՝ այս անգամ աղյուսակ 3-ի երրորդ տողին համապատասխանող.

$$\{\frac{1}{4}\}x_3 + \{-\frac{1}{4}\}x_5 \geq \{\frac{5}{4}\},$$

որը $x_3 + 3x_5 \geq 1$ անհավասարումն է:

Կազմում և լուծում ենք խ$_2$-ը.

$x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + 4x_4 - x_5 = 5, \\ x_3 + 3x_5 - x_6 = 1, \end{cases},$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq 0$:

Այս խնդիրը լուծելուց ստանում ենք լավագույն լուծումը՝ (2,1,1,1,0,0): Այն ամբողջաթիվ է և մեր ԱԳԾ խնդրի լավագույն լուծումն է:

ԱԳԾ խնդրի լուծման առաջարկված ալգորիթմը և սահմանափակումներն ունեն շատ պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն: Նկարագրելու համար նկատենք, որ առաջին սահմանափակումից՝ $x_3 + 4x_4 \geq 5$ և $x_3 = 12 - 4x_1 - 3x_2$, $x_4 = x_1 - x_2$ առնչություններից հետևում է, որ $x_2 \leq 1$:

Այսպիսով, որպես առաջին սահմանափակում կարող ենք վերցնել $x_2 \leq 1$ անհավասարությունը:

Երկրորդ՝ $x_3 + 3x_5 \geq 1$ սահմանափակման մեջ տեղադրելով x_3-ի, x_4-ի և $x_5 = x_3 + 4x_4 + 5$ արժեքները՝ կստանանք, որ այն կարելի է ներկայացնել $x_1 + 6x_2 \leq 8$ տեսքով:

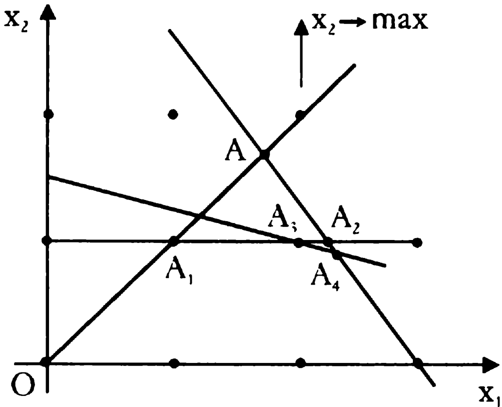
Դիտարկենք X_1OX_2 հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնք բավարարում են ԱԳԾ-ի սահմանափակումներին՝

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12,\ -x_1 + x_2 \leq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0:$$

Այն OAB եռանկյան ամբողջաթիվ կետերի բազմությունն է (նկ. 4.32): Համապատասխան ԳԾ խնդրի լուծումը $A(\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$ կետն է: Այն ամբողջաթիվ չէ, և $x_2 \leq 1$ անհավասարության միջոցով կատարվում է թույլատրելի լուծումների բազմության առաջին հատումը (նկ. 4.32):

Այժմ արդեն անհրաժեշտ է գտնել x_2 ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը OA_1A_2B բազմության վրա: Այն $A_1(9/4,1)$ կետում ֆունկցիայի արժեքն է: Քանի որ A_1-ը ևս ամբողջաթիվ չէ, ուստի ավելացվում է երկրորդ՝ $x_1 + 6x_2 \leq 8$ սահմանափակումը, և խնդիրը հանգում է $OA_1A_3A_4B$ բազմության վրա x_2 ֆունկցիայի առավելագույն արժեքի գտնելուն: Ալգորիթմի գտած $A_3(2,1)$ կետը ամբողջաթիվ է և միաժամանակ դիտարկված ԱԳԾ խնդրի լավագույն լուծումն է:

Նշենք, որ նկարագրված ալգորիթմում ԱԳԾ խնդրի լուծման գործընթացում լուծվող ԳԾ $\text{խ}_0, \text{խ}_1, \text{խ}_2, \ldots$ խնդիրների քանակը կարող է բավականաչափ շատ լինել: Դրանում կհամոզվեք, եթե փորձեք լուծել վերը դիտարկված ԱԳԾ խնդիրը $x_1 + x_2 \to \mathbf{max}$ նպատակային ֆունկցիայի դեպքում:



նկ. 4.32

Ճյուղավորման և գնահատման եղանակ: Դիսկրետ օպտիմացման խնդիրները լուծելիս հաճախ օգտվում են հետևյալ եղանակից. լուծվող խնդիրը "տրոհում" են ենթախնդիրների այնպես, որ նրանցից ոմանց լուծումը քննարկվող խնդրի լուծումն է: Միաժամանակ, ենթախնդիրներին տրվում են "գնահատականներ", որոնք ցույց են տալիս, թե որքանով է հեռանկարային (բանական) այդ ենթախնդրի և քննարկվող խնդրի լուծումների համընկնումը: Երբեմն, լուծելով որոշ թվով հեռանկարային խնդիրներ՝ ստանում են քննարկվող խնդրի պատասխանը: Պարզ է, որ ասվածը տեսակետ է դիսկրետ օպտիմացման խնդիրների լուծման ալգորիթմների մշակման համար: Բուն ալգորիթմը նկարագրելու համար անհրաժեշտ է հստակ ձևակերպել խնդրի "տրոհման", ենթախնդիրների "գնահատման", նրանց լուծման եղանակի և հաջորդականության ընտրման հարցերի պատասխանները:

Ստորև կնկարագրվի այդ գաղափարն օգտագործող ալգորիթմ՝ ԱԳԾ խնդրի լուծման համար:

Որոշակիության համար դիտարկենք սովորական տեսքի մաքսիմացման ԱԳԾ խնդիրը.

$\bar{x}\bar{c} \to \max$,

$A\bar{x} \le \bar{b}$,

$\bar{x} \ge 0$ և ամբողջաթիվ վեկտոր է:

խ$_0$-ով նշանակենք նրա համապատասխան ԳԾ խնդիրը և ենթադրենք, որ այն ունի լավագույն լուծում: Նկատենք, որ եթե այն ամբողջաթիվ վեկտոր է, ապա կհանդիսանա նաև լավագույն լուծում ԱԳԾ խնդրի համար: Այն դեպքում, երբ խ$_0$-ի լավագույն լուծումը ամբողջաթիվ վեկտոր չէ, նրան համապատասխան խ$_0$-ի արժեքը կարելի է ընդունել վերևից գնահատական ԱԳԾ խնդրի լավագույն լուծման արժեքի համար. այն չի կարող մեծ լինել խ$_0$-ի լավագույն արժեքից:

Նշենք նաև, որ ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում կազմում և լուծվում են ԳԾ խնդիրներ, որոնցից յուրաքանչյուրում անպայման մասնակցում են $A\bar{x} \le \bar{b}$, $\bar{x} \ge 0$ սահմանափակումները և էլի ինչ-որ լրացուցիչներ: Ալգորիթմը նկարագրելիս մենք կնշենք միայն այդ լրացուցիչ սահմանափակումները:

Ճյուղավորման և գնահատման ալգորիթմը:

Քայլ 1: Ընդունել, որ

հետանկարային խնդիրների բազմությունը {խ$_0$} -ն է,

հերթական դիտարկվող խնդիրը խ$_0$ -ն է,

լավագույնին հավակնող լուծումը որոշված չէ և $\lambda_0 = -\infty$:

Քայլ 2: Լուծել հերթական դիտարկվող խնդիրը և այն հանել հետանկարային խնդիրների բազմությունից: Եթե նրա լուծումը ամբողջաթիվ է, և արժեքը մեծ է λ_0-ից, այն համարել լավագույնին հավակնող, հիշել այն, նրա արժեքը վերագրել λ_0-ին, և հետանկարային խնդիրների բազմությունից դեն նետել այն խնդիրները, որոնց գնահատականները չեն գերազանցում λ_0-ին: Եթե նրա $\bar{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ լուծումը ամբողջաթիվ չէ, ընտրել լուծման որևէ ոչ ամբողջաթիվ x_i^0 բաղադրիչ, կազմել երկու ԳԾ խնդիրների լրացուցիչ $x_i \le [x_i^0]$ կամ $x_i \ge [x_i^0]+1$ սահմանափակումներով, և դրանց մտցնել հետանկարային խնդիրների բազմության մեջ՝ յուրաքանչյուրը $\overline{cx}_0$ գնահատականով:

Քայլ 3: Եթե հետանկարային խնդիրների բազմությունը դատարկ չէ, որպես հերթական դիտարկվող խնդիր վերցնել նրա առավելագույն գնահատական ունեցող խնդիրներից մեկը և վերադառնալ քայլ 2-ին:

Եթե հետանկարային խնդիրների բազմությունը դատարկ է, ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը՝ լավագույնին հավակնող լուծումը ԱԳԾ խնդրի լուծումն է պատասխանով:

V. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

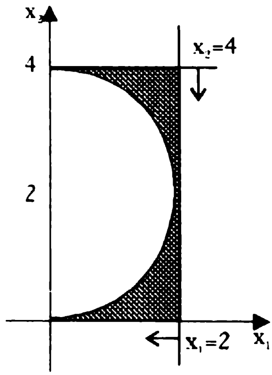
Իմանալը քիչ է, պետք է նաև կիրառել:
Ձգտելը քիչ է, պետք է նաև գործել:
Յո. Գյոթե

Ոչ գծային ծրագրման (ոչ ԳԾ) խնդիրները առաջացել են տնտեսագիտության (հատկապես՝ միկրոտնտեսագիտության), կառավարման և քնագիտության խնդիրներ հետազոտելիս, և այժմ ունեն լայն կիրառություններ նշված բնագավառներում:

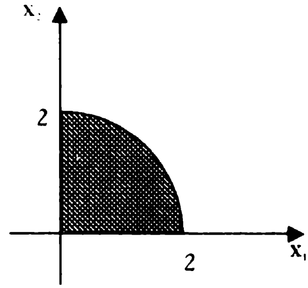
§ 1. Ոչ գծային ծրագրման խնդրի առանձնահատկությունները

Դիտարկենք, թե ինչպիսի առանձնահատկություններ կարող են հանդիպել ոչ գծային ծրագրման խնդրի լուծման ընթացքում: Նախ, ոչ ԳԾ խնդիրը համեմատենք ԳԾ խնդրի հետ: Բնական է կատարել նպատակային ֆունկցիաների և թույլատրելի լուծումների S տիրույթը նկարագրող սահմանափակումների համեմատում: Ինչպես գիտենք, ԳԾ խնդրում նպատակային ֆունկցիան գծային ֆունկցիա է, իսկ երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ, կախված տարածության չափից, մենք գործ կունենանք ուղիղ գծի, հարթության կամ հիպերհարթության հետ: Կետերի S բազմությունը, որ որոշվում է գծային սահմանափակումների համակարգի լուծումների բազմությամբ, վերջավոր գագաթներով ուռուցիկ բազմություն է: Վերջապես, ԳԾ խնդրի լավագույն լուծումը (եթե այն գոյություն ունի) փնտրվում է S բազմության գագաթների մեջ, իսկ նպատակային ֆունկցիայի տեղային և համապարփակ էքստրեմումի արժեքները համընկնում են: Ոչ ԳԾ խնդրում, որի սահմանափակումները ոչ գծային են, թույլատրելի լուծումների S բազմությունը կարող է ուռուցիկ չլինել. ավելին, նույնիսկ ոչ մի գագաթ չունենալ: Օրինակ, դիտարկենք ոչ գծային սահմանափակումներով որոշված հետևյալ S բազմությունը.

$$\begin{cases} h_1(x_1,x_2) = x_1 - 2 \le 0, \\ h_2(x_1,x_2) = x_2 - 4 \le 0, \\ h_3(x_1,x_2) = x_1^2 + (x_2-2)^2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0: \end{cases}$$



Նկ. 5.1



Նկ. 5.2

Ակնհայտ է, որ ստացված S բազմությունը (Նկ. 5.1-ի ստվերագծված մասը) ուռուցիկ չէ:

Այսպիսով, առաջին առանձնահատկությունն այն է, որ թույլատրելի լուծումների բազմությունը կարող է ունենալ ցանկացած կառուցվածք:

Մի այլ օրինակ. S բազմությունը որոշված է հետևյալ պայմաններով (տե՛ս, Նկ. 5.2)՝

$$h_1(x_1,x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0:$$

Չնայած որ սա ուռուցիկ բազմություն է, սակայն ունի անթիվ բազմությամբ գագաթներ:

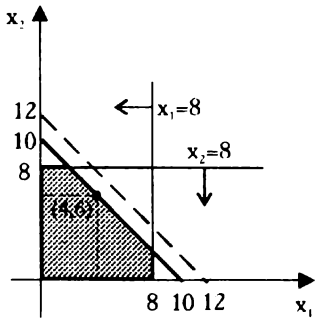
Հիշենք, որ սիմպլեքս ալգորիթմը հենքային լուծումների (գագաթների) նպատակամետ համեմատում է (դրանց քանակն անպայման վերջավոր է): Պարզ է, որ անվերջ բազմությամբ այդպիսի լուծումների դեպքում այս եղանակը կիրառելի չէ: Այսպիսով, երկրորդ առանձնահատկությունն այն է, որ ընդհանուր դեպքում օպտիմալության հատկությամբ օժտված ենթադրվող կետերի համեմատումով ոչ ԳԾ խնդիրը լուծել անհնար է:

Սակայն անհրաժեշտ է նշել, որ երբ միայն նպատակային ֆունկցիան է ոչ գծային, իսկ սահմանափակումները գծային են, սիմպլեքս եղանակի հիմնական սկզբունքները կարող են օգտակար լինել, օրինակ՝ քառակուսային ծրագրման խնդրի համար:

Երրորդ առանձնահատկությունն այն է, որ նպատակային ֆունկցիայի ոչ գծայնության պատճառով լավագույն լուծումը կարող է լինել ինչպես եզրային, այնպես էլ ներքին կետ: Օրինակ՝

$$f(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1 \cdot x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2. \to \max,$$

$$\begin{cases} h_1(x_1,x_2) = 8 - x_1 \ge 0, \\ h_2(x_1,x_2) = 8 - x_2 \ge 0, \\ h_3(x_1,x_2) = 10 - x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0: \end{cases}$$



Նկ.5.3

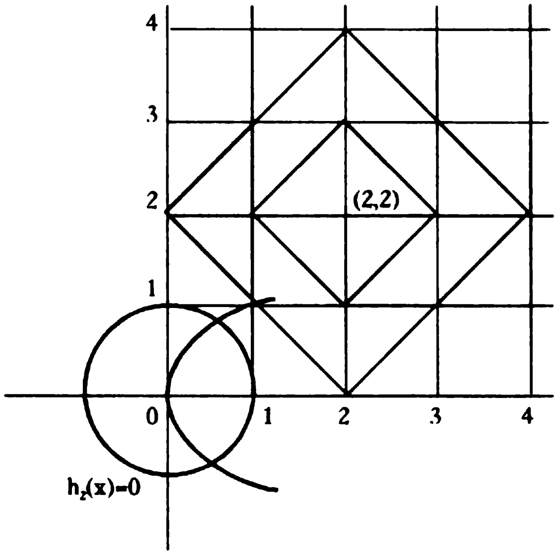
Թույլատրելի լուծումների S բազմությունը ուռուցիկ հնգանկյուն է (տե՛ս, նկ. 5.3): Ֆունկցիան իր համապարփակ մաքսիմումին հասնում է S բազմության եզրի վրա գտնվող (4,6) կետում, որը գագաթ չէ: Հետևաբար, չնայած S բազմությունն ունի վերջավոր ծայրակետեր (ընդամենը հինգ ծայրակետ), լավագույն լուծումը $f(x_1,x_2)$ ֆունկցիայի ոչ գծային լինելու պատճառով ծայրակետ չէ: Դեռ ավելին, եթե $h_3(x_1,x_2)$ սահմանափակումը փոխարինենք $12 - x_1 - x_2 \ge 0$ պայմանով, ապա թույլատրելի լուծումների S բազմությունը կընդարձակվի այնպես, որ լավագույն լուծման արդեն կլինի S բազմության ներքին կետը:

Դիտարկենք մի այլ օրինակ, որտեղ և՛ նպատակային ֆունկցիան, և՛ սահմանափակումները ոչ գծային են.

$$f(x_1,x_2) = (|x_1 - 2| + |x_2 - 2|) \to \min$$

$$\begin{cases} h_1(x_1,x_2) = x_1 - x_2^2 \ge 0, \\ h_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0: \end{cases}$$

Թույլատրելի լուծումների բազմությունը պարաբոլի ներսում ընկած շրջանագծի (տե՛ս, նկ. 4) աղեղ է (S -ը ներքին կետ չունի): Այս խնդրի լավագույն լուծում է հանդիսանում նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքով մակարդակային կորի վրա գտնվող շրջանագծի աղեղի ($0.5\sqrt{2}, 0.5\sqrt{2}$) կետը (մակարդակային կոր ասելով հասկանում ենք կետերի այն բազմությունը, որոնց վրա ֆունկցիան հաստատուն է): Եթե խնդիրը լուծենք առանց սահմանափակումների, ապա (2.2) կետը կլինի բացարձակ մինիմումի կետը:



Նկ. 5.4

§ 2. Մաթեմատիկական ծրագրման դասական խնդիր Լագրանժի բազմապատկիչների եղանակ

Հետևյալ խնդիրը

$$f(\bar{x}) \to \min, \qquad (2.1)$$

$$h_i(\bar{x}) = 0\,,\ i = 1,2,\ldots,m\,, \qquad (2.2)$$

որտեղ $f, h_1, \ldots, h_m$ ֆունկցիաները E^n-ում որոշված, դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, կանվանենք մաթեմատիկական ծրագրման դասական (ՄԾԴ) խնդիր:

(2.2) համակարգին բավարարող $\bar{x}$ կետը (վեկտորը) կանվանենք ՄԾԴ խնդրի թույլատրելի լուծում, իսկ $S = \{\bar{x} | h_i(x) = 0\}$ բազմությունը՝ ՄԾԴ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմություն (տիրույթ) կամ թույլատրելի բազմություն (տիրույթ):

Ենթադրենք $\bar{x}^*$ ՄԾԴ խնդրի տեղային լավագույն լուծումն է: Պարզության համար ենթադրենք նաև, որ $f(\bar{x}), h_i(\bar{x}),$ $(i = 1,\ldots,m)$

ֆունկցիաների գրադիենտները անընդհատ են թույլատրելի S տիրույթում, իսկ $h_i(\bar{x})$ ֆունկցիաների $i = 1,2,\dots,m$ գրադիենտները գծայնորեն անկախ են $\bar{x}^*$ կետում: Ենթադրենք՝ կարելի է կիրառել անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմը (2.2) համակարգի նկատմամբ $\bar{x}^* \in S$ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում և n փոփոխականներից m-ը արտահայտել մնացած $n-m$ փոփոխականների միջոցով և, տեղադրելով $f(\bar{x})$ նպատակային ֆունկցիայի մեջ, ստանալ $n-m$ փոփոխականներով ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդիր: Տեսականորեն պարզ այս մոտեցումը հաճախ հնարավոր չէ իրականացնել, քանի որ գործնականում համարյա անհնար է m փոփոխականները արտահայտել մնացած $n-m$ փոփոխականներով: Այնուամենայնիվ, ինչպես կհամոզվենք հետագա շարադրանքից, այդ մտահղացման փոխակերպված իրականացումը՝ Լագրանժի բազմապատկիչների օգնությամբ, հնարավոր է դարձնում պայմանական էքստրեմումի խնդիրը հանգեցնել ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդրի: Այդ եղանակը նկարագրենք $m = 2$, $n = 3$ մասնավոր դեպքի համար

$$f(\bar{x}_1, x_2, x_3) \to \min$$

$$\begin{cases} h_1(x_1,x_2,x_3) = 0, \\ h_2(x_1,x_2,x_3) = 0: \end{cases}$$

Ենթադրենք՝ հավասարումների համակարգից կարելի է որոշել $x_1 = u_1(x_3)$, $x_2 = u_2(x_3)$: Այդ դեպքում վերը նշված խնդիրը կդառնա մեկ փոփոխականով ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝ գտնել $\min\limits_{x_3} f(u_1(x_3),u_2(x_3),x_3)$:

Ակնհայտ է, որ եթե $(u_1(x_3^*),u_2(x_3^*),x_3^*)$-ը կետը մինիմումի կետ է, ապա այդ կետում ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$(f(\bar{x}^*))_{x_3} = f'_{x_1}(\bar{x}^*)(u_1)'_{x_3} + f'_{x_2}(\bar{x}^*)(u_2)'_{x_3} + f'_{x_3}(\bar{x}^*)\cdot 1 = 0,$$

$$(h_1(\bar{x}^*))_{x_3} = (h_1(\bar{x}^*))'_{x_1}(u_1)'_{x_3} + (h_1(\bar{x}^*))'_{x_2}(u_2)'_{x_3} + (h_1(\bar{x}^*))'_{x_3}\cdot 1 = 0,$$

$$(h_2(\bar{x}^*))_{x_3} = (h_2(\bar{x}^*))'_{x_1}(u_1)'_{x_3} + (h_2(\bar{x}^*))'_{x_2}(u_2)'_{x_3} + (h_2(\bar{x}^*))'_{x_3}\cdot 1 = 0:$$

Ուստի $((u_1)'_{x_3},(u_2)'_{x_3},1)$ վեկտորը հետևյալ համակարգի լուծումն է.

$$\begin{cases} (f(\bar{x}^*))_{x_3} = f'_{x_1}(\bar{x}^*)y_1 + f'_{x_2}(\bar{x}^*)y_2 + f'_{x_3}(\bar{x}^*)y_3 = 0, \\ (h_1(\bar{x}^*))_{x_3} = (h_1(\bar{x}^*))'_{x_1}y_1 + (h_1(\bar{x}^*))'_{x_2}y_2 + (h_1(\bar{x}^*))'_{x_3}y_3 = 0, \\ (h_2(\bar{x}^*))_{x_3} = (h_2(\bar{x}^*))'_{x_1}y_1 + (h_2(\bar{x}^*))'_{x_2}y_2 + (h_2(\bar{x}^*))'_{x_3}y_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Քանի որ (2.3) համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում, ապա նրա որոշիչը՝ D-ն, պետք է լինի 0՝

$$D(\bar{x}^*) = \begin{vmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} & f'_{x_3} \\ (h_1)'_{x_1} & (h_1)'_{x_2} & (h_1)'_{x_3} \\ (h_2)'_{x_1} & (h_2)'_{x_2} & (h_2)'_{x_3} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.4}$$

իսկ վերջինս նշանակում է, որ $f(\bar{x}), h_1(\bar{x}), h_2(\bar{x})$ ֆունկցիաների գրադիենտները $\bar{x}^*$ կետում գծայնորեն կախված են, հետևաբար՝ կգտնվեն ոչ միաժամանակ զրոյի հավասար μ_1, μ_2, μ_3 թվեր, որ $\mu_1 \nabla f(\bar{x}^*) + \mu_2 \nabla h_1(\bar{x}^*) + \mu_3 \nabla h_2(\bar{x}^*) = 0$: Սակայն, ըստ ենթադրության $\nabla h_1(\bar{x}^*)$-ը և $\nabla h_2(\bar{x}^*)$-ը գծայնորեն անկախ են, ուստի $\mu_1 \neq 0$ և

$$\nabla f(\bar{x}^*) + \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}^*) + \lambda_2 \nabla h_2(\bar{x}^*) = 0, \tag{2.5}$$

որտեղ $\lambda_1 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{\mu_3}{\mu_1}$: Այսպիսով, եթե $\bar{x}^*$ լավագույն լուծումն է, ապա գոյություն ունեն այնպիսի λ_1 և λ_2 թվեր, որ (2.5)-ը ստույգ է: $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \equiv f(\bar{x}) + \lambda_1 h_1(\bar{x}) + \lambda_2 h_2(\bar{x})$ ֆունկցիան կանվանենք Լագրանժի ֆունկցիա, իսկ λ_1 և λ_2 փոփոխականները Լագրանժի բազմապատկիչներ:

Ընդհանուր՝ (2.1)-(2.2) խնդրի դեպքում նման ձևով կարելի է ստանալ օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններ՝

$$\nabla L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) = \nabla f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \cdot \nabla h_i(\bar{x}^*) = 0,$$

որտեղ $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x})$: Սակայն քանի որ $\min\limits_{\bar{x}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min\limits_{\bar{x}} (f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x}))$ և խնդրի լուծումների համար $h_i(\bar{x}^*) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, ապա $L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}^*)$: Ուստի $\min\limits_{\bar{x}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min\limits_{x \in S} f(\bar{x})$:

Այժմ տանք Լագրանժի բազմապատկիչների երկրաչափական մեկնաբանությունը: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. $f(\bar{x}) \to \min$, երբ $h(\bar{x}) = 0$: Ցանկացած $\bar{x} \in E^n$ կետի համապատասխանեցնենք

$\xi = f(\bar{x})$ և $\psi = h(\bar{x})$ թվերի զույգը: Պարզության համար ենթադրենք, որ $f(\bar{x})$ և $h(\bar{x})$ ֆունկցիաների որոշման տիրույթը կարտապատկերվի $\xi O \psi$ հարթությանը պատկանող ուռուցիկ բազմության վրա: Տրված խնդրի լուծումը կգտնվի այդ ուռուցիկ բազմության եզրի վրա:

$\xi O \psi$ հարթության վրա դիտարկենք $a\xi + b\psi = c$ ուղիղ գիծը և ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխենք մինչև S տիրույթին շոշափելը: Պարզ է, որ շոշափման կետերը կգտնվեն S բազմության եզրի վրա: Եթե այս ձևով վարվենք բոլոր հնարավոր ուղղություններով տարված ուղիղների հետ, ապա շոշափման կետերի բազմությունը կհամընկնի բազմության եզրի հետ: $a\xi + b\psi = c$ զուգահեռ ուղիղների ընտանիքում կա մի ուղիղ, որը շոշափում է տիրույթի եզրը և սկզբնակետից ավելի փոքր հեռավորության վրա է գտնվում, քան այդ ընտանիքին պատկանող ցանկացած մեկ այլ ուղիղ, որը բազմության հետ ունի ընդհանուր կետ: Սակայն, ինչպես հայտնի է, $a\xi + b\psi = c$ ուղղի հեռավորությունը սկզբնակետից համեմատական է c-ին, ուստի սկզբնակետից D-ին շոշափող նվազագույն հեռավորություն ունեցող ուղղությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է նվազագույնի հասցնել $a\xi + b\psi \equiv af(x_1, x_2, \ldots, x_n) + bh(x_1, \ldots, x_n)$ մեծությունը, այսինքն գտնել $f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda h(x_1, \ldots, x_n) \to \mathbf{min}$, որտեղ $\lambda = b/a$ և $a \neq 0$: Այսպիսով, պայմանական էքստրեմումի խնդիրը հանգեցվում է ոչ պայմանական էքստրեմումի հետևյալ խնդրին՝ գտնել $\mathbf{min}\, L(\bar{x}, \bar{\lambda})$:

Հաճախ $h_i(\bar{x})$ $i = 1,2,\ldots,m$ ֆունկցիաները լինում են հետևյալ տեսքի՝

$$h_i(\bar{x}) = b_i - g_i(x),\ i = 1,2,\ldots,m:$$

Այս դեպքում օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները կգրվեն այսպես՝

$$\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0,$$

կամ

$$\begin{cases} L'_{x_j} = f'_{x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j} = 0, j=1,2,\ldots,m, \\ L'_{\lambda_i} = b_i - g_i(\bar{x}) = 0,\ i=1,2,\ldots,m: \end{cases} \qquad (2.6)$$

Օպտիմալության անհրաժեշտ (2.6) պայմանները արտածելիս ենթադրվում էր, որ $g_i(\bar{x})$ ֆունկցիաների գրադիենտները գծայնորեն անկախ էին:

Անհրաժեշտ պայմանները, երբ $\nabla g_i(\bar{x})$ $i=1,\dots,m$ գծորեն կախված են, ավելի մանրամասն (տե՛ս, [31]): Այդ պայմանները տրվում են $L(\bar{x},\bar{\lambda}) = \lambda_0 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\bar{x}))$ ֆունկցիայի միջոցով:

Նկատենք, որ Լագրանժի ֆունկցիայի և Լագրանժի բազմապատկիչների եղանակը հնարավորություն է տալիս շրջանցել անհայտների մի մասի անմիջական արտաքսման անհրաժեշտությունը:

Այսպիսով, ՄԾԴ խնդիրը՝ գտնել $f(\bar{x}) \to \min$, երբ $b_i - g_i(\bar{x}) = 0$ ($i=1,\dots,m$) լուծելու համար անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ քայլերը:

Քայլ 1-ին: Մտցնել Լագրանժի բազմապատկիչների $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ վեկտորը, որտեղ m-ը հավասար է խնդրի սահմանափակումների թվին: Կառուցել Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\bar{x})) \qquad (2.7)$$

Քայլ 2-րդ: Հաշվել Լագրանժի ֆունկցիայի բոլոր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները և հավասարեցնել զրոյի:

$$\begin{aligned} L_{x_j} &= f_{x_j} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_i g_{x_j}(\bar{x}) = 0 \quad j = 1,2,\dots,n \\ L_{\lambda_i} &= b - \bar{g}_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1,2,\dots,m \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Քայլ 3-րդ: Լուծել (2.8) հավասարումների համակարգը և գտնել բոլոր լուծումները $\{(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)\}$: Արդյունքում ստանում ենք անհրաժեշտ պայմանին բավարարող լուծումների բազմություն:

Քայլ 4-րդ: Ստուգել երկրորդ կարգի բավարար պայմանը՝ կառուցել Հեսի մատրիցը և հաշվել դրա D որոշիչը: Եթե $D < 0$, ապա $\bar{x}^*$ կետը (տեղային) մաքսիմումի կետ է, եթե $D > 0$, այն կլինի (տեղային) մինիմումի կետ: Եթե $D = 0$, եզրակացություն անել չենք կարող:

Օրինակ 1: Գտնել $f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$, երբ $g(x_1,x_2) = -x_1^2 + 2x_2 = 1$:

Կառուցենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x_1,x_2,\lambda)=2x_1+3x_2+\lambda(1+x_1^2-2x_2)$$

Հաշվենք մասնակի ածանցյալները և հավասարեցնենք զրոյի

$$L_{x_1}=2+2\lambda x_1=0\,,$$

$$L_{x_2}=+3-2\lambda=0\,,$$

$$L_\lambda=1+x_1^2-2x_2=0:$$

Լուծենք ստացված հավասարումների համակարգը

$$\lambda_1^*=3/2\,,\ x_1^*=-2/3\,,\ x_2^*=(1+x_1^{*2})/2=13/18$$

Ստուգենք բավարար պայմանը

$$D^*=\begin{vmatrix}2\lambda^* & 0 & 2x_1^*\\ 0 & 0 & -2\\ 2x_1^* & -2 & 0\end{vmatrix}=-8\lambda^*=-12,$$

$D^*<0$, հետևաբար $\bar{x}^*=(-2/3,13/18)$-ը մաքսիմումի կետ է:

Այժմ դիտարկենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, թե ինչպես, օգտվելով Լագրանժի անհրաժեշտ պայմաններից, կարելի է ստանալ ընդհանուր բանաձև որոշակի դասի խնդիրների համար:

Գտնել

$$c_1x_2+c_2x_2+q_1x_1^2+q_2x_2^2+b_1x_1x_2\to\min,$$
$$x_1+x_2=k:$$

Բազմապատկելով նպատակային ֆունկցիան (-1)-ով՝ կստանանք մաքսիմացման խնդիր

$$-c_1x_2-c_2x_2-q_1x_1^2-q_2x_2^2-b_1x_1x_2\to\max$$
$$x_1+x_2=k$$

Կառուցենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x_1,x_2,\lambda)=-c_1x_1-c_2x_2-q_1x_1^2-q_2x_2^2-b_1x_1x_2+\lambda(k-x_1-x_2)$$

Հաշվենք բոլոր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները և հավասարեցնենք զրոյի:

$$L'_{x_1}=-c_1-2q_1x_1-bx_2-\lambda=0\,,$$

$$L'_{x_2}=-c_2-2q_2x_2-bx_1-\lambda=0\,,$$

$$L'_\lambda=k-x_1-x_2=0:$$

Լուծենք հավասարումների համակարգը.

Առաջին երկու հավասարումներից x_1-ը արտահայտենք x_2-ի միջոցով: Տեղադրենք երրորդ հավասարման մեջ: Կստանանք

$$x_1=[(c_2-c_1)+x_2(2q_2-b)]/(2q_1-b):$$

$x_1 + x_2 = k$ հավասարումից ստանում ենք

$$x_2^* = [(c_1 - c_2) + k(2q_1 - b)] / 2(q_1 + q_2 - b)$$

$$x_1^* = k - x_2^*,$$

$$\lambda_1^* = -c_1 - 2q_1k + x_2^*(2q_1 - b):$$

Ստուգենք բավարար պայմանը, նկատի ունենալով, որ

$$g_{x_1} = 1,\ g_{x_2} = 1,\ L_{x_1x_1} = -2q_1,\ L_{x_2x_2} = -2q_1,\ L_{x_1x_2} = -b$$

$$D^* = -(1)^2 \cdot (-2q_1) - (1)^2 \cdot (-2q_2) + 2 \cdot (1) \cdot (1) \cdot (-b):$$

Այսպիսով, եթե $q_1 + q_2 - b < 0$, մենք ունենք տեղային մաքսիմումի կետ, կամ որ նույնն է, մեր սկզբնական խնդրի համար տեղային մինիմումի կետ:

Օրինակ 2: Օծանելիքի խանութի տերը ցանկանում է գովազդել իր ապրանքը և այդ նպատակին հատկացնում է օրական 40000 դրամ: Նա ցանկանում է գովազդել թե՛ ռադիոյով և թե՛ հեռուստատեսությամբ: Պարզ է, որ նրա ծախսերը սահմանափակված են 40000 դրամով: Հետևաբար, եթե ռադիոյով գովազդելուն հատկացված գումարը նշանակենք x_1, իսկ հեռուստատեսությամբ գովազդելու գումարը x_2, ապա կունենանք $x_1 + x_2 = 40000$:

Ենթադրենք՝ գովազդի ընդհանուր տարեկան ծախսը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$f(x_1, x_2) = 500000 + 10x_1^2 + 2x_1x_2 + 15x_2^2 - 400x_1 - 320x_2:$$

Օծանելիքի խանութի տերը պետք է լուծի հետևյալ ոչ ԳԾ խնդիրը.

$$f(x_1, x_2) \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 40000$$

Այս խնդիրը վերը հետազոտվածի մասնավոր դեպքն է:

Ունենք $c_1 = -400$, $c_2 = -320$, $q_1 = 10$, $q_2 = 15$, $b = 2$, $k = 40000$

$$x_2^* = \frac{(c_1 - c_2) + k(2q_1 - b)}{2(q_1 + q_2 - b)} = 15650.44$$

$$x_1^* = 40000 - 15650,44 = 24349,56$$

$$q_1 + q_2 - b = 10 + 15 - 2 = 23 > 0$$

Այսպիսով, $x_1^* = 24349,56$ դրամի, և $x_2^* = 15650,44$ դրամ ամենօրյա գովազդի ծախսն է:

Օրինակ 3: Գտնել

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \to \max ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 :$$

Կառուցենք Լագրանժի ֆունկցիան.

$$L(\bar{x},\lambda) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i + \lambda(1-\sum_{i=1}^{n} x_i) :$$

Հաշվենք Լագրանժի ֆունկցիայի բոլոր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները և հավասարեցնենք զրոյի

$$L'_{x_j} = -\ln x_i - 1 - \lambda = 0 , \ i = 1,2,\dots,n$$

$$L'_{\lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 :$$

Լուծենք հավասարումների համակարգը

$$-\ln x_i = 1 + \lambda , \ x_i = e - 1 - \lambda , \ i = 1,2,\dots,n , \ x_i = 1/n :$$

$f(\bar{x})$ ֆունկցիան գոգավոր է և $x_i^* = 1/n$, $i = 1,2,\dots,n$, լավագույն լուծում է:

§ 3. Լագրանժի բազմապատկիչների մեկնաբանումը

Լագրանժի բազմապատկիչները, որոնք ստացվեցին ՄԾԴ խնդրի լուծման օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները արտածելիս, երբ $h_i(x) = b_i - g_i(x)$, $i = 1,2,\dots,m$, արժեքավոր ինֆորմացիա են տալիս նպատակային ֆունկցիայի զգայունության վերաբերյալ՝ կախված b_i $i = 1,\dots,m$ հաստատունների փոփոխումներից:

Ենթադրենք՝ b_i-երը փոփոխական մեծություններ են: Ապացուցենք, որ

$$f'_{b_i}(\bar{x}^*) = \lambda_i^* , \ i = 1,\dots,m : \qquad (3.1)$$

Դիցուք՝ $\bar{x}^*$-ը ՄԾԴ խնդրի լավագույն լուծումն է: Պարզ է, որ $\bar{x}^* = \bar{x}^*(\bar{b})$, $\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}^*(\bar{b})$: Ենթադրենք նաև, որ $\bar{x}^*$-ը և $\bar{\lambda}^*$-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են ըստ b_i-ի, $i = 1,2,\dots,m$: Հաշվենք $f^* = f(\bar{x}^*) = f(x^*(b))$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ b_i-ի.

$$f_{b_i}^{*}=f_{b_i}(\bar{x}^{*})=\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}^{*}(\bar{x}^{*}(b))(x_{b_j}^{*})_{b_i}' \qquad (3.2)$$

$g_k(\bar{x}^{*})=g_k(\bar{x}^{*}(b))$, $\quad i=1,\ldots,m$ սահմանափակումների ֆունկցիաների համար կունենանք

$$(g_k(\bar{x}^{*}))_{b_i}'=\sum_{j=1}^{n}(g_k(\bar{x}^{*})_{x_j}'(x_j^{*})_{b_i}'=\delta_{ik} \quad i,k=1,2,\ldots,m,$$

որտեղ $\delta_{ik}=1$, երբ $i=k$ և $\delta_{ik}=0$, երբ $i\neq k$: Կամ

$$\delta_{ik}-\sum_{j=1}^{n}(g_k(\bar{x}^{*})_{x_j}'(x_j^{*})_{b_i}'=0 \quad i,k=1,2,\ldots,m: \qquad (3.3)$$

(3.3) համակարգի աջ և ձախ մասերը բազմապատկենք λ_k^{*} -ով, գումարենք ըստ k -ի և ավելացնենք (3.2)-ին: Կստանանք

$$f_{b_i}(\bar{x}^{*})=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^{*}\delta_{ik}+\sum_{j=1}^{n}[f_{x_j}'-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{*}(g_k(x^{*}))_{x_j}'](x_j^{*})_{b_i}': \qquad (3.4)$$

Բայց x^{*} և λ^{*} վեկտորները պետք է բավարարեն օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններին, հետևաբար՝

$(f_{b_i}^{*})=\lambda_i^{*} \quad i=1,2,\ldots,m$:

Ինչպես հայտնի է, ածանցյալը ֆունկցիայի փոփոխման արագությունն է, ուստի Լագրանժի բազմապատկիչները ցույց են տալիս նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքի փոփոխության չափը՝ կախված խնդրի սահմանափակումների հաստատունների փոքր աճերից: Այստեղից ստացվում են կարևոր հետևանքներ, ինչպես, օրինակ՝ սահմանափակումների b_i հաստատունի փոքր փոփոխությունը հանգեցնում է նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքի նույնպիսի ոչ էական (փոքր) փոփոխության: Եթե նպատակային $f(\bar{x})$ ֆունկցիան մեկնաբանենք որպես $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ լուծման համապատասխան ծախս, իսկ $g_i(\bar{x})$ ֆունկցիան՝ որպես "i -րդ ռեսուրսի ծախսեր", ապա Լագրանժի λ_i, $i=1,2,\ldots,m$ բազմապատկիչը կմեկնաբանենք որպես i -րդ ռեսուրսի "գին" (գնահատական): Լագրանժի λ_i բազմապատկիչը փաստորեն ցույց է տալիս նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքի փոփոխման արագությունը՝ կախված i -րդ ռեսուրսի փոփոխությունից, և եթե ռեսուրսի փոփոխությունը կատարվի լրացուցիչ մեկ միավորով, այն կարելի է մեկնաբանել որպես սահմանային գին: Քանի որ λ_i-ն ընդհանուր ծախսումների փոփոխման հարաբերությունն է ռեսուրսների քանակին, ապա այն ունի գնի կամ, ինչպես ասում են, "ստվերային գնի" չափողականություն:

Վերջում նշենք, որ Լագրանժի բազմապատկիչների այս տնտեսագիտական բովանդակությունը գործում է նաև այն դեպքում, երբ ոչ ԳԾ խնդրի սահմանափակումների համակարգը տրված է անհավասարությունների տեսքով, իսկ $\bar{x}$ և $\bar{\lambda}$ փոփոխականների վրա դրված են ոչ բացասական լինելու պայմաններ:

Օրինակ 1: Դիտարկենք

$$z = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$$

$$-x_1^2 + 2x_2 = b:$$

Կառուցենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(\bar{x}_1, x_2, \lambda) = 2x_1 - 3x_2 + \lambda(b + x_1^2 - 2x_2):$$

Հաշվենք մասնակի ածանցյալները և հավասարեցնենք զրոյի՝

$$L_{x_1} = 2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$L_{x_2} = -3 - 2\lambda = 0$$

$$L_\lambda = b + x_1^2 - 2x_2 = 0:$$

Լուծենք ստացված հավասարումների համակարգը՝

$$\lambda^* = -3/2, \; x_1^* = 2/3, \; x_2^* = (b + 4/9)/2 = (9b+4)/18:$$

Հաշվենք նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը որպես ֆունկցիա b գործակցից.

$$\begin{aligned} z^* &= z(b) = 2x_1^* - 3x_2^* = 4/3 - 3(9b + 4/18) = 4/3 - 3(9b+4)/18 = \\ &= 4/3 - (9b+4)/6 = (8 - 9b + 4)/6 = (2 - 9b/6): \end{aligned}$$

Հաշվենք նպատակային ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ b-ի $(z^*)'_b = -3/2 = \lambda^*$: Հետևաբար, եթե b-ին տանք մեկ միավոր աճ, ապա z^*-ը կնվազի $\lambda^* = -3/2$ միավորի չափով:

Օրինակ 2: "Որակյալ ապրանքներ" ձեռնարկության մեջ ընդգրկված են n մասնաճյուղեր: Հայտնի է, որ մասնաճյուղերը թողարկում են միատեսակ արտադրանք: Ձեռնարկության նպատակն է թողարկել K քանակությամբ համախառն արտադրանք, ընդ որում հայտնի է, որ x_j ծավալի արտադրանք թողարկելիս j-րդ ($j = 1,2,\dots,n$) մասնաճյուղի ընդհանուր ծախսերը կլինեն $(1/c_i^2)x_i^3$, որտեղ c_i-ն որոշված է փորձարարական տվյալների հիման վրա: Ձեռնարկության առջև ծագում է հետևյալ խնդիրը. ի՞նչ ծավալի արտադրանք պետք է թողարկի j-րդ ($j=1,2,\ldots,n$) մասնաճյուղը, որպեսզի ընդհանուր ծախսերը լինեն նվազագույնը:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելն է՝

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}(1/c_j^2)x_j^3 \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=K,\quad x_j\ge 0,\quad j=1,2,\ldots,n:$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}_1)=f(x)+\lambda_1(K-\sum_{j=1}^{n}x_j):$$

Հաշվենք $L(\bar{x},\bar{\lambda})$ ֆունկցիայի ածանցյալներն ըստ x_j ($j=1,\ldots,n$) և λ փոփոխականների և հավասարեցնենք զրոյի.

$$L'_{x_j}=3(x_j^2/c_j^2)-\lambda=0,$$

$$L'_{\lambda}=K-\sum_{j=1}^{n}x_j=0:$$

Ստացված հավասարումների համակարգից գտնում ենք x_j փոփոխականի x_j^* արժեքը.

$$x_j^*=c_j\sqrt{\lambda}/\sqrt{3},\quad j=1,2,\ldots,n,\ \text{որտեղ}\ \sqrt{\lambda}=\sqrt{3}\cdot K/\sum_{j=1}^{n}c_j:$$

Հետևաբար, $x_j^*=c_jK/\sum_{j=1}^{n}c_j$, և նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքն է $f(x^*)=K^3/(\sum_{j=1}^{n}c_j)^2$:

Խնդրի լուծումը հուշում է, որ j-րդ մասնաճյուղը պետք է թողարկի $x_j^*=c_jK/\sum_{j=1}^{n}c_j$ ծավալի արտադրանք. այս դեպքում ընդհանուր ծախսերը կկազմեն $K^3/(\sum_{j=1}^{n}c_j)^2$ և կլինեն նվազագույնը:

§ 4. Ոչ բացասական փոփոխականներով ոչ գծային ծրագրման խնդիրը

Ոչ բացասական փոփոխականներով ոչ ԳԾ խնդիրը հետևյալն է.

$$f(\bar{x}) \to \min, \qquad (4.1)$$

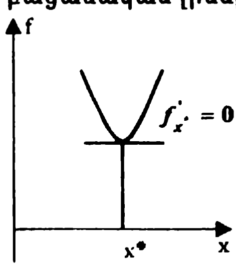
$$\bar{x} \ge 0, \qquad (4.2)$$

որտեղ $f(\bar{x})$-ը ոչ գծային ֆունկցիա է, $\bar{x} \in E^n$: S-ով նշանակենք (4.2) սահմանափակումներին բավարարող կետերի բազմությունը:

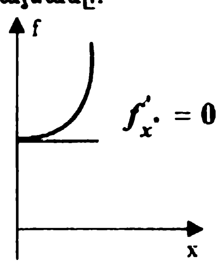
(4.1)-(4.2) խնդրի $\bar{x}^*$ լավագույն լուծումը կարող է գտնվել ինչպես S տիրույթում, այնպես էլ նրա եզրի վրա: Եթե $\bar{x}^*$-ը S բազմության ներքին կետ է, ապա $\bar{x}^*$ վեկտորը դրական է: Այս դեպքում, ինչպես արդեն գիտենք, օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանն այն է, որ f նպատակային ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները (ենթադրվում է, որ դրանք գոյություն ունեն և անընդհատ են) $\bar{x}^*$ կետում զրո են կամ, որ նույնն է՝

$$\nabla f(\bar{x}^*) = 0: \qquad (4.3)$$

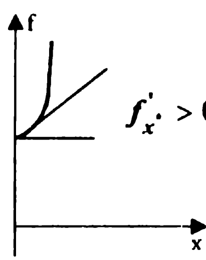
Սակայն, ինչպես վերը նշվեց, $\bar{x}^*$ լավագույն լուծումը կարող է գտնվել նաև թույլատրելի տիրույթի եզրի վրա (տե՛ս նկ. 5.5 ա), բ) և գ) մեկ փոփոխականի դեպքերը): Ինչպես երևում է նկարից, նպատակային ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ըստ այն փոփոխականների, որոնք հավասար են զրոյի, լավագույն կետում անհրաժեշտաբար ոչ բացասական են: Ստացանք ոչ ԳԾ խնդրի լուծման օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանների ոչ խիստ հիմնավորումը, երբ խնդրի փոփոխականների վրա դրված էր նրանց ոչ բացասական լինելու պայմանը:



Նկ. 5.5 ա)



Նկ. 5.5 բ)



Նկ. 5.5 գ)

Այժմ բերենք օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանների ապացույցը, երբ $\bar{x}^*$ լավագույն լուծումը S բազմության եզրի կետ է:

Ենթադրենք $\bar{x}^*$-ը տեղային մինիմումի կետ է, և $x_j^* = 0$: Այս դեպքում ցանկացած դրական h թվի և կամայական $\Delta\bar{x}^*$ թույլատրելի ուղղության համար ($\Delta\bar{x}^*$ վեկտորը կանվանենք թույլատրելի ուղղություն $\bar{x}^* \in S$ կետի համար, եթե գոյություն ունի $\lambda > 0$ թիվ այնպիսի, որ $\bar{x}^* + \lambda\Delta\bar{x}^* \in S$) կունենանք՝

$$f(\bar{x}^*) \le f(\bar{x}^* + h\Delta\bar{x}^*): \qquad (4.4)$$

$\bar{x}^*$ կետի շրջակայքում $f(\bar{x}^*)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել Թեյլորի բանաձևի միջոցով՝

$$\begin{aligned} f(\bar{x}^* + h\Delta\bar{x}^*) &= f(\bar{x}^*) + h\nabla f(\bar{x}^*)\Delta\bar{x}^* + \\ &+ (1/2)h^2(\Delta\bar{x}^*)\cdot H(\bar{x}^* + \theta h\Delta\bar{x}^*)\cdot\Delta\bar{x}^* \end{aligned}, \qquad (4.5)$$

որտեղ $0 \le \theta \le 1$, իսկ H-ը՝ Հեսսի մատրիցն է:

(5.4) և (5.5) առնչություններից կհետևի հիմնական անհավասարությունը

$$h\nabla f(\bar{x}^*)\Delta\bar{x}^* + \frac{1}{2}h^2(\Delta\bar{x}^*)H(\bar{x}^* + \theta h\Delta\bar{x}^*)\Delta\bar{x}^* \ge 0: \qquad (4.6)$$

Ստացված անհավասարության երկու կողմերը բաժանելով h դրական թվի վրա՝ ստանում ենք

$$\nabla f(\bar{x}^*)\Delta\bar{x}^* + \frac{1}{2}h(\Delta\bar{x}^*)H(\bar{x}^* + \theta h\Delta\bar{x}^*)\Delta\bar{x}^* \ge 0: \qquad (4.7)$$

(4.7) պայմանը $\bar{x}^*$-ի տեղային մինիմումի կետ լինելու անհրաժեշտ պայմանն է: Ենթադրելով, որ $h > 0$ թիվը բավականաչափ փոքր է, (4.7)-ից կստանանք $\nabla f(\bar{x}^*)\Delta\bar{x}^* \ge 0$՝ ցանկացած թույլատրելի $\Delta\bar{x}^*$ ուղղության համար: Ուստի, եթե $\Delta x_i^* = 0$, երբ $i \ne j$, ապա

$$f'_{x_j}(\bar{x}^*)\cdot\Delta x_j^* \ge 0: \qquad (4.8)$$

Քանի որ $x_j^* = 0$, ապա $\Delta\bar{x}^*$ թույլատրելի ուղղության j-րդ բաղադրիչը կարող է լինել միայն ոչ բացասական մեծություն, ուստի (4.8)-ից կստանանք

$$f'_{x_j}(\bar{x}^*) \ge 0, \text{ եթե } x_j^* = 0: \qquad (4.9)$$

Մյուս կողմից, եթե $x_j^* > 0$, ապա Δx_j^* աճը կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական: Այդ դեպքում (5.8)-ից կստանանք

$$f'_{x_j}(\bar{x}^*) = 0, \text{ եթե } x_j^* > 0: \tag{4.10}$$

(4.9) և (4.10) պայմաններից հետևում է, որ

$$f'_{x_j}(\bar{x}^*) \cdot x_j^* = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n:$$

Գումարելով այդ հավասարությունները ըստ j-ի, կստանանք

$$\sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\bar{x}^*) x_j^* = 0 \tag{4.11}$$

կամ, որ միևնույնն է,

$$\nabla f(\bar{x}^*) \cdot \bar{x}^* = 0 \tag{4.12}$$

Այսպիսով, եթե $\bar{x}^*$ կետը $f(x)$ ֆունկցիայի տեղային մինիմումի կետ է, ապա անհրաժեշտաբար այդ կետում ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}^*) \geq 0, \\ \nabla f(\bar{x}^*) \cdot \bar{x}^* = 0, \\ \bar{x}^* \geq 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

կամ

$$\begin{cases} f'_{x_j}(\bar{x}^*) \geq 0, \ x_j^* \geq 0 \\ f'_{x_j}(\bar{x}^*) \cdot x_j^* = 0, \ x_j^* > 0 \\ x_j \geq 0, \ j = 1,2,\ldots n: \end{cases} \tag{4.14}$$

Այսպիսով, (4.13) կամ (4.14) պայմանները (4.1)-(4.2) տեսքի ոչ ԳԾ խնդրի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններ են:

Ստացված արդյունքները կկիրառենք հաջորդ պարագրաֆում՝ ոչ ԳԾ հիմնական խնդրի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները արտածելիս:

Եթե $\bar{x}^*$-ը (4.1)-(4.2) խնդրի ստացիոնար կետ է, ապա (4.6) հիմնական անհավասարությունից ստացվում է նաև $\bar{x}^*$-ի մինիմումի կետ լինելու անհրաժեշտ (ուռուցիկ ֆունկցիայի դեպքում նաև բավարար) պայմանը՝ $H(\bar{x}^*)$-ի (Հեսսի մատրից) կիսադրական որոշված լինելը: Ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին:

§ 5. Ոչ գծային ծրագրման խնդիրը: Կուն-Թակերի պայմանները

Հետազոտենք հետևյալ ոչ ԳԾ խնդիրը:

$\min f(\bar{x})$, (5.1)

$g_i(\bar{x}) \le b_i$, $i = 1,\dots,m$, (5.2)

$\bar{x} \ge 0$: (5.3)

Լրացուցիչ s_i անհայտների միջոցով (5.1)-(5.3) ոչ ԳԾ խնդիրը կարող ենք բերել §5-ում դիտարկված խնդրի տեսքին, երբ (5.2) անհավասարությունները փոխարինենք $g_i(\bar{x}) + s_i = b_i$ հավասարումներով, որտեղ $s_i \ge 0$, $i = 1,\dots,m$: Արդյունքում կստանանք (5.1)-(5.3) խնդրին համարժեք փոփոխականների ոչ բացասական սահմանափակումներով հետևյալ խնդիրը (ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին):

$f(\bar{x}) \to \min$, (5.4)

$g_i(\bar{x}) + s_i = b_i$, $i = 1,\dots,m$, (5.5)

$\bar{x} \ge 0$, $\bar{s} \ge 0$: (5.6)

Կառուցենք (5.4)-(5.6) մինիմացման խնդրի Լագրանժի ֆունկցիան.

$$L(\bar{x},\bar{s},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - s_i - g_i(x))$$

կամ

$$L(\bar{x},\bar{s},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(\bar{x}) + s_i - b_i):$$

(Մաքսիմացման խնդրի համար Լագրանժի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը. $L(\bar{x},\bar{s},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - s_i - g_i(\bar{x}))$):

Եվ այսպես, անհրաժեշտ է գտնել

$$L(\bar{x},\bar{s},\bar{\lambda}) = (f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(\bar{x}) + s_i - b_i)) \to \min \qquad (5.7)$$

$\bar{x} \ge 0$, $\bar{s} \ge 0$: (5.8)

(5.7)-(5.8) խնդրի համար գրենք օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները.

$$
\begin{array}{lll}
L'_{x_j} \geq 0, & & L'_{s_i} \geq 0 \\
L'_{x_j} \cdot x_j = 0, & L'_{\lambda} = 0, & L'_{s_i} \cdot s_i = 0, \\
x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n & i = 1,2,\ldots,m & s_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m
\end{array}
$$

կամ

$$L'_{x_j} = f'_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j} \geq 0, \tag{5.9}$$

$$L'_{x_j} \cdot x_j = (f'_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j}) x_j = 0, \tag{5.10}$$

$$L'_{\lambda_i} = g_i(\overline{x}) + s_i - b_i = 0, \tag{5.11}$$

$$L'_{s_i} = \lambda_i \geq 0, \tag{5.12}$$

$$L'_{s_i} \cdot s_i = \lambda_i (g_i(\overline{x}) - b_i) = 0, \tag{5.13}$$

$$s_i \geq 0 \text{ կամ } g_i(\overline{x}) - b_i \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m: \tag{5.14}$$

Համաձայն (5.13)-ի կամ $\lambda_i \geq 0$ և $s_i = 0$, կամ $\lambda_i = 0$, $s_i \geq 0$ կամ $\lambda_i = s_i = 0$: Ուստի Լագրանժի ֆունկցիայի s_i փոփոխականները կարելի է ընդհանրապես չդիտարկել, և (5.7)-ի փոխարեն դիտարկել $L(\overline{x},\overline{\lambda}) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(\overline{x}) - b_i)$ ֆունկցիան: Այդ դեպքում (5.9)-(5.14) անհրաժեշտ պայմանները են

$$
\left.
\begin{array}{l}
f'_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j} \geq 0, \\
f'_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i)'_{x_j} \cdot x_j = 0, \\
x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,h,
\end{array}
\right. \tag{5.15}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
g_i(\overline{x}) - b_i \leq 0, \\
(g_i(\overline{x}) - b_i)\lambda_i = 0 \\
\lambda_2 \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m:
\end{array}
\right. \tag{5.16}
$$

(5.15)-ը $L(\overline{x},\overline{\lambda})$ ֆունկցիայի մինիմումի անհրաժեշտ պայմաններն են՝ ըստ $\overline{x}$ փոփոխականի, իսկ (5.16)-ը՝ նույն ֆունկցիայի մաքսիմումի անհրաժեշտ պայմանները՝ ըստ $\overline{\lambda}$-ի:

(5.15)-(5.16) պայմաններին բավարարող $(\overline{x}^*, \overline{\lambda}^*)$ զույգը կոչվում է $L(\overline{x},\overline{\lambda})$ ֆունկցիայի թամբակետ, իսկ (5.15)-(5.16) պայմանները՝

(5.1)-(5.3) խնդրի լուծման օպտիմալության Կուն-Թակերի անհրաժեշտ պայմաններ:

§ 6. Թամբակետ

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, ոչ ԳԾ խնդրի լուծման օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններն արտածելու ընթացքում կարևոր դեր խաղաց Լագրանժի ֆունկցիան: Ուստիցիկ և մասնավորապես ԳԾ խնդիրների ուսումնասիրման ժամանակ Լագրանժի ֆունկցիան նույնպես կարևոր դեր է խաղում՝ հատկապես թամբակետ հասկացության առնչությամբ:

Այս պարագրաֆում կապացուցենք մինիմաքսին և մաքսիմինին վերաբերող թեորեմներ: Ընդ որում, պայմանավորվենք $L(\bar{x},\bar{y})$-ով նշանակել որևէ ֆունկցիա՝ որոշված $A \times B$ դեկարտյան արտադրյալի վրա, $A \in E^n$, $B \in E^m$: Կապացուցենք թամբակետի գոյության անհրաժեշտ և (կամ) բավարար պայմաններին վերաբերող, ինչպես նաև թամբակետի և մինիմաքսի ու մաքսիմինի միջև գոյություն ունեցող առնչությունները:

Սահմանում: Ասենք, որ $\bar{x}^*, \bar{y}^*$ վեկտորների զույգը $L(\bar{x},\bar{y})$ ֆունկցիայի համար թամբակետ է $\bar{x}^* \in A$, $\bar{y}^* \in B$, եթե

$$L(\bar{x}^*,\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le L(\bar{x},\bar{y}^*)$$

ցանկացած $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորների համար, որոնք համապատասխանաբար պատկանում են A և B տիրույթներին կամ, որ միևնույնն է, եթե

$$\min_{x\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}) = L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) = \max_{\bar{y}\in B}\min_{x\in A} \bar{L}(\bar{x},\bar{y}):$$

Թեորեմ 1: Եթե $L(\bar{x},\bar{y})$ ֆունկցիան որոշված է $A \times B$ բազմության վրա $(\bar{x} \in A, \bar{y} \in B)$, և գոյություն ունեն

$$\max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}), \qquad (6.1)$$

և

$$\min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}), \qquad (6.2)$$

ապա

$$\max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}) \le \min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}): \qquad (6.3)$$

$\mapsto$ Ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի սահմանումներից կհետևի, որ ցանկացած $\bar{x} \in A$, $\bar{y} \in B$ տարրերի համար

$$\min_{\bar{x} \in A} L(\bar{x}, \bar{y}) \le L(\bar{x}, \bar{y}) \le \max_{\bar{y} \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) : \qquad (6.4)$$

Սակայն (6.4)-ի ձախ և աջ մասերը անկախ են համապատասխանաբար $\bar{x}$-ից և $\bar{y}$-ից: Հետևաբար, հաշվի առնելով (6.1) և (6.2) պայմանները՝ կստանանք

$$\max_{\bar{y} \in B} \min_{\bar{x} \in A} L(\bar{x}, \bar{y}) \le \min_{\bar{x} \in A} \max_{\bar{y} \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) :$$

Հաջորդ թեորեմը վերաբերում է (6.1) և (6.2) արտահայտությունների հավասար լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններին:

Թեորեմ 2: Ենթադրենք $L(\bar{x}, \bar{y})$ ֆունկցիան որոշված է $A \times B$ բազմության վրա և գոյություն ունեն

$$\max_{\bar{y} \in B} \min_{x \in A} L(\bar{x}, \bar{y}) \text{ և } \min_{\bar{x} \in A} \max_{\bar{y} \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) :$$

Որպեսզի $\max\limits_{y \in B} \min\limits_{\bar{x} \in A} L(\bar{x}, \bar{y}) = \min\limits_{x \in A} \max\limits_{y \in B} L(\bar{x}, \bar{y})$ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $L(\bar{x}, \bar{y})$ ֆունկցիան ունենա թամբակետ:

Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք $\max\limits_{y \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) = L(\bar{x}, \bar{y}^*)$ և $\min\limits_{x \in A} L(\bar{x}, \bar{y}) = L(\bar{x}^*, \bar{y})$: Այդ դեպքում

$$\min_{\bar{x} \in A} \max_{y \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{x \in A} L(\bar{x}, \bar{y}^*) \qquad (6.5)$$

և

$$\max_{y \in B} \min_{\bar{x} \in A} L(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{y \in B} L(\bar{x}^*, \bar{y}) \qquad (6.6):$$

Ցույց տանք, որ $(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ կետը կլինի $L(\bar{x}, \bar{y})$ ֆունկցիայի թամբակետ: Քանի որ ըստ պայմանի (6.5) և (6.6) հավասարությունների ձախ մասերը հավասար են, ուրեմն հավասար են նաև աջ մասերը՝

$$\min_{x \in A} L(\bar{x}, \bar{y}^*) = \max_{\bar{y} \in B} L(\bar{x}^*, \bar{y}) : \qquad (6.7)$$

Բայց միշտ ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$\min_{x \in A} L(\bar{x}, \bar{y}^*) \le L(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \qquad (6.8)$$

$$\max_{\bar{y} \in B} L(\bar{x}^*, \bar{y}) \ge L(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \qquad (6.9)$$

(6.7) և (6.8) առնչություններից կհետևի

$$\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x}^*,\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*): \qquad (6.10)$$

Իսկ (6.7) և (6.9) առնչություններից կհետևի, որ

$$\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}^*) \ge L(\bar{x}^*,\bar{y}^*): \qquad (6.11)$$

(6.10)-ից և (6.11)-ից կհանգենք հետևյալին՝

$$L(\bar{x}^*,\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le L(\bar{x},\bar{y}^*)$$

բոլոր $\bar{x}\in A$, $\bar{y}\in B$ կետերի համար, այսինքն՝ $\bar{x}^*,\bar{y}^*$ զույգը թամբակետ է:

Բավարարություն: Ենթադրենք, որ $L(\bar{x},\bar{y})$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $(\bar{x}^*,\bar{y}^*)$ թամբակետ, այսինքն՝ ցանկացած $\bar{x}\in A$ և $\bar{y}\in B$ կետերի համար

$$L(\bar{x}^*,\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le L(\bar{x},\bar{y}^*): \qquad (6.12)$$

(6.7)-ից կարող ենք գրել՝ $\max\limits_{\bar{y}\in B} L(\bar{x}^*,\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*)$ և $L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le \min\limits_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}^*)$: Հետևաբար՝

$$\max_{y\in B} L(\bar{x}^*,\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le \min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}^*): \qquad (6.13)$$

Սակայն

$$\min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}) \le \max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x}^*,\bar{y}) \qquad (6.14)$$

և

$$\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}^*) \le \max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}): \qquad (6.15)$$

(6.13), (6.14) և (6.15) առնչություններից հետևում է, որ

$$\min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le \max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}): \qquad (6.16)$$

Սակայն ըստ 6.1 թեորեմի ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$\max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}) \le \min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}):$$

Հետևաբար,

$$\max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}) = \min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}):$$

Բացի այդ, (6.16)-ից կհետևի, որ

$$\max_{\bar{y}\in B}\min_{\bar{x}\in A} L(\bar{x},\bar{y}) = \min_{\bar{x}\in A}\max_{\bar{y}\in B} L(\bar{x},\bar{y}) = L(\bar{x}^*,\bar{y}^*): \lrcorner$$

Թեորեմ 3: Որպեսզի $(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)$ կետը լինի $L(\overline{x},\overline{\lambda})$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի թամբակետ, անհրաժեշտ է, որ

1. $L'_{x_j}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\geq 0$, $L'_{x_j}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot x_j^*\geq 0$, $x_j^*\geq 0$ $j=1,2,\dots,n$;

2. $L'_{\lambda_i}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\leq 0$, $L'_{\lambda_i}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot \lambda_i^*=0$, $\lambda_i^*\geq 0$ $i=1,2,\dots,m$:

Այս թեորեմի ապացույցը բխում է §5-ի արդյունքներից, որտեղ ստացվել էին Կուն-Թակերի պայմանները:

Անհրաժեշտության 1-ին պայմանը նշանակում է, որ գոյություն ունի $L(\overline{x},\overline{\lambda})$ ֆունկցիայի մինիմումը ըստ $\overline{x}$-ի, իսկ 2-րդ պայմանը նշանակում է, որ գոյություն ունի $L(\overline{x},\overline{\lambda})$ ֆունկցիայի մաքսիմումը ըստ $\overline{\lambda}$-ի:

Թեորեմ 4: Որպեսզի $(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)$ կետը լինի 6.3 թեորեմի պայմաններին բավարարող $L(\overline{x},\overline{\lambda})$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի թամբակետ, բավարար է, որ ճիշտ լինեն 1, 2 և հետևյալ պայմանները՝

3. $\forall\overline{x}\geq 0$ $L(\overline{x},\overline{\lambda}^*)$ ուռուցիկ է;

4. $\forall\overline{\lambda}\geq 0$ $L(\overline{x}^*,\overline{\lambda})$ գոգավոր է:

↦ Ինչպես գիտենք, դիֆերենցելի $L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)$ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը համարժեք է

$$L(\overline{x},\overline{\lambda}^*)\geq L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)+\nabla_x L(\overline{x}^*\overline{\lambda}^*)(\overline{x}-\overline{x}^*)$$

կամ

$$L(\overline{x},\overline{\lambda}^*)\geq L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)+\nabla_x L(\overline{x}^*\overline{\lambda}^*)\overline{x}-\nabla_x L(\overline{x}^*\overline{\lambda}^*)\overline{x}^* \qquad (6.17)$$

անհավասարությանը, որտեղ

$$\nabla_x L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot\overline{x}^* = \sum_{j=1}^{n} L'_{x_j}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot x_j^*,$$

$$\nabla_x L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot\overline{x} = \sum_{j=1}^{m} L'_{x_j}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot x_j:$$

Հետևաբար, 6.4 թեորեմի 1-ին պայմանից կստանանք

$$\nabla_x L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\cdot\overline{x}^*=0,\ \nabla_x L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\geq 0,\ \overline{x}\geq 0:$$

Օգտվելով (6.17)-ից՝ կունենանք

$$L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)\leq L(\overline{x},\overline{\lambda}^*): \qquad (6.18)$$

Նույն ձևով, դիֆերենցելի $L(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)$ ֆունկցիայի գոգավոր լինելը համարժեք է

$$L(\bar{x}^*,\bar{\lambda}) \le L(\bar{x}^*,\bar{\lambda}) + \sum_{i=1}^{m} L'_{\lambda_i}(\bar{x}^*,\bar{\lambda}^*)\cdot\lambda_i - \\ - \sum_{i=1}^{n} L'_{\lambda_i}(\bar{x}^*,\bar{\lambda}^*)\cdot\lambda_i^* \tag{6.19}$$

անհավասարությանը և, քանի որ 6.6 թեորեմի 2-րդ պայմանից,

$$L(\bar{x}^{*\prime}{}_{\lambda_i},\bar{\lambda}^*)\ \lambda_i^* = 0,\ L'_{\lambda_i}(\bar{x}^*,\bar{\lambda}^*) \le 0 \text{ երբ } \lambda_i \ge 0,$$

ապա (6.19) առնչությունից կստանանք

$$L(\bar{x}^*,\bar{\lambda}) \ge L(\bar{x}^*,\bar{\lambda}): \tag{6.20}$$

(6.18) և (6.20) անհավասարություններից կհետևի, որ իսկապես

$$L(\bar{x}^*,\bar{\lambda}) \le L(\bar{x}^*,\bar{\lambda}^*) \le L(\bar{x},\bar{\lambda}^*): \ \lrcorner$$

§ 7. Կուն-Թակերի թեորեմը

Ենթադրենք՝ տրված է ոչ ԳԾ հետևյալ խնդիրը

$$f(x) \to \min, \tag{7.1}$$

$$h(x) = b - g(\bar{x}) \le 0,\ x \ge 0:$$

Թեորեմ: Եթե $(\bar{x}^*,\bar{\lambda}^*)$-ը ոչ ԳԾ խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է՝ $S = \{\bar{x} | h(\bar{x}) \le 0, \bar{x} \ge 0\}$ և $\{\bar{\lambda} | \bar{\lambda} \ge 0\}$ բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի վրա, ապա $\bar{x}^*$-ը խնդրի լավագույն լուծումն է:

↦ Ենթադրենք $(\bar{x}^*,\bar{\lambda}^*)$-ը $L(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x})$ Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է: Այդ դեպքում ցանկացած $\bar{x} \ge 0$ և $\bar{\lambda} \ge 0$ զույգի համար

$$f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x}^*) \le f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}^*) \le f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}), \tag{7.2}$$

որտեղից կստանանք հետևյալը.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\bar{x}^*) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}^*): \tag{7.3}$$

Բայց քանի որ ըստ պայմանի $\lambda_i^* \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, իսկ (7.3)-ը ճշմարիտ է ցանկացած $\lambda_i \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ դեպքում, ուստի վերցնելով $\lambda_j = 2\lambda_j^*$ և $\lambda_i = 0$, երբ $j \ne i$, կստանանք, որ $h_j(\bar{x}^*) \le 0$,

$j = 1,2,\dots,m$, այսինքն՝ $\bar{x}^* \in S$: (7.3)-ը ճիշտ է նաև $\lambda = 0$ դեպքում, ուրեմն՝

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}^*) \ge 0 :$$

Մյուս կողմից՝ $\lambda_i \ge 0$, $h_i(\bar{x}^*) \le 0$, $i = 1,2,\dots,m$ պայմանից կհետևի, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}^*) \le 0 ,$$

այսինքն՝

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}^*) = 0 : \qquad (7.4)$$

Ըստ խնդրի պայմանների $h(\bar{x}) \le 0$, երբ $\bar{x} \in S$, հետևաբար S-ին պատկանող ցանկացած $\bar{x}$-ի համար

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(\bar{x}) \le 0 : \qquad (7.5)$$

(7.2), (7.4) և (7.5) առնչություններից կհետևի, որ S տիրույթի ցանկացած $\bar{x}$-ի համար $f(\bar{x}) \ge f(\bar{x}^*)$, այսինքն $\bar{x}^*$-ն իսկապես ոչ ԳԾ խնդրի լավագույն լուծումն է: ⅃

Սահմանում: Կասենք, որ $S = \{\bar{x} | g_i(\bar{x}) \ge b_i,\ i = 1,\dots,m\}$ բազմությունը բավարարում է կանոնավորության պայմանին, եթե ցանկացած i ինդեքսի համար գոյություն ունի S բազմությանը պատկանող $\bar{x}^i$ կետ, այնպես, որ $g_i(\bar{x}^{(i)}) > b_i$, $(i = 1,\dots,m)$: Մասնավոր դեպքում, երբ $g_i(\bar{x})$ ֆունկցիաները գոգավոր են, ռեգուլյարության պայմանից կհետևի S բազմությանը պատկանող այնպիսի $\bar{x}^{(0)}$ կետի գոյությունը, որի համար $g_i(\bar{x}^0) > b_i$, $i = 1,2,\dots,m$: Ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին:

Այժմ ենթադրենք, որ տրված է ՈԻԾ հետևյալ խնդիրը.

$$f(\bar{x}) \to \min , \qquad (7.6)$$

$$g_i(x) \ge b_i ,\ i = 1,\dots,m,\ x \ge 0 , \qquad (7.7)$$

որտեղ $f(\bar{x})$-ը ուռուցիկ, իսկ $h(\bar{x})$-ը գոգավոր ֆունկցիա է:

S-ով նշանակենք թույլատրելի լուծումների բազմությունը՝ $S = \{\bar{x} | g_i(\bar{x}) \ge b_i,\ i = 1,2,\dots,m,\ \bar{x} \ge 0\}$:

Կուն-Թակերի թեորեմը: Եթե S բազմությունը բավարարում է կանոնավորության պայմանին (այսինքն՝ $\exists \bar{x}^{(0)} \in S$, $g_i(\bar{x}^{(0)}) < b_i$, $i = 1,\dots,m$, ապա որպեսզի $\bar{x}^*$ կետը լինի (7.6)-(7.7) խնդրի լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $\bar{\lambda}^* \geq 0$ վեկտոր այնպես, որ $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$ զույգը լինի (7.6)-(7.7) խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ:

$\mapsto$ *Բավարարությունը* հետևում է վերը բերված թեորեմից:

Անհրաժեշտություն: Դիցուք՝ $\bar{x}^*$ կետը (7.6)-(7.7) ՈԻԾ խնդրի լավագույն լուծումն է: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ անհավասարությունների

$$\begin{cases} f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) < 0, \\ b_i - g_i(\bar{x}) \leq 0,\ i = 1,2,\dots,m, \end{cases}$$

համակարգը կլինի անհամատեղելի: Անհամեմատելի է նաև հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) < 0, \\ b_i - g_i(\bar{x}) < 0,\ i = 1,2,\dots,m, \end{cases} \tag{7.8}$$

Ցանկացած n-չափանի $\bar{x} \geq 0$ կետի համար $m+1$-չափանի $Q(\bar{x})$ բազմությունը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$Q(x) = \{(z_0, z_1, \dots, z_m) | z_0 > f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*),\ z_i > b_i - g_i(\bar{x}),\ i{=}1,\dots,m\}:$$

(7.8)-ի անհամատեղելիությունից կհետևի, որ E^{m+1} տարածության զրո կետը ցանկացած $\bar{x}$-ի համար չի պատկանի $Q(\bar{x})$ բազմությանը: Նշանակենք $Q = \bigcup_{\bar{x} \in R_n} Q(\bar{x})$: Քանի որ զրո կետը ցանկացած $\bar{x} \geq 0$-ի համար $Q(\bar{x})$ բազմությանը չի պատկանում, ապա զրո կետը չի պատկանի նաև Q բազմությանը: Հեշտ է ցույց տալ, որ Q ուռուցիկ բազմություն է և զրո կետ չի պարունակում, ապա գոյություն ունի Q բազմությունը այդ կետից անջատող հիպերհարթություն այնպես, որ

$$\lambda_0^* z_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* z_i > 0, \tag{7.9}$$

Q բազմությանը պատկանող ցանկացած $(z_0, \bar{z})$ կետի համար: Ցույց տանք, որ $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1,2,\dots,m$: Իսկապես, եթե $(z_0, z_1, \dots, z_m) \in Q$ և $\mu_i \geq 0$, $i = 1,2,\dots,m$, ապա $(z_0 + \mu_0, z_1 + \mu_1, \dots, z_m + \mu_m) \in Q$:

Այժմ ենթադրենք որ $\exists k(1 \le k \le m)$ $(\lambda_k^* < 0)$: Վերցնելով $(z_1, z_2, \dots, z_k + \mu_k, \dots, z_m) \in Q$ կետը (որտեղ μ_k-ն բավականաչափ մեծ դրական թիվ է) և տեղադրելով (7.9)-ի մեջ՝ գալիս ենք հակասության:

Այժմ ցույց տանք, որ $\lambda_0^* > 0$: Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\bar{x} \in S$ վեկտորի և ε դրական թվի համար եթե

$$z_0(\varepsilon) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) + \varepsilon, \; z_i(\varepsilon) = b_i - g_i(\bar{x}) + \varepsilon, \; i = 1,2,\dots,m,$$

ապա $z(\varepsilon) = (z_0(\varepsilon), z_1(\varepsilon), \dots, z_m(\varepsilon)) \in Q$:

Տեղադրենք $z(\varepsilon)$-ը (7.9)-ի մեջ

$$\lambda_0^*[f(\bar{x}) - f(x^*)] + \lambda_0^*\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(\bar{x}) + \varepsilon) > 0:$$

Այստեղից $\varepsilon \to +0$ դեպքում կստանանք հետևյալը.

$$\lambda_0^*[f(\bar{x}) - f(x^*)] + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(\bar{x})) \ge 0, \; \bar{x} \in S: \tag{7.10}$$

Հետևաբար, եթե $\lambda_0^* = 0$, ապա S բազմության ցանկացած $\bar{x}$ կետի համար

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(\bar{x})) \ge 0: \tag{7.11}$$

Սակայն ըստ կանոնավորության պայմանի գոյություն ունի այնպիսի $\bar{x}_0 \in S$, որ $b_i - g_i(\bar{x}_0) < 0$, $i = 1,\dots,m$ բոլոր արժեքների համար: Բայց, քանի որ $\lambda_i^* \ge 0$, $i = 1,\dots,m$, ապա

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(\bar{x}_0)) \le 0: \tag{7.12}$$

(7.11) և (1.12)-ից կհետևի, որ $\lambda_i^* = 0$: Ստացվեց, որ եթե $\lambda_0^* = 0$, ապա $\forall i(1 \le i \le m)(\lambda_i^* = 0)$, բայց λ_i^* գործակիցներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր էր: Ուրեմն $\lambda_0^* > 0$:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $\lambda_0^* = 1$: Նշանակենք $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) = \bar{\lambda}^*$ և ապացուցենք, որ $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$-ն Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է:

Եթե (7.12) առնչությունը գրենք $\bar{x}^*$ կետի համար, կունենանք՝

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - g_i(\bar{x}^*)) \ge 0: \tag{7.13}$$

Սակայն քանի որ $\bar{x}^* \in S$, $b_i - g_i(\bar{x}^*) \le 0$, $i = 1,2,\dots,m$, ապա

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\bar{x}^*)) \le 0 : \qquad (7.14)$$

(8.8) և (8.9) առնչություններից կհետևի

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - g_i(\bar{x})) = 0 : \qquad (7.15)$$

Եթե $\lambda_0^* = 1$, ապա (7.12)-ը կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [b_i - g_i(\bar{x})] \ge 0$$

կամ, օգտվելով (7.15)-ից

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [b_i - g_i(\bar{x})] - [f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [b_i - g_i(\bar{x}^*)]],$$

այսինքն՝

$$L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}^*) : \qquad (7.16)$$

Մյուս կողմից, քանի որ $b_i - g_i(\bar{x}) \le 0$, $i = 1,2,\dots,m$, ապա ցանկացած $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \ge 0$ վեկտորի համար $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(\bar{x}^*)] \le 0$:

Ուստի, օգտվելով (7.15)-ից, կարող ենք գրել

$$f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(\bar{x}^*)] \le f(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [b_i - g_i(\bar{x}^*)],$$

այսինքն

$$L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}) \le L(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*) : \qquad (7.17)$$

(7.16) և (7.17)-ից հետևում է, որ $(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*)$-ը (7.6)-(7.7) խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է: ⅃

Հետևյալ օրինակով համոզվենք, որ եթե S տիրույթը չի բավարարում կանոնավորության պայմանին, ապա Կուն-Թակերի թեորեմի եզրակացությունը կարող է ճիշտ չլինել:

$(x) \to \min,$

$-x^2 \ge 0,\ x \ge 0:$

Թույլատրելի S տիրույթը $x = 0$ միակ կետն է, որը չի բավարարում կանոնավորության պայմանին: Լավագույն լուծումը կլինի $x^* = 0$, համապատասխան Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = x + \lambda x^2$$

և $x \ge 0$, $\lambda \ge 0$ տիրույթում թամբակետ գոյություն չունի:

Ընթերցողին առաջարկվում է ստուգել ստորև բերված խնդիրների համար Կուն-Թակերի թեորեմի պայմանները:

Օրինակ 1:

$$f(\bar{x}) = \ln(x_1 + 3) + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0: \end{cases}$$

$f(\bar{x})$ ֆունկցիան գոգավոր է, իսկ $g_1(x_1, x_2)$-ը՝ ուռուցիկ, հետևաբար Կուն-Թակերի պայմանները անհրաժեշտ և բավարար են:

Գրենք դրանք մեր խնդրի՝ Լագրանժի $L(x_1, x_2, \lambda_1) = \ln(x_1 + 3) + x_2 - \lambda_1(4 - x_1 - 2x_2)$ ֆունկցիայի համար.

$$\begin{cases} 1)\ L'_{x_1} = 1/(x_1 + 3) - \lambda_1 \le 0, \\ 2)\ L'_{x_1} \cdot x_1 = (1/(x_1 + 3) - \lambda_1) \cdot x_1 = 0, \\ 3)\ L'_{x_2} = 1 - 2\lambda_1 \le 0, \\ 4)\ L'_{x_2} \cdot x_2 = (1 - 2\lambda_1) \cdot x_2 \le 0, \\ 5)\ L'_{\lambda_1} = 4 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ 6)\ L'_{\lambda_1} \cdot \lambda_1 = (4 - x_1 - 2x_2) \cdot \lambda_1 \ge 0, \\ \quad \lambda_1 \ge 0: \end{cases}$$

Նկատենք, որ 3) պայմանից հետևում է, որ $\lambda_1 \ge 1/2$, իսկ 1) պայմանից տեսնում ենք, որ $1/(x_1 + 3) < 1/2$ բոլոր $x_1 \ge 0$ համար, հետևաբար՝ $1/(x_1 + 3) - \lambda_1 < 0$ բոլոր $x_1 \ge 0$ և $\lambda_1 \ge 0$ փոփոխականների կամայական արժեքների համար. ուրեմն 2) պայմանում $x_1 = 0$: Այսպիսով, գտանք, որ $x_1^* = 0$, $\lambda_1 > 0$ պայմաններից հետևում է, որ 6)-ում $4 - 0 - 2x_2 = 0$, այսինքն՝ $x_2^* = 2$: Խնդրի լավագույն լուծումն է $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$ նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը՝ $f_{\max} = f(0,2) = \ln 3 + 2$:

Վերջում նկարագրենք Լագրանժի ընդհանրացված եղանակը, որը կարող է օգտակար լինել:

Լագրանժի ընդհանրացված եղանակը:

Դիցուք՝ ունենք խնդիր, որտեղ պահանջվում է գտնել

$$f(x) \to \min$$

$$g_i(\bar{x}) \ge b_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

$\bar{x} \ge 0$ պայմանը ընդգրկված է համակարգում:

Լագրանժի ընդհանրացված եղանակի էությունը. եթե ոչ պայմանական օպտիմումի կետը չի բավարարում խնդրի բոլոր սահմանափակումներին, ապա պայմանական օպտիմումը պետք է հասանելի լինի թույլատրելի լուծումների բազմության եզրային կետում: Ուստի մեկ կամ մի քանի սահմանափակումներ այդ կետում դառնում են հավասարումներ, և հաշվողական գործընթացը հետևյալն է.

Քայլ 1-ին: Լուծել խնդիրն առանց սահմանափակումների՝

$f(\bar{x}) \to \min$

Եթե ստացված օպտիմումի կետը բավարարում է (8.14)-ին, ավարտել հաշվումները, հակառակ դեպքում վերցնել $k=1$ և անցնել 2-րդ քայլին:

Քայլ 2-րդ: Ցանկացած k անհավասարություններ դարձնել հավասարումներ և Լագրանժի եղանակով գտնել $f(\bar{x})$-ի լավագույն արժեքը տվյալ k հավասարումների առկայության դեպքում: Ակնհայտ է, որ մնացած $m-k$ պայմանները հաշվի չեն առնվում: Եթե ստացված լուծումը բավարարում է (8.14) համակարգի հաշվի չառնված $m-k$ պայմաններին, ապա գտնված է տեղային օպտիմումը: Հակառակ դեպքում այլ k անհավասարությունները դարձնել հավասարումներ (դրանց քանակը C_m^k է): Եթե տեղային օպտիմումը չի գտնվել, անցնում ենք 3-րդ քայլին:

Քայլ 3-րդ: Եթե $k=m$, թույլատրելի լուծում չկա, հակառակ դեպքում վերցնել $k=k+1$ և անցնել քայլ 2-ին:

Այս եղանակը էական թերություններ ունի: Նախ այն չի ապահովում համապարփակ օպտիմում գտնելը: Բացի այդ, եթե $p \neq q$, օրինակ $p<q$, ապա օպտիմումի կետը p հավասարումներով միշտ չէ, որ ավելի լավ է, քան օպտիմումի կետը q հավասարումներով: Այս իրավիճակը կարող է առաջանալ միայն այն դեպքում, երբ p սահմանափակումները q սահմանափակումների հավաքածուի ենթաբազմություն են:

§ 8. Լագրանժի ֆունկցիայի տնտեսագիտական մեկնաբանումը

Դիտարկենք արտադրանքյուղի և շուկայի հետևյալ տնտեսական փոխազդեցությունը [12]: Արտադրանքյուղը ձգտում է առավելագույնի հասցնել արտադրանքից ակնկալվող շահույթը: Շուկան ձգտում է նվազագույնի հասցնել արտադրանքյուղի շահույթը: Ենթադրվում է նակ, որ շուկան է կառավարում այն հումքի գինը, որ արտադրանքը գնում է շուկայում: Դիցուք՝ ոչ ԳԾ խնդիրը նկարագրում է ձեռնարկության առաջադրած նպատակը առավելագույնի հասցնել վաճառվող արտադրանքից ստացվող եկամուտը: Հետևաբար, $f(\bar{x})$-ը այն շահույթն է, որ կստացվի արտադրության $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ մակարդակի դեպքում, որտեղ x_j, $j = 1, \ldots, n$-ը j-րդ ապրանքի թողարկման ծավալն է: $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համախումբը թողարկելու համար արտադրանքյուղին անհրաժեշտ է m տեսակի b_i քանակությամբ $i = 1,2,\ldots,m$, հումք, որն առկա է շուկայում: $g_i(\bar{x})$-ը, $i = 1,\ldots,m$, i-րդ հումքի այն ծավալն է, որն անհրաժեշտ է $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համախումբը թողարկելու համար: Նշանակենք $h_i(\bar{x}) = b_i - g_i(\bar{x})$: Եթե $h_i(\bar{x}) > 0$, ապա նշանակում է, որ արտադրանքյուղը լրիվ չի օգտագործում i-րդ տեսակի հումքը և ավելցուկ է մնում, իսկ եթե $h_i(\bar{x}) < 0$, ապա i-րդ տեսակի հումքը պակաս է, ուստի արտադրանքյուղը չի կարողանա իր նախատեսած ծավալով արտադրանք թողարկել:

Այսպիսով, ունենք հետևյալ ոչ ԳԾ խնդիրը

$$f(\bar{x}) \to \max,$$

$$h_i(x) \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m:$$

Այս խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի տնտեսագիտական մեկնաբանումը հետևյալն է:

Դիցուք $\lambda_i \geq 0$, որը i-րդ հումքի միավորի գինն է: Եթե $h_i(\bar{x}) > 0$, ապա արտադրանքյուղը կկարողանա վաճառել հումքի ավելցուկը և ստանալ $\lambda = h_i(x)$ քանակությամբ լրացուցիչ եկամուտ: Նման ձևով, եթե $h_i(\bar{x}) < 0$, ապա արտադրանքյուղը պետք է գնի $h_i(\bar{x})$ քանակությամբ հումք՝ ծախսելով $\lambda_i h_i(\bar{x})$ միավոր փող և ապահովելով $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համախմբի ցանկալի մակարդակը: Լագրանժի ֆունկցիայի $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$ արժեքը $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համախմբի թողարկումից ստացվելիք շահույթն է: Սա պարունակում է այն շահույթը, որն ստացվում է $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համախումբը թողարկելիս և հումքի գնման (վաճառման) շնորհիվ: Այսպիսով, Լագրանժի ֆունկցիան ցույց է տալիս շուկայի ծախքերը:

Այժմ ենթադրենք, որ λ_i, $i = 1,\dots,m$ գները շուկայում որոշված են և արտադրաձյուղը ցանկանում է առավելագույնի հասցնել իր շահույթը՝ ընտրելով $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ լավագույն թողարկման համախումբը, այսինքն՝ նա պետք է գտնի $L^*(\bar{\lambda}) = \max_{x>0} L(\bar{x}, \lambda)$:

Շուկան փորձելու է գտնել $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ գների այնպիսի վեկտոր, որ նվազագույնի հասցնի հումքի համար ընդհանուր ծախսը՝

$L_*(\bar{x}) = \min_{\lambda \geq 0} \lambda(\bar{x}, \bar{\lambda})$:

Շուկայում առկա է մրցակցային հավասարակշիռ իրավիճակ, եթե $\min_{\lambda>0} L(x, \bar{\lambda}) = \max_x L(\bar{x}, \lambda)$ և (x^*, λ^*)-ը Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ է: Այդ դեպքում արտադրաձյուղը շահույթ ստանալու նպատակով չի կարող փոփոխել արտադրության $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x^*)$ համախմբի մակարդակը: Ընդ որում, հումքի գների ոչ մի փոփոխություն չի կարող պակասեցնել արտադրաձյուղի շահույթը:

§9. Լագրանժի ֆունկցիան և գծային ծրագրման երկակի խնդիրները

Այս պարագրաֆում ցույց կտանք, որ ԳԾ ուղիղ խնդրի Լագրանժի բազմապատկիչները կարող են հանդես գալ մի նոր դերում՝ որպես ԳԾ երկակի խնդրի փոփոխականներ: Այնուհետև կքննարկենք Կուն-Թակերի պայմանները ԳԾ խնդրի համար և ցույց կտանք, որ ԳԾ երկակիության թեորեմները Կուն-Թակերի թեորեմի հետևանքներն են:

Դիտարկենք սովորական տեսքի ԳԾ երկակի խնդիրների հետևյալ զույգը.

$$z = \bar{c}\bar{x} \to \max, \tag{9.1}$$

$$\begin{cases} A\bar{x} \leq b, \\ \bar{x} \geq 0, \end{cases}$$

$$u = \bar{y}\bar{b} \to \min, \tag{9.2}$$

$$\begin{cases} \bar{y}A \geq c, \\ \bar{y} \geq 0, \end{cases}$$

որտեղ $A = (a_{ij})$ $m \times n$ մատրից է, $\bar{b} \in E^m$, $\bar{c} \in E^n$, $\bar{x} \in E^n$, $\bar{y} \in E^m$:

Գրենք այս երկու խնդիրների Լագրանժի ֆունկցիաները

$$L_1(\bar{x},\bar{\lambda}) = \overline{cx} + \bar{\lambda}(b - A\bar{x}), \tag{9.3}$$

$$L_2(\bar{y},\bar{\mu}) = \bar{y}\bar{b} - (\bar{y}\bar{A} - \bar{c})\bar{\mu} = \bar{y}\bar{b} + (c - \bar{y}A)\bar{\mu} \tag{9.4}$$

որտեղ $\bar{\lambda}$ -ն m -չափանի, իսկ $\bar{\mu}$ -ն n -չափանի վեկտորներ են:

Հեշտ է նկատել, որ վերցնելով $\bar{y} = \bar{\lambda}$, $\bar{\mu} = \bar{x}$, կունենանք

$$L(\bar{x},\bar{y}) = L_2(\bar{y},\bar{x}) = L_1(\bar{x},\bar{y}) = \overline{cx} + \bar{y}\bar{b} - \bar{y}A\bar{x},$$

այսինքն՝ ուղիղ և երկակի խնդիրների Լագրանժի ֆունկցիաները համընկնում են, ընդ որում ուղիղ խնդրի Լագրանժի բազմապատկիչները երկակի խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի փոփոխականներն են և՝ ընդհակառակը:

Այժմ գրենք Կուն-Թակերի պայմանները՝

$$L'_{x_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \le 0, \tag{9.5}$$

$$L'_{x_j} \cdot x_j = (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j = 0, \tag{9.6}$$

$$L'_{y_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge 0, \tag{9.7}$$

$$L'_{y_i} \cdot y_i = (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)y_i = 0, \tag{9.8}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,n \quad y_i \ge 0,\ i = 1,2,\dots,m:$$

Ինչպես տեսնում ենք, (9.5) և (9.7) պայմանները ուղիղ և երկակի խնդիրների սահմանափակումներն են, իսկ (9.6) և (9.8) պայմանները ոչ այլ ինչ են, քան ոչ կոշտության պայմաններ, լավագույն լուծումներ, երբ $\bar{x} = \bar{x}^*$, $\bar{y} = \bar{y}^*$:

Քանի որ ուղիղ և երկակի խնդիրների Լագրանժի ֆունկցիաները համընկնում են, ուստի կունենանք

$$\bar{y}^* \cdot \bar{b} = \min_y \bar{y}\bar{b} = \min_y L(\bar{y},\bar{x}) = \max_x \overline{cx} = \overline{cx}^* = \max_x L(\bar{x},\bar{y}):$$

Վերջինս ուղիղ և երկակի խնդիրների նպատակային ֆունկցիաների լավագույն արժեքների հավասարության մեզ արդեն հայտնի արդյունքն է: Վերջում նշենք, որ Կուն-Թակերի թեորեմի ապացուցման ընթացքում տիրույթի կանոնավորությանը վերաբերող պայմանի անհրաժեշտությունը վերանում է՝ խնդրի սահմանափակումների գծայնության պատճառով:

Թեորեմ 1: Ա. Որպեսզի $(x_1^*, x_2^* \dots, x_n^*)$ վեկտորը լինի (9.1) խնդրի լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է, որ գոյություն ունենան Լագրանժի $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)$ բազմապատկիչների այնպիսի ոչ բացասական արժեքներ, որոնց համար $\max\limits_{\bar{x}\geq 0} L(x, \bar{y}) = L(x^*, \bar{y})$, և միաժամանակ $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)$ վեկտորը լինի երկակի խնդրի լավագույն լուծումը:

Բ. Որպեսզի $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ վեկտորը լինի (9.2) խնդրի լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է, որ գոյություն ունենան Լագրանժի $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ բազմապատկիչների այնպիսի ոչ բացասական արժեքներ, որոնց համար $\min\limits_{\bar{y}\geq 0} L(\bar{x}, y) = L(\bar{x}, y^*)$, և միաժամանակ $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ վեկտորը լինի երկակի խնդրի լավագույն լուծումը:

$\mapsto$ Բավական է ապացուցել թեորեմի առաջին մասը, քանի որ նույն ձևով ապացուցվում է նաև մյուսը: Ենթադրենք՝ $\bar{x}^*$ վեկտորը (9.1) խնդրի լավագույն լուծումն է: Երկակիության առաջին թեորեմից կհետևի, որ (9.2) խնդիրը նույնպես կունենա լավագույն $\bar{y}^*$ լուծում:

Ցանկացած ոչ բացասական x_j, $j = 1,2,\dots,n$ թույլատրելի լուծումների համար հաշվենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$\begin{aligned} L(\bar{x}^*, \bar{y}^*) - L(\bar{x}, \bar{y}^*) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*] - \\ &- \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j^* - \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j : \end{aligned} \tag{9.9}$$

Եթե հաշվի առնենք, որ $(c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j^* = 0$, երբ $j = 1,2,\dots,n$, իսկ $(c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j \leq 0$, երբ $j = 1,2,\dots,n$, $x_j \geq 0$ և $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j$, ապա (9.9)-ից կհետևի, որ $L(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \geq L(\bar{x}, \bar{y}^*)$ ցանկացած ոչ բացասական x_j թույլատրելի լուծումների համար, այսինքն՝

$$\max_{\bar{x}\geq 0} L(\bar{x}, \bar{y}^*) = L(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել: $\lrcorner$

Այսպիսով, թեորեմի միջոցով ԳԾ խնդրի լուծման օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանը հանգեց Լագրանժի ֆունկցիայի “մասնակի-պայմանական” էքստրեմումի խնդրի լավագույն լուծմանը, երբ փոփոխականների վրա դրված են միայն ոչ բացասական լինելու սահմանափակումներ: Թեորեմը, որի ապացուցման ընթացքը ստորև կշարադրենք, Կուն-Թակերի թեորեմի (տե՛ս, §7) մասնավոր դեպքն է: Եվ քանի որ այս մասնավոր դեպքի համար Կուն-Թակերի թեորեմի ապացուցումը կլինի անհամեմատ պարզ ու հասկանալի, ավելորդ չենք համարում բերել նաև ապացուցումը:

Թեորեմ 2: Որպեսզի $\bar{x}^*$ և $\bar{y}^*$ վեկտորները համապատասխանաբար լինեն (9.1) և (9.2) երկակի խնդիրների լավագույն լուծումները, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած ոչ բացասական $\bar{x}$-ի և $\bar{y}$-ի համար

$$L(\bar{x},\bar{y}^*) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}), \qquad (9.10)$$

որտեղ $L(\bar{x},\bar{y})$-ը (9.1) և (9.2) խնդիրների Լագրանժի ֆունկցիան է:

$\mapsto$ *Անհրաժեշտությունը* հետևում է 1-ին թեորեմից:

Բավարարություն: Ենթադրենք՝ $\bar{x}^*,\bar{y}^*$ զույգը (9.3) ֆունկցիայի թամբակետն է, և ցույց տանք, որ $\bar{x}^*$-ը և $\bar{y}^*$-ը, համապատասխանաբար (9.1) և (9.2) խնդիրների լավագույն լուծումներ են: Նախ ցույց տանք, որ $\bar{x}^*$-ը (9.1) խնդրի համար թույլատրելի լուծում է: Քանի որ ցանկացած $\bar{y} \ge 0$ համար $L(\bar{x}^*,\bar{y}^*) \le L(\bar{x}^*,\bar{y})$, ապա՝

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} (b_i - \sum a_{ij} x_j^*) \cdot y_i ,$$

որտեղից կունենանք, $\bar{x}^*$-ը բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i^* - y_i)(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) \le 0 : \qquad (9.11)$$

Հետևաբար, եթե որևէ i_0-ի համար $b_{i_0} - \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j^* < 0$, ապա (9.11)-ի մեջ տեղադրելով $y_1 = y_1^*$, $y_2 = y_2^*$, ..., $y_{i_0} = y_{i_0}^* + 1$, ..., $y_m = y_m^*$ հակասություն կառաջանա: Ուրեմն՝ $\forall i (1 \le i \le m)$, $b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \ge 0$ այսինքն $\bar{x}^*$-ը իսկապես (9.1) խնդրի համար լուծում է: Նույն ձևով, քանի որ կամայական ոչ բացասական $\bar{x}$ վեկտորի համար ճիշտ է $L(\bar{x},\bar{y}^*) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*)$ անհավասարությունը, ցույց կտանք, որ y^* վեկտորը (9.2) խնդրի լուծում է: Այժմ եթե (9.11) անհավասարության մեջ տեղադրենք $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$, կստանանք

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^*(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*) \le 0: \tag{9.12}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\forall i(1 \le i \le m)$, $y_i^*(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*) \ge 0$ (x^* և y^* թույլատրելի լուծումներ են), ապա (9.12)-ից կհետևի, որ

$$y_i^*(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*) = 0\,,\ i = 1,2,\ldots,m: \tag{9.13}$$

Նույն ձևով, քանի որ ցանկացած $\bar{x} \ge 0$ համար $L(\bar{x},\bar{y}^*) \le L(\bar{x}^*,\bar{y}^*)$, կստանանք

$$x_j^*(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^*) = 0\,,\ j = 1,2,\ldots,n: \tag{9.14}$$

Ստացված (9.13) և (9.14) պայմաններից և երկակիության երկրորդ թեորեմից հետևում է, որ x^* և y^* թույլատրելի լուծումները լավագույնն են: ⌟

§ 10. Առաջադրանքներ

1. Հետազոտել ոչ ԳԾ հետևյալ խնդիրները.

1) $2x_1 + x_2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

2) $-2x_1 + 5x_1^2 - 3x_2^2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

3) $x_1^2 + 4x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \to ext,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

4) $5x_1 - x_1^2 - 3x_1^2 + 10x^2 - x_2^2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

5) $5x_1+4x_2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 \le 9, \\ -x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

6) $x_1+2x_2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 \le 4, \\ x_1^2+x_2^2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

7) $1-x_2^2 \to ext,$

$$\{x_2-x_1+1=0,$$

8) $1-x_2^2 \to ext,$

$$\begin{cases} 1-x_1^2-x_2^2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

9) $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{cases}$$

10) $x_1x_2x_3 \to ext,$

$$\{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 9,$$

11) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{cases}$$

12) $x_1^2+x_2^2 \to ext,$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0: \end{cases}$$

2. Հետազոտել ՄԾ հետևյալ դասական խնդիրները.

1) $8x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=16, \\ 5x_1+2x_2+x_4=40, \\ x_j \ge 0, j=1,\dots,4 \end{cases}$$

2) $x_1^2+x_2^2-8x_1-4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-2x_3+x_4=8, \\ 11x_1+6x_2+x_3+2x_4=96, \\ x_j \ge 0, j=1,\dots,4 \end{cases}$$

3) $20x_1+18x_2-x_1^2-x_2^2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=30, \\ x_1+x_2+x_4=15, \\ 5x_1+2x_2+x_5=60, \\ x_j \ge 0, j=1,\dots,5 \end{cases}$$

4) $-4(x_1-5)^2-(x_2-11)^2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 \le 30, \\ x_1+x_2+x_4=15, \\ 5x_1+2x_2+x_5=60, \\ x_j \ge 0, j=1,\dots,5: \end{cases}$$

3. Ոչ ԳԾ խնդիրների համար ստուգել, թե տրված վեկտորներից ո՞րն է խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ

1) $f(\bar{x})=-x_1^2-x_2^2+6 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \end{cases}$$

$z_1=(1,-1,3),$
$z_2=(0,0,0),$

2) $f(\bar{x})=-5x_1^2-x_2^2+4x_1x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+2x_1-4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$z_1=(0,1,-4),$
$z_2=(0,0,0),$

3) $f(\bar{x}) = -2x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 8 \to \max,$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$z_1 = (0,4,2,6,-1),$
$z_2 = (-2,0,7,0,-3),$

4) $f(\bar{x}) = -3x_2^2 + 11x_1 + 3x_2 + x_3 + 27 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 \le -7, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ x_3 \ge 0, \end{cases}$$
$z_1 = (0,2,2,2,0),$
$z_2 = (0,0,0,0,0),$

5) $f(\bar{x}) = -x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{cases}$$
$z_1 = (1,0,2,0,1),$
$z_2 = (0,1,1,1,2),$

6) $f(\bar{x}) = -x_1 - x_2 - x_3 + 30x_4 + 8x_5 - 56x_6 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - 10x_6 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 + 7x_6 = -11, \\ x_j \ge 0, j = 1,\ldots,5, x_j \sim, \end{cases}$$
$z_1 = (0,0,1,0,0,-2,3,-1),$
$z_2 = (0,0,0,0,4,-1,0,8):$

4. Ստուգել, թե տրված $\bar{x}$ վեկտորներից որո՞նք են լավագույն լուծում

1) $-x_1^2 - x_2^2 + 6 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, \end{cases}$$
$\bar{x}' = (1,-1), x'' = (0,0),$

2) $-5x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_1 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$\bar{x}' = (0,0), \bar{x}'' = (0,1),$

VI. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԾՐԱԳՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

Հաճախ, ձգտելով դեպ լավագույնը,
կորցնում ենք լավը:
Շեքսպիր "Արքա Լիր"

§ 1. Թույլատրելի ուղղություններ. օպտիմալության հայտանիշներ

Դիտարկենք հայտանիշներ, որոնց միջոցով ցույց է տրվում ուռուցիկ ծրագրման (ՈՒԾ) խնդրի թույլտարելի լուծման օպտիմալությունը:

Ենթադրենք՝ տրված է ՈՒԾ խնդիր

$$f(\bar{x}) \to \min,$$

$$\bar{x} \in S,$$

որտեղ $f(\bar{x})$-ը ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ սահմանափակումներով որոշվող թույլատրելի լուծումների S ուռուցիկ բազմությունն է.

$$S = \{\bar{x} | g_i(\bar{x}) \le 0 \; i \in I_1, g_i(\bar{x}) = 0 \; i \in I_2\}, \tag{1.1}$$

որտեղ

$$\begin{aligned} &x_j \ge 0, \; j = 1,2,\ldots,n \; I_1 \cup I_2 = \{1,2,\ldots,m\}, \; I_1 \cap I_2 = \varnothing \\ &g_i(x) = \bar{a}^i \bar{x} - b_i, \; \bar{a}^i \in E_n, \; \bar{b} \in E_m, \; i \in I = \{1,2,\ldots,m\}: \end{aligned} \tag{1.2}$$

Եթե (1)-ում $g_i(x)$ ֆունկցիաները ոչ գծային են, ապա դրանց թվակալների բազմությունը նշանակենք $I_3 \subset I_1$:

Սահմանում: $\bar{s} \in E_n$ վեկտորը կանվանենք $\bar{x} \in S$-ի համար թույլատրելի ուղղություն, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\lambda > 0$ թիվ, որ $\bar{x} + \lambda\bar{s} \in S$:

Սահմանումից հետևում է, որ $(\bar{x} + \lambda\bar{s})$-ը նույնպես թույլատրելի լուծում է:

Օրինակ, եթե $S = \{\bar{x} | \bar{x} \ge 0\}$, ապա $\bar{x} = 0$ կետում կամայական $\bar{s} \ge 0$ վեկտորը թույլատրելի ուղղություն է:

Եթե $\bar{x}$-ը բազմության ներքին կետ է, ապա կամայական $\bar{s}$ ուղղությունը $\bar{x}$ կետում կլինի թույլատրելի:

Սահմանում: Դիցուք՝ պահանջվում է գտնել $f(\bar{x})$-ի մինիմում արժեքը: Եթե $\bar{x}+\lambda\bar{s}$ վեկտորը բավարարում է $f(\bar{x}+\lambda\bar{s})<f(\bar{x})$ անհավասարությանը, ապա $\bar{s}$ վեկտորը անվանում ենք $\bar{x}\in S$ կետի համար հարմար ուղղություն:

Սահմանումից հետևում է, որ եթե ինչ-որ λ_1 թվի համար $f(\bar{x}+\lambda_1\bar{s})\in S$, ապա $\forall\lambda\in[0,\lambda_1]$ $(\bar{x}+\lambda\bar{s})$-ը նույնպես կլինի թույլատրելի ուղղություն, և եթե $\bar{x}$ կետում $(\bar{x}+\lambda_1\bar{s})$-ը հարմար ուղղություն է, ապա այդպիսին կլինի նաև $\forall\lambda\in[0,\lambda_1]$ $(\bar{x}+\lambda\bar{s})$-ը:

Օպտիմալության հայտանիշ: Որպեսզի x^* թույլատրելի լուծումը լինի ՈԻԾ խնդրի լավագույն լուծումը, անհրաժեշտ և բավարար է, որ $\bar{x}^*$-ի համար հարմար ուղղություն գոյություն չունենա:

$\mapsto$ *Անհրաժեշտություն*: Իսկապես, եթե $\bar{x}^*$-ը լավագույն լուծում է և $\bar{s}$-ը հարմար ուղղություն է, ապա, ըստ սահմանման, կգտնվի այնպիսի $\lambda>0$, որ $f(x^*+\lambda\bar{s})<f(\bar{x}^*)$ մինիմացման խնդրի համար, բայց դա հնարավոր չէ, քանի որ $\bar{x}^*$-ը լավագույն լուծումն է:

Բավարարություն: Դիցուք՝ $\bar{x}^*$-ը լավագույն լուծում չէ և x^*-ի համար չկա հարմար ուղղություն: Եթե x^*-ը լավագույն լուծումը չէ, ուրեմն գոյություն ունի $\bar{x}_0\neq\bar{x}^*$ կետ և $f(\bar{x}_0)<f(\bar{x}^*)$:

Վերցնենք $\bar{s}=\bar{x}_0-\bar{x}^*$, $\bar{x}_0=\bar{x}^*+1\cdot\bar{s}$ և $f(\bar{x}_0)=f(\bar{x}^*+1\cdot\bar{s})<f(\bar{x}^*)$, այսինքն՝ $\bar{s}$-ը հարմար ուղղություն է $\bar{x}^*$ կետում, իսկ դա հակասում է մեր ենթադրությանը: ↲

Այժմ ենթադրենք, որ $f(\bar{x})$ և $g_i(\bar{x})$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, և $\bar{x}\in S$-ին: Նշանակենք

$$I(\bar{x})=\{i\in I_1, g_i(\bar{x})=0\}, \tag{1.3}$$

$$J(\bar{x})=\{j\in[1,2,\dots,n], x_j=0\}: \tag{1.4}$$

Թույլատրելի ուղղության գոյության պայմանը: Որպեսզի $\bar{x}$ կետում գոյություն ունենա $\bar{s}$ թույլատրելի ուղղություն, անհրաժեշտ է, որ

$$\nabla g_i(\bar{x})\cdot\bar{s}\le 0, i\in I(\bar{x}), \tag{1.5}$$

$$\nabla g_i(\bar{x})\cdot\bar{s}=\bar{a}^i\bar{s}=0, i\in I_2, \tag{1.6}$$

$$s_j\ge 0, j\in J(\bar{x}): \tag{1.7}$$

Որպեսզի $\bar{x}$ կետում $\bar{s}$-ը լինի թույլատրելի ուղղություն, բավարար է, որ ճիշտ լինեն (1.5)-(1.7) պայմանները և հետևյալ լրացուցիչ պայմանը.

$$\nabla g_i(\bar{x}^*)\bar{s} < 0, i \in I(\bar{x}) \cap I_3 \qquad (1.8)$$

$\mapsto$ *Անհրաժեշտություն*: Ենթադրենք՝ $\bar{s}$-ը թույլատրելի ուղղություն է $\bar{x}$ կետում, ուստի $\forall \lambda \in (0, \lambda_1], \lambda_1 > 0$ $\bar{x} + \lambda\bar{s} \in D$: Հետևաբար, $\lambda \in (0, \lambda_1]$ և $i \in I(x)$ համար.

$$0 \geq g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) = g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) - g_i(\bar{x}) \geq \lambda\nabla g_i(\bar{x})\bar{s}$$

և համաձայն գլ. 2-ի 5-րդ թեորեմի (1.5) պայմանը ապացուցված է: Եթե $i \in I_2$, ապա $a^i\bar{x} - b_i = 0$, $a^i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) - b_i = 0$, երբ $\lambda \in [0, \lambda_1]$: Հետևաբար ճշմարիտ է նաև (1.6) պայմանը և վերջապես՝

$$(\bar{x} + \lambda\bar{s})_j = x_j + \lambda s_j = \lambda s_j \geq 0,$$

երբ $j \in J(x)$ և $\lambda \in [0, \lambda_1]$:

Բավարարություն: Դիցուք՝ $\bar{x} \in S$, $\bar{s} \in E^n$ և ճշմարիտ են (1.5)-(1.8) պայմանները: $i \in I(x) \cap I_3$ համար.

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s})}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}[g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) - g_i(\bar{x})] = \nabla g_i(\bar{x}) \cdot \bar{s} < 0$$

և կգտնվի մի այնպիսի $\lambda_1 > 0$, որ $g_i(\bar{x} + \lambda_1\bar{s}) < 0$, երբ $\lambda \in [0, \lambda_1]$: Հետևաբար, $g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) \leq 0$ ցանկացած $i \in I(x) \cap I_3$ և $\lambda \in [0, \lambda_1]$: Երբ $i \in I_1 \setminus I(\bar{x})$, ապա $g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) < 0$ և $g_i(\bar{x})$ ֆունկցիաների անընդհատության պատճառով կգտնվի մի $\lambda_2 > 0$, որ $g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) < 0$, բոլոր $i \in I_1 \setminus I(\bar{x})$ համար, երբ $\lambda \in [0; \lambda_2]$:

Եթե $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J(\bar{x})$, ապա $x_j > 0$ և կարելի է գտնել այնպիսի $\lambda_3 > 0$ թիվ, որ

$$(\bar{x} + \lambda\bar{s})_j = \bar{x}_j + \lambda\bar{s}_j > 0,$$

երբ $\lambda \in [0; \lambda_3]$ կամայական $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J(\bar{x})$:

Վերջապես, կամայական $\lambda \geq 0$ համար

$g_i(x + \lambda\bar{s}) \leq 0$, երբ $i \in I(\bar{x}) \setminus I_3$,

$g_i(\bar{x} + \lambda\bar{s}) = 0$, երբ $i \in I_2$,

$(\bar{x} + \lambda\bar{s})_j \geq 0$, երբ $j \in J(\bar{x})$:

(1.5), (1.6), (1.7) պայմանների համաձայն, որովհետև ձախ մասերը տվյալ i-ի և j-ի համար λ-ից գծային ֆունկցիաներ են:

Հետևաբար, կամայական $\lambda \in [0, \hat{\lambda}]$ համար $\bar{x} + \lambda\bar{s} \in S$, որտեղ $\hat{\lambda} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$: ┘

Դիցուք՝ դիտարկում ենք մինիմացման խնդիր՝ $f(\bar{x}) \to \min$, $\bar{x} \in S$:

Հարմար ուղղության գոյության հայտանիշ: Որպեսզի $\bar{x} \in S$ կետում գոյություն ունենա $\bar{s}$ հարմար ուղղություն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\nabla f(\bar{x})\bar{s} < 0: \tag{1.9}$$

↦ *Անհրաժեշտություն*: Եթե $\bar{s}$-ը հարմար ուղղություն է, ապա կգտնվի մի այնպիսի $\lambda > 0$ թիվ, որ $f(\bar{x} + \lambda\bar{s}) < f(\bar{x})$: $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի ուռուցիկ լինելուց՝ կստանանք $0 > f(\bar{x} + \lambda\bar{s}) - f(\bar{x}) \geq \lambda\nabla f(\bar{x})\bar{s}$ այն, ինչ պահանջվում էր:

Բավարարություն: Ունենք

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{1}{\lambda}[f(\bar{x} + \lambda\bar{s}) - f(\bar{x})] = \nabla f(\bar{x})\bar{s} < 0,$$

հետևաբար, կգտնվի մի այնպիսի $\lambda_1 > 0$ թիվ, որ $f(\bar{x})$-ի անընդհատության շնորհիվ $f(\bar{x} + \lambda\bar{s}) - f(\bar{x}) < 0$ անհավասարությունը ստույգ է կամայական $\lambda \in [0; \lambda_1]$ համար: ┘

§ 2. Գրադիենտի եղանակ

Դիցուք՝ տրված է $\max f(x)$ խնդիրը, որտեղ f-ը գոգավոր է: x^* լավագույն լուծումը գտնելու համար օգտվենք այն փաստից, որ $\nabla f(x^*)$-ը ցույց է տալիս ֆունկցիայի աճման ուղղությունը: Կազմենք α թվից կախված $\bar{x}' = \bar{x}_0 + \alpha\nabla f(\bar{x}_0)$ վեկտորը, որտեղ x_0-ն վեկտոր է՝ հնարավորության դեպքում սկզբնական հաշվարկի համար հարմար ընտրված: Ընտրենք նաև $\varepsilon > 0$ բավականին փոքր թիվ, որն օգտագործելու ենք հաշվարկն ավարտելու համար: Ըստ պայմանի $f(\bar{x})$-ը գոգավոր է, և եթե հաջորդական անդրադարձ հաշվարկների շնորհիվ $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի գրադիենտի բաղադրիչները դառնան

$\varepsilon > 0$ թվից փոքր, կասենք, որ ε ճշտությամբ հաշվել ենք $\bar{x}^*$ լավագույն լուծումը, որն էլ ընդունում ենք որպես հաշվարկի ավարտի կանոն: Նկարագրենք անդրադարձ ալգորիթմի քայլերը:

1-ին քայլ. Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ փոքր դրական թիվ և սկզբնական հաշվարկի համար ինչ-որ մի $\bar{x}^{(0)}$ վեկտոր:

2-րդ քայլ. Անդրադարձ քայլ: Կառուցենք $\bar{x}^{(i)} = \bar{x}^{(i-1)} + \alpha\nabla f(\bar{x}^{(i-1)})$ ճառագայթը և գտնենք α-ն՝ լուծելով հետևյալ խնդիրը.

$$\max_{\alpha} f(\bar{x}^{(i-1)} + \alpha\nabla f(\bar{x}^{(i-1)})):$$

$i = 1$ դեպքում խնդրի լուծումով գտնում ենք թե $\bar{x}^{(0)}$ կետից ինչքան կարելի է հեռանալ $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի աճման ուղղությամբ: Հնարավոր է, որ չգտնվի մի վերջավոր α թիվ: Այդ դեպքում խնդիրը լուծում չունի և $f(\bar{x})$ ֆունկցիան անսահմանափակ է: Եթե խնդիրն ունի α^* լուծում և $\alpha^* = 0$, ապա հաշվարկն ավարտված է և լավագույն լուծումը հենց $\bar{x}^{(i)}$-ն է: Հակառակ դեպքում ($\alpha^* \neq 0$) նոր հաշվարկային կետը դառնում է

$$\bar{x}^{(i)} = \bar{x}^{(i-1)} + \alpha^* f(\bar{x}^{(i-1)}), \; i = 1,2,\ldots:$$

Նոր $\bar{x}^{(i)}$ կետի համար ստուգվում է հաշվարկի ավարտման կանոնը, եթե այն ճիշտ է, ապա լուծումը գտնելու գործընթացն ավարտված է, եթե ոչ՝ վերադառնում ենք 2-րդ քայլին:

Դիտարկենք մի օրինակ, երբ $f(\bar{x})$ ֆունկցիան քառակուսային է

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 - (1/2)(q_{11}x_1 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2) \to \max:$$

$$\nabla f(\bar{x}) = [(c_1 - q_{11}x_1c_1 - q_{12}x_2),(c_2 - q_{12}x_1 - q_{22}x_2)] = [\nabla_1, \nabla_2],$$

որտեղ $\nabla_1 = f'_{x_1}$, $\nabla_2 = f'_{x_2}$:

Վերցնենք կամայական $\bar{x}^0$ փորձնական վեկտոր և հաշվենք $\bar{x}' = \bar{x}^0 + \alpha\nabla f(\bar{x}_0) = (x_1^0, x_2^0) + \alpha[\nabla_1, \nabla_2]$: Այս խնդրի համար կարևոր չէ, թե ինչպես ենք ընտրում $\bar{x}^0$-ն: Գտնենք α^*-ը՝ լավագույն քայլի երկարությունը, որպես հետևյալ խնդրի լուծում. $\max\limits_{\alpha} f(x_1^0 + \alpha\nabla_1, x_2^0 + \alpha\nabla_2)$:

Այստեղ $\alpha^* = \dfrac{-\nabla_1[q_{11}x_1^0 + q_{12}x_2^0 - c_1] - \nabla_2[q_{22}x_2^0 + q_{12}x_1^0 - c_2]}{q_{11}(\nabla_1)^2 + 2q_{12}\nabla_1 \cdot \nabla_2 + q_{22}(\nabla_2)^2}$:

Գրադիենտի եղանակը կարելի է կիրառել նաև ՄԾ խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի նկատմամբ՝ հաշվի առնելով երկու կարևոր հանգամանք.

1. Քայլի երկարությունը՝ α թիվը, պետք է ընտրվի այնպես, որ տրված ուղղությամբ շարժվելիս դուրս չգալ թույլատրելի լուծումների բազմությունից: Ընդ որում α-ի փոքր լինելը մեծացնում է մոտարկումների քանակը:

2. Գրադիենտի ուղղությունը սովորաբար չի համընկնում այն գծի ուղղությանը, որը $\bar{x}^0$ սկզբնական կետը միացնում է $\bar{x}^*$ օպտիմումի կետին:

Տեղին է նշել, որ քայլի երկարությունը՝ α թվի ընտրությունը, շատ գիտական հետազոտությունների առարկա է եղել: Գրադիենտի եղանակները տարբերվում են քայլի ընտրությամբ և ուղղության վեկտորի նորմավորմամբ: Հետաքրքրասեր ընթերցողը կարող է օգտվել համապատասխան գրականությունից [16,32]:

ՄԾ խնդրի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետ գտնելու համար գրադիենտի եղանակի կիրառումը հետևյալն է: Ընտրենք ոչ բացասական $(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$ սկզբնական վեկտոր:

Քայլ 1-ին: Հաշվենք Լագրանժի ֆունկցիայի գրադիենտի արժեքը $(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$ կետում: Նշանակենք $\nabla L_{0x_j} = L'_{x_j}(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$, $j = 1,2,\dots,n$, $\nabla L_{0\lambda_i} = L'_{\lambda_i}(\bar{x}^0, \bar{\lambda}^0)$, $i = 1,2,\dots,m$:

Քայլ $k+1$*-րդ*: Հաշվենք $k+1$-րդ մոտարկման վեկտորը հետևյալ բանաձևով.

$$x_j^{(k+1)} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x_j^k = 0 \text{ և } \nabla L_{kx_j} > 0 \\ x_j^k - \alpha_k \nabla L_{kx_j}, & \text{եթե } x_{kj} > 0 \text{ և } \nabla L_{kx_j} \geq 0, \; j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$\lambda_i^{(k+1)} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } \lambda_i^{(k)} = 0 \text{ և } \nabla L_{k\lambda_i} < 0 \\ \lambda_i^{(k)} + \alpha_k \nabla L_{k\lambda_i}, & \text{եթե } \lambda_i^k > 0 \text{ և } \nabla L_{k\lambda_i} \leq 0, \; i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

$k = 0,1,2,\dots$:

Նկարագրված ալգորիթմի զուգամիտությունը կախված է α_k պարամետրի խելամիտ ընտրությունից: Օրինակ, α_k արժեքի ընտրության տարբերակներից են հետևյալ երկու խնդիրների լուծումները.

$$\min_{\alpha'_k \geq 0} L(\bar{x}_k - \alpha'_k \nabla L_{kx_k}, \lambda_k), \; \max_{\alpha''_k \geq 0} L(x_k, \lambda_k + \alpha''_k \nabla L_{kx_k}), \; \alpha_k = \min(\alpha'_k, \alpha''_k):$$

§ 3. Համալուծ ուղղությունների եղանակ

Ողորկ ֆունկցիայի, ինչպես օրինակ՝ քառակուսային ծրագրման նպատակային ֆունկցիայի $F(\bar{x}) = \overline{cx} + \bar{x}Q\bar{x}$ մինիմումի (մաքսիմումի) արժեքը գտնելու համար գոյություն ունեն բազմաթիվ արդյունավետ եղանակներ: Դրանցից է նաև համալուծ գրադիենտների եղանակը: Այս եղանակը սերտորեն կապված է նպատակային ֆունկցիայի գծապատկերի՝ *էլիպսի համալուծ ուղղություններ* հասկացության հետ: Գաղափարը ընկալելու համար ասենք, որ եթե էլիպսի մեջ տանենք զուգահեռ լարեր, ապա վերջիններիս կենտրոնների երկրաչափական տեղը կլինի մի հատված, որն անցնում է էլիպսի կենտրոնով:

Դիցուք $\bar{\eta}_2$ այդ հատվածի ուղղությունն է, իսկ $\bar{\eta}_1$-ը՝ լարերի: Այդ երկու ուղղությունները կոչվում են համալուծ կամ փոխադարձ համալուծ: $\bar{x}Q\bar{x}$ քառակուսային ձևի նկատմամբ փոխադարձ համալուծ ուղղությունները սահմանվում են որպես այնպիսի $\bar{\eta}_1 \neq 0$ և $\bar{\eta}_2 \neq 0$ վեկտորներ, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$\bar{\eta}_1 Q \bar{\eta}_2 = (\bar{\eta}_1 Q, \bar{\eta}_2) = (Q\bar{\eta}_1, Q\bar{\eta}_2) = 0 :$$

Ենթադրենք տրված է ոչ պայմանական էքստրեմումի հետևյալ խնդիրը.

$$F(\bar{x}) = \bar{x}Q\bar{x} + \overline{cx} \rightarrow \min :$$

Համալուծ գրադիենտների եղանակի էությունն այն է, որ հաշվարկները սկսելու համար նախ ընտրվում է մի սկզբնական $\bar{x}^0$ վեկտոր: Հաշվում ենք նպատակային ֆունկցիայի գրադիենտի արժեքը այդ $\bar{x}^0$ կետում: Քանի որ գրադիենտը ցույց է տալիս նպատակային ֆունկցիայի աճի ուղղությունը, ապա շարժվում ենք դրա հակառակ ուղղությամբ, կամ, ինչպես ընդունված է ասել, հակագրադիենտի ուղղությամբ, մինչև չենք հանդիպում այն $\bar{x}^0$ կետին, որի վրա նպատակային ֆունկցիան հասնում է իր տեղային նվազագույն արժեքին: Այնուհետև հաշվում ենք նպատակային ֆունկցիայի գրադիենտի արժեքը $\bar{x}^1$ կետում և շարժվում ենք դրան համալուծ ուղղությամբ, և այդպես շարունակ, մինչև որ հասնում ենք նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքին:

Այժմ ենթադրենք, որ k-րդ քայլում ($k < n$) մենք շարժվել ենք s^k ուղղությամբ և հասել $\bar{x}^k$ կետին: Համաձայն վերը շարադրված դատողությունների՝ հաշվում ենք $\nabla F(\bar{x}^k)$ և լուծելով $\bar{x}^k Q\bar{x}^{k+1} = 0$ հավասարումը՝ գտնում ենք $\bar{x}^{k+1}$ համալուծ ուղղությունը, որը փաստորեն $\bar{x}^k$-ի և $\nabla F(\bar{x}^k)$-ի գծային համակցություն է: Ապացուցված է, որ քառակուսային ֆունկցիաների համար համալուծ գրադիենտների եղանակի միջոցով կարելի է գտնել լավագույն լուծումը ոչ ավելի քան n քայլ կատարելուց հետո:

§ 4. Գծային համակցման եղանակ

Դիտարկվող եղանակը կիրառելի է ոչ ԳԾ այն խնդիրների համար, որոնց սահմանափակումների համակարգը կազմված է գծային հավասարումների կամ անհավասարությունների համակարգից:

$$f(\bar{x}) \to \max \tag{4.1}$$

$$A\bar{x} \le \bar{b}, \tag{4.2}$$

$$\bar{x} \ge 0: \tag{4.3}$$

Դիցուք՝ $\bar{x}^k$-ն թույլատրելի լուծում է, որն ստացվել է հաշվարկների k-րդ քայլում: Ենթադրում ենք, որ նպատակային $f(\bar{x})$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է: Օգտվելով Թեյլորի բանաձևից՝ $f(\bar{x})$-ը ներկայացնենք հետևյալ մոտավոր տեսքով՝

$$f(\bar{x}) \approx f(\bar{x}^k) + \nabla f(\bar{x}^k)(\bar{x} - \bar{x}^k) = [f(\bar{x}^k) - \nabla f(\bar{x}^k)\bar{x}^k] + \nabla f(\bar{x}^k)\cdot\bar{x}:$$

Պահանջվում է գտնել այնպիսի թույլատրելի $\bar{x}^*$ վեկտոր, որը մաքսիմացնում է $f(\bar{x})$ ֆունկցիան և բավարարում է (4.2)-(4.3) գծային սահմանափակումներին: Դրա համար լուծում ենք հետևյալ ԳԾ խնդիրը.

$$\bar{w}_k(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}^k)\cdot\bar{x} \to \max,$$

$$A\bar{x} \le \bar{b},$$

$$\bar{x} \ge 0:$$

Նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի գրադիենտի բաղադրիչների արժեքներն են՝ հաշված $\bar{x}^k$ կետում:

Այսպիսով, $\bar{x}^*$ թույլատրելի վեկտորը գտնելու համար լուծում ենք ԳԾ խնդիր: Ստացված լուծումը կարելի է լավացնել միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\overline{w}_k(\overline{x}^*) > \overline{w}_k(\overline{x}^k)$: Ցավոք, այդ պայմանը դեռ չի երաշխավորում, որ $f(\overline{x}^*) > f(\overline{x}^k)$: Դա տեղի կունենար, եթե $\overline{x}^*$-ը գտնվեր $\overline{x}^k$ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում: Եթե $\overline{w}_k(\overline{x}^*) > \overline{w}_k(\overline{x}^k)$, ապա $[\overline{x}^k, \overline{x}^*]$ հատվածի վրա գոյություն ունի $\overline{x}^{k+1}$ կետ այնպես, որ $f(\overline{x}^{k+1}) > f(\overline{x}^k)$, դա հետևում է $f(\overline{x})$ ֆունկցիայի անընդհատությունից: Այդ $\overline{x}^{k+1}$ կետը գտնելու համար կազմենք

$$\overline{x}^{k+1} = (1-\alpha)\overline{x}^k + \alpha\overline{x}^* = \overline{x}^k + \alpha(\overline{x}^* - \overline{x}^k),\ 0 < \alpha \le 1$$

գծային համակցությունը: Սահմանափակումների համակարգը գծային է, հետևաբար, թույլատրելի լուծումների բազմությունը՝ ուռուցիկ, ուրեմն $\overline{x}^{k+1}$ նույնպես թույլատրելի լուծում է: α թիվը կարելի է մեկնաբանել գրադիենտի եղանակին համանման, որպես քայլի երկարություն $(\overline{x}^* - \overline{x}^k)$ ուղղությամբ: $\overline{x}^{k+1}$ կետը գտնելու համար պետք է լուծել հետևյալ մաքսիմացման խնդիրը՝ α մեկ փոփոխականի համար $h(\alpha) = f[\overline{x}^k + \alpha(\overline{x}^* - \overline{x}^k)] \to \max$: Նկարագրված ընթացակարգը պետք է շարունակել այնքան ժամանակ, մինչև որ բավարարվի $\overline{w}_k(\overline{x}^*) \le \overline{w}_k(\overline{x}^k)$ պայմանը: Այն k-րդ քայլը, երբ տեղի ունենա $\overline{w}_k(\overline{x}^*) \le \overline{w}_k(\overline{x}_k)$, համարվում է ալգորիթմի աշխատանքի վերջին քայլ:

§ 5. Արգելքի եղանակ

Նախորդ բաժիններում ծանոթացանք գրադիենտի եղանակի երկու տարբերակի՝ հարմար և համալուծ ուղղությունների եղանակներին: Այս բաժնում կդիտարկենք մի նոր տարբերակ, որը կիրառելի է նաև ոչ ԳԾ խնդրի համար, բայց այն վերապահումով, որ թույլատրելի լուծումների բազմությունը պետք է պարունակի ներքին կետեր: Այս եղանակի իմաստն այն է, որ սահմանափակումների համակարգով տրված ոչ ԳԾ խնդիրը վերաձևակերպվում է որպես առանց սահմանափակումների օպտիմացման խնդիր, որը կարելի է լուծել գրադիենտի եղանակի միջոցով:

Եթե խնդիրը ՈՒԾ խնդիրների դասից է, ապա հաջորդական լուծումների ընթացքում հանգում ենք միակ համապարփակ լավագույն լուծմանը, հակառակ դեպքում, գտնում ենք տեղային լավագույն լուծումներից որևէ մեկը: Այսպիսով, այդ եղանակի կիրառման նպատակն է՝

- ընդհանուր տիպի ոչ ԳԾ խնդիրը լուծել հաջորդական ոչ պայմանական օպտիմացման խնդիրների միջոցով,
- գրադիենտի եղանակի միջոցով լուծել մի շարք ոչ պայմանական օպտիմացման խնդիրներ, որոնք մոտարկում են ոչ ԳԾ խնդրի լավագույն լուծումը,
- ոչ ՈՒԾ խնդիրների համար գտնել տեղային լավագույն լուծում:

Ոչ ԳԾ խնդիրների լուծման այս եղանակի հիմքում դրված է արգելքների ֆունկցիայի կիրառումը, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$B(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}[b_i - g_i(\bar{x})]^{-1} + \sum_{j=1}^{n} x_j^{-1} : \tag{5.1}$$

$B(\bar{x})$ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ երեք հատկություններով՝

- երբ $\bar{x}$ փոփոխական վեկտորը հեռանում է թույլատրելի լուծումների բազմության եզրից, ապա ֆունկցիայի արժեքը շատ է փոքրանում,
- ֆունկցիայի արժեքը շատ է մեծանում, երբ $\bar{x}$ փոփոխականը մոտենում է թույլատրելի բազմության եզրին,
- ֆունկցիայի արժեքը ձգտում է անվերջի, երբ $\bar{x}$ փոփոխականը, մոտենալով եզրին, ձգտում է զրոյի:

$B(x)$ ֆունկցիայի առաջին m գումարելիները արգելք են $b_i - g_i(x) \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ սահմանափակումների համակարգը խախտելու համար, իսկ հաջորդ գումարելիները $\bar{x}$ փոփոխական վեկտորին արգելում են անցնել ոչ բացասական լինելու սահմանը (նաև ընդունել զրոյին մոտ արժեքներ):

Առանց սահմանափակումների խնդիրը հետևյալն է՝

$$P(\bar{x};r) = f(\bar{x}) - rB(\bar{x}) \to \max \tag{5.2}$$

r-ը դրական պարամետր է, դրա միջոցով արգելվում է $\bar{x}$ ընթացիկ լուծմանը մոտենալ թույլտարելի լուծումների բազմության եզրին: Դրանով իսկ նոր լուծումը միշտ լինում է ներքին կետ, որովհետև երբ $\bar{x}$-ը մոտենում է եզրին՝ $[b_i - g_i(x)]^{-1}$, կամ $-x_j^{-1}$ ֆունկցիաներից գոնե մեկն ունենում է շատ մեծ բացասական արժեք, ինչը բացառված է նկարագրված մոտեցման շնորհիվ: Հաջորդական լուծումները, այսպիսով, միշտ ներքին կետեր են, և դրանով իսկ հնարավորություն է ստեղծվում օգտվել ոչ պայմանական օպտիմացման խնդիրների լուծման եղանակներից, մասնավորապես գրադիենտի հարմար ուղղության եղանակից:

Դիցուք՝ $\bar{x}^*$-ը խնդրի լավագույն լուծումն է, իսկ $\bar{x}'$-ը՝ առանց սահմանափակումների խնդիրների շարքից ստացված լավագույն մոտարկումը, որը պատկանում է թույլատրելի լուծումների բազմությանը: Եթե $\left|f(\bar{x}^*) - f(\bar{x}')\right| < \varepsilon$, որտեղ ε-ը բավականին փոքր դրական թիվ է, ապա կարող ենք եզրակացնել, որ ε-ճշգրտությամբ գտել ենք նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը, և $\bar{x}'$-ը օպտիմալ լուծումն է:

Ոչ ԳԾ խնդրի արգելքի եղանակի կիրառման ալգորիթմ

Վերցնել բավականաչափ փոքր $\varepsilon > 0$ և $\delta > 0$ թվեր:

1. Սկզբնական քայլ. Գտնել որևէ թույլատրելի $\bar{x}^0$ լուծում: Վերցնել ցանկացած $r \geq 0$ (r-ի ընտրությունից է կախված զուգամիտության արագությունը՝ տե՛ս, [12]): Վերցնել $k = 1$ և $0 < q < 1$ թիվ:

2. Հաջորդ քայլ. $\bar{x}^{k-1}$ լուծման համար կիրառել գրադիենտի եղանակը և լուծել (5.2) խնդիրը: Դիցուք՝ նոր լուծումն է $\bar{x}^k$:

3. Վերջին քայլ. Եթե $\left|f(\bar{x}^{k-1}) - f(\bar{x}^k)\right| < \varepsilon$ կամ $\left|\bar{x}^{k-1} - \bar{x}^k\right| < \delta$, $\delta > 0$ փոքր թիվ է, հաշվարկը դադարեցնում ենք և $\bar{x}^k$-ն ընդունում ենք որպես լավագույն լուծում: Հակառակ դեպքում r-ը փոխարինում ենք $q \cdot r$-ով $k \to k+1$-ով և վերադառնում *2* կետին:

Պարզ է, որ ՈԻԾ խնդրի դեպքում ալգորիթմը հնարավորություն է տալիս գտնել համապարփակ լավագույն լուծումը: Ընդհանուր դեպքում պետք է փորձել $\bar{x}^0$ սկզբնական թույլատրելի լուծման այլ տարբերակներ ընտրելով գտնել տեղային լուծումներ և դրանցից ընտրել լավագույնը, բայց դա երաշխիք չէ, որ կգտնենք համապարփակ լավագույն լուծումը:

§ 6. Քառակուսային ծրագրում

1. Խնդրի դրվածքը: Ուսումնասիրենք ՈԻԾ խնդրի մի մասնավոր դեպք՝ քառակուսային ծրագրման խնդիրը:

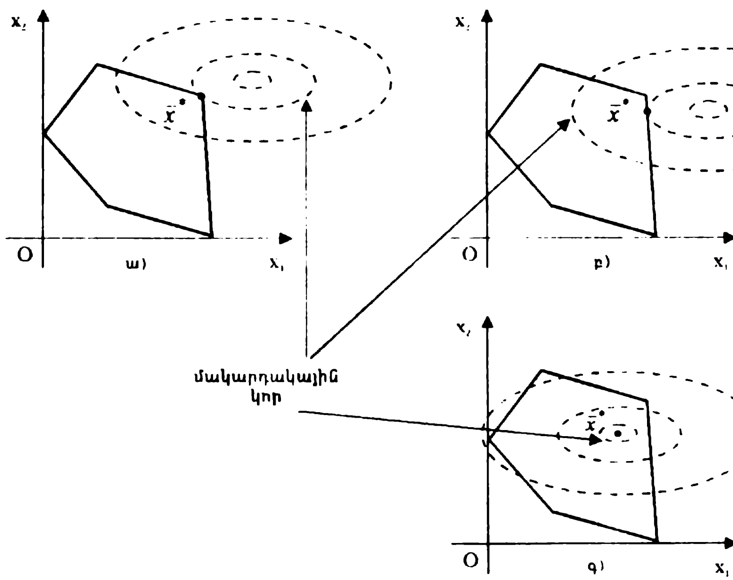
$$f(\bar{x}) = \bar{c} \cdot \bar{x} + 0{,}5\bar{x}Q\bar{x} \to \max, \qquad (6.1)$$

$$A\bar{x} \leq \bar{b}, \qquad (6.2)$$

$$\bar{x} \geq 0, \qquad (6.3)$$

որտեղ Q-ն սիմետրիկ կիսաբացասական որոշված $n \times n$ մատրից է, A-$m \times n$ մատրից է, $\bar{x}, \bar{c} \in E^n$, $\bar{b} \in E^m$: $f(\bar{x})$ ֆունկցիան գոգավոր է, ուստի նպատակային ֆունկցիայի տեղային և համապարփակ առավելագույն արժեքները համընկնում են, և լավագույն լուծումը միակն է:

Ընդհանուր դեպքում $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի մակարդակային գծերը էլիպսներ են: (6.2)-(6.3) սահմանափակումների համակարգի լուծումների բազմությունն ուռուցիկ բազմանիստ է (ենթադրում ենք, որ այն դատարկ չէ): Երկրաչափորեն խնդիրն այն է, որ պետք է գտնել $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի առավելագույն արժեքին համապատասխանող մակարդակային կորի մի կետ, որը պատկանի այդ բազմանիստին: Նկարի 6.1-ի վրա պատկերված են երեք հնարավոր դեպքերը.



Նկ. 6.1

Ինչպես տեսնում ենք, նպատակային ֆունկցիան իր առավելագույն արժեքը կարող է ընդունել բազմանկյան գագաթում, կողի վրա կամ ներքին կետում ($\bar{x}^*$-ը լավագույն լուծումն է):

Լագրանժի ֆունկցիան. Կուն-Թակերի պայմանները: Քառակուսային ծրագրման խնդրի պայմանները, երբ Q մատրիցը կիսաբացասական որոշված է, բավարարում են ՈՒՇ Կուն-Թակերի թեորեմի անհրաժեշտ և բավարար պայմաններին: (1)-(3) խնդրի համար Լագրանժի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$L(\bar{x},\bar{u}) = \bar{c}\bar{x} + 0{,}5\bar{x}Q\bar{x} + \bar{u}(\bar{b} - A\bar{x}) \qquad (6.4)$$

Կուն-Տակկերի պայմաններն են՝.

$$L'_{\bar{x}} = \bar{c} + Q\bar{x} - \bar{u}A \le 0 \qquad (6.5.1)$$

$$L'_{\bar{x}} \cdot \bar{x} = (\bar{c} + Q\bar{x} - \bar{u}A) \cdot \bar{x} = 0 \qquad (6.5.2)$$

$$\bar{x} \ge 0 \qquad (6.5.3) \qquad (6.5)$$

$$L'_{\bar{u}} = \bar{b} - A\bar{x} \ge 0 \qquad (6.5.4)$$

$$L'_{\bar{u}} \cdot u = (\bar{b} - A\bar{x}) \cdot \bar{u} = 0 \qquad (6.5.5)$$

$$\bar{u} \ge 0: \qquad (6.5.6)$$

Եթե (6.5.1), (6.5.4) համակարգում լավագույն լուծման համար ստացվել է խիստ անհավասարություն, ապա համապատասխան x_j և u_i փոփոխականները զրո են: (6.5.1) համակարգում խիստ անհավասարության դեպքում գումարվում է $\bar{v} > 0$ լրացուցիչ վեկտոր, իսկ (6.5.4) համակարգի անհավասարությունից հանվում է $\bar{w} > 0$ լրացուցիչ վեկտորը: Լրացուցիչ փոփոխականների վերաբերյալ Կուն-Թակերի թեորեմից հետևում է, որ եթե լավագույն լուծման դեպքում $\bar{v}_j > 0$, ապա (6.5.1) համակարգում անհավասարությունը խիստ է և դրան համապատասխանող x_j փոփոխականը (6.5.2) համակարգում հավասար է զրոյի: Եթե x_j փոփոխականի լավագույն արժեքը մեծ է զրոյից, ապա դրան համապատասխանող արտահայտությունը (6.5.1)-ում դառնում է հավասարում: Նույն դատողությամբ (6.5.5) և (6.5.6) համակարգերի համար համախատասխանորեն $\bar{w}_i > 0$ և $u_i = 0$, և (6.5.4) անհավասարությունը խիստ է: խոսքը պայմանների կոշտության և ոչ կոշտության մասին է:

Ներմուծելով լրացուցիչ ոչ բացասական փոփոխականներ (6.5.1) և (6.5.4)՝ անհավասարությունների համակարգը վերածվում է հավասարումների համակարգի.

$$\bar{c} + Qx - uA + \bar{v} = 0 \qquad (6.6.1)$$

$$\bar{b} - A\bar{x} - \bar{w} = 0 \qquad (6.6.2)$$

$$\bar{v}\bar{x} = 0 \qquad (6.6.3) \qquad (6.6)$$

$$\bar{w}\bar{u} = 0 \qquad (6.6.4)$$

$$\bar{x} \ge 0,\ \bar{u} \ge 0,\ \bar{v} \ge 0,\ \bar{w} \ge 0: \qquad (6.6.5)$$

(6.6) համակարգը բաղկացած է $n+m$ հավասարումներից և $2\cdot(n+m)$ փոփոխականներից: (6.6.3) պայմանից հետևում է, որ $2n$ քանակի x_j և v_j, փոփոխականներից n քանակությամբ փոփոխականներ պետք է հավասարվեն զրոյի և համանմանությամբ (6.6.4) պայմանից $2m$ փոփոխականներից (u_i և w_i) m քանակությամբ փոփոխականներ նույնպես հավասարվեն զրոյի: Հետևաբար, եթե լավագույն լուծում գոյություն ունի, ապա դա պետք է լինի (6.6) համակարգի հենքային լուծումներից որևէ մեկը: Հաշվի առնելով (6.6) սահմանափակումները՝ սիմպլեքս ալգորիթմը կարելի է կիրառել քառակուսային ծրագրման խնդրի լուծման համար:

Աջ մասում գտնվող $(-\bar{c})$ վեկտորի բաղադրիչները նշանի սահմանափակումների տեսանկյունից ազատ են. այդ անորոշությունից ազատվելու նպատակով գումարենք և հանենք մեկական ոչ բացասական $\bar{z}_1$ և $\bar{z}_2$ փոփոխականներ: Արդյունքում (6.6.1) հավասարումների համակարգի համար կստանանք

$$Q\bar{x}-\bar{u}A+\bar{v}+\bar{z}_1-\bar{z}_2=-\bar{c}:$$

Նման ձևով վարվենք (6.6.2) համակարգի հետ. հաշվի առնելով, որ $\bar{b}$ վեկտորը ոչ բացասական է, գումարենք $\bar{y}\geq 0$ փոփոխական վեկտորը

$$A\bar{x}+\bar{w}+\bar{y}=\bar{b}:$$

Հավասարումների (6.6) համակարգի վերջնական տեսքը կլինի.

$$\begin{cases} Q\bar{x}-\bar{u}A+\bar{v}+\bar{z}_1-\bar{z}_2=-\bar{c}, \\ A\bar{x}+\bar{w}+\bar{y} \qquad\qquad =\bar{b}, \\ \bar{v}\cdot\bar{x} \qquad\qquad\qquad\quad =0, \\ \bar{w}\cdot\bar{u} \qquad\qquad\qquad\quad =0, \\ \bar{x}\geq 0,\bar{u}\geq 0,\bar{v}\geq 0,\bar{w}\geq 0,\bar{z}_1\geq 0,\bar{z}_2\geq 0,\bar{y}\geq 0: \end{cases} \tag{6.7}$$

(6.7) համակարգում $(-\bar{c})$ վեկտորի որոշ բաղադրիչների բացասական լինելու դեպքում համապատասխան հավասարումների աջ և ձախ մասերը պետք է բազմապատկել (-1)-ով, որպեսզի աջ մասում ունենանք միայն ոչ բացասական ազատ գործակիցներ: Հիշեցնենք, որ նման ձևով վարվում էինք նաև սիմպլեքս ալգորիթմը սկսելիս, երբ հենք ստանալու նպատակով ներմուծում էինք արհեստական փոփոխականներ (մեկական ամեն մի հավասարման համար): Մեր խնդրի համար ներմուծելով $\bar{z}_1\geq 0$, $\bar{z}_2\geq 0$ և $\bar{y}\geq 0$ արհեստական փոփոխականներ՝ կարող ենք կառուցել այդ փոփոխականներին համապատասխանող վեկտոր-սյուներից կազմված սկզբնական հենք, որի մեջ կլինեն $n+m$ վեկտորներ, n

քանակությամբ z_{j_1} ու z_{j_2} և m քանակությամբ y_i : Միջանկյալ օպտի-մացման խնդիրը ձևակերպելու համար ավելացնենք $-\sum_{i=1}^{n} y_i \to \max$ մտացածին նպատակային ֆունկցիան: Կառուցենք սիմպլեքս աղյուսակը և արտաքսելով y_i արհեստական փոփոխականները, միաժամանակ հետևելով, որ զրոյի հավասարվեն $\bar{u}$, $\bar{v}$ և $\bar{w}$ փոփոխականները՝ կատարենք սիմպլեքս քայլ: Անցնում ենք նոր հենքի, որի մեջ չպետք է մտնի վերը նշված $\bar{y}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ և $\bar{w}$ փոփոխականներից ոչ մեկը: Եթե մեզ հաջողվի $\sum y_i$-ը հավասարեցնել զրոյի, ապա պարտադիր չէ, որ ստացված լուծումը բավարարի (6.7) համակարգին: Դրան կխանգարի որոշ z_{j_1} և z_{j_2} արհեստական փոփոխականների առկայությունը: Հիշենք, որ լուծման մեջ պետք է լինեն $n+m$ փոփոխականներ, այդ թվում ոչ ավելի, քան n քանակությամբ x_j փոփոխականներ: Ստացված լուծումը բավարարում է (6.8) պայմաններին.

$$
\begin{aligned}
&\sum_j z_{j_1} + \sum_j z_{j_2} > 0, && (6.8.1) & \\
&\overline{vx} = 0, && (6.8.2) & (6.8)\\
&\overline{u}\overline{w} = 0, && (6.8.3) & \\
&\bar{x} \ge 0,\ \bar{u} \ge 0,\ \bar{v} \ge 0,\ \bar{w} \ge 0: && (6.8.4) &
\end{aligned}
$$

Եթե սիմպլեքս աղյուսակից արտաքսենք բոլոր y_i փոփոխականները և այն z_{j_i} $(i = 1,2)$, որոնք չեն մտնում հենքային լուծման մեջ, ապա մնացած փոփոխականները կկազմեն են $n+m$ հավասարումներից բաղկացած հետևյալ համակարգը.

$$Q\bar{x} - \bar{u}A + \bar{v} + E\bar{z} = -\bar{c}\ ,\quad A\bar{x} + \bar{w} = \bar{b}\ ,$$

որտեղ E-ն այն մատրիցն է, որը z_{j_i} փոփոխականներին է համապատասխանում ընթացիկ լուծման մեջ:

Այժմ մնացել է լուծել հետևյալ ԳԾ խնդիրը.

$$-\sum_j z_j \to \max\ ,$$

$$
\begin{cases}
Q\bar{x} - \bar{u}A + \bar{v} + W = -\bar{c}, \\
A\bar{x} + \bar{w} = \bar{b}, \\
\bar{v} \cdot \bar{x} = 0, \\
\bar{w} \cdot \bar{u} = 0, \\
\bar{x} \ge 0, \bar{u} \ge 0, \bar{v} \ge 0, \bar{w} \ge 0, \bar{z} \ge 0,
\end{cases}
\qquad (6.9)
$$

և ազատվել z_{j_i} $(i=1,2)$ արհեստական փոփոխականներից՝ պահպանելով (6.8.2)-(6.8.3) պայմանները:

Այդ դեպքում կունենանք (6.9) պայմաններին բավարարող հենքային լուծում: Ստացված լուծումն ըստ Կուն-Թակերի թեորեմի կլինի քառակուսային ծրագրման խնդրի լավագույն լուծումը: Խնդրի լուծման ընթացքում պետք է հետևել հետևյալ երկու կանոններին՝

1. եթե x_k փոփոխականը հենքային լուծում է, ապա $\bar{v}_k$ փոփոխականը հենքային լուծմանը չի պատկանում, և հակառակը.

2. եթե u_i փոփոխականը մտնում է հենքային լուծման մեջ, ապա $\bar{w}_k$ փոփոխականը հենքային լուծմանը չի պատկանում. և հակառակը:

Քառակուսային ծրագրման խնդրի լուծման օրինակ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2\to\max$$

$$-x_1+x_2+x_3=1,$$
$$x_1+x_4=3,$$
$$xj\ge 0,\, j=1,2,\ldots,4:$$

z -ֆունկցիան՝ $(8x_1+6x_2)$ գծային և $(-2x_1^2-x_2^2)$ բացասական որոշված քառակուսային ֆունկցիաների գումարն է, ուստի այն գոգավոր է: Այս խնդրի համար Լագրանժի ֆունկցիան կլինի՝

$$L(\bar{x},\bar{\lambda})=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2+\lambda_1(1+x_1-x_2-x_3)+\lambda_2(3-x_1-x_4):$$

Օպտիմացման անհրաժեշտ և բավարար պայմաններն են.

$$L(\bar{x},\bar{u})=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2+u_1(1+x_1-x_2-x_3)+u_2(3-x_1-x_4)$$

$$L'_{x_1}=8-4x_1+u_1-u_2\le 0,\; L'_{x_2}=6-2x_2-u_1\le 0,$$

$$L'_{x_3}=-u_1\le 0,\; L'_{x_4}=-u_2\le 0,$$

$$L'_{u_1}=1+x_1-x_2-x_3=0,\; L'_{u_2}=3-x_1-x_4=0,$$

$$L'_{x_1}\cdot x_1=0,\; L'_{x_2}\cdot x_2=0,$$
$$L'_{x_3}\cdot x_3=0,\; L'_{x_4}\cdot x_4=0,$$

$$x_j\ge 0,\; j=1,2,3,4:$$

Ներմուծենք $v_i\ge 0$, $i=1,2,3,4$ լրացուցիչ փոփոխականներ և անհավասարությունները դարձնենք հավասարումներ: Հիշեցնենք նաև, որ Լագրանժի բազմապատկիչների վրա մեր դեպքում նշանի սահմանափակում չի դրվում, որովհետև (2)-ը տրված է հավասարումներով: Հեշտ է նկատել, որ $\bar{w} \geq 0$ և $\bar{y} \geq 0$, $\bar{z}_2 \geq 0$ փոփոխականների ներմուծման կարիքը նույնպես չկա:

Փնտրվող օպտիմալ լուծումը կլինի հետևյալ պայմաններով որոշվող խնդրի հենքային լուծումը.

$$\begin{cases} 8-4x_1+u_1-u_2+v_1=0 \\ 6-2x_2-u_1+v_2=0 \\ -u_1+v_3=0 \\ -u_2+v_4=0 \\ -x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_4=3 \\ x_1\cdot v_1=x_2\cdot v_2=x_3\cdot v_3=x_4\cdot v_4=0 \\ x_j\geq 0, v_j\geq 0, j=1,2,3,4, \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0, \\ v_1\geq 0, v_2\geq 0, v_3\geq 0, v_4\geq 0, \\ x_1v_1=0, x_2v_2=0, x_3v_3=0, x_4v_4=0: \end{cases}$$

Քանի որ u_1 և u_2 փոփոխականները նշանի սահմանափակում չունեն, ապա դրանք արտաքսենք համակարգից՝ տեղադրելով $u_1=u_3$, $u_2=u_4$: Պարզեցումից հետո սիմպլեքս ալգորիթմի եղանակով լուծում ենք հետևյալ խնդիրը.

$$-z_1-z_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1+0\cdot x_2-0\cdot x_3+0\cdot x_4-v_1+0\cdot v_2-v_3+v_4+z_1+0\cdot z_2=8 \\ 2x_2 \qquad -v_2+v_3+ \qquad z_2=6 \\ -x_1+x_2+x_3 \qquad =1 \\ x_1 \qquad +x_4 \qquad =3 \\ x_j\geq 0, v_j\geq 0,\ j=1,2,3,4,\ y_i\geq 0,\ i=1,2: \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $\bar{a}^3, \bar{a}^4, \bar{a}^9, \bar{a}^{10}$ վեկտոր սյունակները կարելի է ընտրել որպես սկզբնական հենք, հաշվի առնելով նաև, որ $v_i x_i = 0$, $i=1,2,\ldots,4$: Դա նշանակում է, որ v_i և x_i փոփոխականները միաժամանակ չեն կարող պատկանել հենքային լուծմանը.

հ	$c_հ$	$\bar{a}^0$	$\bar{a}^1$	$\bar{a}^2$	$\bar{a}^3$	$\bar{a}^4$	$\bar{a}^5$	$\bar{a}^6$	$\bar{a}^7$	$\bar{a}^8$	$\bar{a}^9$	$\bar{a}^{10}$
$\bar{a}^3$	0	1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{a}^4$	0	3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{a}^9$	-1	8	4	0	0	0	-1	0	-1	1	1	0
$\bar{a}^{10}$	-1	6	0	2	0	0	0	-1	1	0	0	1
Δ_j			-4	-2	0	0	1	1	0	-1	0	0

աղյուսակ 6.1

հ	$c_{\text{հ}}$	$\bar a^0$	$\bar a^1$	$\bar a^2$	$\bar a^3$	$\bar a^4$	$\bar a^5$	$\bar a^6$	$\bar a^7$	$\bar a^8$	$\bar a^9$	$\bar a^{10}$
$\bar a^3$	0	3	0	1	1	0	-1/4	0	-1/4	1/4	1/4	0
$\bar a^4$	0	1	0	0	0	1	1/4	0	1/4	-1/4	-1/4	0
$\bar a^1$	0	2	1	0	0	0	-1/4	0	-1/4	1/4	1/4	0
$\bar a^{10}$	-1	6	0	2	0	0	0	-1	1	0	0	1
Δ_j			0	-2	0	0	0	1	-1	0	0	-1

աղյուսակ 6.2

հ	$c_{\text{հ}}$	$\bar a^0$	$\bar a^1$	$\bar a^2$	$\bar a^3$	$\bar a^4$	$\bar a^5$	$\bar a^6$	$\bar a^7$	$\bar a^8$	$\bar a^9$	$\bar a^{10}$
$\bar a^3$	0	0	0	0	1	0	-1/4	1/2	-3/4	1/4	1/4	-1/2
$\bar a^4$	0	1	0	0	0	1	1/2	0	1/4	-1/4	-1/4	0
$\bar a^1$	0	2	1	0	0	0	-1/4	0	-1/4	1/4	1/4	0
$\bar a^2$	0	3	0	1	0	0	0	-1/2	1/2	0	0	1/2

աղյուսակ 6.3

Այսպիսով, մեր խնդրի լավագույն լուծումն է $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 1$, և նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը՝ $f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = 17$:

§ 7. Առաջադրանքներ

Ստուգել, թե տրված կետի համար որ ուղղությունն է թույլատրելի, հարմար կամ երկուսն էլ միասին.

1) $-x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 6x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1^2 + x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$\bar x = (1,1)$, $\bar s_1 = (0,-1)$, $\bar s_2 = (-1,1)$, $\bar s_3 = (3,2)$,

2) $-x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 + 8x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1^2 - 4x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

ա) $\bar{x} = (1,0)$, $\bar{s}_1 = (-1,0)$, $\bar{s}_2 = (1,0)$, $\bar{s}_3 = (0,1)$,

բ) $\bar{x} = (0,2)$, $\bar{s}_1 = (-1,0)$, $\bar{s}_2 = (1,-2)$, $\bar{s}_3 = (1,3)$,

գ) $\bar{x} = (3,4)$, $\bar{s}_1 = (-1,0)$, $\bar{s}_2 = (-1,-1)$, $\bar{s}_3 = (1,5)$:

Լուծել քառակուսային ծրագրման հետևյալ խնդիրները.

1) $3x_1 - 2x_2 - (1/2)x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

2) $4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - (3/2)x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

3) $6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - (1/2)x_2^2 - x_1x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

4) $4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0: \end{cases}$$

VII. ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Ուղիղ ճանապարհով գնացող կաղը
առաջ կանցնի ճանապարհից
շեղված վազորդից:
Ֆ.Բեկոն

§ 1. Դինամիկ ծրագրման տարրերը - 1

Դինամիկ ծրագրումը (ԴԾ) մաթեմատիկական մի հնարք է՝ մշակված որոշակի տիպի օպտիմացման խնդիրների լուծման համար: Այն հնարավորություն է տալիս բարդ մաթեմատիկական խնդրի լուծումը հանգեցնել մի շարք ավելի պարզ խնդիրների հաջորդական լուծմանը:

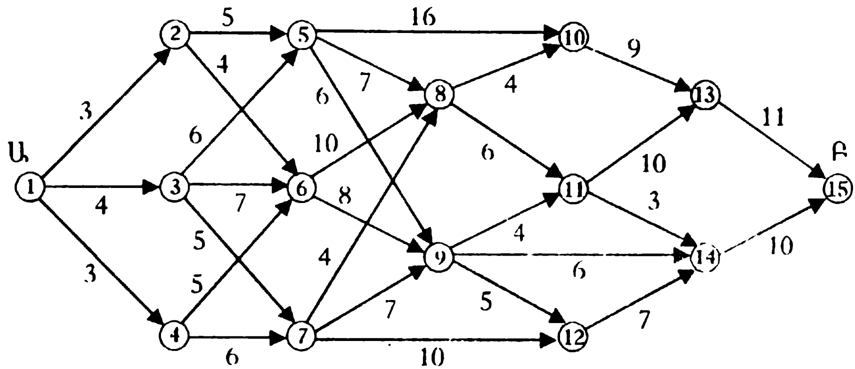
Մաթեմատիկական ծրագրման գծային, ոչ գծային, ամբողջաթիվ, ինչպես նաև ցանցային խնդիրների լուծման համար գոյություն ունեն չափորինակ մոտեցումներ: Լավագույն լուծումը գտնելու համար կարելի է օգտագործել սիմպլեքս ալգորիթմը, գրադիենտի եղանակը, նշումների եղանակը և այլն: ԴԾ խնդիրների համար նմանատիպ չափորինակ մոտեցումներ գոյություն չունեն:

ԴԾ-ն ունի որոշակի առանձնահատկություններ, որոնցից առաջինն այն է, որ խնդրի լուծումը իրականացվում է փուլ առ փուլ, ընդ որում, յուրաքանչյուր փուլում առկա է միայն մեկ կառավարվող փոփոխական: Երկրորդն այն է, որ օգտագործվում են անդրադարձ հավասարումներ, որոնց միջոցով փուլերը կապվում են միմյանց հետ, ընդ որում վերջին փուլում գտնվում է խնդրի լավագույն լուծումը: Եվ երրորդ, որ կիրառվում է ընկղմման սկզբունքը, երբ խնդրի լուծման համար լուծվում են համանման ավելի պարզ խնդիրներ:

ԴԾ ոչ սովորական եզրերը և դրույթները որոշակի դժվարություններ են առաջացնում դրանք յուրացնելիս և օգտագործելիս: Այդ դժվարությունները հաղթահարելու նպատակով ծանոթանանք երկու պարզագույն խնդիրների:

Օրինակ 1: Ամենաերկար երթուղու խնդիր: Ենթադրենք ուսանող զբոսաշրջիկները որոշել են ամառային արձակուրդին Ա վայրից ուղևորվել Բ վայր: Քարտեզն ուսումնասիրելիս նրանք նկատում են, որ կան Ա վայրից Բ վայր տանող բազմաթիվ ուղիներ, որոնք անցնում են մի շարք բնակավայրերով: Թղթի վրա նրանք գծում են Ա-ից Բ տանող բոլոր երթուղիներն ու բնակավայրերը և ստանում նկ.

7.1-ում պատկերված օրգրաֆը, որտեղ համարակալված գագաթները՝ բնակավայրերն են, իսկ աղեղները պատկերում են այդ բնակավայրերը միացնող երթուղիները:



Նկ. 7.1

Աղեղների մոտ գրված թվերը համապատասխան բնակավայրերի միջև եղած հեռավորություններն են: Օրինակ, Ա-ից մինչև 2-րդ բնակավայր 3 կմ է, Ա-ից մինչև 3-րդ բնակավայր՝ 4 կմ, և այլն: Քարտեզն ուսումնասիրելիս ուսանողները նաև նկատում են, որ կան Ա-ից Բ տանող բազմազան ուղիներ՝ կարճ և երկար: Ցանկանալով առավելագույնս ըմբոշխնել ճամփորդության վայելքները՝ նրանք որոշում են ընտրել ամենաերկար երթուղին: Հետևաբար, պետք է լուծվի Ա-ից Բ տանող ամենաերկար երթուղին գտնելու խնդիրը: Նշված օրգրաֆում Ա-ից Բ տանող ամենակարճ երթուղին գտնելու խնդիրն առաջարկում ենք ընթերցողին որպես վարժություն: Եթե բնակավայրերի քանակը շատ չէ, ապա խնդրի լուծումը կարելի է գտնել հատարկման եղանակով՝ թվարկելով Ա-ից Բ տանող բոլոր հնարավոր երթուղիները և դրանցից ընտրելով ամենաերկարը: Բայց երբ գագաթների և աղեղների քանակը շատ է՝ մի քանի հարյուր, կամ նույնիսկ մի քանի հազար, ապա պարզ է, որ նշված եղանակը պիտանի չէ:

Մենք կենթադրենք, որ ուսանողները մեկ օրում անցնում են միայն մեկ բնակավայրից մինչև հաջորդը, գիշերում այնտեղ և առավոտյան շարունակում ճանապարհը: Հասկանալի է, որ առավոտյան, հերթական բնակավայրից մեկնելուց առաջ, նրանք պետք է որոշած լինեն՝ ու՞ր պետք է գնան: Հիշենք նաև, որ նրանց նպատակն է ընտրել ամենաերկար երթուղին: Պարզ է, որ առաջին օրը նրանք կարող են շարժվել դեպի 2-րդ, 3-րդ կամ 4-րդ բնակավայրերից որևէ մեկը: Հաջորդ օրը, կախված նրանից, թե որ բնակավայրում են գիշերել, նրանք կարող են շարժվել դեպի որևէ հարևան բնակավայր. եթե գիշերել են 2-րդ բնակավայրում, ապա կարող են շարժվել դեպի 5-րդ կամ 6-րդ բնակավայր, իսկ եթե գիշերել են 3-րդում՝ դեպի 5-րդ, 6-րդ և 7-րդ բնակավայրեր և այլն: Երբ ճամփորդության ընթացքում նրանք գիշերում են որոշակի բնակավայրում. համարենք, որ ուսանողները գտնվում են բնակավայրի համարին համապատասխանող վիճակում: Գտնվելով որոշակի վիճակում՝ նրանք որոշում են կայացնում՝ ասենք՝ գտնում են լուծումը, թե դեպի որ բնակավայր գնան: Դեռևս չգիտենք, թե ինչպես են հանգում այդ որոշմանը (գուցե բարի կախարդն է հուշում կամ մասնակիցներից մեկի ներքին ձայնը): Բայց եթե նրանք Ա-ից Բ ամենաերկար երթուղին ընտրելու նպատակ ունեն և գտնվում են որևէ i -րդ բնակավայրում, ապա պարզ է, որ i -ից Բ ընտրվելիք *երթուղին և պետք է լինի ամենաերկարը*:

Խնդրի դրվածքից ելնելով՝ լավագույն երթուղի ասելով հասկանում ենք Ա-ից մինչև Բ տանող ամենաերկար երթուղին:

Մենք հանգեցինք ԴԾ *օպտիմացման սկզբունքի* առաջին տարբերակին.

Լավագույն երթուղու ցանկացած ենթաերթուղի լավագույնն է:

Խնդրի լուծմանը մենք կհանգենք՝ փուլ առ փուլ դիտարկելով որոշակի գագաթներ (վիճակներ) և տրված վիճակին համապատասխան որոշում կայացնելով (լուծումը գտնելով)՝ նշելով այն աղեղը, որով պետք է շարժվեն: Ասենք, որ s գագաթը պատկանում է n -րդ փուլին, եթե Ա-ից s գոյություն ունի n աղեղ պարունակող երթուղի, և գոյություն չունի n -ից ավել աղեղ պարունակող երթուղի:

Առաջարկվող ալգորիթմը հերթական $n=1,2,\ldots$ արժեքների համար դիտարկում է n -րդ փուլին պատկանող բոլոր գագաթները (վիճակները) և դրանցից յուրաքանչյուրի համար որոշում Ա-ից այդ գագաթը տանող ամենաերկար երթուղու երկարությունը: Ալգորիթմը նկարագրելիս կօգտագործվի նաև վարք գաղափարը: Մեր դեպքում տրված վիճակում վարքը Ա-ից մինչև այդ վիճակ որևէ երթուղու ընտրությունն է: Լավագույն վարքը ամենաերկար երթուղու ընտրությունն է:

Այսպիսով, ուսանող-զբոսաշրջիկների խնդիրը լուծելու համար պետք է որոշվի վիճակից վիճակ անցնելու հաջորդականությունը: Ընտրված վիճակների հաջորդականությունը պետք է կազմի փնտրվող ամենաերկար երթուղին, որը սկզբնական Ա վիճակից տանում է դեպի վերջնական Բ վիճակ: Այժմ տեսնենք, թե դա ինչպես կարելի է իրականացնել:

Ալգորիթմը նկարագրելու համար մեզ պետք են հետևյալ նշանակումները: $f_n(i)$-ով նշանակենք սկզբնական գագաթից (վիճակից) n-րդ փուլին պատկանող i գագաթը (վիճակը) ամենաերկար երթուղու երկարությունը $i = 1,2,\ldots,N$, $n = 1,2,\ldots,L$ որտեղ N-ը վիճակների (գագաթների) քանակն է օրգրաֆում, իսկ L-ը՝ փուլերի թիվն է: Նկար 7.1-ում $N = 15$, $L = 6$: l_{ij}-ով նշանակենք (i, j), աղեղի երկարությունը (նկատենք, որ օրգրաֆը օրցիկլ չի պարունակում, և գագաթները համարակալված են այնպես, որ եթե (i, j)-ն աղեղ է, ապա $i < j$):

Պարզ է, որ

$$f_0(1) = 0, \; f_1(2) = f_0(1) + l_{12} = 0 + 3 = 3,$$

$$f_1(3) = f_0(1) + l_{13} = 0 + 7 = 7, \; f_1(4) = f_0(1) + l_{14} = 0 + 5 = 5:$$

Առաջին փուլի գագաթների համար հաշվարկներն ավարտված են: Սկզբնական գագաթից երկրորդ փուլին պատկանող որևէ գագաթ տանող երթուղու երկարությունը հաշվելիս կօգտվենք առաջին փուլի հաշվարկներից: Այսպես, օրինակ 5 գագաթ տանող երկու երթուղի կա, որոնց երկարությունը

$$f_2^{(1)}(5) = f_1(2) + l_{25}, \; f_2^{(2)}(5) = f_1(3) + l_{35},$$

այդ երկու հնարավորություններից պետք է ընտրել ամենաերկար երթուղին՝

$$f_2(5) = \max[f_2^{(1)}(5); f_2^{(2)}(5)] = \max[3 + 5; 7 + 3] = 10:$$

Ստացված 10 թիվը, որը սկզբնական գագաթից դեպի 5 գագաթ տանող ամենաերկար ուղու մեծությունն է, գրում ենք 5 գագաթի շրջանակի մոտ (շրջանակի մեջ գագաթի համարն է): Գտնենք $f_2(6)$-ը:

$$f_2^1(6) = f_1(2) + l_{26} = 7, f_2^2(6) = f_1(3) + l_{36} = 11,$$

$$f_2^3(6) = f_1(4) + l_{46} = 8,$$

$$f_2(6) = \max\{f_2^1(6); f_2^2(6); f_2^3(6)\} = \max\{7;11;8\} = 11:$$

Նման եղանակով կստանանք

$$f_2^1(7) = f_1(3) + l_{37} = 7, f_2^2(7) = f_1(4) + l_{47} = 9,$$

$$f_2(7) = \max\{f_2^1(7); f_2^2(7)\} = \max\{7;9\} = 9:$$

2-րդ փուլի հաշվարկներն ավարտված են: Անցնենք 3-րդ փուլի հաշվարկներին: Այս փուլին պատկանում են 8 և 9 գագաթները, հետևաբար՝

$$f_3(8) = \max[f_3^{(1)}(2) = f_2(5) + l_{58}, f_3^{(2)}(8) = f_2(6) + l_{68}, f_3^{(3)}(8) = \\ = f_2(7) + l_{78}] = \max[10 + 7, 11 + 10, 9 + 4] = 21$$

$$f_3(9) = \max[f_3^{(1)}(9) = f_2(5) + l_{59}, f_3^{(2)}(9) = f_2(6) + l_{69}, f_3^{(3)}(9) = \\ = f_2(7) + l_{79}] = \max[10 + 6, 11 + 8, 9 + 7] = 19$$

Գրենք ԴԾ հաշվարկների անդրադարձ հավասարումը n-րդ փուլից $(n+1)$-րդ փուլ անցնելու համար

$$f_{n+1}(j) = \max_{i \in B(j)} [f_n(i) + l_{ij}]:$$

Այստեղ j-ն $(n+1)$-րդ փուլի գագաթ է, $B(j)$-ն նախորդ փուլերի այն i գագաթների բազմությունն է, որոնց համար (i, j)-ն աղեղ է: Շարունակենք հաշվարկները.

$$f_4(10) = \max[f_4^1(10)] = f_3(8) + l_{810} = 21 + 4 = 25$$

$$f_4(11) = \max[f_4^{(1)}(11), f_4^{(2)}(11)] = \max[f_3(8) + l_{811}, f_3(9) + l_{911}] = \\ = [21 + 6, 19 + 4] = 27$$

$$f_4(12) = f_3(9) + l_{912} = 19 + 5 = 24$$

$$f_5(13) = \max[f_5^{(1)}(13), f_5^{(2)}(13)] = \max[f_4(10) + l_{1013}, f_4(11) + l_{1113}] = \\ = \max[25 + 9, 27 + 10] = 37$$

$$f_5(14) = \max[f_5^{(1)}(14), f_5^{(2)}(14)] = \\ = \max[f_4(11) + l_{1113}, f_4(12) + l_{1214}] = [31, 32] = 32$$

Վերջապես, հաշվենք ուսանող-զբոսաշրջիկների խնդրի նպատակը

$$f_6(15) = \max[f_5(13) + l_{1315}, f_5(14) + l_{1415}] = \\ = \max[37 + 11, 32 + 14] = 48$$

Այսպիսով, փնտրվող երթուղու երկարությունը 48 կմ է:

Մեզ մնաց գտնել բուն երթուղին՝ ամենաերկար ճանապարհին գտնվող գագաթները: Դրա համար վարվում ենք հետևյալ կերպ: Գտած 48 թվից հանում ենք կից գագաթը միացնող աղեղի երկարությունը և տարբերությունը համեմատում շրջանակի մոտ գրված թվի հետ: Եթե այդ երկու թվերը համընկնում են, ապա տվյալ գագաթը պատկանում է ամենաերկար երթուղուն: Այդպես շարժվելով հակառակ ուղղությամբ՝ կհասնենք սկզբնական գագաթին և կգտնենք փնտրվող լավագույն երթուղին: Ուսանող-զբոսաշրջիկների խնդրի համար այն հետևյալն է՝ [1,3,6,8,11,13,15]:

Մենք ծանոթացանք ԴԾ եղանակի ևս մի առանձնահատկությանը: Յուրաքանչյուր գագաթի համար լուծում ենք օպտիմացման խնդիր և վերջում ստանում ենք հիմնական խնդրի լուծումը:

Օրինակ 2: Ներդրումների բաշխման խնդիր: Ձեռնարկության ղեկավարությունն ուսումնասիրում է երեք մասնաճյուղերի վերակառուցման խնդիրը: Այդ նպատակի համար նախատեսված է 6 մլն դրամ: Յուրաքանչյուր մասնաճյուղի զարգացման տարբերակ բնութագրվում է c_i ծախսով և r_i եկամտով $i = 1,2,3$ (տե՛ս, աղյուսակ 7.1):

Նախագծերի տարբերակներ	Ձեռնարկություն					
	մասնաճյուղ 1		մասնաճյուղ 2		մասնաճյուղ 3	
	c_1	r_1	c_2	r_2	c_3	r_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	6	3	10	1	5
3	2	8	4	11	-	-
4	-	-	5	14	-	-

Աղյուսակ 7.1

Առաջին տողի 0-ական ծախսերը նշանակում են, որ մասնաճյուղում վերակառուցում չի նախատեսված: Խնդիրն այն է, որ ղեկավարությունը պետք է որոշի, թե յուրաքանչյուր մասնաճյուղի համար ինչքան ներդրում կատարվի, որպեսզի 6 մլն դրամի սահմաններում ստանա առավելագույն եկամուտ:

Կառուցենք վերը նկարագրված ներդրումների բաշխման խնդրի օրգրաֆը և ցույց տանք, որ առավելագույն եկամտի խնդիրը բերվում է ամենաերկար ուղին գտնելու համարժեք խնդրին:

Նախ՝ ներդրումների բաշխման խնդիրը ներկայացնենք որոշումների կայացման բազմափուլ գործընթացի տեսքով: Այս խնդրի համար ստեղծում ենք մտացածին փուլեր: Առաջին փուլում դիտարկվում է միայն մեկ մասնաճյուղ, օրինակ՝ 1-ը: Երկրորդ փուլում դիտարկվում է երկու մասնաճյուղ, օրինակ՝ 1-ը և 2-ը: Հաջորդ փուլում (մեր օրինակի համար վերջին փուլում) դիտարկվում են 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերը միասին: Աղեղի երկարությունը թույլատրելի նախագծերի իրականացումից սպասվելիք r_i եկամտի մեծությունն է:

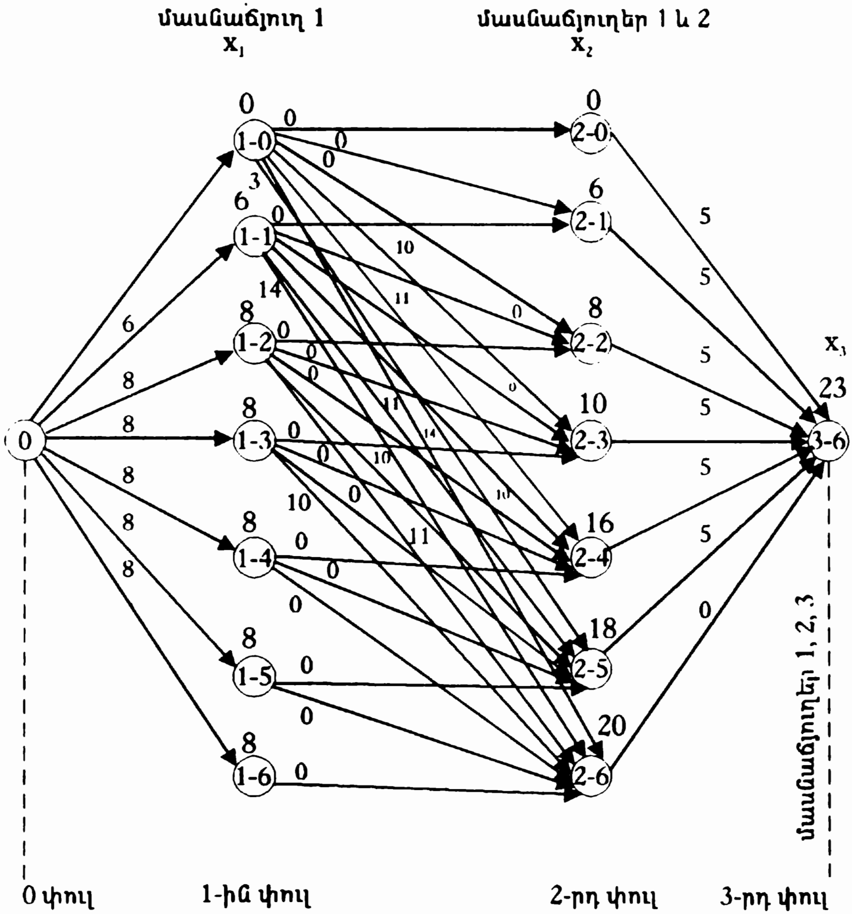
Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

x_1 - 1-ին փուլում հատկացված ներդրման քանակն է

x_2 - 1-ին և 2-րդ փուլերում հատկացված ներդրման քանակն է

x_3 - 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերին հատկացված ամբողջ ներդրումն է՝ $x_3 = 6$:

Նշենք, որ x_1 և x_2-ը ամբողջ թվեր են և ընդունում են 0,1,...,6 արժեքներ: Ներդրումների բաշխման խնդրի օրգրաֆը բերված է նկար 7.2-ում:



Նկ. 7.2

x_1-ի ամեն մի արժեքի համապատասխանում են օրգրաֆի որոշակի գագաթ՝ (1-0),(1-1),...,(1-6) և եկամուտ՝ 0,6,8,...,8, որն արտահայտում է կապը 0 և 1-ին փուլերի միջև:

x_2-ին համապատասխանում են (2-0), (2-1),...,(2-6) գագաթները և դրանց համապատասխան եկամուտները: Վերջապես, $x_3 = 6$, և 3-րդ փուլում ունենք ընդամենը մեկ գագաթ: 3-րդ փուլում դիտարկվող աղեղների մոտ գրված են վիճակից վիճակ անցումից ստացվող առավելագույն եկամուտները:

Հիշեցնենք, որ x_2-ը 2-րդ փուլում բաշխվող ներդրման քանակն է, պայմանով, որ առաջին փուլում հատկացվել է x_1 գումար, և, հետևաբար $x_2 - x_1 \geq 0$ և կազմում է 2-րդ մասնաճյուղի հնարավոր հասանելիք ներդրման քանակը: Այդ անհավասարությունը թելադրում է օրգրաֆի կառուցվածքը: Այսպիսով, x_1, x_2, x_3-ի յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի համապատասխանում է որոշակի վիճակ (գագաթ), որը պատկանում է $i = 1, i = 2, i = 3$ փուլերից որևէ մեկին: $i = 0$ սկզբնական փուլը և զրո գագաթը դիտարկվում են հաշվարկները պարզեցնելու նպատակով:

Քննարկենք 2-րդ փուլի գագաթների և աղեղների բովանդակությունը: Սահմանման համաձայն $x_2 - x_1$ մեծությունը միայն 2-րդ փուլում բաշխված ներդրումներն են, և (x_1, x_2) աղեղը թույլատրելի է միայն այն նախագծերի համար, որոնց իրականացման ծախքը չի գերազանցում $x_2 - x_1$-ին: Այդ աղեղի երկարությունը նախագծերի r_2-ի առավելագույն արժեքն է: Այսպես, օրինակ, եթե $x_1 = 1$ և $x_2 = 5$, ապա 2-րդ փուլում բաշխված ներդրումը կկազմի $x_2 - x_1 = 4$, և թույլատրելի են առաջին 3 նախագծերը, քանի որ "3-րդ" նախագծի եկամուտը ամենամեծն է $(r_3 = 11)$, և աղեղին վերագրվում է 11 միավոր: 2-րդ փուլի (1,3) աղեղի համար $x_2 - x_1 = 2$, թույլատրելի նախագիծ չկա, աղեղի երկարությունը 0 է: $x_1 > x_2$ համապատասխան աղեղ գոյություն չունի, քանի որ վատագույն դեպքում x_2-ը կարող է հավասար լինել x_1-ին:

Դժվար չէ նկատել, որ յուրաքանչյուր աղեղ կապված է որևէ նախագծի հետ: Մեր նպատակը 0 փուլի 0 գագաթից $i = 3$ փուլի 6 գագաթ տանող ամենաերկար ուղին գտնելն է, որի երկարությունը առավելագույն եկամուտն է: x_1, x_2, x_3 փոփոխականների սահմանումից հետևում է, որ $i = 0$ փուլի "0" գագաթը $i = 3$ փուլի "6" գագաթին միացնող կամայական ուղին համապատասխանում է նախագծերի թույլատրելի համակցությանը: Դժվար չէ նկատել նաև, որ որոշ աղեղներ չեն ազդում լավագույն լուծում գտնելու վրա: Դրանք կարելի է չդիտարկել: Օրինակ, $i = 1$ և $i = 2$ փուլերի միջև (0,1) աղեղը կարելի է անտեսել, քանի որ $x_2 - x_1 = 1$ մլն դրամ ներդրումը 2-րդ փուլում ոչ մի եկամուտ չի բերում. այդ գումարը բավական չէ 2-րդ նախագծի իրականացման համար: Այդպիսի աղեղների անտեսումը զգալիորեն նվազեցնում է անհրաժեշտ հաշվարկների ծավալը:

Օրգրաֆը կառուցելուց հետո $i=0$ փուլի “0” գագաթից $i=3$ փուլի “6” գագաթի միջև պետք է գտնել ամենաերկար ուղին:

$f_i(x_i)$ -ով նշանակենք i փուլում x_i գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունը: Քանի որ $i=0$ -ն ելակետային փուլն է, ապա հեշտ է նկատել, որ մեր խնդիրը հանգեց վերը դիտարկված ամենաերկար երթուղու խնդրին: Այնուհետև կատարենք հաշվարկները ըստ փուլերի՝ ստացված վերջնական արդյունքները գրելով գագաթների շրջանակների վերին մասում:

Փուլ 1: $f_1(x_1)=f_0(0)+r_1(0,x_1)$, որտեղ $R_1(0,x_1)$-ը $(0,x_1)$ աղեղի երկարությունն է (եկամուտը): Կունենանք՝

$$f_1(0)=0+0=0,\ f_1(1)=0+6=6,\ f_1(2)=0+8=8,$$

$$f_1(3)=0+8=8,\ f_1(4)=0+8=8,\ f_1(5)=0+8=8,$$

$$f_1(6)=0+8=8:$$

Փուլ 2: Այս փուլում, ի տարբերություն նախորդի, հաշվարկում ենք 0-ից մինչև $x_2=0,1,2,3,4,5,6$ բոլոր գագաթներ տանող ամենաերկար ուղիները:

Նկատենք, որ մինչև x_2 գագաթ տանող ամենաերկար երթուղու մեծությունը հավասար է մինչև x_1 գագաթ ամենաերկար ուղու մեծությանը՝ գումարած (x_1,x_2) աղեղի երկարությունը և վերցված այդ գումարի մաքսիմումը՝ ըստ բոլոր թույլատրելի աղեղների: Ասվածը կարելի է արտահայտել մեզ հայտնի անդրադարձ հավասարման միջոցով.

$$f_2(x_2)=\max_{(x_1,x_2)}\{f_1(x_1)+r_2(x_1,x_2)\}:$$

Արդյունքում կունենանք՝

$$f_2(0)=0+0=0$$

$$f_2(1)=\max\{0+0,6+0\}=6$$

$$f_2(2)=\max\{0+0,6+0,8+0\}=8$$

$$f_2(3)=\max\{0+10,6+0,8+0,8+0\}=10$$

$$f_2(4)=\max\{0+11,6+10,8+0,8+0,8+0\}=16$$

$$f_2(5)=\max\{0+14,6+11,8+10,8+0,8+0,8+0\}=18$$

$$f_2(6)=\max\{0+14,6+14,8+11,8+10,8+0,8+0,8+0\}=20:$$

Ընդգրկված թվերը մինչև համապատասխան գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունն են: Այդ թվերը օգտագործվում են հաջորդ փուլում հաշվարկներ կատարելու համար:

Փուլ 3: Նախորդ փուլի նմանությամբ մինչև x_3 գագաթ տանող ամենաերկար ուղին որոշող արտահայտությունն է.

$$f_3(x_3) = \max_{(x_1,x_2)} \{f_2(x_2) + r_3(x_2,x_3)\}:$$

Հաշվարկի արդյունքում ստանում ենք

$$f_3(6) = \max(0+5,6+5,8+5,10+5,16+5,18+5,20+0) = 23:$$

Լավագույն ուղին (նախագծերի համակցությունը) գտնելու համար վերջին գագաթից ետ են շարժվում դեպի սկզբնական գագաթ՝ հիշելով համապատասխան գագաթների համարները: Լավագույն համակցությունը 1-ին մասնաճյուղի համար 3-րդ տարբերակն է, 2-րդի համար՝ 2-րդը, և 3-րդ-ի համար՝ նույնպես 2-րդ-ը: Սպասվելիք առավելագույն եկամուտը 23 մլն դրամ է:

§2. Դինամիկ ծրագրման տարրերը - 2

1. Ուսանող-գրսաշրջիկների և ներդրումների բաշխման խնդիրների լուծման դիտարկված եղանակը հնարավորություն է տալիս բացահայտել ԴԾ-ին բնորոշ հասկացություններ.

- երկու դեպքում էլ հանդիպեցինք վիճակ հասկացությանը, որը բնութագրվում է որոշակի փոփոխականների և պարամետրերի միջոցով,
- փուլից փուլ անցնելու համար թույլատրելի վարվելակերպի (լուծումների) տարբերակներից ընտրել միայն մեկը,
- որոշում կայացնելու արդյունքում կատարվում է անցում հաջորդ փուլին պատկանող մի նոր վիճակի,
- որևէ վիճակում գտնվելու նախապատմությունը չի ազդում ապագա որոշումների կայացման վրա,
- որոշումների կայացման նպատակը վիճակի փոփոխականներից կախված ինչ որ նպատակային ֆունկցիայի օպտիմացումն է:

Ընթերցողը պետք է ընդունի այս ոչ խիստ, ինչ-որ չափով անորոշ սահմանումներն ու պնդումները, որովհետև ԴԾ-ն ընդգրկում է ոչ միայն խիստ մաթեմատիկական ձևակերպումներ, այլև հետազոտողի փորձառությունը և բանականությանը չհակասող հնարամտություններ:

Ստորև փորձենք մանրամասնել ԴԾ-ի հիմնարար տարրերը՝ վիճակ, փուլ, վարվելակերպ, վարք հասկացությունները:

Վիճակ: Վիճակի սահմանման համար միօրինակ մոտեցում չկա: Դա ԴԾ-ի եղանակի՝ դժվարությամբ և նրբորեն սահմանվող հասկացություն է: Վիճակը պետք է նկարագրել այնպիսի փոփոխականների և պարամետրերի միջոցով ու այնպիսի մանրամասնությամբ, որ հնարավորություն ստեղծվի կատարելու ընթացիկ երկընտրանքային հաշվարկները և ունենալու դրանց գնահատականները՝ լավագույն վարվելակերպ գտնելու համար: Ըստ Թահայի, հետևյալ երկու հարցերի պատասխանները կարող են օգնել այդ հասկացության պարզաբանմանը.

1. Ինչպե՞ս է արտահայտվում կապը փուլերի միջև:

2. Ի՞նչ տեղեկատվություն է պետք, որպեսզի որևէ փուլում թույլատրելի որոշումը կայացվի՝ առանց ստուգելու նախորդ փուլերում ընդունված որոշումների թույլատրելիությունը:

Փուլ: Հաջորդ հիմնարար հասկացությունը որոշումների կայացման գործընթացի տրոհումն է փուլերի (քայլերի): Լինում են երջանիկ դեպքեր, երբ դրանք անմիջականորեն բխում են խնդրի դրվածքից: Օրինակ, փուլեր են օրերը, ամիսները կամ տարիները՝ տնտեսական բնույթի խնդիրների համար, արտադրանքի թողարկման հաջորդականությունը, որոշումների կայացման խնդրի տրոհումը ենթախնդիրների և այլն: Հաճախ փուլերը մտացածին են:

Փուլ և վիճակ հասկացությունները սերտորեն կապված են միմյանց հետ: Լինում են դեպքեր, երբ նմանատիպ վիճակների համակցության միջոցով կարելի է ստանալ փուլերը և դրանց հաջորդականությունը: Օրինակ, օրգրաֆի համար նմանատիպ վիճակներ են այն բոլոր s գագաթները, որոնց համար սկզբնական գագաթից s ամենաշատ աղեղներ պարունակող ուղու աղեղների քանակը k է, $k = 1,2,\ldots$:

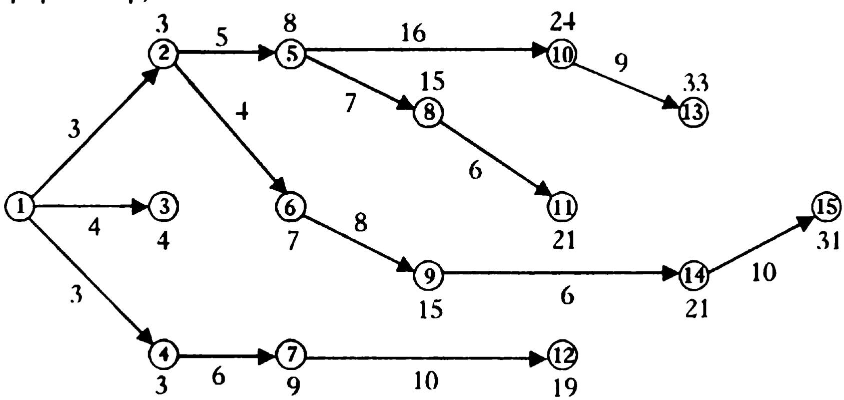
Շատ կարևոր է նաև փուլերի քանակը: Փուլը պետք է լինի այնպիսին, որ հնարավորություն տա օպտիմացումը կատարել պարզ եղանակով և խուսափել բարդ, երկար և հաճախ անիմաստ հաշվարկներից:

Վարվելակերպ, որոշում, վարք: Գտնվելով որոշակի վիճակում՝ հնարավորություն կա անցնելու տարբեր հարևան վիճակների, որոնք բնորոշում են վարվելակերպը: Տրված վիճակում որոշակի վարվելակերպի ընտրությունը կանվանենք այդ վիճակին համապատասխանող որոշման կայացում կամ լուծում:

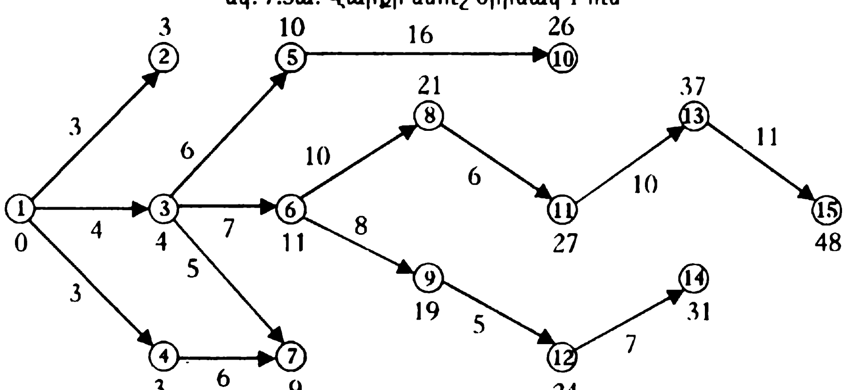
Նշենք, որ ամեն մի վիճակի համար ընդունվում է ընդամենը մեկ որոշում (վարվելակերպ):

Վարքը ամեն մի վիճակի համար ընտրված վարվելակերպերի բազմությունն է, եթե դրա արդյունքում ստանում ենք սկզբնական վիճակից դեպի դիտարկվող վիճակը տանող ուղի: Վարքի գնահատականը այդ ուղու երկարությունն է:

Տրված վիճակի համար լավագույնն այն վարքն է, որի համար ընտրված ուղին ամենաերկարն է: Վարքի այս սահմանումը օգտագործվում է այն խնդիրների համար, երբ որոշումների կայացման գործընթացը դիտարկվում է սկզբնականից (ացիկլիկ օրգրաֆում աղեղների սլաքների ուղղությամբ) դեպի վերջնական վիճակ (տե՛ս, նկար 7.3ա,բ):

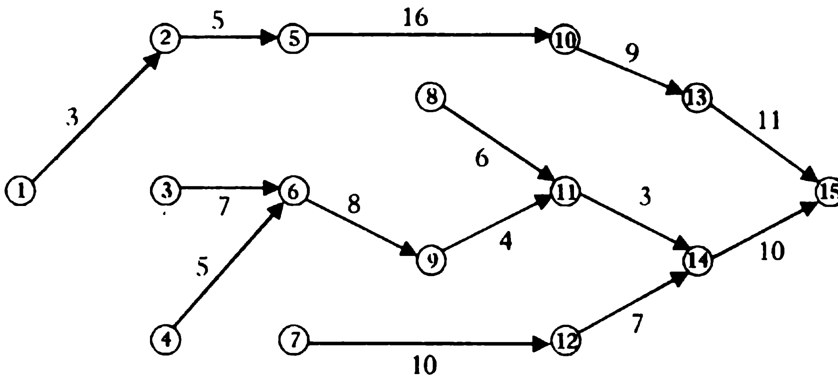


Նկ. 7.3ա. Վարքի նմուշ օրինակ 1-ում

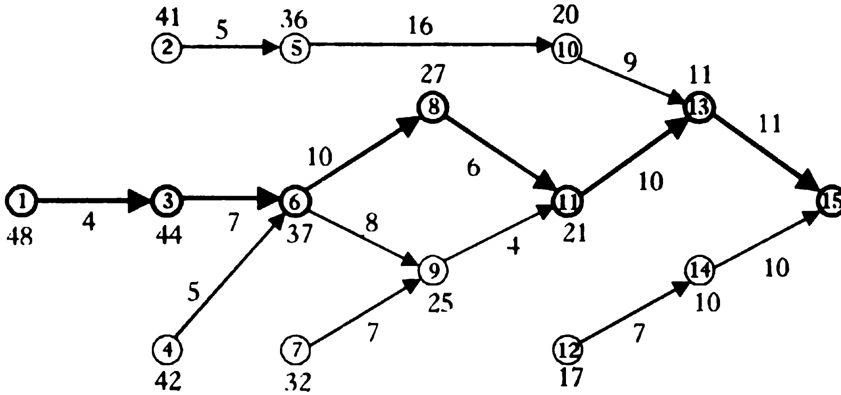


Նկ. 7.3բ. Լավագույն վարք օրինակ 1-ում:

Լայն կիրառություն ունի նաև վարքի մեկ այլ սահմանում: Վարքը ամեն մի վիճակի համար ընտրված վարվելակերպերի բազմությունն է, եթե դրա արդյունքում ստանում ենք տրված վիճակից դեպի վերջնական վիճակ տանող ուղի: Վարքի գնահատականը նորից այդ ուղու երկարությունն է (տե՛ս, նկար 7.4ա,բ):

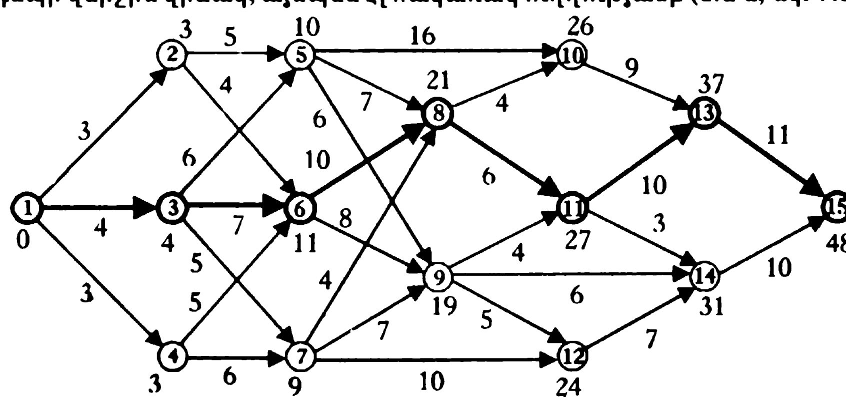


Նկ. 7.4ա. Վարքի նմուշ օրինակ 1-ում

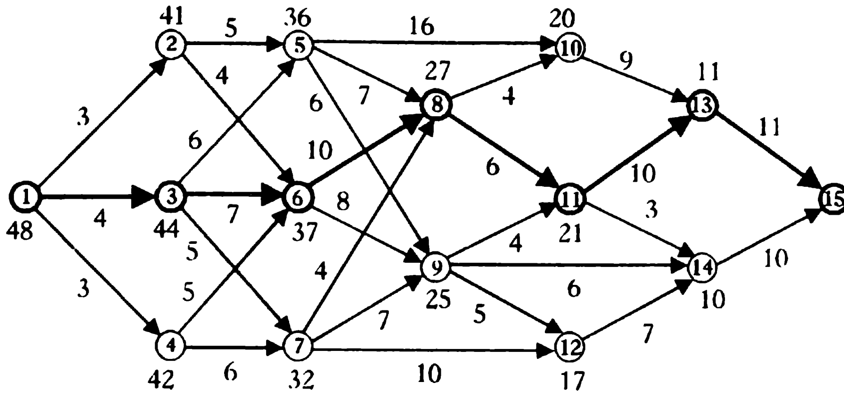


Նկ. 7.4բ. Լավագույն վարք օրինակ 1-ում

ԴԾ-ի առանձնահատկություններից մեկն էլ այն է, որ լավագույն վարք գտնելու հաշվարկը կարելի է կատարել ինչպես սկզբնականից դեպի վերջին վիճակ, այնպես էլ հակառակ ուղղությամբ (տե՛ս, Նկ. 7.5):



Նկ. 7.5ա



Նկ. 7.5բ

Օպտիմալության սկզբունքը (տարբերակ 2): Յուրաքանչյու վիճակի համար գոյություն ունի սկզբնական վիճակից այդ վիճակի բերող լավագույն վարք:

Օպտիմալության սկզբունքը (տարբերակ 3): Լավագույն վարք օժտված է այն հատկությամբ, որ ինչպիսին էլ լինի s վիճակ հաջորդ որոշումները պետք է կազմեն լավագույն վարքը s-ի համար

Օպտիմալության սկզբունքների մաթեմատիկակա ձևակերպումը հնարավորություն է տալիս ստանալ Բելման անդրադարձ հավասարումները:

Անդրադարձ հավասարումներ: Վերը դիտարկվա օպտիմացման խնդիրները նկարագրվում էին

$$l_j = \max_{i \in B(j)} (l_i + l_{ij}), \ j = 1,2,3,\ldots,N-1$$

անդրադարձ հավասարումների միջոցով: Այստեղ l_j-ն $j = 1,\ldots,N-$ սկզբնական վիճակից դեպի j վիճակ տանող ամենաերկար ուղ մեծությունն է, իսկ $B_j = \{i \,/\, (i,j) - \text{ն աղեղ է}\}$: Գործնականու հանդիպում են նմանատիպ անդրադարձ հավասարումնե Անդրադարձ հավասարումների կառուցվածքը սերտորեն կապված օպտիմացման սկզբունքների հետ:

Ստորև կառաջարկվի ալգորիթմ, որը, օգտագործելով անդրա դարձ հավասարումները, գտնում է օրգրաֆում ամենաերկար ուղի Մենք կենթադրենք, որ օրագրաֆը օրցիկլ չի պարունակում, աղեւ ների երկարությունները ոչ բացասական թվեր են, գագաթները հա մարակալված են $1,2,3,\ldots,N$ թվերով այնպես, որ եթե (i,j)-ն աղե է, ապա $i < j$: Ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում յուրաքանչյուր գագաթ ($j = 1,2,3,\dots,N$) նշվում է v_j թվով. այն փոխվում է ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում և ալգորիթմի ավարտի պահին 1-ից j գագաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունն է:

Հետադարձ մղման ալգորիթմ

Քայլ 1: Վերցնենք $v_1 = 0$, $v_k = -\infty$, $k = 2,3,\dots,N$, $j = 2$:

Քայլ 2: j գագաթ մտնող յուրաքանչյուր (i,j) աղեղի համար ընդունենք $v_j := \max\{v_i, v_i + l_{ij}\}$:

Քայլ 3: Եթե $j = N$, ալգորիթմն ավարտում է աշխատանքը: Հակառակ դեպքում վերցնենք j-ն հավասար $j+1$ և վերադառնանք քայլ 2-ին:

Դիտողություն: Երկրորդ քայլում v_j-ն փոխարինվում է $v_i + l_{ij}$-ով, եթե այն մեծ է v_j-ից: Ալգորիթմի այս քայլը կատարվում է գագաթ մտնող յուրաքանչյուր աղեղի համար, ընդ որում համեմատությունը կատարվում է ըստ j-ի աճող համարների: Ալգորիթմի միջոցով գտնում ենք ամենաերկար երթուղու մեծությունը: Որպեսզի գտնենք երթուղուն պատկանող գագաթները, անհրաժեշտ է լրացուցիչ հիշել ամենաերկար երթուղի կազմող աղեղները: Կանգ չառնելով դրա կազմակերպման եղանակների վրա՝ ընթերցողին խորհուրդ ենք տալիս դիմել [7]:

Այժմ դիտարկենք նույն խնդիրը լուծող մեկ այլ ալգորիթմ, որտեղ կատարվում են նույն գործողությունները, բայց այլ հերթականությամբ:

Ուղիղ մղման ալգորիթմ.

Քայլ 1: Վերցնենք $v_1 = 0$ և $v_k = -\infty$, $k = 2,3,\dots,N-1$, $i = 1$:

Քայլ 2: i-րդ գագաթից դուրս եկող յուրաքանչյուր (i,j) աղեղի համար ընդունենք $v_j := \max\{v_j, v_i + l_{ij}\}$:

Քայլ 3: Եթե $i = N-1$, ալգորիթմը ավարտում է աշխատանքը: Հակառակ դեպքում i-ն վերցնենք հավասար $i+1$ և վերադառնանք քայլ 2-ին:

Համադրելով ուղիղ և հակադարձ մղման ալգորիթմները՝ համոզվում ենք, որ քայլ 2-ի շնորհիվ դրանք էապես տարբերվում են իրարից, իսկ հաշվման տեսանկյունից՝ չեն տարբերվում: Ուղիղ մղման ալգորիթմում աղեղները դիտարկվում են այն գագաթների համար, որոնց լավագույն ուղիները հայտնի են, այսինքն i գագաթից դուրս եկող աղեղները հաշվարկների հիմք են: Իսկ հետադարձ մղման ալգորիթմում աղեղները դիտարկվում են այն գագաթների ուղղությամբ, որոնց համար լավագույն ուղիները դեռևս հայտնի չեն: Այդ տեսանկյունից ուղիղ մղման ալգորիթմը նախընտրելի է և հարմար է կիրառել ուղիների բազմության ցանկացած կառուցվածքի դեպքում:

2. Մեր ուսումնասիրած օրինակները հնարավորություն են տալիս ձևակերպել նաև ԴԾ-ի եղանակին բնորոշ որոշ օրինաչափություններ (տե՛ս, աղյուսակ 7.2):

Ընդհանուր կառուցվածքային օրինաչափություններ

Խնդիր	Գործ-ընթաց	Փուլ	Վարվելակերպ (լուծում)	Վիճակ
ուսանող-զբոսաշր-ջիկների խնդիր	ճամփոր-դություն	1 օր	հաջորդ բնակա-վայրի ընտրությունը	հանգրվանելու վայր
ներդրում-ների բաշխման խնդիր	ներ-դրումների բաշխում	մասնա-ճյուղերի քանակը (1)(1,2) (1,2,3)	մասնաճյուղի տարբերակի ընտրությունը	հատկացված ներդրման քանակ

աղյուսակ 7.2

Այժմ ստանանք անդրադարձ հավասարումների ընդհանուր տեսքը: Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

s - n-րդ փուլին պատկանող վիճակի փոփոխական,

S_n - n-րդ փուլին պատկանող բոլոր վիճակների բազմություն,

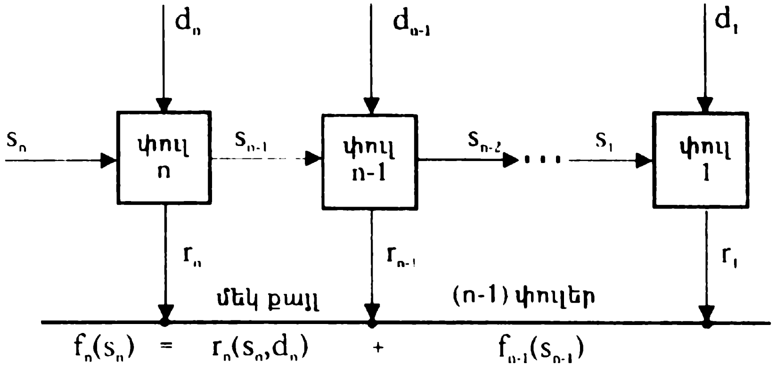
d_n - n-րդ փուլում ընտրված վարվելակերպ (որոշում),

$D_n(s)$ -թույլատրելի վարվելակերպերի բազմությունը s վիճակի համար,

$r_n = r_n(s_n, d_n)$ -եկամտի ֆունկցիան, որն ստացվում է s_n վիճակում d_n որոշում կայացնելիս,

$s_{n-1} = t_n(s_n, d_n)$ -վիճակի ձևափոխության ֆունկցիա, որի միջոցով որոշվում է տրված վիճակին և ընտրված վարվելակերպին համապատասխանող վիճակ:

Որոշումների կայացման գործընթացի սխեման ներկայացված է նկար 7.6-ում:



Նկ. 7.6

Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը n-րդ փուլից մինչև առաջին փուլ ընկած հատվածում հավասար է մեկ քայլից ստացված $r_n(s_n,d_n)$ եկամտին գումարած մնացած $(n-1)$ փուլերից ստացվող նպատակային ֆունկցիայի արժեքը

$$f_n(s_n) = \underset{d_n \in D_n(s)}{opt} [r_n(s_n,d_n) + f_{n-1}(s_{n-1})],$$

որտեղ $s_{n-1} = t_n(s_n,d_n)$, $f_0(1) = 0$:

Ուղիղ մղման ալգորիթմի համար հաշվարկը կատարվում է $f_1, f_2, \dots, f_N$ հաջորդականությամբ, իսկ հակադարձ մղման ալգորիթմի համար՝ $f_N, f_{N-1}, \dots, f_1$ հաջորդականությամբ:

Ընկղմման սկզբունքը: Բերված օրինակները բացահայտում են ԴԾ-ի քնորոշ առանձնահատկությունները: Հիշենք, որ ուսանողների խնդրում պահանջվում էր որոշել մինչև “15” գագաթ տանող ամենաերկար երթուղու մեծությունը: Այս խնդիրը լուծելու փոխարեն մենք լուծեցինք ավելի ընդհանուր խնդիր. գտանք 1 գագաթից դեպի բոլոր գագաթները տանող ամենաերկար երթուղիները և միայն վերջում ստացանք մեր խնդրի լուծումը: Մենք կիրառեցինք *ընկղմման սկզբունքը*, որի իմաստը հետևյալն է. խնդիրը լուծելու համար ձևավորվում է նույնատիպ օպտիմացման խնդիրների բազմություն, որին պատկանող բոլոր խնդիրները լուծելիս ստանում ենք նաև մեր խնդրի լուծումը: Ասվածը ամփոփվում է հետևյալ մոտեցմամբ.

Ելակետային խնդիրն ընկղմվում է օպտիմացման խնդիրների բազմության մեջ, և յուրաքանչյուր վիճակի համար լուծվում է առանձին խնդիր:

Ամփոփում: ԴԾ եղանակով խնդիրներ լուծելու համար հարմար է օգտվել քայլերի հետևյալ հաջորդականությունից.

1. Խնդիրը տրոհել ենթախնդիրների՝ փուլերի $1,2,\ldots,L$:

2. Սահմանել վիճակը բնութագրող s վեկտորը. մասնավոր դեպքում այն կարող է լինել մեկ փոփոխական:

3. Ամեն փուլի համար սահմանել վարվելակերպերի (որոշումների) $D_n(s)$ բազմությունը $n=1,2,\ldots,L$:

4. Որոշել s վիճակում d լուծման հետևանքով ստացվող $r_n = r_n(s,d)$ անմիջական եկամտի ֆունկցիան:

5. Որոշել s վիճակում d լուծում կիրառելուց հաջորդ q վիճակ ստանալու ձևափոխության ֆունկցիան՝ $q = t(s,d)$:

6. Գրել Բելմանի անդրադարձ հավասարումները

$F_n(s) = \underset{D_n(s)}{opt}\,[r_n(s,d)+F_{n+1}(q)]$ -հակադարձ մղման ալգորիթմի դեպքում, և

$f_n(s) = \underset{D_n(s)}{opt}\,[r_n(s,d)+f_{n-1}(q)]$ -ուղիղ մղման ալգորիթմի դեպքում:

7. Օգտվելով վերը բերված ուղիղ (հակադարձ) մղման ալգորիթմներից՝ լուծել օպտիմացման խնդիրը:

Մեկ անգամ ևս նշենք, որ ինքնին ԴԾ-ն ոչ թե օպտիմացման, այլ "մեծ" խնդրի լուծումը մի խումբ "փոքր" խնդիրների հաջորդական լուծման հանգեցնող եղանակ է:

§ 3. Խնդիրների տեսական լուծման օրինակներ

Ռեսուրսների բաշխման խնդիրը: *Տարբերակ 1*: Ենթադրենք տրված է ոչ ԳԾ հետևյալ խնդիրը՝

$$
\begin{aligned}
& z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max \\
& \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,\ a_j > 0,\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.1) \\
& x_j \ge 0,\ x_j\text{-ամբողջ է},
\end{aligned}
$$

որտեղ f-ը ցանկացած անող ֆունկցիա է, իսկ a_j-ն $j = 1,\ldots,n$ և b-ն տրված մեծություններ են:

(3.1) խնդիրը մեկ սահմանափակումով ամբողջաթիվ ծրագրման խնդիր է: (3.1) տեսքի խնդիրներ առօրյայում հաճախ են հանդիպում, օրինակ՝ ինքնաթիռի բեռնման խնդիրը:

Եթե (3.1) խնդրի նպատակային ֆունկցիան լիներ գոգավոր, և x_j փոփոխականների վրա դրված չլիներ ամբողջ լինելու պայմանը, ապա այն կարելի էր լուծել Լագրանժի բազմապատիկների եղանակով և լավագույն դեպքում հնարավոր կլիներ որոշել մի որևիցե տեղային մաքսիմումի կետ:

Անշուշտ, կարելի էր նաև փորձել (3.1) խնդիրը լուծել՝ հաշվի չառնելով x_j ամբողջ լինելու պայմանը և լուծման x_j^* արժեքները կլորացնելու միջոցով ստանալ խնդրի մոտավոր լուծումը: Սակայն կարելի է բերել օրինակներ, որ այդ մոտավոր լուծումը նույնիսկ թույլատրելի չլինի և կամ եթե խնդրի սահմանափակումներին բավարարի էլ, ապա շեղումը նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքից հնարավոր է, որ շատ մեծ լինի:

Նկարագրենք ԴԾ եղանակով (3.1) խնդրի լուծումը:

Նախ՝ համապատասխան մասշտաբի ընտրության միջոցով, միշտ կարելի է ենթադրել, որ խնդրի բոլոր հայտնի պարամետրերը ամբողջ թվեր են: Ենթադրենք՝ (3.1) խնդրի նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը հավասար է z^*-ի, այսինքն՝

$$z^* = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\} = F_n(b),$$

որտեղ $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$, x_j-ն ոչ բացասական ամբողջ թվեր են:

Նկարագրենք քայլերի այն հաջորդականությունը, որի միջոցով կարելի է որոշել z^*-ը: Առաջին քայլում որոշենք z նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեքն սևեռած x_n-ի համար: Պարզ է, որ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ փոփոխականների արժեքները կախված կլինեն x_n-ի արժեքից: $\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը կլինի $f_n(x_n) + \max_{x_1, \ldots, x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)$: x_n^*-ով նշանակենք x_n-ի այն արժեքը, որի համար

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = f_n(x_n^*) + \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j): \qquad (3.2)$$

(3.2) արտահայտության մեջ $f_n(x_n^*)$ գումարելին մաքսիմումի պայմանից առանձնացվեց, քանի որ նրա արժեքը կախված չէ մնացած $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ փոփոխականներից, որոնք պետք է բավարարեն

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b - a_n x_n^* \tag{3.3}$$

սահմանափակմանը: Ուստի (3.2) արտահայտության երկրորդ գումարելու արժեքը կախված կլինի միայն $b - a_n x_n^*$ մեծությունից, այսինքն՝

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) = F_{n-1}(b - a_n x_n^*), \tag{3.4}$$

ընդ որում մաքսիմումը որոշված է ըստ այնպիսի $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ փոփոխականների, որոնք բավարարում են (3.3) պայմանին: Այժմ ենթադրենք, որ $F_{n-1}(b - a_n x_n^*)$ ֆունկցիայի արժեքը որոշված է x_n փոփոխականի այն ամբողջ արժեքների համար, որոնց դեպքում

$0 \le a_n x_n \le b$ և x_n-ը ամբողջ է:

Ուստի անմիջապես ստացվում է, որ

$$z^* = \max_{x_n} \{ f(x_n) + F_{n-1}(b - a_n x_n) \}, \tag{3.5}$$

որտեղ

$$x_n = 0, 1, 2, \ldots, [b / a_n], \tag{3.6}$$

իսկ $[b / a_n]$-ով նշանակված է b / a_n թվի ամբողջ մասը:

Ինչպես երևում է (3.5)-ից, z^*-ը և միաժամանակ x_n^*-ը վերջավոր համեմատման եղանակով հեշտությամբ որոշվում են, եթե $F_{n-1}(b - a_n x_n)$ ֆունկցիայի արժեքները հայտնի են (3.6)-ով որոշվող կետերի համար: Տեսնենք՝ ինչպես կարելի է հաշվել $F_{n-1}(b - a_n x_n)$-ը, երբ $x_n = 0, 1, 2, \ldots, [b / a_n]$: (3.4) արտահայտությունը, ըստ որի հաշվվում է $F_{n-1}(b - a_n x_n)$ ֆունկցիայի արժեքը, կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$F_{n-1}(\xi) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j), \tag{3.7}$$

որտեղ

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le \xi, \quad x_j \text{-ն ոչ բացասական, ամբողջ թվեր են:} \tag{3.8}$$

(3.7)-(3.8) խնդրի հետ վարվելով ճիշտ նույն կերպ, ինչպես (3.1) խնդրի հետ, կունենանք՝

$$F_{n-1}(\xi) = \max_{x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} [f_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(\xi - a_{n-1}x_{n-1})],$$

որտեղ

$$F_{n-2}(\xi) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}} \sum_{j=1}^{n-2} f_j(x_j),$$

երբ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ փոփոխականները բավարարում են

$$\sum_{j=1}^{n-2} a_j x_j \le \xi, \; x_j \text{ - ամբողջ } j = 1,2,\ldots,n-2$$

սահմանափակումներին, իսկ x_{n-1} փոփոխականը կարող է ընդունել միայն հետևյալ ամբողջ արժեքները՝

$$x_{n-1} = 0,1,2,\ldots,[\xi / a_{n-1}]:$$

Այսպիսով, եթե ունենայինք $F_{n-2}(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքներ որոշակի կետերի համար, ապա կհաշվեինք նաև $F_{n-1}(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքները մեզ հետաքրքրող կետերում: Նման գործողությունը կարող ենք կրկնել $F_{n-3}(\upsilon), F_{n-4}(\theta), \ldots$ և այլն $F_1(\rho)$ ֆունկցիաների համար, որտեղ

$$F_1(\rho) = \max_{x_1} f_1(x_1), \tag{3.9}$$

իսկ $x_1 = 0,1,2,\ldots,[\rho / a_1]$:

Այս ընթացքում մենք ստիպված ենթադրում էինք, որ հնարավոր է $F_i(\gamma_i)$, $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ ֆունկցիաների արժեքները հաշվել որոշակի կետերում: Սակայն բավական է նկատել, որ (3.9)-ից արդեն կարելի է հեշտությամբ հաշվել $F_1(\rho)$-ը, այնուհետև $F_2(\gamma_2,), F_3(\gamma_3,), \ldots, F_{n-1}(\xi)$-ը և, վերջապես, z^*-ը, եթե հայտնի են (3.9) խնդրի համար ρ փոփոխականի թույլատրելի արժեքները: Այս հարցին կանդրառնանք քիչ հետո, իսկ մինչ այդ դիտարկենք

$$F_k(\xi) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_k} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j), \; k = 1,2,\ldots,n$$

ֆունկցիաների հաջորդականությունը, որտեղ մաքսիմումը որոշվում է ըստ ոչ բացասական ամբողջ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ փոփոխականների, որոնք բավարարում են՝

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le \xi, \; x_j \text{-ն ոչ բացասական ամբողջ թվեր են,}$$

սահմանափակումներին:

Պարզ է, որ անմիջապես կարելի է որոշել $F_1(\xi)$ ֆունկցիան, իսկ մնացած $F_k(\xi)$ ֆունկցիաներն արդեն կարելի է հաշվել

$$F_k(\xi) = \max_{x_k}[f_k(x_k) + \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_j)]$$

անդրադարձ բանաձևերի օգնությամբ, որտեղ աջ մասի երկրորդ գումարելու առավելագույն արժեքը որոշվում է այնպիսի փոփոխականների համար, որոնք բավարարում են

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j \le \xi - a_k x_k\,, \ x_j \text{ - ամբողջ, } j = 1,2,\ldots,k$$

սահմանափակումներին, այսինքն՝ ոչ այլ ինչ է, քան $F_{k-1}(\xi - a_k x_k)$:

Այսպիսով՝

$$F_k(\xi) = \max_{x_k}[f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - a_k x_k)]\,,$$

երբ $x_k = 0,1,2,\ldots,[\xi / a_k]$, և, հետևաբար, $z^* = F_n(b)$:

Այժմ ցույց տանք, թե (3.1) խնդրի $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ լավագույն լուծումը ինչպես կարելի է որոշել վերևում նկարագրված գործողությունների իրականացման ընթացքում: Նախ հաշվում ենք $F_1(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքները $\xi = 0,1,\ldots,b$ կետերում՝

$$F_1(\xi) = \max_{x_1 \in \{0,1,\ldots,[\xi/a_1]\}} f_1(x_1) \qquad (3.10)$$

բանաձևի օգնությամբ:

Եթե $\hat{x}_1(\xi)$-ով նշանակենք (3.10) խնդրի լավագույն լուծումը, ապա $F_1(\xi) = f_1(\hat{x}_1(\xi))$, $\xi = 0,1,\ldots,b$ կներկայացնենք (3.10) խնդրի բոլոր լուծումները ξ-ի տարբեր արժեքների համար հետևյալ աղյուսակի տեսքով.

ξ	$F_1(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$
0	$F_1(0)$	$\hat{x}_1(0)$
1	$F_1(1)$	$\hat{x}_1(1)$
.....	.....	.....
b	$F_1(b)$	$\hat{x}_1(b)$

աղյուսակ 3

Այնուհետև, օգտվելով անդրադարձ բանաձևից, հաշվենք $F_2(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքները դարձյալ $\xi = 0,1,\ldots,b$ կետերում՝

$$F_2(\xi) = \max_{x_2 \in \{0,1,\ldots,[\xi/a_2]\}} \{f_2(x_2) + F_1(\xi - a_2x_2)\} \qquad (3.11)$$

բանաձևով: Ակնհայտ է, որ

$$\begin{array}{l} f_2(0) + F_1(\xi) \\ f_2(1) + F_1(\xi - a_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_2([\xi/a_2]) + F_1(\xi - a_2[\xi/a_2]) \end{array}$$

թվերից առավելագույնը որոշում է ինչպես $F_2(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքը, այնպես էլ x_2 փոփոխականի լավագույն $\hat{x}_2(\xi)$ մեծությունը: Այստեղ հարկ է նշել, որ $F_2(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքները հաշվելիս անհրաժեշտ էր $F_1(\xi - a_2x_2)$-ի արժեքներն ունենալ միայն x_2-ի այն ամբողջ արժեքների համար, որոնք ընկած են $[0,[\xi/a_2]]$ միջակայքում: Սակայն քանի որ ըստ ենթադրության a_2 պարամետրը նույնպես ամբողջ էր, ապա ամբողջ կլինի նաև $(\xi - a_2x_2)$-ը: Հետևաբար, $F_1(\xi)$ ֆունկցիայի այն արժեքները, որոնք 1 աղյուսակում գրված են $\xi = 0,1,\ldots,b$ կետերի համար, բավական են, որ կարողանանք հաշվել $F_2(\xi)$ ֆունկցիայի արժեքները $\xi = 0,1,\ldots,b$ կետերում և 1 աղյուսակին համանման աղյուսակ կազմենք նաև $F_2(\xi)$ ֆունկցիայի համար:

Եվ այսպես, հաջորդաբար հաշվելով $F_3(\xi), F_4(\xi), \ldots, F_n(\xi)$ ֆունկցիաների արժեքները և նրանց համապատասխանող $\hat{x}_3(\xi), \hat{x}_4(\xi), \ldots, \hat{x}_n(\xi)$ մաքսիմումի կետերը $\xi = 0,1,\ldots,b$ արժեքների համար վերջապես կարող ենք հաշվել $F_n(b)$ և նրան համապատասխանող $\hat{x}_n(b)$, որոնք հավասար կլինեն (3.1) խնդրի նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն z^* արժեքին և այդ խնդրի լավագույն լուծման x_n^* բաղադրիչին: Որպեսզի գտնենք (3.1) խնդրի լավագույն լուծման $x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, \ldots, x_1^*$ բաղադրիչները, նկատենք, որ երբ արդեն որոշված է x_n^*-ը, մնացած $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականները պետք է բավարարեն, բացի ամբողջ լինելու պայմանից, նաև

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_jx_j \le b - a_nx_n^* \qquad (3.12)$$

սահմանափակմանը՝ $\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)$ ֆունկցիային ամենամեծ արժեքը հաղորդելու պայմանով: Սակայն (3.12) սահմանափակման դեպքում

$$\max_{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) = F_{n-1}(b - a_n x_n^*)$$

$$x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}^*(b - a_n x_n^*), \tag{3.13}$$

ուստի, օգտվելով $F_{n-1}(\xi)$ ֆունկցիայի համապատասխան աղյուսակից՝ անմիջապես (3.12) բանաձևից կորոշենք x_{n-1}^*-ը: Նման դատողություններով կորոշենք $x_{n-2}^*, x_{n-3}^*, \ldots, x_1^*$ արժեքները՝

$$x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-i}(b - \sum_{p=0}^{i-1} a_{n-p} x_{n-p}^*), \ i = 1,2,\ldots,n-1:$$

Այսպիսով, n փոփոխականներով (3.1) խնդրի լավագույն լուծումը որոշելու համար անհրաժեշտ է լուծել նույն տիպի մեկ փոփոխականով խնդիրներ՝ չնայած վերջավոր, սակայն բազմիցս անգամ:

Տարբերակ 2: Այժմ դիտարկենք 1-ին գլխի §4-ում բերված ռեսուրսների բաշխման խնդիրը: Հիշեցնենք, որ նրա մաթեմատիկական մոդելն ունի հետևյալ տեսքը.

$$p_1(x_1) + p_2(x_2)+\ldots+p_N(x_N) \to \max,$$

$$c_1(x_1) + c_2(x_2)+\ldots+c_N(x_N) \le k,$$

$$0 \le x_n \le b, \ x_n\text{-ը ամբողջ է}, \ n = 1,2,\ldots,N$$

k-ն և b-ն տրված մեծություններ են, $c_n(x_n)$ ֆունկցիաները ոչ բացասական են և ընդունում են ամբողջ արժեքներ, ընդ որում $c_n(0) = 0$, $p_n(x_n)$-ը՝ $p_n(0) = 0$, $n = 1,2,\ldots,N$ պայմաններին բավարարող ցանկացած ֆունկցիաներ են:

Ենթադրենք՝ արդեն թողարկվել է 1-ից մինչև $n-1$ արտադրատեսակը: Ձեռնարկության տրամադրության տակ կմնա ինչ-որ y քանակի չօգտագործված ռեսուրս: Ընդունում ենք, որ այն ամբողջ թիվ է, քանի որ ռեսուրսները օգտագործվում են ամբողջական մասերով և առկա է $0 \le y \le k$ անհավասարությունը: y քանակի ռեսուրսը նույնպես պետք է բաշխել n-ից մինչև N համարների արտադրանք թողարկելու համար: Նշանակենք $f_n(y)$-ով այն առավելագույն եկամուտը, որ y քանակի ռեսուրսի բաշխումից կարելի է ստանալ n-ից մինչև N արտադրանք թողարկելիս: Խնդիրն այն է, որ պետք է գտնել $f_1(k)$ մեծությունը: $f_1(k)$-ն գտնելու համար պետք է լուծել $N \cdot (k+1)$ քանակի խնդիրներ՝ $f_n(y)$ արժեքները հաշվելու նպատակով $n = 1,2,\ldots,N$ և $y = 0,1,\ldots,k$: Այսպիսով, կիրառում ենք ընկղմման սկզբունքը. սկզբնական խնդրի $f_1(k)$ առավելագույն եկամուտ գտնելու համար լուծում ենք $N \cdot (k+1)$ համանման ընթացիկ խնդիրներ:

Ցույց տանք, որ մեր խնդիրը բերվում է ցիկլ չպարունակող գրաֆում ամենաերկար ուղու խնդրին: Որպես վիճակ վերցնենք (n, y) զույգը, որը պատկերում է այնպիսի իրադրություն, երբ անհրաժեշտ է բաշխել y միավոր ռեսուրս n-ից մինչև N համարները՝ արտադրանք թողարկելու համար: Այդպիսի սահմանման դեպքում անհրաժեշտություն չկա իմանալ, թե ինչպես ենք հասել (n, y) վիճակին: Այստեղ y-ը վիճակի փոփոխականն է, իսկ n-ը՝ վիճակի պարամետրը, որ ցույց է տալիս փուլի համարը: $S_n = \{(n, y) | y = 0,1,\ldots,k\}$ վիճակների բազմությունն է n-րդ փուլում: Խնդրում անցումը կատարվում է (n, y) վիճակից $(n+1, z)$ վիճակ, որտեղ $z = y - c_n(x_n)$ բոլոր թույլատրելի x_n արժեքների համար: (n, y) յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանեցնենք օրգրաֆի գագաթը, որից դուրս կգա աղեղների մի համախումբ, որոնցից յուրաքանչյուրը, ինչպես վերը նշվեց, կհամապատասխանի x_n-ի ($0 \le x_n \le b$ և ամբողջ է) թույլատրելի որևէ արժեքի և կմտնի $(n+1, y - c_n(x_n))$ գագաթ: Աղեղի երկարությունը $p_n(x_n)$ է: Խնդիրը բերվում է $(1, k)$ սկզբնական գագաթից մինչև $(N+1, z)$ գագաթ տանող ամենաերկար ուղին գտնելուն, որտեղ z-ը ազատ փոփոխական է և զրո է, եթե ընդունենք, որ k քանակի ռեսուրսն ամբողջությամբ պետք է սպառվի $1,2,\ldots,N$ համարներով արտադրանք թողարկելիս: Ընթացիկ խնդիրներում z-ը ցույց է տալիս չօգտագործված ռեսուրսի քանակը:

Այժմ ձևակերպենք ընթացիկ խնդիրների դասին պատկանող խնդիրը և անդրադարձ հավասարումները: Խնդիրը ձևակերպելու համար պահանջվում է որոշակի հնարամտություն: Դա է պատճառներից մեկը, որ վիճակ և փուլ հասկացություններն ունեն այդպիսի կարևորություն, և խնդրի ճիշտ դրվածքը կախված է վիճակների և փուլերի ընտրությունից:

Ձևակերպենք ընթացիկ խնդիրների դասին պատկանող խնդիրը: Կասենք, որ n արտադրատեսակից x_n միավոր արտադրելը թույլատրելի է, եթե $c_n(x_n) \le y$, $0 \le x_n \le b$ և x_n-ը ամբողջ թիվ է: Տրված y-ի համար $p_n(x_n) + f_{n+1}(y - c_n(x_n))$ մեծությունը հավասար է այն եկամտին, որ կարելի է ստանալ y քանակի ռեսուրսի բաշխումից n-ից մինչև N արտադրատեսակներ թողարկելու համար: Իսկապես, $p_n(x_n)$-ը սպասվելիք եկամուտն է, որ ստացվում է $c_n(x_n)$ քանակի ռեսուրսի ծախսից և x_n քանակի արտադրանք թողարկելիս: Մնացած $y - c_n(x_n)$ քանակի ռեսուրսը պետք է տրամադրվի $(n+1)$-ից մինչև N համարի արտադրանք թողարկելու լավագույն տարբերակին: ԴԾ անդրադարձ հավասարումները կլինեն

$$f_n(y) = \max_{0 \le x_n \le b} \{p_n(x_n) + f_{n+1}(y - c_n(x_n))\}, \quad y = 0,1,\dots,k$$

$$n = N, N-1, \dots, 1:$$

Անդրադարձ հավասարումը ճշմարիտ է նաև $n = N+1$ դեպքում, եթե բավարարվում են $f_{N+1}(y) = 0$, $y = 0,1,\dots,k$ առնչությունները: Սրանք միշտ կան, եթե պայմանավորվում ենք, որ k քանակի ռեսուրսը ամբողջությամբ սպառվում է $1,2\dots,N$ համարներով արտադրանք թողարկելու համար կամ $(N+1)$-րդ մտացածին արտադրանք չի թողարկվում: Հավասարումների համակարգը լուծվում է հետադարձ մղման ալգորիթմի միջոցով:

Հետադարձ մղման ալգորիթմով ռեսուրսների բաշխման խնդրի լուծման ընթացքում անդրադարձ հավասարումը լուծվում է n-ի նվազող հաջորդականությամբ: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $y = 0,1,2,\dots,k$ արժեքների համար հաշվում ենք $f_N(y)$-ը, այնուհետև $f_{N-1}(y)$-ը և այսպես շարունակ մինչև $f_1(k)$:

Անդրադարձ հավասարումը կարելի է լուծել նաև ուղիղ մղման ալգորիթմի միջոցով, քանի որ ելնելով այն փաստից, որ ոչինչ չարտադրելիս ոչինչ չի ծախսվում, հետևում է

$$f_n(0) = 0 \text{ և } f_n(y) \le f_n(y+1) \tag{3.14}$$

անհավասարությունը, բոլոր n-ի համար $n = 1,\dots,N$:

Պահեստավորման խնդիր: Ենթադրենք՝ ունենք որոշակի տարողությամբ մի պահեստ, որտեղ կարելի է պահեստավորել ինչ որ մեկ տեսակի ապրանք: Պահանջվում է որոշել տվյալ ապրանքի պահեստավորման, վաճառքի և գնման (արտադրության) այնպիսի վարք, որ տրված N ժամանակահատվածների (փուլերի) ընթացքում ստացվող եկամուտը լինի առավելագույնը, եթե հայտնի են պահեստում եղած ապրանքի սկզբնական պաշարը և վաճառքի ու գնման գները ըստ փուլերի:

Նախ կատարենք հետևյալ նշանակումները.

b - պահեստի տարողությունը

v - պահեստում եղած սկզբնական պաշարը

c_i - i -րդ փուլում ապրանքի գնման գինը

p_i - i -րդ փուլում ապրանքի վաճառքի գինը

x_i - i -րդ փուլում գնված ապրանքի քանակը

y_i - i -րդ փուլում վաճառված ապրանքի քանակը:

Հաշվի առնենք նաև, որ

1. i -րդ փուլի վերջում պահեստում եղած պաշարները չեն կարող լինել ավելին, քան պահեստի b տարողությունն է $(i = 1,2,\ldots,N)$:

2. i -րդ փուլում վաճառված ապրանքի քանակը չի կարող ավելին լինել, քան $(i-1)$ -րդ փուլի վերջում պահեստում եղած ապրանքի քանակն է:

3. Գնված կամ վաճառված ապրանքի x_i և y_i քանակներն ամեն մի i փուլում ոչ բացասական են և բավարարում են

$$\begin{aligned}
&1)\ v + \sum_{j=1}^{i}(x_j - y_j) \le B,\ i = 1,2,\ldots,N \\
&2)\ y_i \le v + \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - y_j),\ i = 1,2,\ldots,N \qquad (3.15) \\
&3)\ x_i \ge 0,\ y_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,N:
\end{aligned}$$

Իսկ եթե N -րդ փուլին համապատասխանող ընդհանուր եկամուտը նշանակենք r_N -ով, ապա խնդրի նպատակային ֆունկցիան կլինի

$$r_N = \sum_{j=1}^{N}(p_j y_j - c_j x_j) \qquad (3.16)$$

և պետք է գտնել (3.16)-ի մաքսիմումը (3.15) սահմանափակումների դեպքում: ԴԾ անդրադարձ բանաձևերից օգտվելու նպատակով դիտարկենք ֆունկցիաների $\{f_i(v)\}$ հաջորդականությունը՝ ցանկացած ոչ բացասական v -ի համար, որտեղ

$$f_i(v) = \max_{(y,x)} r_i\ ,\ i = 1,2,\ldots,N\ , \qquad (3.17)$$

իսկ x_i, y_i-ը բավարարում են (3.15) պայմաններին:

Երբ $i = 1$, կունենանք

$$f_1(v) = \max_{x_1>0}(p_1y_1 - c_1x_1)$$
$$x_1 \ge 0 \tag{3.18}$$
$$0 \le y_1 \le v,$$

հետևաբար՝

$$f_1(v) = p_1v: \tag{3.19}$$

Եթե $i \ge 2$, ապա

$$f_i(v) = \max_{x_i, y_i}[p_iy_i - c_ix_i + f_{i-1}(v + x_i - y_i)], \tag{3.20}$$

որտեղ մաքսիմումը փնտրվում է հետևյալ տիրույթում.

$$0 \le y_i \le v;\ x_i \ge 0;\ v + x_i - y_i \le b: \tag{3.21}$$

Եթե նշանակենք

$$v + x_i - y_i = u, \tag{3.22}$$

ապա (3.20)-ը կգրվի հետևյալ ձևով.

$$f_i(v) = \max_{0\le u\le B}[\varphi_i(u,v) + f_{i-1}(u)], \tag{3.23}$$

որտեղ

$$\varphi_i(u,v) = \max_{x_i, y_i}[p_iy_i - c_ix_i], \tag{3.24}$$

երբ

$$v + x_i - y_i = u,\ y_i \le v,\ x_i \ge 0,\ y_i \ge 0: \tag{3.25}$$

Որպեսզի որոշենք $\varphi_i(u,v)$ ֆունկցիան, անհրաժեշտ է գտնել (3.24) գծային ֆունկցիայի մաքսիմումը (3.25)-ով որոշվող ուղիղ գծի հատվածի վրա: Սակայն երբ $0 \le u \le v$, այդ հատվածի ծայրակետերը կլինեն $(x_i = 0, y_i = v - u)$-ը և $(x_i = u, y_i = v)$-ը: Եվ քանի որ գծային ֆունկցիան իր առավելագույն արժեքը կարող է ընդունել միայն հատվածի ծայրակետերում, ապա

$$\varphi_i(u,v) = \max[p_i(v - u), p_iv - c_iu]:$$

Իսկ եթե $v \le u \le B$, ապա նման դատողություններով՝

$$\varphi_i(u,v) = \max[-c_i(u - v), p_iv - c_iu]:$$

Մանրամասնությունները կգտնեք [7]-ում:

Խնդիրների լուծման օրինակներ:

Օրինակ 3. Պաշարների կառավարման խնդիրը: “Հայկական կահույք” ձեռնարկությունը, ստույգ պատկերացում ունենալով իր արտադրանքի նկատմամբ ըստ փուլերի (օրինակ՝ ըստ եռամսյակների) հաջորդ տարվա պահանջարկի մասին, ցանկանում է կազմել արտադրական ծրագիր՝ հաշվի առնելով հետևյալ պայմանները:

Արտադրության համար պահանջվող ժամանակն այնպիսին է, որ t -րդ փուլում արտադրված արտադրանքով կարելի է բավարարել նույն փուլի պահանջարկը: Ձեռնարկությունը հնարավորություն ունի կուտակել պաշարներ հաջորդ փուլերի պահանջարկը բավարարելու նպատակով: Հայտնի են արտադրության ծավալից կախված արտադրական ծախսերը, որոնք գծային չեն, և միավոր պաշարի պահպանման համար անհրաժեշտ ծախսումը: Ձեռնարկությունն արտադրությունը սկսում է առանց սկզբնական պաշարների, պարտավոր է ժամանակին բավարարել ըստ փուլերի պահանջարկները և ցանկանում է նվազագույնի հասցնել արտադրության և պաշարի պահպանման համար ծախսումները:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար կատարենք հետևյալ նշանակումները.

x_t - t -րդ փուլում արտադրության քանակն է, $t = 1,2,\ldots,N$,

a_t - t -րդ փուլի վերջում պաշարի քանակն է, $t = 0,1,\ldots,N-1$,

x -ձեռնարկության ամեն մի փուլում արտադրական հզորությունն է,

A -պաշարի առավելագույն քանակն է, որը ձեռնարկությունը կարող է պահել,

d_t - t -րդ փուլում արտադրանքի պահանջարկն է, որը հայտնի է $t=0$ պահին, $t = 1,2,\ldots,N$,

$c_t(x_t,a_t)$ - t -րդ փուլում արտադրության և պաշարի պահպանման ծախսերն են:

Մոդելի տեսքը հետևյալն է.

$$\sum_{i=1}^{N} c_t(x_t,a_t) \to \min$$

$x_t \le x$, $t = 1,2,\ldots,N$ (t -րդ փուլում արտադրության ծավալը չի կարող գերազանցել ձեռնարկության արտադրական հզորությանը),

$x_t \ge 0$, x_t -ն ամբողջ է, $t = 1,2,\ldots,N$,

$a_t \le A$, $t = 0,1,\ldots,N-1$ (t -րդ փուլի պաշարի քանակը չի կարող գերազանցել պաշարների պահպանման հնարավորությանը),

$a_t \ge 0$,

$a_N = 0$ (վերջում պաշար չպետք է մնա),

$a_0 = 0$ (առաջին փուլը սկսվում է առանց պաշարի),

$d_t = a_{t-1} + x_t - a_t$, $t = 1,2,\ldots,N$ (յուրաքանչյուր փուլում պահանջարկը պետք է բավարարվի):

Ոչ գծային նպատակային ֆունկցիայով այսպիսի ամբողջաթիվ ծրագրման խնդրի լուծումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ, որոնցից կարելի է խուսափել, եթե այն ներկայացնենք ԴԾ լեզվով:

Պարզության համար ենթադրենք՝ $t = 1,2,3,4$ ծրագրային տարվա եռամսյակներն են. d_1-ը վերջին եռամսյակի պահանջարկն է, իսկ d_4-ը՝ առաջինի:

Համակարգի վիճակը յուրաքանչյուր եռամսյակի (փուլի) սկզբում՝ առկա պաշարների քանակն է, իսկ վարքը՝ ըստ փուլերի արտարության ծավալներն են: Հասկանալի է, որ արտադրանքի քանակի վերաբերյալ ընթացիկ որոշում ընդունելիս ամենևին էլ պարտադիր չէ իմանալ, թե ինչպես է ձեռք բերվել սկզբնական պաշարի մակարդակը (որն էլ ԴԾ օպտիմացման սկզբունքներից մեկն է):

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$f_n(a_n)$ - a_n սկզբնական պաշարի դեպքում նվազագույն ծախսումներն են մնացած n փուլերի համար,

$x_n(a_n)$ - $f_n(a_n)$-ը ապահովող արտադրանքի քանակն է:

Երբ $n = 0$, $f_0(0) = 0$,

$n = 1$, $a_1 = 1,2,\ldots,\min(d_1,A)$, $x_1 = (d_1 - a_1)$, $f_1(a_1) = c_1(d_1 - a_1,0)$

$n = 2$, $f_2(a) = \min\limits_{x_2}[c_2(x_2,a_2)] + f_1(a_1)$:

Ընդհանուր անդրադարձ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$f_n(a) = \min_{x_n}[c_n(x_n,a_n)] + f_{n-1}(a_{n-1}):$$

Ասվածը պարզաբանելու նպատակով լուծենք հետևյալ թվային օրինակը.

$d_1 = 4$ (վերջին փուլի պահանջարկը), $d_2 = 3$, $d_3 = 4$,

$d_4 = 3$, $x = 5$, $x_t = 1,2,3,4,5$, $A = 4$, $a_t = 0,1,2,3,4$,

$c(x,a) = c(x) + ha$, $h = 1$, $c(0) = 0$, $c(1) = 10$, $c(2) = 13$,

$c(3) = 16$, $c(4) = 18$, $c(5) = 20$:

Խնդրի լուծման բազմաքայլ գործընթացի ներկայացնենք աղյուսակներով փուլ 1. $n = 1$, $f_1(a_1) = c(4 - a_1)$

x_1 / a_1	$f_1(a_1)$	$x_1^*(a_1)$
0	18	4
1	16	3
2	13	2
3	10	1
4	0	0

աղյուսակ 1

փուլ 2. $n = 2$, $f_2(a_2) = \min\limits_{x_2}(c_2(x_2) + (a_2 + x_2 - 3)) + f_1(a_1)$

x / a	0	1	2	3	4	5	$f_2(a)$	$x_2^*(a)$
0	-	-	-	16+18	18+1+16	20+2+13	34	3
1	-	-	13+18	16+1+16	18+2+13	20+3+10	31	2
2	-	10+18	13+1+16	16+2+13	18+3+10	20+4+0	24	5
3	0+18	10+1+16	13+2+13	16+3+10	18+4+0	-	18	0
4	0+1+16	0+2+13	13+3+10	16+4+0	-	-	17	0

աղյուսակ 2

փուլ 3. $n = 3$, $f_3(a_3) = \min\limits_{x_3}(c_3(x_3) + (a_3 + x_3 - 4)) + f_2(a_2)$

x / a	0	1	2	3	4	5	$f_3(a)$	$x_3^*(a)$
0					18+34	20+1+31	34	3
1				16+34	18+1+31	20+2+18	31	2
2			13+34	16+1+3	18+2+28	20+3+18	24	5
3		10+34	13+1+13	16+2+28	18+3+18	20+4+17	18	0
4	0+34	10+1+34	13+2+28	16+3+18	18+4+17		17	0

աղյուսակ 3

փուլ 4. $n = 4$, $f_4(a_4) = \min\limits_{x_4}(c_4(x_4) + (a_4 + x_4 - 3)) + f_3(a_3)$

x / a	3	4	5	$f_4(a)$	$x_4^*(a)$
0	16+52	18+1+46	20+2+41	63	5

աղյուսակ 4

Ստացված արդյունքների համաձայն՝ սա լավագույն լուծումն է. I եռամսյակում պետք է արտադրել 5 միավոր (վերջում պաշարը կկազմի 2 միավոր), II-ում՝ 5 միավոր (վերջում պաշարը կկազմի 3 միավոր), III-ում՝ 0 (ոչինչ չի արտադրում և պաշարը վերջում՝ 0), IV-ում՝ 4 միավոր, իսկ արտադրության և պաշարի պահպանման տարեկան ծախսը կկազմի 63 միավոր:

Օրինակ 4. Ինքնաթիռի բեռնման խնդիրը: Ինքնաթիռը կարելի է բեռնել N տեսակի իրերով, որոնցից յուրաքանչյուրի ծավալը v_i է, $i = 1,2,\ldots,N$ է, իսկ գինը՝ p_i:

Պահանջվում է գտնել առավելագույն արժեք ունեցող բեռի կառուցվածքը, եթե ինքնաթիռի տարողությունը v է: Խնդրի մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_N x_N \to \max,$$

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_N x_N \le v,$$

x_i -ն ոչ բացասական ամբողջ թիվ է, $i = 1,2,\ldots,N$:

ԴԾ տարրերով այս խնդիրը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ: Խնդրում փուլերը մտացածին են:

1) i -րդ փուլը համապատասխանեցնենք իրերի թվակալին:

2) y_i վիճակը i -րդ փուլում իրերի գումարային ծավալն է:

3) վարքը նկարագրվում է բոլոր փուլերում հաջորդական բեռի ընտրությամբ.

x_i -ն i -րդ փուլում i տեսակի ապրանքի քանակն է.

$$0 \le x_i \le [v / v_i],$$

որտեղ $[v / v_i]$ -ն v / v_i թվի ամբողջ մասն է:

Անդրադարձ բանաձևը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f_i(y_i) = \max_{x_i = 0,1,\ldots,[v/v_i]} \{v_i x_i + f_{i+1}(y_i - v_i x_i)\}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$f_N(y_N) = \max_{0 \le x_N \le [v/v_N]} \{v_N, x_N\},$$

$f_i(y_i)$ -ն իրերի առավելագույն արժեքն է, որոնց բեռնման մասին որոշում է ընդունվել $i, i+1,\ldots,N$ փուլերի ընթացքում:

Լուծենք հետևյալ թվային օրինակը.

$$i = 1,2,3,4, \quad v = 7, \quad v_1 = 3, \quad p_1 = 40, \quad v_2 = 2, \quad p_2 = 50,$$

$$v_3 = 4, \quad p_3 = 70, \quad v_4 = 1, \quad p_4 = 20:$$

Հաշվարկները ներկայացնենք աղյուսակներով

փուլ 4. $f_4(y_4) = \max_{x_4}\{20x_4\}$, $\max x_4 = [7/1] = 7$

x_4 / y_3	0	1	2	3	4	5	6	7	$f_4(y_4)$	x_4^*
0	0									0
1	0	20							20	1
2	0	20	40						40	2
3	0	20	40	60					60	3
4	0	20	40	60	80				80	4
5	0	20	40	60	80	100			100	5
6	0	20	40	60	80	100	120		120	6
7	0	20	40	60	80	100	120	140	140	7

փուլ 3. $f_3(y_3) = \max_{x_3}\{70x_3 + f_4(y_3 - 4x_3)\}$, $\max x_3 = [7/4] = 1$

x_3 / y_2	0	1	$f_3(y_3)$	x_3^*
0	0		0	0
1	0+20		20	0
2	0+40		40	0
3	0+60		60	0
4	0+80	70+0	80	0
5	0+100	70+20	100	0
6	0+120	70+40	120	0
7	0+140	70+60	140	0

փուլ 2. $f_2(y_2) = \max_{x_2}\{50x_2 + f_3(y_2 - 2x_2)\}$, $\max x_2 = [7/2] = 3$

x_2 / y_2	0	1	2	3	$f_2(y_2)$	x_2^*
0	0				0	0
1	0+20				20	0
2	0+40	50+0			40	1
3	0+60	50+20			60	1
4	0+80	50+40	100+0		80	2
5	0+100	50+60	100+20		100	2
6	0+120	50+80	100+40	150+0	120	3
7	0+140	50+100	100+60	150+20	140	3

փուլ 1. $f_1(y_1) = \max\limits_{x_1}\{40x_1 + f_2(y_1 - 3x_1)\}$, $\max x_1 = [7/3] = 2$

x_1 / y_1	0	1	2	$f_1(y_1)$	x_1^*
0	0			0	0
1	0+20			20	0
2	0+50			50	0
3	0+70	40+0		70	0
4	0+100	40+20		100	0
5	0+120	40+50		120	0
6	0+150	40+70	80+0	150	0
7	0+170	40+100	80+20	170	0

Ինքնաթիռը լավագույն ձևով կբեռնվի, երբ $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 1$: Այսպիսի բեռի արժեքն էլ կկազմի 170 միավոր:

Լրացում

Որոշումների կայացման մարկովյան գործընթացներ

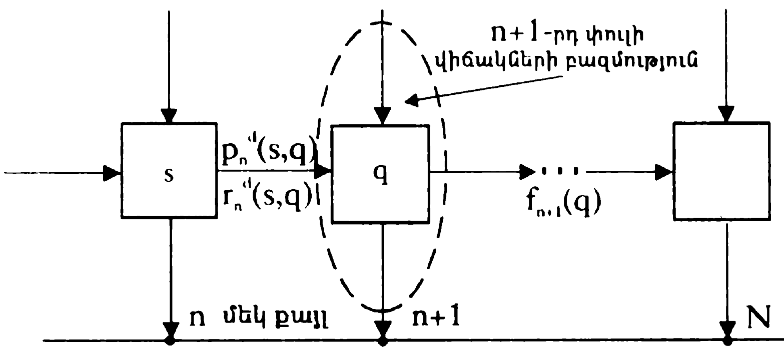
1. Անորոշություն: Որոշումների կայացման բավականին լայն դասի խնդիրների համար հնարավոր չէ ճշգրիտ կանխատեսել ապագա վիճակները: Օրինակ, հնարավոր չէ ճշգրիտ իմանալ այսօրվա ներդրումների հաշվին ստացվելիք արտադրանքի սպառման սպասվելիք քանակը: Անհատ ձեռներեցն ի վիճակի չէ կանխատեսելու ապրանքի այն ճշգրիտ քանակը, որը կվաճառվի առաջիկա ամիսներին:

Դիտարկենք անորոշության պայմանները հաշվի առնող մի պարզ մոդել: Նշանակենք (n,s)-ով n-րդ փուլի որևէ վիճակ, d-ն որոշում կայացնելու փոփոխականն է, $r_n^d(s,q)$-ն այն եկամուտն է, որ կարելի է ստանալ, եթե (n,s) վիճակում ընդունվել է d որոշումը և անցում է կատարվել $(n+1,q)$ վիճակի: $D_n(s)$-ը՝ n-րդ փուլի s-րդ վիճակում որոշումների թույլատրելի բազմությունն է, $p_n(s,q)$-ն՝ (n,s) վիճակից $(n+1,q)$ վիճակի անցնելու հավանականությունն է և կախված չէ (n,s) վիճակի նախապատմությունից:

Ենթադրենք՝ ծրագրային ժամանակը տրոհված է N փուլերի՝ $n = 1,2,\ldots,N$: Փուլից փուլ անցումը կատարվում է փուլերի համարների աճման կարգով: Պահանջվում է գտնել ընդհանուր եկամտի մաթեմատիկական սպասման առավելագույն մեծությունը ծրագրի կատարման ամբողջ ժամանակաշրջանի համար:

Նշանակենք $f_n(s)$-ով n-ից մինչև N փուլերի սպասվելիք ընդհանուր եկամտի առավելագույն մեծությունը: Օգտվենք օպտիմացման երրորդ սկզբունքից:

Ենթադրենք՝ ընթացիկ պահին գտնվում ենք (n,s) վիճակում, կայացրել ենք d որոշումը և անցում ենք կատարել ինչ-որ $(n+1,q)$ վիճակի: (n,s)-ից $(n+1,q)$ անցման շնորհիվ ստանում ենք $r_n(s,q)$ եկամուտ, իսկ $(n+1,q)$ վիճակի համար սպասվելիք ընդհանուր եկամուտը $f_{n+1}(q)$ է: Հետևաբար, մեկ քայլից ստանում ենք $r_n(s,q)+f_{n+1}(q)$ եկամուտ (տե՛ս, նկար 7.7):



$$f_n(s)=\sum_q p_n^d(s,q)[r_n^d(s,q)+f_{n+1}(q)]$$

Նկ. 7.7

Անցումը (n,s)-ից $(n+1,q)$-ի կատարվում է $p_n^d(s,q)$ հավանականությամբ, եթե ընդունվել է d վարվելակերպը: Ուրեմն՝ ընդհանուր առավելագույն եկամտի մաթեմատիկական սպասման համար ունենք

$$f_n(s)=\max_{d\in D_n}\sum_q p_n^d(s,q)[r_n^d(s,q)+f_{n+1}(q)]$$

կամ, նշանակելով՝ $r_n^d(s)=\sum_q p_n^d(s,q)\cdot r_n^d(s,q)$, որտեղ $r_n^d(s)$-ը (n,s) վիճակում գտնվելու մեկ քայլից սպասվելիք եկամուտն է, կստանանք

$$f_n(s) = \max_{d \in D_n}\{r_n^d(s) + \sum_q p_n^d(s,q) f_{n+1}(q)\}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1,$$

պայմանով, որ $\forall q(f_{N+1}(q) = 0)$:

2. Առաջին գլխում քննարկվում էր "բրուտի խնդիրը", որի էությունը հետևյալն էր. ինչպիսի վարք ընտրել N հաջորդական շաբաթների համար, որպեսզի ընդհանուր սպասվելիք եկամուտը ամանեղենի վաճառքից լինի առավելագույնը:

Բրուտի խնդրի լուծումից առաջ ծանոթանանք մարկովյան գործընթացի հետ:

Դիտարկենք մի համակարգ, որը ժամանակի ընթացքում գտնվում է $i = 1,2,\ldots,N$ վիճակներում: Վիճակից վիճակ համակարգը անցնում է միավոր ժամանակում, i վիճակից j վիճակ անցումը կատարվում է p_{ij} հավանականությամբ, որը կախված չէ անցման նախապատմությունից: Պարզ է, որ $\sum_j p_{ij} = 1$ և $0 \le p_{ij} \le 1$:

Այսպիսի հավանական գործընթացը անվանում ենք մարկովյան շղթա, որը բնութագրվում է անցման հավանականությունների $P = (p_{ij})$ $N \times N$ մատրիցով:

Ընդունենք՝ բրուտը գտնվում է լավ վիճակում, եթե ամանեղենը վաճառվել է, հակառակ դեպքում՝ վատ վիճակում:

Բրուտի խնդրում "լավ" վիճակը անվանենք 1 վիճակ, իսկ "վատ" վիճակը՝ 2 վիճակ: Վիճակից վիճակ անցման ժամանակ միավորը 1 շաբաթն է, իսկ այդ երկու հնարավոր վիճակների համար անցման մատրիցն է

$$P = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{Vmatrix}:$$

Այս մատրիցը և սրանով պայմանավորված բոլոր հաշվարկները վերցված են [34]-ից:

Սահմանենք $\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \ldots, \pi_N(t))$, որպես t անցումներից հետո համապատասխան վիճակներում գտնվելու հավանականությունների վեկտոր, եթե հայտնի է վիճակը սկզբնական $t = 0$ պահին: Սահմանումից հետևում է, որ

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) = 1, \quad 0 \le \pi_i(t) \le 1, \quad t = 0,1,\ldots,$$

$$\pi_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i(t) p_{ij}, \quad t = 0,1,\ldots:$$

Բերված բանաձևը վեկտորական տեսքով կգրվի

$\pi(t+1) = \pi(t)\cdot P$:

Եթե կատարենք համապատասխան տեղադրումներ $t = 0,1,...$ համար, ապա դժվար չէ նկատել, որ (1) պայմանը կգրվի

$\pi(t) = \pi(0)\cdot P^t$, $t = 0,1,...$ տեսքով:

Բրուտի խնդրում սկզբնական պահին "լավ" 1 և "վատ" 2 վիճակների մեկնակետից հաջորդական վիճակներում հայտնվելու հավանականությունները բերված են աղյուսակ 4ա,բ-ում:

Սպասվելիք հավանականություններ

Մեկնարկ լավ վիճակից

t	0	1	2	3	4	5	...
$\pi_1(t)$	1	0,5	0,45	0,445	0,4445	0,44445	...
$\pi_2(t)$	0	0,5	0,55	0,555	0,5555	0,55555	...

աղյուսակ 7.5ա

Մեկնարկ վատ վիճակից

t	0	1	2	3	4	5	...
$\pi_1(t)$	0	0,4	0,44	0,444	0,4444	0,44444	...
$\pi_2(t)$	0	0,6	0,56	0,556	0,5556	0,55556	...

աղյուսակ 7.5բ

Ինչպես տեսնում ենք, երկու դեպքում էլ $\pi_1(t) \to 4/9$, իսկ $\pi_2(t) \to 5/9$, հետևաբար՝ շատ քայլերից հետո 1 և 2 վիճակներում գտնվելու հավանականությունները կախված չեն մեկնարկային վիճակից: Մարկովյան գործընթացները, որոնք օժտված են այդպիսի հատկությամբ, անվանում են էրգոդիկ: Էրգոդիկ մարկովյան գործընթացների համար ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. $\pi = \pi P$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i = 1$ հավասարումների համակարգն ունի միակ դրական լուծում:

(1) բանաձևից, երբ $t\to\infty$, հետևում է, որ $\lim\limits_{t\to\infty}\pi_i(t) = \pi_i$, $i = 1,2,...,N$ կամ

$$\pi = \pi P,\ \sum_{i=1}^{n}\pi_i = 1:$$

Բրուտի օրինակի համար կունենանք $\pi_1 = 0,5\pi_1 + 0,4\pi_2$, $\pi_2 = 0,5\pi_1 + 0,6\pi_2$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$: Այսպիսով, բրուտը պետք է իմանա, որ երկար ժամանակ իր պատրաստած ամանեղենի քանակության 4/9 մասը հաջողակ է, իսկ 5/9-ը՝ անհաջող:

Այժմ ենթադրենք, որ i վիճակից j վիճակ անցնելիս ստանում ենք r_{ij} եկամուտ: r_{ij} տարրերը կազմում են եկամուտների R $N \times N$ մատրիցը:

Որոշակի t ժամանակահատվածի համար որոշենք սպասվող եկամուտը (մաթեմատիկական սպասումը կամ միջինը):

Սահմանենք $v_i(t)$ - սպասվող եկամուտը t հաջորդական անցումներից, եթե տվյալ պահին համակարգը գտնվում է i վիճակում:

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}[r_{ij} + v_j(t-1)],$$

$$i = 1,2,\ldots,N\ ,\ t = 1,2,\ldots\cdot$$

Ինչպես երևում է (2) հավասարումից, սպասվող լրիվ եկամուտը կազմված է երկու գումարելիներից:

$$r_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij} \text{ և } \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(t-1),$$

$$i = 1,2,\ldots,N\ ,\ t = 1,2,3,\ldots:$$

q_i մեծությունն անվանվում է անմիջական սպասվող եկամուտ i վիճակի համար:

Վեկտորական տեսքով հավասարումը կգրվի

$$\bar{v}(t) = r + P\bar{v}(t-1)\ ,\ n = 1,2,3,\ldots,$$

որտեղ $\bar{v}(t)$-ը N թվով $v_i(n)$ տարրերի վեկտոր է, որն անվանվում է լրիվ եկամուտների վեկտոր:

Այժմ տեսնենք, թե բրուտի օրինակում ինչպես է ստացվում սպասվելիք եկամուտը:

Ենթադրենք, որ նա ունեցել է հաջողակ ամանեղեն (համակարգը գտնվել է 1 վիճակում) և հաջորդ շաբաթ ունեցել է ոչ պակաս հաջողակ ամանեղեն (համակարգը 1 վիճակից անցել է 1 վիճակի) և այդ շաբաթվա համար ստացել 9 միավոր (ենթադրենք՝ 9 հազար դրամ) եկամուտ: Այսպիսով, $r_{11} = 9$: Եթե շաբաթը ավարտվել է անհաջողակ ամանեղենից անհաջողակ ամանեղենի անցումով (2 վիճակից անցել է 2 վիճակի), ապա բրուտը կորցնում է 7 միավոր, կամ $r_{22} = -7$: Ենթադրենք նաև, որ $r_{21} = r_{12} = 3$: Եկամուտների մատրիցը կլինի $R = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$:

Հաշվի առնելով, որ $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$, կարող ենք գտնել $\bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$:

Եթե բրուտն ունի հաջողակ ամանեղեն, ապա հաջորդ շաբաթվա սպասվելիք եկամուտը կլինի 6 միավոր, իսկ անհաջողակ ամանեղենի դեպքում սպասվող կորուստները կլինեն 3 միավոր:

Մինչև բրուտի գործունեության լավագույն վարքի դիտարկումը, որը ձևակերպված օրինակի վերջնական նպատակն է, դիտարժան են հետևյալ դեպքերը:

Ենթադրենք, որ բրուտն ուռում է իր գործը դադարեցնել t շաբաթ հետո: Նա, բնական է, կհետաքրքրվի սպասվելիք եկամտով: Այդ հարցին պատասխանում է (3) անդրադարձ հավասարումը, որի համար անհրաժեշտ է ունենալ $v_i(0)$ սկզբնական եկամուտները:

Եթե բրուտն իր գործը դադարեցնում է՝ վաճառելու (գործը մեկ ուրիշին տալու) նպատակով, ապա $v_1(0)$, $v_2(0)$ կլինեն գործի վաճառքի գները, եթե գործը դադարեցվում է համապատասխանաբար լավ կամ վատ վիճակներում:

Բրուտի սպասվելիք եկամուտները (հարմարության համար ընդունենք $v_1(0) = v_2(0) = 0$) համաձայն (3)-ի կլինեն՝

Բրուտի սպասվելիք լրիվ եկամուտները

t	0	1	2	3	4	5	...
$v_1(t)$	0	6	7,5	8,55	9,555	10,5555	...
$v_2(t)$	0	-3	-2,4	-1,44	-0,444	-0,4444	...

աղյուսակ 5

Այսպիսով, եթե մինչև գործի դադարեցումը մնացել է 5 շաբաթ, ապա բրուտի սպասվելիք լրիվ եկամուտը 10,5555 միավոր կլինի, եթե գտնվել է սկզբնական լավ վիճակում, և համապատասխանաբար՝ 0,5556 միավոր, եթե գտնվել է սկզբնական վատ վիճակում:

Աղյուսակում հաշվարկները շարունակելով 6-րդ և հաջորդ շաբաթների համար՝ կարելի է համոզվել, որ նայած գործի սկզբնական վիճակին՝ լրիվ եկամտի տարբերությունը կազմում է 10 միավոր, իսկ անցման յուրաքանչյուր քայլի համար (անկախ վիճակից) $v_1(t+1) - v_1(t) = v_2(t+1) - v_2(t) = 1$, բավականին մեծ t -երի համար:

Մարկովյան էրգոդիկ գործընթացի համար հայտնի է, որ մեծ t -երի համար գոյություն ունի S $N \times N$ մատրիցը՝ $S = (s_{ij}) = (\pi_i)$, և ճշմարիտ է վեկտորական տեսքով գրված հետևյալ բանաձևը.

$\bar{v}(t) = t \cdot \bar{g} + \bar{v}$, որտեղ $\bar{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_N)$, $g_i = \sum_j s_{ij} r_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i r_i = g$:

Բացված վիճակում (4) արտահայտությունը կգրվի՝

$v_i(t) = t \cdot g + v_i$:

v_i մեծությունը անվանվում է վիճակը բնութագրող պարամետր կամ կշիռ:

Դժվար չէ համոզվել, որ բրուտի խնդրում $v_1(t) = t + 50/9$, $v_2(t) = t - 40/9$, իսկ աղյուսակ 2-ի մեկնաբանությունները հիմնավորվում են (5) բանաձևով:

Հաջորդական որոշումների ընդունման անդրադարձ բանաձև: Նշանակենք D_i-ով $i = 1,2,\ldots,N$ վիճակներում տրված վարվելակերպերի բազմությունը: Կասենք, որ վարքը որոշված է, եթե բոլոր i և t թվերի համար որոշված է $d_i \in D_i$ վարվելակերպը: Լավագույն կհամարենք այնպիսի վարքը, որը սպասվող լրիվ եկամուտը առավելագույնի է հասցնում բոլոր i և t թվերի համար:

Այսպիսով, ցանկացած t-ի համար կունենանք

$$v_i(t+1) = \max_{d_i \in D_i} \sum_{i=1}^{N} p_{ij}^d [r_{ij}^d + v_j(t)], \; t = 0,1,2,\ldots:$$

Գրված անդրադարձ հավասարումը ԴԾ-ի ձեզ հայտնի օպտիմալության սկզբունքի կիրառություններից է:

Օգտվելով մեր նշանակումներից և հաշվի առնելով անմիջապես սպասվող եկամուտները՝ վերը բերված անդրադարձ հավասարումը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ.

$$v_i(t+1) = \max_{d_i \in D_i} [q_i^d + \sum_{i=1}^{N} p_{ij}^d v_j(t)], \qquad (*)$$

$i = 1,2,\ldots,N$, $t = 0,1,\ldots$:

Այս հավասարումների համակարգի լուծումը յուրաքանչյուր i-ի և t-ի համար կհուշի, թե ինչպիսի վարք ընտրել:

Լավագույն վարքը բաղկացած է այդ լուծումների հաջորդականությունից, որով և կորոշվի սպասվելիք առավելագույն եկամուտը վերջավոր T ժամանակի համար:

Բրուտի խնդրի սկզբնական տվյալները ամփոփված են աղյուսակ 6-ում: Այստեղ ենթադրվում է, որ բրուտն ունի չորս վարվելակերպ (տե՛ս, երկրորդ սյունակ) և դրանց համապատասխանող եկամուտների երկու մատրից (տե՛ս, չորրորդ սյունակ):

Բրուտի խնդրի սկզբնական տվյալները

Վիճակ i	Վարվելակերպ d_i	Անցման հավանականությունը		Եկամուտները		Անմիջապես սպասվող եկամուտը $q_i^{d_i}$
1.ամանեղենը հաջողակ է	վաճառք առանց գով.	0,5	0,5	9	3	6
	վաճառք գովազդով	0,8	0,2	4	4	4
2.ամանեղենը անհաջողակ է	աման.վաճ. առ.լավացմ	0,4	0,6	3	-7	-3
	աման.վաճ. լավացում.	0,7	0,3	1	-19	-5

աղյուսակ 7.7

Բրուտի խնդրի լուծումը: Օգտվելով աղյուսակ 3-ի տվյալներից և լուծելով անդրադարձ հավասարումների (*) համակարգը տրված $v_i(0)=0$, $i=1,2$ պայմաններով՝ կստանանք բրուտի խնդրի լուծումը, որը ներկայացված է աղյուսակ 7.8-ում:

Բրուտի խնդրի լուծումը

t	0	1	2	3	4	...
$v_1(t)$	0	6	8,2	10,22	12,222	...
$v_2(t)$	0	-3	-1,7	0,23	2,223	...
$d_1(r)$	-	1	2	2	2	...
$d_2(r)$	-	1	2	2	2	...

աղյուսակ 7.8

Այսպիսով, դիտարկված օրինակի համար լավագույն վարքը հետևյալն է. սկսած երկրորդ քայլից (շաբաթից) բրուտը պետք է, եղած վիճակից անկախ, կիրառի 2-րդ վարվելակերպը:

Մարկովյան գործընթացներին առավել խոր ծանոթանալու ցանկություն ունեցողներին խորհուրդ ենք տալիս կարդալ [19] գիրքը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Մ.Ա.Սահակյան, Ս.Գ.Սարգսյան, Ֆ.Ռ.Կարապետյան. Մաթեմատիկական ծրագրավորում, ԵՊՀ հրատ., Երևան, 1983թ.:
2. Փոլ Ա.Սամյուելսն, Ուիլյամ Դ.Նորդհաուս. Տնտեսագիտություն-1 (Մակրոտնտեսագիտություն), "Ապոլոն", Երևան 1995:
3. М.Аоки. Введение в методы оптимизации. Изд "Наука", М. 1977.
4. Л.Н.Абрамов, В.Ф.Капустин. Математическое программирование. Изд. "ЛГУ", Л. 1976.
5. Г.А.Ашманов. Линейное программирование. Изд. "Наука", М. 1981.
6. У.Баумоль, Экономическая теория и исследование операций. Изд. "Советское радио", М. 1965.
7. Р.Беллман, С.Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. Изд. "Наука". М. 1965.
8. Г.Вагнер. Основы исследования операций. тт. 1-3, Изд. "Мир", М.1973.
9. Д.Гейл. Теория линейных экономических моделей. Изд. "ИЛ", М. 1963.
10 .М.Гэри, Д.Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Изд. "Мир", М, 1982.
11. Дж. Б.Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. Изд. "Прогресс", М. 1966.
12. Зангвилл В.И. Нелинейное программирование. Едыний подход. Изд. "Советское Радио", М. 1969.
13. М.Интрилигатор, Математические методы оптимизации и экономическая теория. Изд. "Прогресс", М 1975.
14. Исследование операций 1. Методологические основы и математические методы. Под. ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. Изд. "Мир", М. 1981.
15. В.Ф.Капустин. Практические занятия по курсу математического программирования. Изд. ЛГУ. Л. 1976.
16. В.Г.Карманов. Математическое программирование. Изд. "Наука", М. 1980.
17. Г.П.Кюнци, В.Крелле. Нелинейное программирование. Изд. "Советское Радио". М. 1972.
18. И.П.Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В.Черников, М. Шор. Линейное и нелинейное программирование, Изд. "Вище школа". Киев, 1975.
19. Х.Майн, С.Осаки. Марковские процессы принятия решений. Изд. "Наука". М. 1977.

20. В.Макаров. Модели и компьютеры в экономике.
Изд. "Знание", М. 1979.
21. Б.Муртаф. Современное линейное программирование.
Изд. "Мир", 1984.
22. Г.Мэнкью. Макроэкономика, Изд. "МГУ", М. 1994.
23. Х.Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика.
Изд. "Мир", М. 1972.
24. В.Опойцев. Нелинейная системостатика. Изд. "Наука", М. 1986.
25. Х.Пападимитриу, К.Стайглиц. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. Изд. "Мир", М. 1985.
26. М.Свами, К.Тхуласираман. Графы, сети и алгоритмы.
Изд. "Мир", М., 1984.
27. Х.Таха. Введение в исследование операций, тт. 1-2,
Изд. "Мир", М. 1985.
28. А.Фиакко, Г.Мак-Карлик. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. Изд. "Мир". М, 1972.
29. Д.Филлипс, А.Гарсия-Диас. Методы анализа сетей.
Изд. "Мир", М. 1984.
30. Л.Форд, Д.Фалкерсон. Потоки в сетях. Изд. "Мир", М., 1966.
31. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование.
Изд. "Мир". М, 1967.
32. Д.Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование.
Изд. "Мир", М. 1973.
33. Т.Ху. Целочисленное программирование и потоки в сетях.
Изд. "Мир", М. 1974.
34. Р.Ховард. Динамическое программирование и марковские процессы.
Изд. "Наука". М. 1964.
35. David R.Anderson, Dennis J.Sweeney, Thomas A.Williams. Quantitative Methods for Business. Fifth Ed. West Publishing Co.
36. Frank S.Budnick, Dennis McLeavey, Richard Mojena, Principles of Operations Research for Management. 1988 Second Edition, Irwin.
37. Gillbert Gordon, Israel Pressman, Sanford Cohn. Quantitative Decision Making for Business. Third Edition. Prentince. Hall Enlgewood Cliffs.
37. James L.Riggs, Michael S.Inoue. Intorduction to Operation Research and Management Science. McGraw Hill Book Company.
38. Bernard W.Taylor. Introduction to Management Science. Allyn and Bacon. Boston, London, Sydney, Toronto.

ԼԵՎՈՆ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ
Սանկտ Պետերբուրգի
համալսարանի պրոֆեսոր,

Հավելված

ԱՆՀԱԿԱՄԱՐՏ ԽԱՂԵՐ

§ 1. Բնականոն տեսքի անդաշինք խաղ

1.1. Ներհակ պայմաններում որոշումների կայացման իրական խնդիրները բնութագրվում են մասնակիցների մեծ թվով և, որպես դրա հետևանք, վիճահարույց իրավիճակի անհակամարտությամբ: Եթե խոսենք երկու անձանց ներհակության և դրա մոդելների մասին, ապա կարելի է նկատել, որ այն չի սպառվում միայն հակամարտ դեպքով: Բանը նրանում է, որ խաղացողների շահերը կարող են հատվել, բայց անպայման չէ, որ հակադիր լինեն: Դա, մասնավորապես, կարող է հանգեցնել երկու խաղացողների համար փոխշահավետ իրավիճակների (ինչն անհնար է հակամարտ խաղում), որն իմաստավորում է այդպիսի համագործակցությունը (համաձայնեցված որոշումների ընտրությունը)՝ հանգեցնելով երկու խաղացողների շահումների մեծացմանը: Սակայն հնարավոր են այնպիսի ներհակություններ, որ խաղի կանոններով բացառվեն համագործակցությունն ու համաձայնությունը: Այդ պատճառով էլ անհակամարտ խաղերում տարբերում են անդաշինք վարքագիծը, երբ խաղացողների միջև պայմանավորվածությունն արգելված է խաղի կանոններով, և համագործակցված վարքագիծը, երբ թույլատրվում են համաձայնությունները և կողմնակի վճարումներ կատարելը: Դիտարկենք առաջին դեպքը.

1.2 *Սահմանում*: $\Gamma = (N, \{X_i\} i \in N, \{H_i\} i \in N)$ համակարգը, որտեղ $N = \{1,2,\dots,n\}$-ը խաղացողների բազմությունն է, X_i-ն՝ i-րդ խաղացողի մաքուր վարվելակերպերի բազմությունը, H_i-ն՝ խաղացողների վարվելակերպերի բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի՝ $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (խաղի իրավիճակների բազմության) վրա որոշված i-րդ խաղացողի շահումի ֆունկցիան է, կոչվում է անդաշինք խաղ:

n անձանց անդաշինք խաղն ընթանում է հետևյալ ձևով. խաղացողները միաժամանակ և իրարից անկախ $x_i \in X_i$ բազմությունից ընտրում են x_i-ն, և արդյունքում ձևավորվում է $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ իրավիճակը: Դրանից հետո յուրաքանչյուր i խաղացող ստանում է $H_i(x)$ շահում: Սրանով խաղն ավարտվում է: Եթե X_i մաքուր վարվելակերպերի բազմությունները վերջավոր են, ապա խաղը կոչվում է n թվով անձանց անդաշինք վերջավոր խաղ:

1.3 Երկու մասնակիցներով անդաշինք խաղը կոչվում է երկանձ խաղ: Այսպիսով, երկանձ անդաշինք խաղը որոշվում է $\Gamma = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ համակարգով, որտեղ X_1-ը առաջին խաղացողի վարվելակերպերի բազմությունն է, X_2-ը՝ երկրորդ խաղացողի վարվելակերպերի բազմությունը, $X_1 \times X_2$-ը՝ խաղի իրավիճակների բազմությունը, իսկ $H_1 : X_1 \times X_2 \to R^1$-ը և $H_2 : X_1 \times X_2 \to R^2$-ը՝ համապատասխանաբար, “1” և “2” խաղացողների շահումների ֆունկցիաներն են: Երկանձ անդաշինք վերջավոր խաղը կոչվում է երկմատրից խաղ: Դա պայմանավորված է նրանով, որ խաղացողների մաքուր վարվելակերպերի բազմությունը համապատասխանաբար համարակալելով $1,2,\dots,m$ և $1,2,\dots,n$ թվերով՝ շահումների ֆունկցիաները կարելի է գրել երկու մատրիցների տեսքով

$$H_1 = A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots\dots \alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad H_2 = B = \begin{pmatrix} \beta_{11} \dots\dots \beta_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{m1} \dots \beta_{mn} \end{pmatrix}:$$

Ընդ որում A և B մատրիցների α_{ij}, β_{ij} տարրերը համապատասխանաբար 1 և 2 խաղացողների շահումներն են (i, j) իրավիճակում, երբ $i \in \overline{M}$, $j \in \overline{N}$, $\overline{M} = \{1,2,\dots,m\}$, $\overline{N} = \{1,2,\dots,n\}$:

Ըստ վերը շարադրվածի, երկմատրից խաղն ընթանում է հետևյալ ձևով. առաջին խաղացողն ընտրում է տողի i համարը, իսկ երկրորդը՝ (միաժամանակ և առաջինից անկախ) սյան j համարը: Արդյունքում 1 խաղացողը ստանում է $\alpha_{ij} = H_1(x_i, y_j)$ շահումը, իսկ 2 խաղացողը՝ $\beta_{ij} = H_2(x_i, y_j)$ շահումը:

Նկատենք, որ A և B մատրիցներով երկմատրից խաղը կարելի է նկարագրել նաև $(m \times n)$-չափանի (A, B) մատրիցով, որի յուրաքանչյուր տարրը (α_{ij},β_{ij}) թվերի զույգն է, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$: A և B մատրիցներով որոշված խաղը նշանակենք $\Gamma=(A,B)$:

Եթե երկանձ անդաշինք խաղն այնպիսին է, որ ցանկացած $x\in X_1$ և $y\in X_2$-ի համար $H_1(x,y)=-H_2(x,y)$, ապա Γ-ն հակամարտ խաղ է: Մասնավոր դեպքում, երբ երկմատրից խաղի $\alpha_{ij}=-\beta_{ij}$, ստանում ենք մատրիցային խաղ:

1.4 *Օրինակ 1.* ("Ընտանեկան վեճ"): Դիտարկվում է

$$(A,B)=\begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \\ \left(\begin{array}{cc}(4,1) & (0,0)\\ (0,0) & (1,4)\end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}$$

մատրիցով երկմատրից խաղը:

Կան այս խաղի տարբեր մեկնաբանություններ, բայց առավել հայտնին հետևյալն է:

Ամուսինը (խաղացող 1) և կինը (խաղացող 2) կարող են երեկոյան երկու ժամանցներից ընտրել մեկը՝ կա՛մ ֆուտբոլի մրցախաղը (α_1,β_1), կա՛մ թատրոնը (α_2,β_2): Եթե նրանք ունեն տարբեր ցանկություններ (α_1,β_2) կամ (α_2,β_1), ապա մնալու են տանը: Ամուսինը գերադասում է ֆուտբոլի մրցախաղը, իսկ կինը՝ թատրոնը: Սակայն երկուսի համար առավել կարևորը երեկոն միասին անցկացնելն է, քան առանձին (թեկուզ և գերադասելի):

Օրինակ 2. ("Խաչմերուկ" խաղ): Երկու ավտովարորդներ, որոնք շարժվում են փոխուղղահայաց ճանապարհներով, միաժամանակ հանդիպում են խաչմերուկում: Նրանցից յուրաքանչյուրը կարող է կանգ առնել (1-ին վարվելակերպ՝ α_1 կամ β_1) և շարժվել (2-րդ վարվելակերպ՝ α_2 կամ β_2): Ենթադրվում է, որ խաղացողներից յուրաքանչյուրը նախընտրում է կանգ առնել, քան ենթարկվել վթարի, և շարժվել, եթե մյուսը կանգ է առնում: Այս հակադրումը կարելի է ձևայնացնել որպես

$$(A,B)=\begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \\ \left(\begin{array}{cc}(1,1) & (1-\xi,2)\\ (2,1-\xi) & (0,0)\end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}$$

մատրիցով երկմատրից ·խաղ (ոչ բացասական թիվը համապատասխանում է այն դժգոհությանը, որ զգում է կանգ առած և ճանապարհը խաղընկերոջը զիջած խաղացողը):

Օրինակ 3: Սահմանափակ ռեսուրսի բաշխումը (հաշվի առնելով սպառողների շահերը): Ենթադրենք՝ n սպառողներ կարող են ծախսել (կուտակել) $A>0$ քանակությամբ որևէ սահմանափակ ռեսուրս: Նշանակենք i -րդ սպառողի ծախսած (կուտակած) ռեսուրսի ծավալը x_i -ով: Յուրաքանչյուր սպառողի ստացած շահումը՝ կախված $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ վեկտորից, գնահատվում է $h_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ֆունկցիայով, եթե սպառված (կուտակված) ռեսուրսի ընդհանուր ծավալը չի գերազանցում տրված դրական $\theta<A$ մեծությունը, այսինքն՝ եթե $\sum_{i=1}^{n}x_i\le\theta$, $x_i\ge 0$, հակառակ դեպքում, i -րդ սպառողի շահումը հաշվվում է $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ֆունկցիայի միջոցով, ընդ որում ենթադրվում է, որ եթե $\sum_{i=1}^{n}x_i>0$, ապա ռեսուրսի օգտակարությունը խիստ նվազում է՝ $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)<h_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

Դիտարկենք

$$\Gamma=(N,\{x_i\}i\in N,\{H_i\}i\in N)$$

անհակամարտ բնականոն տեսքի խաղը, որտեղ խաղացողների շահումների ֆունկցիաներն են՝

$$H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}h_i(x_1,x_2,\ldots,x_n), & \text{եթե } \sum_{i=1}^{n}x_i\le\theta\\ g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n), & \text{եթե } \sum_{i=1}^{n}x_i>\theta\end{cases}$$

$$X_i=[0,\alpha_i],\ 0\le\alpha_i\le A,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=A,\ N=\{1,2,\ldots,n\}:$$

Օրինակ 4: (Աղտոտումից օդային ավազանի պահպանման տեսախաղային մոդել): Արդյունաբերական շրջանում գտնվող n ձեռնարկություններից յուրաքանչյուրն ունի մթնոլորտ վտանգավոր խառնուրդների արտանետման աղբյուր: Ըստ ժամանակի և տիրույթի, միջինացված վնասակար խառնուրդի մեծության մոտավոր արժեքը մթնոլորտում աղտոտման աղբյուրների դեպքում կարելի է հաշվել $q=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$, $0\le x_i\le a_i$, $i=1,2,\ldots,n$ բանաձևով: Ենթադրենք վնասակար խառնուրդի սահմանային թույլատրելի խտության (ՍԹԽ) արժեքը $\theta<\sum_{i=1}^{n}c_ia_i$ է: Ձեռնարկությունները համարելով խաղացողներ՝ կառուցենք մթնոլորտի աղտոտման վիճակագրույց իրավիճակը մոդելավորող խաղ: Ենթադրենք՝ յուրաքանչյուր i ձեռնարկություն կարող է շահագործման ծախսերը նվազեցնել՝ մեծացնելով x_i արտանետումը: Սակայն եթե աղտոտման մակարդակը գերազանցում է (ՍԹԽ) մեծությանը, տուգանվում է $s_i > 0$ չափով: Ենթադրենք՝ i խաղացողը (ձեռնարկությունը) հնարավորություն ունի $X_i = [0, a_i]$ բազմությունից ընտրելու x_i արժեքը: Խաղացողների շահումների ֆունկցիաներն են,

$$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ q \leq \theta \\ h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - s_i, \ q > \theta \end{cases}$$

որտեղ $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիաները անընդհատ են և աճող ըստ x_i -ի:

§2. Օպտիմալության սկզբունքները անդաշինք խաղերում

2.1 Անհակամարտ խաղերի տեսության մեջ օպտիմալության սկզբունքների մշակման միասնական մոտեցում չկա: Ըստ էության, կա այդպիսի սկզբունքների մի ամբողջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը հիմնվում է խաղացողների վարքագծի և խաղի կառուցվածքին վերաբերող որոշ լրացուցիչ ենթադրությունների վրա:

Բնական է ենթադրել, որ Γ խաղի յուրաքանչյուր խաղացող ձգտում է հասնելու այնպիսի x իրավիճակի, որ իր շահումի ֆունկցիայի արժեքը լինի առավելագույնը: Սակայն շահումի H_i ֆունկցիան կախված է ոչ միայն i -րդ խաղացողի վարվելակերպից, այլ նաև մյուս խաղացողների ընտրած վարվելակերպերից: Այդ պատճառով $\{x^i\}$ իրավիճակները, որոնք i -րդ խաղացողին տալիս են մեծ շահումներ, մյուս խաղացողների համար կարող են այդպիսին չլինել: Այսպիսով, ճիշտ այնպես, ինչպես հակամարտ խաղի դեպքում առավելագույն շահումն ստանալու խաղացողների ձգտումը ներհակ բնույթ ունի, և այն հարցադրումը, թե խաղի մեջ որ վարքագիծն է "լավ" կամ "լավագույն", ինքնին վիճելի է: Այստեղ կան մի քանի մոտեցումներ: Դրանցից են Նեշի հավասարակշռությունը և դրա տարբեր ընդհանրացումները: Այն դեպքում, երբ Γ խաղը հակամարտ է, Նեշի հավասարակշռությունը համընկնում է հավասարակշռություն հասկացության հետ, որը օպտիմալության հիմնական սկզբունքն է հակամարտ խաղում:

Դիցուք՝ $x=(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$-ը Γ խաղի կամայական իրավիճակ է, իսկ x_i-ն՝ i-րդ խաղացողի որևէ վարվելակերպ: Կառուցենք մի իրավիճակ, որը x-ից տարբերվում է միայն նրանով, որ i-րդ խաղացողի x_i վարվելակերպը փոխարինված է x_i'-ով: Արդյունքում կստանանք $x=(x_1,\dots,x_{i-1},x_i',x_{i+1},\dots,x_n)$ իրավիճակը, որը կնշանակենք $(x|x_i')$: Ակնհայտ է, որ եթե x_i-ը և x_i'-ը համընկնում են, ապա $(x|x_i')=x$:

Սահմանում: $x^*=(x_1^*,\dots,x_i^*,\dots,x_n^*)$ իրավիճակը կոչվում է Նեշի հավասարակշռություն, եթե բոլոր $x_i\in X_i$ և $i=1,2,\dots,n$-երի համար ճշմարիտ է

$$H_i(x^*)\ge H_i(x^*|x_i) \qquad (2.1)$$

անհավասարությունը:

2.2 Նեշի հավասարակշռության սահմանումից հետևում է, որ ոչ մի i խաղացող շահագրգռված չէ հրաժարվելու x_i^* վարվելակերպից: (2.1)-ի համաձայն, x_i^*-ի փոխարեն x_i վարվելակերպի դեպքում, նրա շահումը միայն կարող է նվազել, երբ մնացած խաղացողները չեն հրաժարվում հավասարակշիռ x^* իրավիճակը ձևավորող իրենց վարվելակերպերից: Այսպիսով, եթե խաղացողները նախապես պայմանավորվել են օգտվել x^* հավասարակշիռ իրավիճակին պատկանող վարվելակերպերից, ապա պայմանավորվածությունից անհատական շեղումը շահավետ չէ հրաժարվող խաղացողի համար:

Սահմանում: $x_i^*\in X_i$ վարվելակերպը կոչվում է հավասարակշիռ, եթե մտնում է Նեշի հավասարակշռության թեկուզ մեկ իրավիճակի մեջ:

Երկու անձանց $\Gamma=(X_1,X_2,H_1,H_2)$ անդաշին խաղի համար (x^*,y^*) իրավիճակը հավասարակշիռ է, եթե

$$H_1(x,y^*)\le H_2(x^*,y^*),\ H_2(x^*,y)\le H_1(x^*,y^*) \qquad (2.2)$$

անհավասարությունները ճշմարիտ են բոլոր $x\in X_1$ և $y\in Y_2$ դեպքում:

Մասնավորապես, $\Gamma(A,B)$ $(m\times n)$ երկմատրից խաղի համար (i^*, j^*) զույգը կլինի Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ, եթե

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,j^*} \le \alpha_{i^*,j^*}, \\ &\beta_{i^*,j} \le \beta_{i^*,j^*} \end{aligned} \qquad (2.3)$$

անհավասարությունները ստույգ են բոլոր $i\in M$ տողերի և $j\in N$ սյուների համար: Այսպես, 1 օրինակի համար հավասարակշիռ են (α_1,β_1) և (α_2,β_2) իրավիճակները, իսկ 2 օրինակի համար՝ (α_1,β_2) և (α_2,β_1) -ը:

Հիշեցնենք հակամարտ խաղերի օպտիմալության սկզբունքները: Դիտարկենք $\Gamma=<X,Y,H>$ հակամարտ խաղը: Յուրաքանչյուր խաղացողի վերջնական շահումի մեծությունը կախված է ինչպես իր, այնպես էլ հակառակորդի վարվելակերպից: Այդ պատճառով, ձգտելով ստանալ ըստ հնարավորին մեծ շահում, յուրաքանչյուր խաղացող պարտավոր է իր վարվելակերպն ընտրելիս հաշվի առնել հակառակորդի վարքագիծը:

Խաղերի տեսությունում ենթադրվում է, որ երկու խաղացողներն էլ գործում են խելամտորեն, այսինքն ձգտում են ստանալ առավելագույն շահում՝ հաշվի առնելով, որ մրցակիցը գործում է իր համար լավագույն ձևով:

Քննարկենք այն հարցը, թե խաղում ի՞նչ է երաշխավորված առաջին խաղացողի համար:

Ենթադրենք՝ խաղացողն ընտրել է x վարվելակերպը: Այդ ժամանակ վատագույն դեպքում նա "կշահի" $\min_y H(x,y)$: Այդ պատճառով նա միշտ կարող է ապահովել $\max_x \min_y H(x,y)$ մեծության շահում (այստեղ $\min(\max)$-ը վերցվում է ըստ բոլոր $y\in Y$, $x\in X$): Եթե էքստրեմումները հասանելի չեն, ապա առաջին խաղացողը միշտ կարող է ստանալ

$$\underline{v} = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) \qquad (2.4)$$

մեծությանը ինչքան ասես մոտ շահում, որը կկոչենք խաղի ստորին արժեք: Իսկ եթե (2.4)-ի էքստրեմումները հասանելի են (օրինակ, մատրիցային խաղերի մեջ), ապա $\underline{v}$ մեծությունը նաև կոչվում է մաքսիմին: Նվազագույն շահումը առավելագույնի հասցնելու միջոցով x վարվելակերպերի կառուցման սկզբունքը կոչվում է մաքսիմինի սկզբունք, իսկ այդ սկզբունքով ընտրված x վարվելակերպը՝ 1 խաղացողի մաքսիմինային վարվելակերպ:

Նույն կարգի դատողություններ կարելի է կիրառել 2 խաղացողի փոխարեն: Ենթադրենք՝ նա ընտրել է y վարվելակերպ: Այդ ժամանակ վատագույն դեպքում նա "տանուլ" է տալիս $\max_x H(x,y)$: Այդ պատճառով 2-րդ խաղացողը միշտ կարող է իր համար ապահովել $\min_y \max_x H(x,y)$ մեծությունը:

$$\bar{v} = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} H(x,y) \tag{2.5}$$

թիվը կոչվում է խաղի վերին արժեք, իսկ այն դեպքում, երբ (2.5)-ի մեջ էքստրեմումները հասանելի են՝ մինիմաքս: Ընդ որում, առավելագույն կորուստը նվազագույնի հասցնելու միջոցով ստացված y վարվելակերպի ձևավորման սկզբունքը կոչվում է մինիմաքսի սկզբունք, իսկ այդ սկզբունքով ընտրված y վարվելակերպը՝ 2 խաղացողի մինիմաքսային վարվելակերպ: Ընդգծենք, որ մինիմաքսի (մաքսիմինի) վարվելակերպի գոյությունը որոշվում է (2.5)-ով և (2.4)-ով արտաքին էքստրեմումի հասանելիությամբ:

Դիցուք՝ տրված է $m\times n$ մատրիցային խաղը: Այդ դեպքում (2.4)-ի և (2.5)-ի մեջ էքստրեմումները հասանելի են, իսկ խաղի ստորին և վերին արժեքները համապատասխանաբար հավասար են՝

$$\bar{v} = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} \alpha_{ij} \tag{2.6}$$

$$\underline{v} = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} \alpha_{ij}: \tag{2.7}$$

Խաղի մինիմաքսերը և մաքսիմինները կարելի է որոշել հետևյալ ձևով.

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots\cdots\cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}
& \left.\begin{matrix} \min_j \alpha_{ij} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \min_j \alpha_{mj} \end{matrix}\right\} \underline{v} = \max_i \min_j \alpha_{ij} \\
\underbrace{\max_i \alpha_{i1} \;\ldots\; \max_i \alpha_{in}}_{\bar{v} = \min_j \max_i \alpha_{ij}} &
\end{array}$$

Ցանկացած հակամարտ $\Gamma =< X, Y, H >$ խաղի համար ճշմարիտ է.

Լեմ. Γ հակամարտ խաղում՝

$$\underline{v} \le \bar{v}, \tag{2.8}$$

կամ,

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} H(x,y) \le \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} H(x,y): \tag{2.9}$$

Լեմի ապացույցը հետևում է գլ. 5 §6-ի թեորեմ 2-ից, որտեղ պետք է **max**-ը փոխարինել **sup**-ով, իսկ **min**-ը՝ **inf**-ով:

2.3 Դիտարկենք հակամարտ խաղում մասնակիցների վարքագծի օպտիմալության հարցը: Հակամարտ $\Gamma = < X, Y, H >$ խաղի մեջ բնական է այդպիսի $(X^*, Y^*) \in X \times Y$ իրավիճակը համարել լավագույն, որից հրաժարվելը ոչ մի խաղացողի համար շահավետ չէ: Խաղերի տեսության մեջ օպտիմալության այդպիսի սկզբունքը կոչվում է հավասարակշռության սկզբունք:

Սահմանում: $\Gamma = < X, Y, H >$ հակամարտ խաղի համար (x^*, y^*) իրավիճակը կոչվում է հավասարակշռության իրավիճակ կամ թամբակետ, եթե

$$H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) \le H(x^*, y) \qquad (2.10)$$

բոլոր $x \in X$, $y \in Y$:

Եթե (2.10)-ում նշանակենք $H_1 = -H_2 = H$, ապա դա Նեշի հավասարակշռության մասնավոր դեպքն է: Նշանակենք Γ խաղի բոլոր հավասարակշիռ իրավիճակների բազմությունը $Z(\Gamma)$-ով: Պարզ է, որ $Z(\Gamma) \in X \times Y$:

Γ մատրիցով խաղի դեպքում, խոսքը վերաբերում է շահումների մատրիցի թամբակետերին, այսինքն՝ այնպիսի (i^*, j^*) կետերին, որ բոլոր $i \in M$ և $j \in N$-երի համար ճիշտ է

$$a_{ij^*} \le \alpha_{i^*j^*} \le a_{i^*j}:$$

անհավասարումը:

Օրինակ՝ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ մատրիցով խաղի համար (2.2)-ը հավասարակշիռ իրավիճակ (թամբակետ) է:

Հակամարտ խաղում հավասարակշիռ իրավիճակների բազմությունն ունի հետևյալ հատկությունները.

Թեորեմ: Ենթադրենք (x_1^*, y_1^*)-ը և (x_2^*, y_2^*)-ը հակամարտ Γ խաղի երկու կամայական հավասարակշիռ իրավիճակներ են: Այդ դեպքում.

1. $H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*) = H(x_1^*, y_2^*) = H(x_2^*, y_1^*)$

2. $(x_1^*, y_2^*), (x_2^*, y_1^*) \in Z(\Gamma)$: $\qquad$ (2.11)

Թեորեմից հետևում է, որ շահումի ֆունկցիան բոլոր հավասարակշիռ իրավիճակների համար ընդունում է միևնույն արժեքը: Ուստի ներմուծենք հետևյալ սահմանումը.

Սահմանում: Դիցուք՝ (x^*, y^*)-ը Γ խաղի հավասարակշիռ իրավիճակն է: Այդ դեպքում

$$v = H(x^*, y^*) \tag{2.12}$$

թիվը կոչվում է Γ խաղի արժեք:

Γ խաղի (x^*, y^*) հավասարակշիռ իրավիճակը և v արժեքը միասին կազմում են խաղի լուծումը:

Այժմ բացահայտենք հավասարակշռության սկզբունքի և մինիմաքսի և մաքսիմինի սկզբունքների փոխադարձ կապը հակամարտ խաղում:

Թեորեմ: $\Gamma < X, Y, H >$ խաղի հավասարակշիռ իրավիճակի գոյության համար անհրաժեշտ և բավարար է, որ գոյություն ունենան $\min\limits_{y} \sup\limits_{x} H(x,y)$ և $\max\limits_{x} \inf\limits_{y} H(x,y)$, այնպես, որ

$$v = \max_{x} \inf_{y} H(x,y) = \min_{y} \sup_{x} H(x,y) = v: \tag{2.13}$$

Ընդ որում 1 խաղացողի մաքսիմինային x_0 վարվելակերպը և 2 խաղացողի մինիմաքսային y_0 վարվելակերպը ձևավորում են Γ խաղի (x_0, y_0) հավասարակշիռ իրավիճակը:

Այն խաղերը, որոնց համար գոյություն ունեն հավասարակշիռ իրավիճակներ, կոչվում են լիորոշ խաղեր: Տվյալ թեորեմը բացահայտում է խաղի լիորոշության հայտանիշը ((2.13) պայմանը):

Հետևանք: Որպեսզի $(m \times n)$ մատրիցային Γ խաղը լինի լիորոշ, անհրաժեշտ և բավարար է, որ

$$\min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} \alpha_{ij} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} \alpha_{ij}: \tag{2.14}$$

Օրինակ՝ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ մատրիցային խաղի համար (2.1)-ը հավասարակշիռ իրավիճակ է: Ընդ որում՝ $\min\limits_{j} \max\limits_{i} \alpha_{ij} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} \alpha_{ij} = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ մատրիցային խաղի համար հավասարակշիռ իրավիճակ գոյություն չունի, քանի որ $\min\limits_{j} \max\limits_{i} \alpha_{ij} = 1 > \max\limits_{i} \min\limits_{j} \alpha_{ij} = 0$:

Հիշեցնենք, որ $\Gamma=(X_1,X_2,H)$ հակամարտ խաղի համար $X_1\times X_2$-ին պատկանող (x^*,y^*) զույգը հավասարակշիռ իրավիճակ է, եթե

$$H(x,y^*)\le H(x^*,y^*)\le H(x^*,y),\ x\in X_1,\ y\in X_2:$$

Հակամարտ խաղերի հիմնական հատկությունները են.

1^0. Խաղացողին շահավետ չէ հակառակորդին հայտնել այն վարվելակերպերը (մաքուր կամ խառը), որ ինքը պատրաստվում է կիրառել: Իհարկե, եթե խաղացողը մտադիր է օգտագործել լավագույն վարվելակերպը, ապա նրա շահումը չի նվազի այն բանից, որ նա հայտարարում է այդ մասին, բայց դրանից նա ոչինչ չի շահի:

2^0. Դիցուք՝ $Z(\Gamma)$-ն Γ խաղի հավասարակշիռ իրավիճակների բազմություն է: Եթե $(x,y)\in Z(\Gamma)$-ն և $(x',y')\in Z(\Gamma)$-ն Γ խաղի հավասարակշիռ իրավիճակներ են, իսկ v-ն խաղի արժեքն է, ապա

$$(x',y)\in Z(\Gamma),\ (x,y')\in Z(\Gamma), \tag{2.15}$$

$$v=H(x,y)=H(x',y')=H(x,y')=H(x',y): \tag{2.16}$$

3^0. Խաղացողները շահագրգռված չեն համատեղ գործողությունների մշակման համար շփումներ ունենալու խաղից առաջ:

4^0. Եթե Γ խաղի համար գոյություն ունի հավասարակշիռ իրավիճակ, իսկ x-ը և y-ը համապատասխանաբար 1 և 2 խաղացողների մաքսիմինային և մինիմաքսային վարվելակերպերն են, ապա $(x,y)\in Z(\Gamma)$ հավասարակշիռ իրավիճակ է և՝ ընդհակառակը:

Պարզաբանենք, արդյո՞ք երկմատրից խաղերն օժտված են այս հատկություններով:

Օրինակ 5: Դիտարկենք "ընտանեկան վեճ" խաղը: Ինչպես արդեն նշվեց, այն ունի երկու հավասարակշիռ իրավիճակ՝ (α_1,β_1) և (α_2,β_2): Ընդ որում (α_1,β_1) իրավիճակը շահավետ է առաջին խաղացողի համար, իսկ (α_2,β_2)-ը՝ երկրորդ խաղացողի: Դա հակասում է (2.16)-ին, քանի որ այս իրավիճակներում խաղացողների շահումները տարբեր են: Այնուհետև նշենք, որ թեպետ (α_1,β_1), (α_2,β_2)-ը հավասարակշիռ իրավիճակներ են, (α_1,β_2) և (α_2,β_1) զույգերը Նեշի հավասարակշռության իրավիճակներ չեն, այսինքն՝ 2^0 հատկությամբ օժտված չեն:

Եթե 1-ին խաղացողը խաղընկերոջը հայտնում է, որ մտադիր է ընտրելու α_1 վարվելակերպը, և եթե 2-րդ խաղացողը համոզված է, որ նա այդպես էլ կվարվի, ապա իրեն ոչինչ չի մնա անելու, քան ընտրելու β_1 վարվելակերպը: Համանման դատողություններ կարելի է անել և երկրորդ խաղացողի համար: Այսպիսով, խաղացողներից յուրաքանչյուրի համար շահավետ է առաջինը հայտարարել իր վարվելակերպի մասին, որը հակասում է հակամարտ խաղերի 1^0 հատկությանը:

Ենթադրենք, որ խաղացողները մինչև խաղն սկսելը միմյանց հետ չեն շփվում, այլ միաժամանակ և իրարից անկախ են ընտրում իրենց վարվելակերպերը (ինչպես որ նախատեսվում է անդաշինք խաղի կանոններով): Կատարենք դատողություններ 1-ին խաղացողի փոխարեն: Նրան ձեռնտու է, որ իրականացվի (α_1, β_1) իրավիճակը: Բայց 2-րդ խաղացողին ձեռնտու է (α_2, β_2) իրավիճակը: Ուստի, եթե 1-ին խաղացողն ընտրի α_1 վարվելակերպը, ապա 2-րդը կարող է ընտրել β_2 վարվելակերպը, և նրանք երկուսն էլ տանուլ կտան (շահումների վեկտորն է (0,0)): Այդ դեպքում 1-ին խաղացողի համար իմաստ ունի ընտրել α_2 վարվելակերպը, քանի որ (α_2, β_2) իրավիճակի դեպքում ինքը կունենա 1-ի հավասար շահում: Բայց երկրորդ խաղացողը համանման դատողություններով կարող է ընտրել β_1 վարվելակերպը, և այս դեպքում 2 խաղացողներն էլ (α_2, β_1) իրավիճակում դարձյալ տանուլ կտան:

Այսպիսով, տեղի ունի այն դեպքը, երբ իրավիճակը ձեռնտու է (և այդ իսկ պատճառով անկայուն) 1-ին խաղացողի համար: Նմանօրինակ (2-րդ խաղացողի տեսանկյունից) կարելի է հետազոտել (α_2, β_2) իրավիճակը:

Այսպիսով, խաղացողներին ձեռնտու է խաղն սկսելուց առաջ պայմանավորվել համատեղ գործողությունների մասին, որը հակասում է 3^0 հատկությանը: Դժվարություններ են առաջանում նաև այն պատճառով, որ մաքսիմինային և մինիմաքսային վարվելակերպերի զույգը հավասարակշիռ չէ:

Այսպիսով, ունենք խաղի մի այնպիսի օրինակ, որի համար հակամարտ խաղի 1^0-4^0 հատկություններից ոչ մեկը տեղի չունի:

Եվ այսպես, Նեշի հավասարակշռության տարբեր վիճակներում խաղացողների վեկտորները կարող են տարբեր լինել: Բացի այդ, Նեշի հավասարակշռության իրավիճակների բազմությունը, ի տարբերություն հակամարտ խաղերի հավասարակշիռ իրավիճակների բազմության, ուղղանկյունաձև չէ: Եթե $x = (x_1, \ldots, x_n)$-ը և $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$-ը հավասարակշռության երկու տարբեր իրավիճակներ են, ապա x'' իրավիճակը, որը բաղկացած է x և x' իրավիճակներն առաջացնող վարվելակերպերից և չի համընկնում x-ի և x'-ի հետ, կարող է հավասարակշիռ իրավիճակ չլինել: Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակը օպտիմալության բազմային սկզբունքն է այն իմաստով, որ հավասարակշռության տարբեր իրավիճակները տարբեր խաղացողների համար կարող են տարբեր աստիճանի նախընտրելի լինել: Այսպիսով, այն հարցը, թե հավասարակշռության ո՞ր իրավիճակը կարելի է ընդունել որպես բոլոր խաղացողների համար ձեռնտու օպտիմալության սկզբունք, մնում է չլուծված: Հետագայում ցույց կտրվի, որ օպտիմալության սկզբունքի բազմայնությունը շատ մասնակիցներով կառավարելի ներհակ գործընթացների լավագույն վարքի էական բնութագրիչն է:

Նաև նկատենք, որ ի տարբերություն հակամարտ դեպքի, i-րդ խաղացողի x_i^* հավասարակշիռ վարվելակերպը միշտ չէ, որ ապահովում է Նեշի հավասարակշռության իրավիճակի առնվազն $H_i(x^*)$ շահումը, քանի որ դա էապես կախված է նրանից, թե մյուս խաղացողները արդյոք կընտրեն Նեշի հավասարակշռության տվյալ իրավիճակի պատկանող վարվալակերպեր, թե՝ ոչ: Ուստի, հավասարակշիռ իրավիճակը չպետք է մեկնաբանել որպես i-րդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպ: Այդպիսի մեկնաբանումը իմաստավորված է միայն խաղացողների վարվելակերպերի հավաքածուի, այսինքն՝ իրավիճակների համար:

2.4 Նեշի հավասարակշռության իրավիճակի կարևոր առանձնահատկությունն այն է, որ այդ իրավիճակից երկու և ավելի խաղացողների շեղումը հնարավոր է՝ մեծացնի շեղվողներից մեկի շահումը: Դիցուք՝ $S \subset N$-ը որոշ խաղացողների ենթաբազմություն (դաշինք) է և $x = (x_1,\dots,x_n)$-ը՝ Γ խաղում ինչ-որ իրավիճակ է: Նշանակենք $x|x_s'$-ով այն իրավիճակը, որ x իրավիճակից կստացվի x_i, $i \subset S$ վարվելակերպերը x_i', $i \subset S$ վարվելակերպերով փոխարինելուց: Այլ կերպ՝ S դաշնախմբի խաղացողներն իրենց x_i վարվելակերպերը փոխարինում են x_i' վարվելակերպերով: Եթե x^*-ը Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակ է, ապա (2.1)-ից ամենևին չի հետևում, թե

$$H_i(x^*) \ge H_i(x^*|x_i) \tag{2.17}$$

է բոլոր $i \in S$-ի համար:

Այդ անհավասարության ճշմարիտ լինելը հետագայում ցույց կտրվի պարզագույն օրինակներով:

Նեշի հավասարակշռություն հասկացությունը կարելի է ուժեղացնել՝ պահանջելով կատարել (2.17)-ի պայմանը կամ էլ (2.17)-ի թուլացված պայմանը $i \in S$ -ի խաղացողներից գոնե մեկի համար:

Սահմանում: x^* իրավիճակը կոչվում է խիստ հավասարակշիռ, եթե ցանկացած $S \subset N$ դաշինքի և $x_S \in \prod_{i \in S} x_i$ -ի համար բավարարվում է

$$\sum_{i \in S} H_i(x^*) \geq \sum_{i \in S} H_i(x^* / x_i) \tag{2.18}$$

անհավասարությունը:

(2.18) պայմանը երաշխավորում է խաղացողների միջև S դաշինք ստեղծելու նպատակով համաձայնության գալու աննպատակահարմար լինելը, քանի որ ցանկացած դաշնախմբի մեջ կգտնվի i խաղացող, որին այդ դաշնագիրը ձեռնտու չի լինի: Ցանկացած խիստ հավասարակշիռ վիճակը հավասարակշիռ է:

Եթե խիստ հավասարակշռությունը գոյություն ունենար խաղերի բավականին լայն դասում, ապա անդաշինք խաղերի համար այն կարող էր ընդունելի օպտիմալության սկզբունք լինել: Սակայն նրա գոյությունը հազվադեպ է:

Օրինակ 6: Դիտարկենք

$$(A,B) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \end{array}$$

երկմատրից խաղը: Այստեղ (α_2, β_2) միակ հավասարակշիռ իրավիճակը (ոչ խիստ հավասարակշռություն) խաղացողներին տալիս է շահումների (1,1) վեկտոր: Սակայն եթե երկու խաղացողները խաղան (α_1, β_1), նրանք կստանան (5,5) շահումների վեկտոր, որը շահավետ է երկուսին էլ: Այդ իրավիճակը հավասարակշիռ չէ, սակայն լավագույնն է երկուսի համար էլ: Այսպիսի պարադոքսներ հակամարտ խաղերում չեն լինում: Ինչ վերաբերում է այս որոշակի դեպքին, ապա ստացվում է. որ եթե երկու խաղացողներն էլ միաժամանակ հրաժարվեն հավասարակշիռ վարվելակերպերից, ապա յուրաքանչյուրը կարող է ավելին շահել:

2.5 Օրինակ 6-ը հանգեցնում է ոչ դաշնախմբային խաղերում օպտիմալության այնպիսի այլ սկզբունքներ կիրառելու հնարավորության մտքին, որոնց համապատասխանող իրավիճակները երկու խաղացողների համար էլ ավելի շահավետ են, քան հավասարակշիռ իրավիճակներում: Այդպիսի օպտիմալության սկզբունքն է Պարետոյի օպտիմալությունը:

Դիտարկենք $\{H(x)\} = \{(H_1(x),\dots,H_n(x))\}$, $x \in X$, $x = \prod_{i=1}^{n} x_i$ վեկտորների բազմությունը, այսինքն՝ խաղացողների $x \subset X$ հնարավոր բոլոր իրավիճակներում շահումների վեկտորների արժեքների բազմությունը:

Սահմանում: Անդաշինք Γ խաղի համար $\bar{x}$ իրավիճակը կոչվում է Պարետոյի օպտիմալություն, եթե գոյություն չունի այնպիսի $x \in X$ իրավիճակ, որի համար

$$H_i(x) \geq H_i(\bar{x}),\ \forall i \subset N,$$

$$H_{i0}(x) > X_{i0}(\bar{x}),$$

գոնե մեկ $i_0 \subset N$-ի համար անհավասարությունները ճշմարիտ են: ┘

Պարետոյի օպտիմալության բոլոր իրավիճակների բազմությունը նշանակենք X^P-ով:

x^P բազմությանը $\bar{x}$ իրավիճակի պատկանելությունը բովանդակության առումով նշանակում է, որ գոյություն չունի այլ x իրավիճակ, որը x^{*}-ից գերադասելի լինի բոլոր խաղացողների համար:

Նշենք հավասարակշիռ իրավիճակներ և Պարետոյի օպտիմալության իրավիճակ հասկացությունների բովանդակության տարբերությունը: Առաջին իրավիճակում ոչ մի խաղացող միայնակ գործելով չի կարող մեծացնել իր շահումը, երկրորդում՝ բոլոր խաղացողները միասին գործելով (անգամ խիստ) չեն կարող մեծացնել յուրաքանչյուրի շահումը:

Նկատենք նաև, որ սևեռված հավասարակշիռ իրավիճակ ընտրելու համաձայնությունը յուրաքանչյուր անհատ խաղացողին արգելում է շեղվել այդ իրավիճակից: Պարետոյի օպտիմալության իրավիճակից շեղվող խաղացողը որոշ դեպքերում կարող է իր շահումն էապես մեծացնել: Միևնույն ժամանակ, խիստ հավասարակշիռ իրավիճակը անկասկած նաև Պարետոյի օպտիմալության իրավիճակ է: Այսպես, 6 օրինակում (α_2, β_2) իրավիճակը հավասարակշիռ է, բայց Պարետոյի օպտիմալություն չէ: Մինչդեռ (α_1, β_1) իրավիճակը, ընդհակառակը, Պարետոյի օպտիմալություն է, բայց հավասարակշիռ իրավիճակ չէ: "Ընտանեկան վեճ" խաղում (α_1, β_1), (α_2, β_2) երկու հավասարակշիռ իրավիճակներն էլ խիստ հավասարակշիռ են և միևնույն ժամանակ

Պարետոյի օպտիմալություն, բայց ինչպես նշվեց օրինակ 5-ում, փոխադարձաբար փոխարինելի չեն: Համանման պատկեր առկա է նաև հաջորդ օրինակում:

Օրինակ 7: Դիտարկենք "խաչմերուկ" խաղը (տե՛ս, օրինակ 2): (α_2,β_1), (α_1,β_2) իրավիճակները հավասարակշիռ են և Պարետոյի օպտիմալություն (α_1,β_1) իրավիճակը Պարետոյի օպտիմալություն է, բայց հավասարակշիռ չէ: Յուրաքանչյուր խաղացողի համար հավասարակշռության վարվելակերպը $\alpha_1\beta_1$ "կանգ առնել" վարվելակերպն է, եթե մյուս խաղացողը որոշել է անցնել խաչմերուկը, և ընդհակառակը՝ ձեռնտու է ընտրել $\alpha_2\beta_2$ "շարժվել" վարվելակերպը, եթե մյուս խաղացողը որոշել է կանգ առնել: Սակայն յուրաքանչյուր խաղացող երկու միավոր շահում ստանում է միայն $\alpha_2(\beta_2)$ "շարժվել" վարվելակերպն ընտրելիս, այդ պատճառով, այստեղ անխուսափելի է պայքարը առաջատարի դերի համար, այսինքն՝ յուրաքանչյուր խաղացող շահագրգռված է առաջինը հայտարարել, որ ինքն է ընտրել "շարժվել" վարվելակերպը:

Նկատենք, որ համանման հետևության հանգեցինք "Ընտանեկան վեճ" խաղը վերլուծելիս (տե՛ս օրինակ 5):

2.6 Վերլուծենք երկու անձանց $\Gamma=(X_1,X_2,H_1,H_2)$ խաղում առաջատար-հետևորդ տարբերակի վարքագիծը: Z^1, Z^2-ով նշանակենք համապատասխանաբար 1-ին և 2-րդ խաղացողների լավագույն պատասխանների բազմությունները, որտեղ

$$Z^1=\{(x_1,x_2)\,/\,H_1(x_1,x_2)=\sup_{y_1}H_1(y_1,x_2)\},\tag{2.19}$$

$$Z^2=\{(x_1,x_2)\,/\,H_2(x_1,x_2)=\sup_{y_2}H_1(x_1,y_2)\},\tag{2.20}$$

(ենթադրվում է, որ (2.19)-ում և (2.20)-ում ճշգրիտ վերին եզրերը հասանելի են):

Սահմանում: Երկու անձանց Γ խաղում $(x_1,x_2)\subset x_1\times x_2$ իրավիճակն անվանենք Շտակելբերգի i-հավասարակշռություն, իսկ H_i-ն i-շահում, եթե $(x_1,x_2)\in Z^j$ և ճշմարիտ է

$$\overline{H}_i=H_i(x_1,x_2)=\sup_{(y_1,y_2)\in Z^j}H_i(y_1,y_2)$$

հավասարությունը, որտեղ $i=1,2$, $i\neq j$:

i-հավասարակշռություն հասկացությունը կարելի է մեկնաբանել հետևյալ կերպ: Ենթադրենք՝ 1 խաղացողին (առաջատարին) հայտնի է երկու խաղացողների H_1 և H_2 շահումների ֆունկցիաները և հետևաբար՝ ցանկացած վարվելակերպին համապատասխանող երկրորդ խաղացողի (հետևորդի) լավագույն պատասխանների Z^2 բազմությունը: Այդ ժամանակ, օգտվելով այդպիսի տեղեկատվությունից, նա ընտրում է իր շահումը առավելագույնի հասցնող x_1 վարվելակերպը: Այսպիսով H_i-ն i-րդ խաղացողի շահումն է, որը Γ խաղում լավագույն ձևով է գործում "առաջատարի" դերում:

Լեմ: Եթե $Z(\Gamma)$-ն 2 անձանց Γ խաղի Նեշի հավասարակշռության իրավիճակների բազմությունն է, իսկ Z^1 և Z^2-ը 1, 2 խաղացողների լավագույն պատասխանների (2.19) և (2.20) բազմություններն են, ապա

$$Z(\Gamma) = Z^1 \cap Z^2 : \qquad (2.22)$$

$\mapsto$ Դիցուք $(x_1, x_2) \in Z(\Gamma)$-ն Նեշի հավասարակշռության վիճակ է: Այդ դեպքում

$$H_1(x'_1, x_2) \le H_1(x_1, x_2),\ H_2(x_1, x'_2) \le H_2(x_1, x_2)$$

անհավասարությունները ճշմարիտ են բոլոր $x'_1 \subset X_1$-ի և $x'_2 \in X_2$-ի համար: Այստեղից հետևում է.

$$H_1(x_1, x_2) = \sup_{x'_1} H_1(x'_1, x_2) \qquad (2.23)$$

$$H_2(x_1, x_2) = \sup_{x'_2} H_1(x_1, x'_2) : \qquad (2.24)$$

Այսպիսով, $(x_1, x_2) \in Z^1$ և $(x_1, x_2) \in Z^2$, այսինքն՝ $(x_1, x_2) \in Z^1 \cap Z^2$: Հակառակ պատկանելությունը անմիջականորեն բխում է (2.23) և (2.24)-ից: ┘

Սահմանում: Կասենք, որ $\Gamma = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ երկու անձանց խաղում առաջատարության պայքարն առկա է, եթե գոյություն չունի այնպիսի $(x_1, x_2) \subset X_1 \times X_2$ իրավիճակ, որ

$$\overline{H}_i \le H_i(x_1, x_2),\ i = 1,2 : \qquad (2.25)$$

Թեորեմ: Եթե երկու անձանց $\Gamma = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ խաղն ունի Պարետոյի օպտիմալության և Նեշի հավասարակշռված առնվազն (x_1, x_2), (y_1, y_2) տարբեր շահումների վեկտորներով իրավիճակներ՝

$$(H_1(x_1,x_2),H_2(x_1,x_2)) \neq (H_1(y_1,y_2),H_2(y_1,y_2)), \qquad (2.26)$$

ապա խաղում առկա է պայքարը առաջատարության համար:

$\mapsto$ Համաձայն (2.22)-ի՝ Նեշի $(z_1,z_2) \subset Z(\Gamma)$ հավասարակշռության ցանկացած իրավիճակի համար ճշմարիտ են

$$H_1(z_1,z_2) \leq \overline{H}_i,\ i=1,2$$

անհավասարությունները: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ Γ խաղում բացակայում է պայքարը առաջատարության համար: Այդ դեպքում գոյություն ունի $(z_1,z_2) \subset X_1 \times X_2$ իրավիճակ, որի համար

$$H_i(x_1,x_2) \leq \overline{H}_i \leq H_i(z_1,z_2),\ i=1,2 \qquad (2.27)$$

$$H_i(y_1,y_2) \leq \overline{H}_i \leq H_i(z_1,z_2),\ i=1,2: \qquad (2.28)$$

Բայց (x_1,x_2), (y_1,y_2) իրավիճակները Պարետոյի օպտիմալություն են: Հետևաբար, (2.27), (2.28) անհավասարությունները դառնում են հավասարություններ, որը հակասում է 2.26-ին: $\lrcorner$

Վերջում նկատենք, որ "Ընտանեկան վեճ" և "Խաչմերուկ" խաղերը բավարարում են 2.6 թեորեմի պայմաններին, հետևաբար, այդ խաղերում առկա է պայքարը առաջատարության համար:

§ 3. Անդաշին խաղի խառը ընդլայնում

3.1 Սկզբում դիտարկենք Γ հակամարտ մատրիցային խաղի դեպքը: Ենթադրենք Γ խաղում գոյություն չունի հավասարակշիռ իրավիճակ: Այդ դեպքում §2-ի համաձայն ունենք

$$\min_j \max_i \alpha_{ij} - \max_i \min_j \alpha_{ij} > 0, \qquad (3.1)$$

իսկ մինիմաքսի և մաքսիմինի վարվելակերպերը լավագույնը չեն: Ավելին, խաղացողների համար ձեռնտու չէ այդ վարվելակերպերից օգտվելը, քանի որ դրանցից հրաժարվելու դեպքում կարող են ստանալ ավելի մեծ շահում:

Օրինակով ցույց տանք, որ երբ խաղացողի ընտրած վարվելակերպը հայտնի է դառնում հակառակորդին, նրա կորուստները կարող են ավելին լինել, քան մինիմաքսի վարվելակերպի դեպքում: Դիցուք՝

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցի համար

$$\min_j \max_i \alpha_{ij} = 3, \ \max_i \min_j \alpha_{ij} = 1,$$

այսինքն՝ հավասարակշիռ իրավիճակ գոյություն չունի: Առաջին խաղացողի մաքսիմինի վարվելակերպն է $i^* = 1$, իսկ երկրորդի մինիմաքսի վարվելակերպն է $j^* = 2$: Ենթադրենք՝ երկրորդ խաղացողն ընտրում է $j^* = 2$ վարվելակերպը, իսկ առաջինը՝ $i = 2$ վարվելակերպը: Այդ դեպքում առաջինի շահումը 3 է, այսինքն՝ 2 միավորով ավելին, քան մինիմաքսի դեպքում: Սակայն, եթե երկրորդ խաղացողը կռահի առաջինի ընտրությունը, ապա իր վարվելակերպը կդարձնի $j = 1$, և առաջինը կստանա 0-ի հավասար շահում, այսինքն՝ մեկով պակաս, քան մինիմաքսի դեպքում: Նման դատողություններ կարելի է անել նաև երկրորդ խաղացողի համար:

Հարց է առաջանում. ինչպե՞ս գործեն խաղացողները մինիմաքսի անհավասարության դեպքում: Պարզվում է, որ այս հարցի պատասխանը վարվելակերպերի պատահական ընտրությունն է: Այդպիսի գործողությունները նախ՝ ապահովում են վարվելակերպի առավելագույն գաղտնիությունը (ընտրության արդյունքը չի կարող հայտնի դառնալ հակառակորդին, քանի որ անհայտ է հենց իրեն՝ խաղացողին), երկրորդ՝ վարվելակերպի պատահական ընտրության խելամիտ ձևը ապահովում է վարվելակերպերի օպտիմալությունը:

Սահմանում: Γ մատրիցային խաղի համար մատրիցի տողերի համարների $M = \{1,2,\ldots,m\}$ բազմության վրա հավանական բաշխումը կոչվում է I խաղացողի խառը վարվելակերպ:

Համանման ձևով սահմանվում է երկրորդ խաղացողի խառը վարվելակերպը, որը մատրիցի սյուների համարների $N = \{1,2,\ldots,n\}$ բազմության վրա հավանական բաշխումն է:

Խառը վարվելակերպի բերված սահմանման հետ կապված՝ նախկինում սահմանված վարվելակերպերը կանվանենք "մաքուր":

1-ին խաղացողի x խառը վարվելակերպը հետևյալ վեկտորն է.

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \subset R^m, \ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \ \xi_i \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,m: \quad (3.2)$$

2-րդ խաղացողի խառը վարվելակերպի վեկտորն է R^n-ից՝

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \subset R^n, \ \sum \eta_i = 1, \ \eta_j \geq 0, \ j = 1,2,\ldots,n: \quad (3.3)$$

$\xi_i \geq 0$ և $\eta_j \geq 0$ թվերը կարելի է մեկնաբանել, որպես $i \in M$ և $j \in N$ մաքուր վարվելակերպերի ընտրության համապատասխան հավանականություններ, երբ խաղացողները օգտվում են իրենց x և y խառը վարվելակերպերից:

Նշանակենք $\overline{X}$-ով և $\overline{Y}$-ով համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների վարվելակերպերի բազմությունները: Դժվար չէ նկատել, որ յուրաքանչյուր խաղացողի խառը վարվելակերպերի բազմությունըներփակ սահմանափակ (կոմպակտ) բազմություն է վերջավոր չափի էվկլիդյան համապատասխան տարածությունում:

Սահմանում: Դիցուք՝ $x = (\xi_1,...,\xi_m) \in R^m$-ը առաջին խաղացողի խառը վարվելակերպն է: Այդ դեպքում

$$M_x = \{i / i \in M, \ \xi_i > 0\}, \qquad (3.4)$$

որտեղ $M = \{1,2,...,m\}$ կկոչվի վարվելակերպի սպեկտր:

Նույն ձևով՝

$$N_y = \{j / j \in N, \ \eta_j > 0\}, \qquad (3.5)$$

որտեղ $N = \{1,2,...,n\}$ բազմությունը կանվանենք երկրորդ խաղացողի y խառը վարվելակերպերի սպեկտր:

Այսպիսով, խառը վարվելակերպի սպեկտրը բաղկացած է այնպիսի մաքուր վարվելակերպերից, որոնք ընտրվում են դրական հավանականություններով:

Պարզ է, որ ցանկացած $x(y)$ խառը վարվելակերպի համար $M_x \neq \varnothing$ $(M_y \neq \varnothing)$, քանի որ $x(y)$ ունի ոչ բացասական բաղադրիչներ, որոնց գումարը հավասար է 1-ի:

Դիտարկենք $u_i = (\xi_1,...,\xi_i,...,\xi_m)$ խառը վարվելակերպը, որտեղ $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0$, $j \neq i$, $i = 1,2,...,m$: Այս վարվելակերպը i-րդ տողի ընտրությունը կանխորոշում է 1 հավանականությամբ: Բնական է, $u_i \in \overline{X}$ խառը վարվելակերպը նույնացնել առաջին խաղացողի i-րդ տողն ընտրելու մաքուր վարվելակերպի հետ: Նույն ձևով $w_j = (\eta_1,...,\eta_j,...,\eta_n) \subset \overline{y}$ խառը վարվելակերպը, որտեղ $\eta_j = 1$, $\eta_i = 0$, $i \neq j$, $j = 1,2,...,n$: Նույնացնենք երկրորդ խաղացողի j-րդ տողը ընտրելու մաքուր վարվելակերպի հետ: Դրանով իսկ ստացվեց, որ խաղացողի խառը վարվելակերպերի բազմությունը նրա մաքուր վարվելակերպերի տարածության ընդլայնումն է:

3.2 Γ մատրիցային խաղում խաղացողների (x, y), $x \in \overline{\Gamma}$, $y \in \overline{Y}$ խառը վարվելակերպերի կամայական զույգը կոչվում է խառը վարվելակերպերի իրավիճակ:

Այժմ որոշենք $m \times n$ մատրիցային Γ խաղի առաջին խաղացողի (x,y) խառը վարվելակերպով իրավիճակին համապատասխանող շահումը որպես նրա շահումի մաթեմատիկական սպասում: Քանի որ խաղացողների ընտրությունը կատարում են միմյանցից անկախ, ապա (x,y) իրավիճակում, $x=(\xi_1,...,\xi_m)$, $y=(\eta_1,...,\eta_n)$, $H(x,y)$ շահումի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_i\eta_j=(xA)y=x(Ay): \tag{3.6}$$

Ընդ որում $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ $x \subset \overline{x}$-ի և $y \in Y$-ի: Նկատենք, որ եթե խաղացողներից մեկն ընտրել է մաքուր վարվելակերպ (i կամ j), իսկ մյուսը՝ խառը (y կամ x) վարվելակերպ, ապա

$$H(i,y)=H(u_i,y)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\eta_j=\alpha_i y,$$

$$H(x,j)=H(x,w_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\xi_i=xa^j,$$

որտեղ α_i, α^j-ն համապատասխանաբար $(m \times n)$ մատրիցի i-րդ տողն ու j-րդ սյունն են:

Հետևաբար, $\Gamma_A=<M,N,A>$ մատրիցային խաղից հանգեցինք նոր՝ $\Gamma=<\overline{X},\overline{Y},H>$ խաղի, որտեղ $\overline{X}$-ը և $\overline{Y}$-ը $\overline{\Gamma}$ խաղի խառը վարվելակերպերի բազմություններն են, իսկ H-ը՝ խառը վարվելակերպերով շահումի ֆունկցիան: $\overline{\Gamma}$ խաղը կանվանենք Γ խաղի խառը ընդլայնում: Հասկանալի է, որ Γ խաղը $\overline{\Gamma}$ խաղի ենթախաղն է, այսինքն՝ $\Gamma_A \subset \overline{\Gamma}_A$:

Սահմանում: $\overline{\Gamma}$ խաղում (x^*,y^*) իրավիճակը հավասարակշիռ իրավիճակ է, իսկ $v=H(x,y)$ $\overline{\Gamma}$ խաղի արժեքն է, եթե բոլոր $x \in \overline{X}$ և $y \in \overline{Y}$-ների համար

$$H(x,y^*) \le H(x^*,y^*) \le H(x^*,y): \tag{3.7}$$

§2-ից հետևում է, որ (x^*,y^*) հավասարակշիռ վարվելակերպերը նաև լավագույնն են: Ավելին, x^* և y^* վարվելակերպերը մաքսիմինային և մինիմաքսային են, քանի որ տվյալ դեպքում արտաքին էքստրեմումները հասանելի են ($H(x,y)$, ֆունկցիան անընդհատ է $\bar{x}$ և $\bar{y}$ կոմպակտ բազմությունների վրա)։

Թեորեմ (մատրիցային խաղերի հիմնական թեորեմը)։ Ամեն մի մատրիցային խաղ խառը վարվելակերպերում ունի հավասարակշիռ իրավիճակ։

3.3 Դիտարկենք $\Gamma =< X_1, X_2, H_1, H_2 >$ երկանձ անդաշինք խաղ։ Հայտնի է, որ նույնիսկ հակամարտ դեպքում սովորական մաքուր վարվելակերպի հավասարակշիռ իրավիճակ ընդհանրապես գոյություն չունի։ Նույնիսկ մատրիցային խաղերն ընդհանուր դեպքում հավասարակշիռ իրավիճակ ունեն միայն խառը վարվելակերպերում։ Այդ պատճառով բնական է, Նեշի հավասարակշռությունը անդաշինք խաղում փնտրել խառը վարվելակերպերի դասում։

Ինչպես որ հակամարտ խաղերի դեպքում, խաղացողի խառը վարվելակերպը մենք նույնացնում ենք մաքուր վարվելակերպերի բազմության վրա հավանական բաշխման հետ։ Պարզության համար ենթադրենք, որ վարվելակերպերի X_i բազմությունները վերջավոր են և սահմանենք խաղի խառը ընդլայնում հասկացությունը։ Դիցուք՝

$$\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \subset N}, \{H_i\}_{i \subset n}) \tag{3.8}$$

կամայական, վերջավոր անդաշինք խաղ է։ Որոշակիության համար ենթադրենք, որ խաղում i-րդ խաղացողը ունի m_i վարվելակերպեր։

Նշանակենք μ_i-ով i-րդ խաղացողի կամայական խառը վարվելակերպը, այսինքն՝ ինչ-որ հավանական բաշխում վարվելակերպերի X_i բազմության վրա, որը անվանենք մաքուր վարվելակերպեր։ $\mu_i(x_i)$-ով նշանակենք հավանականությունը, որը μ_i վարվելակերպը վերագրում է որոշակի $x_i \in X_i$ մաքուր վարվելակերպին։ $\overline{X}_i$-ով նշանակենք i-րդ խաղացողի բոլոր խառը վարվելակերպերի բազմությունը։

Դիցուք՝ $i \subset N$ խաղացողներից յուրաքանչյուրը կիրառում է իր խառը μ_i վարվելակերպը, այսինքն $\mu_i(x_i)$ հավանականությամբ ընտրում է մաքուր վարվելակերպեր։ Ենթադրենք, որ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ վիճակի հայտնվելու հավանականությունը հավասար է նրա բաղադրիչ-վարվելակերպերի ընտրությունների հավանականությունների արտադրյալին, այսինքն՝

$$\mu(x) = \mu_1(x_1) \times \mu_2(x_2) \times \ldots \times \mu_n(x_n): \tag{3.9}$$

(3.9) բանաձևը որոշում է $X=\prod_{i=1}^{n} x_i$ բոլոր իրավիճակների բազմության վրա $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ խառը վարվելակերպերով որոշվող հավանական բաշխումը: $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ հավաքածուն կոչվում է խառը վարվելակերպերով իրավիճակ: Խառը վարվելակերպերով μ իրավիճակը մաքուր վարվելակերպերով տարբեր իրավիճակներն իրականացնում է որոշ հավանականություններով, այդ պատճառով, յուրաքանչյուր խաղացողի շահումի ֆունկցիայի արժեքը պատահական մեծություն է: μ իրավիճակում, որպես i-րդ խաղացողի շահումի ֆունկցիայի արժեք ընդունվում է այդ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.

$$K_i(\eta)=\sum_{x\subset X} H_i(x)\mu(x)=\sum_{x_1\in X_1}\dots\sum_{x_n\in X_n} H_i(x_1,\dots,x_n)\times\mu_1(x_1)\times\dots\times\mu_n(x_n),$$

$$i\subset N,\ x=(x_1,\dots,x_n)\in X: \tag{3.10}$$

Նշանակենք՝

$$K_i(\mu|x_j^{'})=\sum_{x_1\in X_1}\dots\sum_{x_{j-1}\in X_{j-1}}\ \sum_{x_{j+1}\in X_{j+1}}\dots\sum_{x_n\in X_n} H_i(x|x_j^{'})\prod_{k\neq j}\mu_k(x_k): \tag{3.11}$$

Դիցուք՝ $\mu_j^{'}$-ը Γ խաղում j-րդ խաղացողի կամայական խառը վարվելակերպն է: Բազմապատկելով (3.11)-ը $\mu_j^{'}(x_j^{'})$-ով և գումարելով ըստ բոլոր $x_j\in X_j^{'}$-ի, կստանանք

$$\sum_{x_j^{'}\in X_j} K_i(\mu|x_j^{i})\mu_j^{'}(x_j^{'})=K_i(\mu|\mu_j^{'}):$$

Սահմանում: Խաղը, որում N-ը խաղացողների բազմությունն է, $\overline{X}_i$-ն յուրաքանչյուր i խաղացողի վարվելակերպերի բազմությունը, իսկ շահումի ֆունկցիան որոշվում է (3.10) հավասարումով, կոչվում է Γ խաղի խառը ընդլայնում:

Եթե i-րդ խաղացողի x_i կամայական մաքուր վարվելակերպի համար $K_j(\mu|x_i)\le a$ անհավասարությունը ճշմարիտ է, ապա կամայական μ_i^{*} ցանկացած խառը վարվելակերպի համար ճշմարիտ է $K_i(\mu/\mu_i^{*})\le a$ անհավասարությունը: Վերջինիս ճշմարիտ լինելը բխում է (3.10)-ից և (3.11)-ից, երբ հայտնի ձևով անցնում ենք խառը վարվելակերպերի:

3.4 $(m \times n)$ երկմատրից $\Gamma(A,B)$ խաղի համար առաջին և երկրորդ խաղացողների խառը վարվելակերպերի բազմությունը կարելի է որոշել հետևյալ կերպ.

$$X_1 = \{x | x_u = 1, x \geq 0, x \in R^m\},$$

$$X_2 = \{y | y_w = 1, y \geq 0, y \in R^n\},$$

որտեղ $u = (1,...,1) \in R^m$, $w = (1,...,1) \in R^n$ ինչպես նաև (x,y) խառը վարվելակերպերում K_1 և K_2 շահումները, որպես մաթեմատիկական սպասում

$$K_1(x,y) = xAy,\ K_2(x,y) = xBy,\ x \in X_1,\ y \in X_2:$$

Հետևաբար, ձևականորեն կառուցվեց $\Gamma(A,B)$ խաղի $\overline{\Gamma}(A,B)$ խառը ընդլայնումը, այսինքն՝ $\overline{\Gamma}(A,B) = (X_1, X_2, K_1, K_2)$ երկու անձանց անդաշին խաղը:

Երկմատրից (ինչպես և մատրիցային) խաղի համար $M_x = (i | \xi_i > 0)$ բազմությունը կանվանենք 1 խաղացողի $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ խառը վարվելակերպի սպեկտր, իսկ x վարվելակերպը, որի համար $M_x = M$, $M = \{1,2,...,m\}$՝ խառը: Համանմանությամբ, $M_y = (j | \eta_j > 0)$-ը՝ 2 խաղացողի $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ խառը վարվելակերպի սպեկտր՝ $\Gamma(A,B)$ $(m \times n)$ երկմատրից խաղում: (x,y) իրավիճակը, որտեղ երկու՝ թե՛ x և թե՛ y վարվելակեպերը լիովին խառն են, կանվանենք լիախառն:

"Ընտանեկան վեճ" խաղի օրինակով ցույց տանք, որ խառը վարվելակերպ մտցնելը չի վերացնում անդաշինք խաղերի ժամանակ առաջացող դժվարությունները:

Օրինակ 8: Դիցուք "Ընտանեկան վեճ" խաղում 1 խաղացողը ցանկանում է առավելագույնս մեծացնել իր երաշխավորված շահումը: Դա նշանակում է, որ նա մտադիր է ընտրել $x^0 = (\xi^0, 1-\xi^0)$ $0 \leq \xi^0 \leq 1$ խառը վարվելակերպն այնպես, որ առավելագույն չափով մեծացնի $K_1(x,\beta_1)$ և $K_1(x,\beta_2)$ երկու մեծություններից նվազագույնը, այսինքն՝

$$\max_x \min\{K_1(x,\beta_1), K_1(x,\beta_2)\} = \min\{K_1(x^0,\beta_1), K_1(x^0,\beta_2)\}:$$

Առաջին խաղացողի մաքսիմինի վարվելակերպն է $x^0 = (1/5, 4/5)$, որը նրան տալիս է 4/5 միջին երաշխավորված շահում: Եթե երկրորդ խաղացողը ընտրի β_1 վարվելակերպը, ապա խաղացողների շահումները կլինեն (4/5,1/5), իսկ եթե օգտվի β_2 վարվելակերպից, ապա՝ (4/5,16/5):

Այսպիսով, եթե երկրորդ խաղացողը կռահում է, որ իր խաղընկերը հավատարիմ է x^0 վարվելակերպին, ապա ինքը կընտրի β_2-ը և կստանա 16/5-ի չափ շահում (եթե առաջին խաղացողը կարող է հիմնավորել երկրորդի կատարած β_2 ընտրությունը, ապա ինքը կարող է լավացնել նաև իր ընտրությունը): Նույն կերպ, եթե երկրորդ խաղացողն ընտրում է իր $y^0=(4/5,1/5)$ մաքսիմինի վարվելակերպը, և եթե առաջինն ընտրի α_1 վարվելակերպը, ապա խաղացողների շահումները կլինեն (16/5,4/5), իսկ եթե ընտրի α_2, ապա՝ (1/5,4/5): Այդ պատճառով նրան ձեռնտու է y^0 մաքսիմինի վարվելակերպին պատասխանել α_1 վարվելակերպով:

Եթե երկու խաղացողներն էլ դատեն այս ձևով, կհանգեն (α_1,β_2) իրավիճակին, որի դեպքում շահումների վեկտորը (0,0)-ն է: Այս դեպքում (x_0,y_0) խառը վարվելակերպերով մաքսիմինի իրավիճակը Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ չի լինի:

3.5 *Սահմանում*: Γ խաղի խառը վարվելակերպերով μ^* իրավիճակը կոչվում է Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ, եթե կամայական i-րդ խաղացողի և նրա ցանկացած μ_i-ն խառը վարվելակերպի համար ճշմարիտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$K_i(\mu^*|\mu_i)\le K_i(\mu^*),\ i=1,2,\dots,m\ :$$

Ինչպես երևում է օրինակ 8-ից, մաքսիմինի խառը վարվելակերպերով իրավիճակը պարտադիր չէ, որ լինի Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ խառը վարվելակերպերում:

Օրինակ 9: "Խաչմերուկ" խաղում կա (α_1,β_2) և (α_2,β_1) մաքուր վարվելակերպերով Նեշի հավասարակշռության երկու իրավիճակ: Այդ իրավիճակները նաև Պարետոյի օպտիմալություն են: Խաղի խառը ընդլայնման մեջ առաջանում է ևս մի հավասարակշռության իրավիճակ, այն է՝ (x^*,y^*).

$$x^*=y^*=((1-\varepsilon)/(2-\varepsilon))u_1+(1/(2-\varepsilon))u_2\ ,$$

որտեղ $u_1=(1,0)$, $u_2=(0,1)$, կամ $x^*=y^*=(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon),1/(2-\varepsilon)$:

Իրոք, ունենք

$$K_1=(\alpha_1,y^*)=((1-\varepsilon)/(2-\varepsilon))+((1-\varepsilon)/(2-\varepsilon))=1-\varepsilon/(2-\varepsilon),$$

$$K_1=(\alpha_2,y^*)=2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)=1-\varepsilon/(2-\varepsilon):$$

Քանի որ ցանկացած $x=(\xi,1-\xi)$ և $y=(\eta,1-\eta)$ համար

$$K_1(x,y^*)=\xi K_1(\alpha_1,y^*)+(1-\xi)K_1(\alpha_2,y^*)=1-\varepsilon/(2-\varepsilon),$$

$$K_2(x^*,y)=\eta K_2(x^*,\beta_1)+(1-\eta)K_2(x^*,\beta_2)=1-\varepsilon/(2-\varepsilon)$$

հավասարությունները ճշմարիտ են, ապա կստանանք

$$K_1(x,y^*)=K_1(x^*,y^*),\ K_2(x^*,y)=K_1(x^*,y^*)$$

բոլոր $x\subset X_1$ և $y\subset X_2$ խառը վարվելակերպերի համար: Ուստի (x^*,y^*)-ը Նեշի հավասարակշռության, ավելին՝ լիախառն հավասարակշռության իրավիճակ է: Սակայն քանի որ $K(x^*,y^*)=$ $=(1-\varepsilon/(2-\varepsilon),1-\varepsilon/(2-\varepsilon))$ վեկտորը խիստ փոքր է (α_1,β_2) իրավիճակում շահումների $(1,1)$ վեկտորից, այն Պարետոյի օպտիմալություն չէ:

Դիցուք՝ $K(\mu^*)=\{K_i(\mu^*)\}$-ը Նեշի հավասարակշռության որևէ իրավիճակին համապատասխանող շահումների վեկտորն է: Նշանակենք $V_i=K_i(\mu^*)$ և $V=\{V_i\}$: Նկատենք, որ եթե հակամարտ խաղերում շահումների v ֆունկցիայի արժեքը միևնույնն էր հավասարակշռության բոլոր իրավիճակների համար և, հետևաբար, հավասարակշռության իրավիճակ ունեցող ամեն մի հակամարտ խաղի համար իրականացվում էր միակ ձևով, ապա անհակամարտ խաղերի համար v մեծությունը միարժեք չէ: Այսպիսով, այս դեպքում կարելի է խոսել միայն i-րդ խաղացողի իրավիճակին համապատասխանող շահումի մեծության մասին, որտեղ $\mu^*\subset x$, $\bar{x}=\prod_{i=1}^{n}\bar{x}_i$: Այսպես, “Խաչմերուկ” խաղում (α_1,β_2) հավասարակշռության իրավիճակում (v_1,v_2) հավասարակշռված շահումների վեկտորը $(1-\varepsilon,2)$-ն է, իսկ (x^*,y^*) իրավիճակում՝ $(1-\varepsilon/(2-\varepsilon),1-\varepsilon/(2-\varepsilon))$:

3.6 Երկմատրից խաղերի համար հայտնի է հիմնարար թեորեմը.

Թեորեմ: Դիցուք՝ $\Gamma(A,B)$-ն երկմատրից $(m\times n)$-խաղ է: Այդ դեպքում 1-ին և 2-րդ խաղացողների համար գոյություն ունեն համապատասխանաբար $x^*\in X_1$ և $y^*\in X_2$ այնպիսի խառը վարվելակերպեր, որ (x^*,y^*) զույգը Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակ է:

§ 4. Լավագույն լուծումների հատկությունները

4.1 Ներկայացնենք հավասարակշռության իրավիճակների այն հատկությունները, որոնք օգնում են գտնելու երկու անձանց անդաշինք խաղերի լուծումը:

Թեորեմ: Որպեսզի խառը վարվելակերպերով (μ^*, ν^*) իրավիճակը լինի $\Gamma = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ խաղի հավասարակշռության իրավիճակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ խաղացողների $x \in X_1$ և $y \in X_2$ բոլոր մաքուր վարվելակերպերի համար ճիշտ լինեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$K_1(x,\nu^*) \le K_1(\mu^*,\nu^*), \tag{4.1}$$

$$K_2(\mu^*,y) \le K_2(\mu^*,\nu^*): \tag{4.2}$$

$\mapsto$ *Անհրաժեշտությունն* ակնհայտ է, քանի որ ամեն մի մաքուր վարվելակերպ խառը վարվելակերպի մասնավոր դեպք է, և, հետևաբար, (4.1) և (4.2) անհավասարությունները պետք է ճշմարիտ լինեն: *Բավարարությունն* ապացուցելու համար անհրաժեշտ է (4.1), (4.2) անհավասարություններում համապատասխանաբար անցնել 1 և 2 խաղացողների խառը վարվելակերպերին: ┘

Այս թեորեմը (ինչպես հակամարտ խաղերի դեպքում) ցույց է տալիս, որ խառը վարվելակերպերով իրավիճակի հավասարակշիռ լինելն ապացուցելու համար բավական է (4.1) և (4.2) անհավասարությունների պայմաններն ստուգել խաղընկերոջ միայն մաքուր վարվելակերպերի համար: $\Gamma(A,B)$ երկմատրից $m \times n$ խաղի համար (4.1) և (4.2) անհավասարությունները համապատասխանաբար կընդունեն հետևյալ տեսքը.

$$K_1 = (i, y^*) = a_i y^* \le x^* A y^* = K_1(x^*, y^*)$$

$$K_2 = (x^*, y) = x^* b^j \le x^* B y^* = K_2(x^*, y^*),$$

որտեղ $a_i(b^j)$-ն $A(B)$ մատրիցի տողերն (սյուներն) են, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$:

4.2 Հիշեցնենք, որ մատրիցային խաղերի համար ամեն մի էական մաքուր վարվելակերպ հավասարակշռում է հակառակորդի կամայական լավագույն վարվելակերպը: Համանման արդյունքը ճշմարիտ է նաև երկմատրից խաղերի համար:

Թեորեմ: Դիցուք՝ $\Gamma(A,B)$-ն՝ երկմատրից $(m \times n)$ խաղ է, իսկ $(x,y) \subset Z(\Gamma)$-ն խառը վարվելակերպերով իրավիճակ է: Այդ դեպքում

$$K_1(i,y) = K_1(x,y) \tag{4.5}$$

$$K_2(x,j) = K_2(x,y) \tag{4.6}$$

հավասարությունները ճշմարիտ են բոլոր $i \subset M_x$-երի և $j \in N_y$-երի համար, որտեղ $M_x(N_y)$-ը $x(y)$ խառը վարվելակերպի սպեկտրն է:

$\mapsto$ (4.1) թեորեմի համաձայն ունենք

$$K_1(i,y) \le K_1(x,y)\,,\ i \subset M_x: \tag{4.7}$$

Դիցուք՝ ճշմարիտ է (4.7)-ում գոնե մեկ խիստ անհավասարություն, այսինքն

$$K_1(i_0,y) < K_1(x,y)\,,\ i_0 \in M_x: \tag{4.8}$$

Նշանակենք $x = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$ վեկտորի բաղադրիչները ξ_i-ով: Այդ դեպքում $\xi_{i0} > 0$ և

$$K_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i K_1(i,y) = \sum_{i \in M_x} \xi_i K_2(i,y) < K_1(x,y) \sum_{i \in M_x} \xi_i = K_1(x,y):$$

Հակասությունն ապացուցում է (4.5)-ի ճշմարտացիությունը: (4.6)-ի ճշմարիտ լինելն ապացուցվում է համանմանությամբ:

Այս թեորեմը հնարավորություն է տալիս գտնել $\Gamma(A,B)$ խաղում խաղացողների լավագույն խառը վարվելակերպերը: Իրոք, ենթադրենք, որ մենք փնտրում ենք (x,y) հավասարակշիռ իրավիճակը, երբ տրված են վարվելակերպերի M_x և M_y սպեկտրները: Այդ դեպքում լավագույն վարվելակերպերը պետք է բավարարեն գծային հավասարումների համակարգին,

$$ya_i = v_i\,,\ i \in M_x$$

$$xb^j = v_2\,,\ j \in N_y\,, \tag{4.9}$$

որտեղ v_1, v_2-ը ինչ-որ թվեր են: Իսկ եթե (x,y) հավասարակշիռ իրավիճակը լիախառն իրավիճակ է, ապա (4.9) հավասարումների համակարգը կընդունի

$$Ay = v_1 u\,,$$

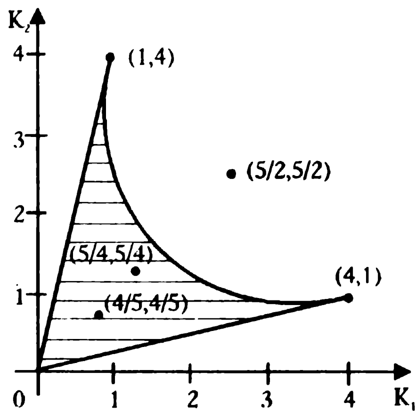
$$xB = v_2 w\,, \tag{4.10}$$

տեսքը, որտեղ $u = (1,\ldots,1)$, $w = (1,\ldots,1)$-ը համապատասխան չափի միայն մեկերից բաղկացած վեկտորներ են, $v_1 = xAy$, $v_2 = xBy$ թվերը՝ (x,y) խաղացողների շահումները հավասարակշիռ իրավիճակում:

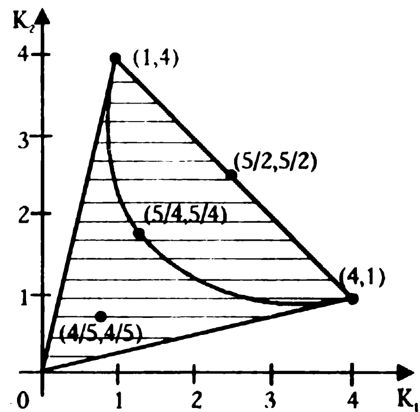
§ 5. Համաարակշռությունը համատեղ խառը վարվելակերպերում

5.1 Շարունակենք երկու անձանց խաղի դիտարկումը: Ինչպես արդեն նշվել է, եթե նույնիսկ հավասարակշիռ իրավիճակը գերիշխող չէ (Պարետոյի օպտիմալություն), հնարավոր են դեպքեր, երբ մի հավասարակշիռ վեկտորը ձեռնտու է առաջին խաղացողին, իսկ մյուսը՝ երկրորդին: Սա դժվարացնում է երկուստեք ընդունելի լուծումներ գտնելը, որն առաջանում է անդաշինք խաղի ձևականացման մակարդակում անհակամարտ ներհակության դեպքում: Այդ պատճառով անհակամարտ ներհակությունը հետազոտում ենք այնպիսի ձևականացումով, որը խաղացողներին թույլատրում է համատեղ որոշումներ կայացնել: Այս մոտեցումը լուսաբանենք "Ընտանեկան վեճ" խաղի օրինակով (տե՛ս 1-ին օրինակը):

Օրինակ 10: Դիտարկենք "Ընտանեկան վեճ" խաղի խառը ընդլայնումը: Խաղի խառը վարվելակերպերով շահումների վեկտորներին համապատասխանող կետերի բազմությունը կարելի է ներկայացնել գծապատկերով (գծ. 1):



գծ. 1



գծ. 2

Գծագրում պատկերված են մաքուր վարվելակերպերով, Նեշի հավասարության 2 իրավիճակներ: (1,4), (4,1) շահումների վեկտորներով և մեկ լիախառն հավասարակշիռ իրավիճակ (4/5,4/5) շահումի վեկտորով, որը յուրաքանչյուր խաղացողի համար պակաս նախընտրելի է, քան մաքուր վարվելակերպով հավասարության ամեն մի իրավիճակը: Հիշեցնենք, որ այստեղ հավասարակշռության իրավիճակներն են՝ (α_1,β_1), (α_2,β_2), (x^*,y^*), որտեղ

$x^* = (4/5, 1/5)$, $y^* = (1/5, 4/5)$, իսկ (α_1, β_1)-ը, (α_2, β_2)-ը նաև Պարետոյի օպտիմալություններ են:

Եթե խաղը կրկնվում է բազմիցս, ապա արժե, որ խաղացողները կատարեն համատեղ ընտրություն: Այն է՝ 1/2 հավանականությամբ ընտրեն (α_1, β_1) կամ (α_2, β_2) իրավիճակը: Այդ դեպքում խաղացողների միջին սպասվող շահումը կլինի (5/2,5/2): Սակայն (5/2,5/2) կետը չի պատկանում անդաշինք խաղի հնարավոր իրավիճակներին համապատասխանող կետերի բազմությանը (գծ. 1), այսինքն չի կարող իրականացվել, եթե խաղացողները խառը վարվելակերպերն ընտրում են իրարից անկախ:

Խաղացողների համատեղ խառը վարվելակերպ ասելով, հասկանալու ենք հնարավոր բոլոր (i,j) զույգերի (մաքուր վարվելակերպերով իրավիճակների) բազմության վրա հավանական բաշխումը, որը պարտադիր չէ, որ առաջացած լինի 1-ին և 2-րդ խաղացողների մաքուր վարվելակերպերի պատահական ինքնուրույն ընտրությունից: Այդպիսի իրավիճակները կարող է իրականացնել միջնորդը մինչև խաղն սկսվելը:

Նշանակենք $\Gamma(a,b)$ խաղի համատեղ վարվելակերպը M-ով: Այդ դեպքում համատեղ վարվելակերպ օգտագործելիս 1 և 2 խաղացողներին սպասվող $K_1(M)$, $K_2(M)$ շահումները համապատասխանաբար հավասար են.

$$K_1(M) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\mu_{ij}, \quad K_2(M) = \sum_{i,j} \beta_{ij}\mu_{ij},$$

որտեղ $A = \{\alpha_{ij}\}$, $B = \{\beta_{ij}\}$-ն՝ խաղացողների շահումների մատրիցներն են, $M = \{\mu_{ij}\}$, ընդ որում $u \cdot M \cdot w = 1$, $u = (1,\dots,1) \in R^m$, $w = (1,\dots,1) \in R^n$: Երկրաչափորեն, համատեղ խառը վարվելակերպերին համապատասխանող շահումների վեկտորների կետերի բազմությունը մաքուր վարվելակերպերին համապատասխանող շահումների վեկտորների բազմության ուռուցիկ թաղանթն է: 10-րդ օրինակում բերված խաղի համար այն պատկերված է 2-րդ գծագրում (գծ. 2):

Նկատենք, որ $M^* \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ համատեղ խառը վարվելակերպը Պարետոյի օպտիմալություն է, որին համապատասխանում է շահումների (5/2,5/2) վեկտորը: Այսպիսով, M^*-ը կարելի է երաշխավորել որպես “Ընտանեկան վեճ” խաղի լուծում:

Սահմանում: Նշանակենք $M=\{\mu_{ij}\}$-ով $(m\times n)$ երկմատրից $\Gamma(A,B)$ խաղի (i,j) թվազույգերի համատեղ հավանական բաշխումը, $\mu_i(j)$-ով՝ j-րդ վարվելակերպի իրականացման պայմանական հավանականությունը, երբ իրականացվում է i-րդ վարվելակերպը, իսկ $\nu_i(j)$-ով՝ i-րդ վարվելակերպի պայմանական հավանականությունը, երբ j-րդ վերվելակերպն է արդեն իրականացված: Այդ դեպքում՝

$$\mu_i(j)=\begin{cases}\mu_{ij}\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_{ij}, \text{ եթե } \sum\limits_{j=1}^{n}\mu_{ij}\neq 0\\ 0, \text{ եթե } \mu_{ij}=0, j=1,\dots,n,\end{cases},$$

$$\nu_i(j)=\begin{cases}\mu_{ij}\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_{ij}, \text{ եթե } \sum\limits_{i=1}^{m}\mu_{ij}\neq 0\\ 0, \text{ եթե } \mu_{ij}=0, i=1,\dots,m.\end{cases}:$$

$\Gamma(A,B)$ խաղի համար $M^*=\{\mu_{ij}^*\}$-ը կանվանենք խառը վարվելակերպերով համատեղ հավասարակշռության իրավիճակ, եթե

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\mu_i^*(j)\geq\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i'j}\mu_i^*(j),\ i,\ i'\in\{1,\dots,m\}, \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}\nu_j^*(i)\geq\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij'}\nu_j^*(i),\ j,\ j'\in\{1,\dots,n\}:$$

5.2 Համատեղ խառը վարվելակերպերով $\Gamma(A,B)$ խաղը կարելի է մեկնաբանել հետևյալ ձևով: Ենթադրենք՝ խաղացողները պայմանավորվել են իրականացնել $M^*=\{\mu_{ij}^*\}$ վարվելակերպը, և պատահական մեխանիզմի օգնությամբ ստացվել է (i,j) զույգը, այսինքն՝ առաջին (երկրորդ) խաղացողը ստացել է վարվելակերպի $i(j)$-րդ համարը: Նկատենք, որ յուրաքանչյուր խաղացող տեղյակ է միայն իր իրականացմանը և, ընդհանրապես, կարող է չհամաձայնել իրականացնելու համատեղ վարվելակերպի այդ i-րդ (համապատասխանաբար j-րդ) համատեղ վարվելակերպը և ընտրել $i'(j')$ վարվելակերպը: Սակայն, մյուս կողմից, քանի որ (5.1) անհավասարության ձախ կողմում գրված մեծությունը (i,j) վարվելակերպով պայմանավորված 1(2) խաղացողի սպասվող շահումն է, ապա խաղացողներից ոչ մեկին ձեռնտու չէ $M^{*}=\{\mu_{ij}^{*}\}$ հավասարակշռված վարվելակերպին համապատասխանող i-րդ (j-րդ) վարվելակերպը փոխարինել i'-ով (j'-ով):

Ակներևաբար (5.1) անհավասարությունները բավարարված կլինեն, եթե 1(2) խաղացողի i-րդ (j-րդ) վարվելակերպն այնպիսին է, որի համար $\mu_{ij}=0$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$: Տեղադրելով (5.1)-ի մեջ $\mu_i(j)$-ի և $\nu_j(i)$-ի համապատասխան արտահայտությունները՝ կստանանք $M^{*}=\{\mu_{ij}^{*}\}$ իրավիճակի հավասարակշռության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, այն է՝

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\mu_{ij}^{*}\geq\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i'j}\cdot\mu_{ij}^{*},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}^{*}=1,\ \text{բոլոր}\ i,\ i'=\{1,\ldots,m\},\quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}\mu_{ij}^{*}\geq\sum_{j=1}^{n}\beta_{i'j}\cdot\mu_{ij}^{*},\ \mu_{ij}^{*}\geq 0,\ \text{բոլոր}\ j,\ j'=\{1,\ldots,n\}:$$

Նշանակենք $Z_c(\Gamma)$-ով համատեղ խառը վարվելակերպերով հավասարակշիռ իրավիճակների բազմությունը:

Թեորեմ: Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները՝

1. Երկմատրից $\Gamma(A,B)$, $(m\times n)$ խաղի $Z_c(\Gamma)$ բազմությունը $R^{m\times n}$-ում ոչ դատարկ ուռուցիկ կոմպակտ է:
2. Եթե (x,y)-ը $\Gamma(A,B)$ խաղի խառը վարվելակերպերով իրավիճակ է, ապա համատեղ խառը վարվելակերպերով որոշվող $M=\{\mu_{ij}\}$ իրավիճակը հավասարակշիռ կլինի միայն այն դեպքում, երբ (x,y)-ը Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակ լինի $\Gamma(A,B)$ խաղի խառը վարվելակերպերով:

$\mapsto$ Դիցուք՝ (x,y), $x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$, $y=(\eta_1,\ldots,\eta_m)$-ը, $\Gamma(A,B)$ խաղի խառը վարվելակերպերով իրավիճակ է, իսկ $M=\{\mu_{ij}\}$-ը՝ համապատասխան իրավիճակ է համատեղ վարվելակերպերով, այսինքն՝ $\mu_{ij}=\xi_i\eta_j$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$: M-ի հավասարակշիռ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է (5.2) անհավասարությունների համակարգի ճշմարիտ լինելը, այսինքն՝

$$\xi_i K_1(i,y)\geq\xi_i K_1(i',y),\ \eta_j K_2(x,j)\geq\eta_j K_2(x,j'),\qquad (5.3)$$

որտեղ i, $i' \in \{1,2,\dots,m\}$, j', $j' \in \{1,2,\dots,n\}$: Եթե $\xi_i = 0$, $\eta_j = 0$, ապա անհավասարությունները ակնհայտ են: Այդ իսկ պատճառով (5.3) անհավասարությունների համակարգը համարժեք է

$$K_1(i,y) \ge K_1(i',y),\ K_2(x,j) \ge K_1(x,j') \text{ -ին,} \tag{5.4}$$

որտեղ i, $i' \in \{1,2,\dots,m\}$, j, $j' \in \{1,2,\dots,n\}$ և i-ն և j-ն պատկանում են x և y վարվելակերպերի սպեկտրին: Ենթադրենք, որ (x,y)-ը $\Gamma(A,B)$ խաղի խառը վարվելակերպերով Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակ է: Այդ դեպքում, համաձայն 4.2 ենթակետում բերված թեորեմի

$$K_1(i,y) = K_1(x,y),\ K_2(x,j) = K_2(x,y)$$

լավագույն վարվելակերպերի սպեկտրներից բոլոր i-երի և j-երի համար:

Հետևաբար, (5.4) անհավասարությունները ճշմարիտ են և $M \subseteq Z_c(\Gamma)$:

Հակառակը, եթե (5.3)-ը ճշմարիտ է, ապա վերցնելով (5.3) գումարը և i-ի և j-ի համար համապատասխանաբար կիրառելով 4.1 ենթակետի թեորեմը, կստանանք (x,y), որը Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակ է:

$M \subseteq Z_c(\Gamma)$ բազմության ուռուցիկ և կոմպակտ լինելը հետևում է նրանից, որ $M \subseteq Z_c(\Gamma)$-ն (5.2) գծային անհավասարությունների լուծումների բազմությունն է, որը սահմանափակ է, իսկ ոչ դատարկ լինելը հետևում է խառը վարվելակերպերով Նեշի հավասարակշիռ իրավիճակի առկայությունից: ⌟

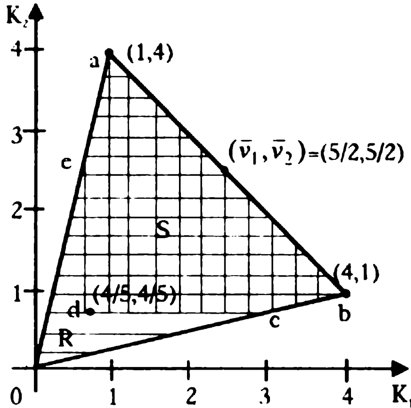
Նկատենք, որ $M^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ համատեղ խառը վարվելակերպը հավասարակշիռ է "Ընտանեկան վեճ" խաղում (օրինակ 1), որը հեշտ է նկատել անհավասարությունները ստուգելով:

§ 6. Բանակցությունների խնդիր

6.1 Այս պարագրաֆում ուսումնասիրվելիք հիմնական հարցն այն է, թե բանակցությունների ընթացքում խելամիտ խաղացողները համատեղ լուծում ընտրելիս ինչպես հասնեն համաձայնության:

Մինչև խնդրի ձևակերպումը մեկ անգամ ևս անդրադառնանք "ընտանեկան վեճ" խնդրին:

Օրինակ 11: "Ընտանեկան վեճ" խաղի համատեղ խառը վարվելակերպերի համար դիտարկենք թույլատրելի շահումների վեկտորներին համապատասխանող ***R*** բազմությունը (գծ. 3-ի ստվերագծված տիրույթը):



գծ. 3

Խաղացողները, գործելով համատեղ, կարող են ***R*** տիրույթում ստանալ խառը վարվելակերպով ցանկացած շահում: Բայց դա չի նշանակում, թե նրանք կարող են պայմանավորվել խաղի ցանկացած ելքի վերաբերյալ: Այսպես, 1-ին խաղացողին առավել շահավետ է (4,1) կետը, իսկ 2-րդ խաղացողին՝ (1,4) կետը: Ոչ մի խաղացող չի համաձայնի բանակցությունների արդյունքին, եթե իր շահումը մաքսիմինի արժեքից պակաս լինի, որովհետև այդ շահումը նա կարող է ստանալ ինքնուրույն գործելով (անկախ խաղընկերոջ ցանկությունից): Խաղացողների մաքսիմինային խառը վարվելակերպերը այս խաղում համապատասխանաբար $x^0 = (0.2,0.8)$ և $y^0 = (0.8,0.2)$ են, իսկ շահումները՝ մաքսիմինային վարվելակերպով $(v_1^0, v_2^0) = (0.8,0.2)$: Այդ պատճառով է, որ բանակցությունների համար հնարավոր ***S*** բազմությունը սահմանափակվում է a,b,c,d,e կետերով (տե՛ս, նկ. 3): Սա անվանենք *խաղի բանակցությունների բազմություն*: Գործելով համատեղ՝ խաղացողները միշտ կարող են համաձայնության գալ $\overline{ab}$ հատվածի կետերից ընտրելու շուրջը, որովհետև դա երկուսին էլ շահավետ է ($\overline{ab}$ հատվածը համապատասխանում է Պարետոյան լավագույն իրավիճակներին):

6.2 Բանակցությունների արդյունքում S-ից (v_1, v_2) կետի ընտրության խնդիրը անվանենք բանակցությունների խնդիր:

Այսպիսով, մենք հասանք հաջորդ հարցին: Դիցուք՝ $\Gamma(A,B)$ երկմատրից խաղի համար տրված են S բանակցությունների բազմությունը և (v_1^0, v_2^0) մաքսիմինի շահումների վեկտորը: Պահանջվում է գտնել բանակցությունների խնդրի լուծման կանոն, այսինքն՝ գտնել այնպիսի φ ֆունկցիա, որ

$$\varphi(S, v_1^0, v_2^0) = (\bar{v}_1, \bar{v}_2): \tag{6.1}$$

Պարզվում է, որ (6.1) խնդիրը, որոշ խելամիտ ենթադրությունների առկայության դեպքում, լուծելի է, որովհետև ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Դիցուք՝ S-ը ուռուցիկ կոմպակտ է R_2-ում, (v_1^0, v_2^0)-ն $\Gamma(A,B)$ խաղի մաքսիմինային շահումների վեկտորն է: S բազմությունը, $(\bar{O}_1, \bar{O}_2)$ զույգը և φ ֆունկցիան բավարարում են հետևյալ պայմանները.

1) $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \geq (v_1^0, v_2^0)$,

2) $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in S$,

3) եթե $(v_1, v_2) \in S$ և $(v_1, v_2) \geq (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, ապա $(v_1, v_2) = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$,

4) եթե $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \bar{S} \subset S$ և $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \varphi(S, v_1^0, v_2^0)$, ապա

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \varphi(S, v_1^0, v_2^0),$$

5) դիցուք՝ T-ն S-ից ստացվում է $v_1^1 = \alpha_1 v_1^0 + \beta_1$, $v_2^1 = \alpha_2 v_1^0 + \beta_2$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ գծային ձևափոխությունների օգնությամբ: Այդ դեպքում, եթե $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \varphi(S, v_1^0, v_2^0)$, ապա

$$\varphi(T, \alpha_1 v_1^0 + \beta_1, \alpha_2 v_2^0 + \beta_2) = (\alpha \bar{v}_1 + \beta_1, \alpha \bar{v}_2 + \beta_2),$$

6) եթե $(v_1, v_2) \in S$ հետևում է, որ $(v_2, v_1) \in S$ բոլոր $(v_1, v_2) \in S$, $v_1^0 = v_2^0$ և $\varphi(S, v_1^0, v_2^0)$, ապա $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$:

Այդ պայմանների առկայության դեպքում գոյություն ունի այնպիսի միակ φ ֆունկցիա, որ $\varphi(S, v_1^0, v_2^0) = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$:

φ ֆունկցիան, որն արտապատկերում է (S, v_1^0, v_2^0) բանակցությունների խաղը $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ վեկտոր շահումների բազմության մեջ և բավարարում է 1-6 պայմաններին, կոչվում է Նեշի միջնորդության սխեմա, 1-6 պայմանները՝ Նեշի աքսիոմներ, իսկ

$(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ վեկտորը՝ միջնորդության շահումների վեկտոր: Այսպիսով, միջնորդության սխեման օպտիմալության իրագործելի սկզբունքն է բանակցությունների խաղի համար:

Նախքան ապացուցմանն անցնելը թեորեմի պայմանները քննարկենք “Ընտանեկան վեճ” խաղի օրինակով: 1) և 2) պայմանների իմաստն այն է, որ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ շահումների վեկտորը գտնվում է մի բազմությունում, որը սահմանափակվում է a,b,c,d,e կետերով: 3) սահմանափակումը ցույց է տալիս, որ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ կետը պատկանում է Պարետոյի օպտիմալության կետերի բազմությանը: 4) պայմանը վկայում է կողմնակի վարվելակերպերից ֆունկցիայի անկախության մասին, այսինքն՝ եթե $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$-ը վերավաճառքի շահումների վեկտոր է S բազմության համար, ապա բանակցությունների բազմությունը մինչև S_1 ընդլայնումից ստացվող լուծումը կլինի կամ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, կամ՝ S-ին չպատկանող այլ կետ: 5) սահմանափակումը վկայում է այն մասին, որ եթե շահումների ֆունկցիաները տարբերվում են միայն չափման մասշտաբով և հաշվարկի սկզբնակետով, ապա տարբերվում են նաև բանակցությունների արդյունքները: 6) համկությունը ցույց է տալիս երկու խաղացողների իրավահավասարությունը:

6.2 կետի թեորեմի ապացուցումը խարսխված է հետևյալ օժանդակ արդյունքների վրա:

6.3 *Լեմ*: Եթե գոյություն ունի $(v_1, v_2) \in S$ կետ այնպես, որ $v_1 > v_1^0$ և $v_2 > v_2^0$, ապա գոյություն ունի միակ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ կետ, որը մաքսիմացնում է $\theta(v_1, v_2) = (v_1 - v_1^0, v_2 - v_1^0)$ ֆունկցիան $S_1 \in S$ ենթաբազմության վրա. $S_1 = \{(v_1, v_2) | (v_1, v_2) \in S, v_1 > v_1^0\}$:

↦ Ըստ պայմանի, S-ը ոչ դատարկ կոմպակտ է, իսկ θ-ն անընդհատ ֆունկցիա է, հետևաբար հասնում է իր $\bar{\theta}$ մաքսիմումին: Ըստ ենթադրության $\bar{\theta}$-ը դրական է: Դիցուք՝ S_1-ի վրա գոյություն ունեն θ ֆունկցիայի մաքսիմումի երկու կետեր՝ (v_1', v_2') և (v_1'', v_2''):

Նկատենք, որ $v_1' \neq v_1''$, քանի որ հակառակ դեպքում θ ֆունկցիայի տեսքից ելնելով կունենանք $v_2' = v_2''$: Եթե $v_1' < v_1''$, ապա $v_2' > v_2''$: Եվ քանի որ S_1-ը ուռուցիկ է, ապա $(\bar{v}_1, v_2) \in S_1$, որտեղ $\bar{v}_1 = (v_1' + v_1'')/2$, $\bar{v}_2 = (v_2' + v_2'')/2$: Ունենք

$$\theta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)=\{[(\nu_1^{'}-\nu_1^0)+(\nu_1^{''}-\nu_1^0)]:2\}\cdot\{[(\nu_2^{'}-\nu_2^0)+(\nu_2^{''}-\nu_2^0)]:2\}=$$
$$=[(\nu_1^{'}-\nu_1^0)\cdot(\nu_2^{'}-\nu_2^0)]/2+[(\nu_1^{''}-\nu_1^0)\cdot(\nu_2^{''}-\nu_2^0)]/2+[(\nu_1^{'}-\nu_1^{''})\cdot(\nu_2^{''}-\nu_2^{'})]/4$$

Վերջին գումարի առաջին երկու գումարելիներից յուրաքանչյուրը հավասար է $\bar{\theta}/2$, իսկ երրորդ գումարելին դրական է, որն անհնար է, որովհետև $\bar{\theta}$-ը՝ ֆունկցիայի մաքսիմումն է: Այսպիսով, $(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ կետը, որը S_1 բազմության վրա մաքսիմացնում է θ ֆունկցիան, միակն է:

6.4 *Լեմ*: Դիցուք՝ S-ը բավարարում է 6.3 կետի պայմաններին, իսկ $(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$-ն $\theta(\nu_1,\nu_2)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետն է և դիցուք՝ $\delta(\nu_1,\nu_2)=(\bar{\nu}_2-\nu_2^0)\nu_1+(\bar{\nu}_1-\nu_1^0)\nu_2$: Եթե $(\nu_1,\nu_2)\in S$, ապա ճշմարիտ է $\delta(\nu_1,\nu_2)\le\delta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ անհավասարությունը:

$\mapsto$ Ենթադրենք գոյություն ունի այնպիսի $(\nu_1,\nu_2)\in S$ կետ, որ $\delta(\nu_1,\nu_2)>\delta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$: S-ի ուռուցիկությունից ունենք $(\nu_1^{'},\nu_2^{'})\in S$, որտեղ $\nu_1^{'}=\bar{\nu}_1+\varepsilon(\nu_1-\bar{\nu}_1)$ և $\nu_2^{'}=\bar{\nu}_2+\varepsilon(\nu_2-\bar{\nu}_2)$, $0<\varepsilon<1$: Գծայնությունից հետևում է, որ $\delta(\nu_1-\bar{\nu}_1,\nu_2-\bar{\nu}_2)>0$: Հետևաբար,

$$\theta(\nu_1^{'},\nu_2^{'})=\theta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)+\varepsilon\delta(\nu_1-\bar{\nu}_1,\nu_2-\bar{\nu}_2)+\varepsilon^2(\nu_1-\bar{\nu}_1)(\nu_2-\bar{\nu}_2):$$

Վերջին արտահայտությունը $0(\varepsilon)$ կարգի անվերջ փոքր մեծություն է: Հետևաբար, բավականին փոքր $\varepsilon>0$-ի համար ստանում ենք $\theta(\nu_1^{'},\nu_2^{'})>\theta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ անհավասարությունը, որը հակասում է $\theta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ արժեքի առավելագույնը լինելուն: ┘

6.5 Անցնենք 6.2 ենթակետի թեորեմի ապացուցմանը: Դրա համար ցույց տանք, որ $(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ կետը, որը մաքսիմացնում է $\theta(\nu_1,\nu_2)$-ը, բանակցությունների խնդրի լուծումն է:

$\mapsto$ Ենթադրենք, բավարարված են 6.3 լեմի պայմանները: Հետևաբար, որոշված է $\theta(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ կետը, որը մաքսիմացնում է $\theta(\nu_1,\nu_2)$-ը: Կարելի է ստուգել, որ $(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$-ը բավարարում է 6.2 ենթակետի թեորեմի 1)-4) պայմաններին: Այն բավարարում է թեորեմի նաև 5) պայմանին, որովհետև եթե $\nu_1^{'}=\alpha_1\nu_1+\beta_1$ և $\nu_2^{'}=\alpha_2\nu_2+\beta_2$, ապա

$$\theta^{'}(\nu_1^{'},\nu_2^{'})=[\nu_1^{'}-(\alpha_1\nu_1^0+\beta_1)][\nu_2^{'}-(\alpha_2\nu_2^0+\beta_2)]=\alpha_1\alpha_2\theta(\nu_1,\nu_2),$$

և եթե $(\bar{\nu}_1,\bar{\nu}_2)$ մաքսիմացնում է $\theta(\nu_1,\nu_2)$-ը, ապա $(\nu_1^{'},\nu_2^{'})$-ը մաքսիմացնում է $\theta^{'}(\nu_1^{'},\nu_2^{'})$-ը: Ցույց տանք, որ $(\nu_1^{'},\nu_2^{'})$ բավարարում է 6)-րդ պայմանին: Դիցուք՝ S-ը սիմետրիկ է 6) պայմանի առումով և $v_1^0 = v_2^0$: Այդ դեպքում $(\bar{v}_2, \bar{v}_1) \in S_1$ և $\theta(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \theta(\bar{v}_2, \bar{v}_1)$: Քանի որ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$-ը միակ կետն է, որ $\theta(v_1, v_2)$-ը մաքսիմացնում է S_1 վրա, հետևաբար $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (\bar{v}_2, \bar{v}_1)$, այսինքն՝ $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$:

Այսպիսով, (v_1, v_2) կետը բավարարում է 1)-6) պայմաններին: Ցույց տանք, որ այն բանակցությունների խնդրի միակ լուծումն է: Դիտարկենք

$$R = \{(v_1, v_2) | \delta(v_1, v_2) \le \delta(\bar{v}_1, \bar{v}_2)\} \tag{6.2}$$

բազմությունը:

Համաձայն 6.4 լեմի՝ $S \subset R$: Դիցուք՝ T-ն ստացվում է հենց R-ից հետևյալ ձևափոխության օգնությամբ.

$$v_1' = (v_1 - v_1^0) / (\bar{v}_1' - v_1^0), \ v_2' = (v_2 - v_2^0) / (\bar{v}_2' - v_2^0): \tag{6.3}$$

Գտնելով v_1 և v_2 (6.3)-ից և տեղադրելով (6.2)-ում՝ ստանում ենք, որ

$$T = \{(v_1', v_2') | v_1' + v_2' \le 2\},$$

և $v_1^0 = v_2^0 = 0$: Բայց T-ն սիմետրիկ է, հետևաբար 6) հատկությունից լուծումը (եթե այն գոյություն ունի) ընկած է $v_1' = v_2'$ ուղիղի վրա, իսկ ըստ 3) հատկոթյան, այն պետք է լինի (1,1) կետը, այսինքն $(1,1) = \varphi(T,0,0)$: Վերցնելով (6.3) ձևափոխության հակադարձը և կիրառելով 5-րդ հատկությունը՝ ստանում ենք, որ $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \varphi(R, v_1^0, v_2^0)$: Բայց $(\bar{v}_1, \bar{v}_2') \in S$, իսկ $S \subset R$, հետևաբար, 4-րդ հատկության հիման վրա $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ զույգը լուծում է $\varphi(S, v_1^0, v_2^0)$-ի համար: Այժմ ենթադրենք, որ 6.3 ենթակետի լեմի պայմանները բավարարված չեն, այսինքն գոյություն չունեն $(v_1, v_2) \in S$ կետեր, որոնց համար $v_1 > v_1^0$ և $v_2 > v_2^0$: Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.

ա) Գոյություն ունեն կետեր, որոնց համար $v_1 > v_1^0$ և $v_2 = v_2^0$: Այս դեպքում, որպես (v_1, v_2) S-ում կվերցնենք այն կետը, որը մաքսիմացնում է v_1-ը, $v_2 = v_2^0$ սահմանափակման պայմանով:

բ) Գոյություն ունեն այնպիսի կետեր, որոնց համար $v_1 = v_1^0$ և $v_2 > v_2^0$: Այս դեպքում, որպես $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ S-ից կվերցնենք այնպիսի կետ, որը v_2-ը մաքսիմացնում է $v_1 = v_1^0$ սահմանափակման դեպքում:

գ) Բանակցությունների S բազմությունը վերածվում է (v_1^0, v_2^0) մաքսիմինային շահումների կետի (օրինակ, մատրիցային խաղերի դեպքը): Վերցնում ենք $\bar{v}_1 = v_1^0$, $\bar{v}_2 = v_2^0$:

Անմիջականորեն կարելի է ստուգել, որ այս լուծումները բավարարում են 1)-6) հատկություններին, և այդ դեպքում 1)-3) հատկություններից հետևում է միակությունը: ┘

§ 7. Բնութագրիչ ֆունկցիայի տեսքով խաղ

§5-6-ում երկանձ խաղի օրինակով ցույց տրվեց, թե ինչպես խաղացողները, օգտագործելով համաձայնեցված վարվելակերպի ընտրության հնարավորությունը, կարող են հանգել անհակամարտ ներհակության փոխընդունելի հանգուցալուծման (վարվելակերպային մոտեցում): Այժմ ընդունելու ենք, որ խաղի կանոնները թույլատրում են խաղացողների համատեղ գործողություններ և շահումի վերաբաշխում: Դա ենթադրում է, որ տարբեր խաղացողների համար օգտակարությունները գնահատվում են միասնական սանդղակով (փոխանցելի շահումներ), և այդ պատճառով էլ շահումների փոխադարձ վերաբաշխումը չի խեղաթյուրում սկզբնական խնդրի բովանդակային դրվածքը: Բնական է համարել, որ առավելագույնն ընդհանուր շահում ստանալու նպատակով խաղացողների միավորումը առավելագույն դաշնախմբում (բոլոր խաղացողներից բաղկացած դաշնախումբ) լավագույն արդյունքի կհանգեցնի անգամ ամեն մի խաղացողի տեսանկյունից: Ընդ որում մեզ հետաքրքրելու է ոչ այնքան այն, թե խաղացողների դաշնախումբը ինչպես է հայթայթում իր ընդհանուր շահումը, այլ այն, թե դա ինչպես է բաշխվելու դաշնախմբի անդամների միջև (կոոպերատիվ մոտեցում):

7-9 պարագրաֆներում դիտարկվելու է n անձանց կոոպերատիվ խաղերի տեսությունը: Հետազոտվելու են այն պայմանները, որոնց դեպքում նպատակահարմար է խաղացողների միավորումը առավելագույն դաշնախմբում, իսկ առանձին խաղացողներ չեն ցանկանա ստեղծել ավելի փոքր խմբավորումներ կամ գործել անհատապես:

7.1 Դիցուք՝ $N = \{1,\dots,n\}$-ը բոլոր խաղացողների բազմությունն է: Կամայական ոչ դատարկ $S \subset N$ ենթաբազմությունը կոչվում է դաշնախումբ:

Սահմանում: N բազմության բոլոր հնարավոր S ենթաբազմությունների վրա որոշված $V(S)$ իրական ֆունկցիան կանվանենք n անձանց խաղի բնութագրիչ ֆունկցիա, եթե ցանկացած T և S $(T \subset N, S \subset N)$ չհատվող ենթաբազմությունների համար

$$v(T) + v(S) \le v(T \cup S), \; v(\varnothing) = 0 \qquad (7.1)$$

անհավասարությունը ճշմարիտ է:

(7.1)-ը կոչվում է գերգումարականության հատկություն: Այն անհրաժեշտ է $v(T)$ թիվը որպես T դաշնախմբի երաշխավորված շահում մեկնաբանելու համար, երբ այն գործում է մյուս խաղացողներից անկախ: Նման մեկնաբանման դեպքում (7.1)-ը նշանակում է, որ $S \cup T$ դաշնախումբը պակաս հնարավորություններ չունի, քան երբ S և T չհատվող դաշնախմբերը գործում են անկախ: V-ի գերմիավորումից ստանում ենք ցանկացած $S_1, \ldots, S_k$ չհատվող դաշնախմբերի համար

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \le v(N):$$

Սրանից մասնավորապես հետևում է, որ գոյություն չունի N բազմության այնպիսի տրոհում, որի ընդհանուր երաշխավորված շահումը գերազանցի բոլոր խաղացողների $v(N)$ առավելագույն շահումին:

7.2 Դիտարկենք $F = (N, \{x_i\}_{i \subset N}, \{H_i\}_{i \in N})$ անդաշինք խաղը:

Դիցուք՝ $S \subset N$ դաշնախումբ կազմող խաղացողներն իրենց ջանքերը միավորում են ընդհանուր շահույթը մեծացնելու նպատակով: Որոշենք, թե նրանք իրենց համար ինչ առավելագույն շահույթ կարող են երաշխավորել: S դաշնախմբի անդամների համատեղ գործողությունները նշանակում են, որ S դաշնախումբը իր անդամների անունից գործելով որպես մեկ խաղացող (այն նշանակենք 1), որպես մաքուր վարվելակերպերի բազմություն ունի S-ի խաղացողների վարվելակերպերի հնարավոր բոլոր համակցությունները, այսինքն՝ դեկարտյան արտադրյալի բաղադրիչները.

$$X_s = \prod_{i \in S} X_i:$$

S դաշնախմբի խաղացողների շահերի ընդհանրությունից հետևում է, որ S-ի (խաղացող 1-ի) $H_S(x)$ շահումը խաղացողների շահումների գումարն է.

$$H_S(x) = \sum_{i \in S} H_i(x),$$

որտեղ $x \subset X_N$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$-ը իրավիճակն է մաքուր վարվելակերպերում:

Մեզ հետաքրքրում է այն ամենամեծ շահումը, որ կարող են իրենց երաշխավորել S-ի խաղացողները: 1 խաղացողի համար վատագույն դեպքում $N \setminus S$ բազմության մնացած խաղացողները նույնպես կարող են միավորվել որպես համատեղ 2 խաղացող $X_{N \setminus S} = \prod_{i=N \setminus S} x_i$ վարվելակերպերի բազմությամբ և 1 խաղացողին տրամագծորեն հա՛ առակ ձգտումով (այսինքն 2 խաղացողի շահումը x իրավիճակում - $H_S(x)$ է): Այսպիսի դատողությունների շնորհիվ S դաշնախմբի երաշխավորված առավելագույն շահումի հարցը վերածվեց $\Gamma_S = (X_S, X_{N \setminus S}, H_S)$ հակամարտ խաղում 1 խաղացողի երաշխավորված առավելագույն շահումը որոշելու հարցի: Γ_S խաղի $\overline{\Gamma}_S = (\overline{X}_S, \overline{X}_{N \setminus S}, K_S)$ խառը ընդլայնման մեջ 1 խաղացողի $\overline{v}(S)$ երաշխավորված շահումը, Γ_S խաղի հետ համեմատած, կարող է լոկ մեծանալ, ուստի այսուհետև կդիտարկենք Γ_S խաղի խառը ընդլայնումը: Մասնավորապես, նկատենք որ $v(S)$-ի այսպիսի մեկնաբանման դեպքում $v(S)$-ը համընկնում է $\overline{\Gamma}_S$ խաղի արժեքի հետ (եթե այն գոյություն ունի), իսկ $v(N)$-ը խաղացողների առավելագույն ընդհանուր շահումն է: Ակնհայտ է, որ $v(S)$-ը ի վերջո ֆունկցիա է միայն S դաշինքից (և թերևս սկզբնական անդաշինք խաղից, սակայն մեր դատողություններում այն մնում է անփոփոխ): Համոզվենք, որ սա անդաշինք խաղի բնութագրիչ ֆունկցիան է, որի համար բավարար է ցույց տալ (7.1) պայմանի ճշմարտացիությունը:

Նկատենք, որ վերևում կառուցված յուրաքանչյուր անդաշինք խաղի համար $\overline{v}(\varnothing) = 0$: Իրոք, ըստ սահմանման $H(x) = \sum_{i \subset \varnothing} H_i(x)$, բայց վերջին գումարը գումարելիներ չի պարունակում, ուստի $H(x)$-ը նույնաբար զրո է, այդ պատճառով $\overline{v}(\varnothing) = 0$:

Լեմ (գերգումարականության մասին): Անդաշինք $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$ խաղի համար կառուցենք

$$v(S) = \sup_{\mu_S} \inf_{\nu_N \setminus S} K_S(\mu_S \nu_N \setminus S), \tag{7.2}$$

ֆունկցիան, որտեղ $\mu_S \in \overline{X}_S$, $\nu_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}$, $\overline{\Gamma}_S = (\overline{X}_S, \overline{X}_{N \setminus S}, K_S)$-ը Γ_S հակամարտ խաղի խառը ընդլայնումն է: Այդ դեպքում, բոլոր S-երի համար, $T \subset N$, որոնց համար $S \cap T = \varnothing$, ճշմարիտ է

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \tag{7.3}$$

անհավասարությունը:

Օրինակ 12 ("Ջազ նվագախումբ" խաղ): Անսամբլի տնօրենը $S(1)$ երգչին, $P(2)$ դաշնակահարին և $D(3)$ թմբկահարին խոստանում է համատեղ ելույթի համար վճարել 10000 դրամ: Երգիչ-դաշնակահար զույգի ելույթը նա գնահատում է 8000, թմբկահար-դաշնակահար զույգինը՝ 6500, իսկ միայն դաշնակահարի ելույթը՝ 3000 դրամ: Այլ զույգեր և մենակատարներ չեն դիտարկվում, քանի որ տնօրենը գտնում է, որ դաշնակահարի մասնակցությունը պարտադիր է: Երեկոյի ընթացքում երգիչ-թմբկահար զույգը կվաստակի 5000 դրամ, երգիչը՝ 2000, իսկ թմբկահարը միայնակ ոչինչ չի վաստակի:

Այսպիսով, ունենք (N,ν) կոոպերատիվ խաղ, որտեղ $N=\{1,2,3,4\}$, $\nu=\{1,2,3\}=10000$, $\nu\{1,2\}=8000$, $\nu\{1,3\}=5000$, $\nu\{2,3\}=6500$, $\nu\{1\}=2000$, $\nu\{2\}=3000$, $\nu\{3\}=0$ դրամ:

n անձանց կոոպերատիվ խաղի հիմնական խնդիրը $\nu(N)$ առավելագույն ընդհանուր շահումը խաղացողների միջև լավագույն ձևով բաշխելու իրագործելի սկզբունքների կառուցումն է:

Դիցուք՝ α_i-ն i-րդ խաղացողի ստացած գումարն է $\bar{\nu}(N)$ առավելագույն շահումը բաշխման ժամանակ, $N=\{1,2,\ldots,n\}$:

Սահմանում: $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը, որը բավարարում է

$$\alpha_i \geq \nu(\{i\}),\ i\in N, \tag{7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \nu(N) \tag{7.5}$$

պայմաններին, որտեղ $\nu(\{i\})$-ն $S=\{i\}$ մեկ բաղադրիչով դաշնախմբի բնութագրիչ ֆունկցիայի արժեքն է, կոչվում է բաժանք:

(7.4)-ը կոչվում է անհատական խոհեմության պայման և նշանակում է, որ մասնակցելով դաշինքին՝ յուրաքանչյուր խաղացող ստանում է առնվազն այնքան, ինչքան կարող էր ստանալ՝ գործելով ինքնուրույն և առանց մտահոգվելու որևէ այլ խաղացողի աջակցելու մասին: (7.5) պայմանը նույնպես պետք է կատարվի, քանի որ $\sum\limits_{i\in N} a_i < \nu(N)$-ի դեպքում գոյություն ունի a' բաշխում, երբ $i\in\overline{N}$ յուրաքանչյուր խաղացող իր α_i բաժնից ավելի կստանա: Իսկ եթե $\sum\limits_{i\subset N} a_i > \nu(N)$, ապա N-ի խաղացողները իրար մեջ բաժանում են անիրագործելի շահումը, և այդ պատճառով α վեկտորը իրականացնելի չէ: Հետևաբար, α վեկտորը կարող է թույլատրելի համարվել միայն (7.5) պայմանի կատարման դեպքում, որը կոչվում է կոլեկտիվ (կամ խմբակային) խոհեմության պայման:

(7.4), (7.5) պայմանների համաձայն՝ որպեսզի $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը (N, v) կոոպերատիվ խաղում բաշխույթ լինի անհրաժեշտ է և բավարար

$$\alpha_i = v(\{i\}) + \gamma_i,\ i \in N$$

հավասարության ճշմարտացիությունը, ընդ որում

$$\gamma_i \geq 0,\ \sum_{i\in N}\gamma_i = v(N) - \sum_{i\in N} v(\{i\}):$$

Սահմանում: (N, v) խաղը կոչվում է էական, երբ ճշմարիտ է

$$v(\{1\})+\ldots+v(\{n\}) < v(N) \qquad (7.6)$$

անհավասարութունը: Հակառակ դեպքում (N, v) խաղը կոչվում է ոչ էական:

Կամայական α բաժանմունքի համար $\alpha(S)$-ով կնշանակենք $\sum_{i\in S}\alpha_i = \alpha(S)$ մեծությունը, իսկ բոլոր բաժանքների $i \in S$ բազմությունը՝ D-ով:

Ոչ էական խաղն ունի մեկ $\alpha = (v(\{1\}), v(\{2\}),\ldots, v(\{n\}))$ բաշխույթ: Մեկից ավելի խաղացողով ցանկացած էական խաղում բաժանքների բազմությունն անվերջ է: Այդ պատճառով այդպիսի խաղերի վերլուծությունը կկատարենք գերակշռելու հարաբերության օգնությամբ:

Սահմանում: S դաշնախմբով α բաժանքը գերիշխում է β բաժանքին (նշանակումը՝ $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$), եթե

$$\alpha_i > \beta_i,\ i \in S,\ \alpha(S) \leq v(S): \qquad (7.7)$$

Սահմանման առաջին պայմանը նշանակում է, որ S դաշնախմբի բոլոր անդամների համար α բաժանքը β բաժանքից գերադասելի է, իսկ (7.7)-ի երկրորդ պայմանն արտացոլում է S դաշնախմբում α բաժանքի իրագործելիությունը (այսինքն՝ S դաշնախումբը, իրոք, յուրաքանչյուր $i \in S$ խաղացողի կարող է առաջարկել α_i մեծությունը):

Սահմանում: Ասում են, որ α բաժանքը գերակշռում է β բաժանքին, եթե գոյություն ունի S դաշնախումբ, որի համար $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$:

Գերակշռությունն անհնարին է մեկ բաղադրիչով դաշնախմբի և N-ի բոլոր խաղացողների բազմության համար: Իրոք, $\alpha_i > \beta_i$-ից կհետևի, որ $\beta_i < \alpha_i \le v(\{i\})$, որը հակասում է (7.4) պայմաններին: Իսկ $\alpha \succ_N \beta$-ից կհետևի, որ $\alpha_i > \beta_i$, բոլոր $i \in N$-ի համար և, հետևաբար, $\sum_{i \in N} \alpha_i > \sum_{i \in N} \beta_i = v(N)$, որը հակասում է (7.5) պայմանին:

7.3 Այս կամ այն դասում կոոպերատիվ խաղերի միավորումը էապես դյուրացնում է դրանց հետագա դիտարկումը: Որպես այդպիսիք, կարելի է դիտարկել համարժեք խաղերի դասերը:

Սահմանում: (N,v) կոոպերատիվ խաղը կոչվում է (N,v') խաղին համարժեք, եթե գոյություն ունեն k դրական թիվ և c_i, $i \in N$ այնպիսի n իրական թվեր, որ ցանկացած $S \subset N$ դաշնախմբերի համար ճշմարիտ է

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i \tag{7.8}$$

հավասարությունը:

(N,v') և (N,v') խաղերի համարժեքությունը կնշանակենք $(N,v) \sim (N,v')$ կամ $v \sim v'$:

Ակնհայտ է, որ $v \sim v'$: Դրանում համոզվելու համար բավական է (7.8) բանաձևում տեղադրել $c_i = 1$, $k = 1$, $v' = v$: Այս հատկությունը կոչվում է *անդրադարձելիություն*:

Ապացուցենք հարաբերության համաչափությունը, այսինքն՝ որ $\bar{v} \sim \bar{v}'$ պայմանից հետևում է $v' \sim v$-ն: Իրոք, ընդունելով $k' = 1/k$, $c_i' = -c_i / k$, կստանանք $v(S) = K'v'(S) + \sum_{i \in S} c_i'$, այսինքն՝ $\bar{v}' = \bar{v}$ պայմանը:

Վերջապես, եթե $v \sim v'$ և $v' \sim v''$, ապա $v \sim v''$: Այս հատկությունը կոչվում է փոխանցականություն: Այն ստուգվում է (7.8) բանաձևի հաջորդական կիրառմամբ:

Քանի որ համարժեքության հարաբերությունը անդրադարձական, համաչափական և փոխանցական է, այն n անձանց խաղերի բազմությունը տրոհում է համարժեք խաղերի՝ փոխադարձաբար չհատվող դասերի:

Թեորեմ: Եթե v և v' երկու խաղերը համարժեք են, ապա $\alpha_i' = k\alpha_i + c_i$, $i \in N$ բանաձևով իրականացվող $\alpha \to \alpha'$ արտապատկերումը v խաղի բաժանքների բազմությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է v' խաղի α' բաժանքների բազմության վրա այնպես, որ $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$ պայմանից հետևում է $\alpha' \underset{S}{\succ} \beta'$ պայմանը:

↦ Ստուգենք, որ α'-ը (N, v') խաղում բաժանք է:

Իրոք,

$$\alpha_i' = k\alpha_i + c_i \ge kv(\{i\}) + c_i = \bar{v}'(\{i\})$$

$$\sum_{i \subset N} \alpha_i' = \sum_{i \subset N} (k\alpha_i + c_i) = kv(N) + \sum_{i \in N} c_i = v'(N):$$

Հետևաբար, α'-ի համար (7.4) և (7.5) պայմանները բավարարված են: Այնուհետև, եթե $\alpha \underset{S}{\succ} \beta$, ապա $\alpha_i > \beta_i$, $i \in S$, $\sum_{i \in N} \alpha_i \le v(S)$, այդ պատճառով,

$$\alpha_i' = k\alpha_i' + c_i > k\beta_i + c_i = \beta_i' \quad (k > 0)$$

$$\sum_{i \in S} \alpha_i = k \sum_{i \in S} \alpha_i + \sum_{i \in S} c_i \le kv(S) + \sum_{i \in S} c_i = v'(S),$$

այսինքն՝ $\alpha' \underset{S}{\succ} \beta'$: Արտապատկերման փոխմիարժեքությունը հետևում է հակադարձ արտապատկերման գոյության փաստից (դա օգտագործվեց համարժեքության հարաբերության համաչափությունն ապացուցելիս): ↲

7.4 Կոոպերատիվ խաղերի բազմությունը համարժեքության զույգ առ զույգ չհատվող դասերի տրոհելիս առաջանում է յուրաքանչյուր դասից պարզագույն ներկայացուցիչների ընտրության խնդիրը:

Սահմանում: $\Gamma(N, v)$ խաղը կոչվում է (0,1) տեսքի վերածված խաղ, եթե բոլոր $i \in N$-ի համար

$$v(\{i\}) = 0, \; v(N) = 1:$$

Թեորեմ: Յուրաքանչյուր էական կոոպերատիվ խաղ համարժեք է որևէ (0,1) խաղի:

↦ Դիցուք՝

$$k = \frac{1}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})} > 0,$$

$$c_i = -\frac{v\{i\}}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})}, \; v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i:$$

Այդ դեպքում $v'(\{i\}) = 0, \; v'(N) = 1:$ ↲

Թեորեմից հետևում է, որ գերակշռություն հասկացության հետ առնչվող խաղերի հատկությունները կարելի է ուսումնասիրել վերածված տեսքի (0-1) խաղերում: Եթե v-ն կամայական $(N,\bar{v})$ էական խաղի բնութագրիչ ֆունկցիան է, ապա

$$v'(S)=\frac{v(S)-\sum_{i\in S}v(\{i\})}{v(N)-\sum_{i\in N}v(\{i\})},\quad S\subset N \tag{7.9}$$

ֆունկցիան $\bar{v}$ ֆունկցիային համապատասխանող (0-1) նորմալացումն է: Ընդ որում, խաղի բաժանքն է ցանկացած $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ վեկտոր, որի բաղադրիչները բավարարում են

$$\alpha_i\ge 0,\ i\in N,\ \sum\alpha_i=1 \tag{7.10}$$

պայմանին, այսինքն՝ բաժանքների բազմությունը համընկնում է $\bar{w}_j=(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)\subset R^n$, $j=1,2,\ldots,n$ միավոր-վեկտորներով առաջացած $(n-1)$ չափանի սիմպլեքսին:

§ 8. C-միջուկ

Անցնում ենք կոոպերատիվ խաղերում լավագույն վարքի սկզբունքների քննարկմանը: Ինչպես նշվեց 7.4-ում, խոսքը վերաբերում է խաղացողների միջև առավելագույն ընդհանուր շահումի լավագույն բաշխման սկզբունքներին:

8.1 Հնարավոր է հետևյալ մոտեցումը: Դիցուք՝ $(N,\bar{v})$ կոոպերատիվ խաղում խաղացողները N ամբողջ դաշնախմբի համար եկել են շահույթի բաշխման այնպիսի համաձայնության (α^* բաժանք), որ ոչ մի բաժանք α^*-ին չի գերակշռում: Այս դեպքում նման բաշխումը կայուն է այն իմաստով, որ ոչ մի S դաշնախմբի շահավետ չէ առանձնանալ մյուս խաղացողներից և $v(S)$ շահումը բաշխել դաշնախմբի անդամների միջև: Այս դատողությունները հանգեցնում են չգերակշռող բաժանքների բազմության նպատակահարմարության մտքին:

Սահմանում: (N,v) կոոպերատիվ խաղի չգերակշռող բաժանքների բազմությունը կոչվում է այդ խաղի C-միջուկ:

Թեորեմ: Որպեսզի α բաժանքը պատկանի կոոպերատիվ խաղի C-միջուկին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր $S\subseteq N$ դաշնախմբերի համար ճշմարիտ լինի

$$v(S) \le \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i \qquad (8.1)$$

անհավասարությունը:

$\mapsto$ Ենթադրենք՝ խաղն էական է: Այդ դեպքում ըստ 7.6 թեորեմի բավական է այն ապացուցել տրված խաղին համարժեք (0-1) տեսքի վերածված խաղերի համար:

Բավարարություն: Եթե $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ բաժանքը բավարարում է (8.1) պայմանին, ապա այն իսկապես կպատկանի C-միջուկին: Հակառակ դեպքում կգտնվեր այնպիսի β բաշխույթ, որ $\beta \succ_S \alpha$ այսինքն՝ $\beta(S) > \alpha(S)$ և $\beta(S) \le v(S)$: Հանգեցինք (8.1) պայմանին հակասող $\bar{v}(S) > \alpha(S)$ անհավասարությանը:

Անհրաժեշտություն: (8.1) պայմանին չբավարարող կամայական α բաժանքի համար գոյություն ունի S դաշնախումբ, որի համար $\alpha(S) < v(S)$: S բազմության տարրերի թիվը նշանակենք $|S|$-ով և դիտարկենք

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{v(S) - \alpha(S)}{|S|}, \ i \in S,$$

$$\beta_i = \frac{1 - v(S)}{|N| - |S|}, \ i \notin S$$

նշված տարրերով $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ վեկտորը: Հեշտ է նկատել, որ $\beta(N) = 1$, $\beta_i \ge 0$ և $\beta \succ_S \alpha$: Այստեղից հետևում է, որ α-ն պատկանում է C-միջուկին:

8.1 Թեորեմից հետևում է, որ C միջուկը բոլոր բաժանքների բազմության ներփակ և ուռուցիկ ենթաբազմություն է (C միջուկը կարող է լինել դատարկ բազմություն):

8.2 Դիցուք՝ խաղացողները պայմանավորվում են ընտրել կոոպերատիվ համաձայնությունը: Բնութագրիչ ֆունկցիայի գերգումարականության հատկությունից հետևում է, որ համաձայնեցված որոշում ընդունելու համար ամեն մի բանակցություն կհանգեցնի բոլոր խաղացողների N դաշնախմբի ստեղծմանը: Մնում է պարզել խաղացողների միջև $v(N)$ առավելագույն ընդհանուր եկամտի բաժանքի, այսինքն՝ $\alpha \in R^n$ վեկտորի ընտրության հարցը, որի համար $\sum_{i \in N} \alpha_i = \bar{v}(N)$:

α վեկտորն ընտրելու վերաբերյալ խաղացողների համաձայնությունն ստանալու նվազագույն պահանջը $\alpha_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$ պայմանն է: Դիցուք՝ խաղացողները պայմանավորվում են α որոշակի բաժանքի ընտրության շուրջը: Բաժանքի ընտրության դեմ կարող է առարկել ինչ-որ S դաշնախումբ՝ պահանջելով իր համար առավել շահավետ բաժանք: S դաշնախումբն այս պահանջն առաջադրում է՝ սպառնալով հակառակ դեպքում խախտել ընդհանուր համաձայնությունը (դա միանգամայն իրական սպառնալիք է, քանի որ $v(N)$ եկամուտը ձեռք բերելու համար պահանջվում է բոլոր խաղացողների միահամուռ համաձայնությունը): Ենթադրենք՝ մնացած $N \setminus S$ խաղացողները այդ սպառնալիքին արձագանքում են S դաշնախմբի դեմ ուղղված միացյալ գործողություններով: Այդ դեպքում $v(S)$-ը S դաշնախմբի երաշխավորված առավելագույն եկամտի գնահատականն է: (8.1) պայմանը նշանակում է $N \setminus S$ դաշնախմբի կողմից S դաշնախմբին ուղղված կայունացնող սպառնալիքի առկայություն: Այսպիսով, $(N, \bar{v})$ խաղի C-միջուկը առավելագույն $v(N)$ եկամուտը բաշխելու դաշնախմբային սպառնալիքների առումով կայուն բաշխույթների բազմություն է:

Բերենք բաժանքը C-միջուկին պատկանելու ևս մեկ չափանիշ:

Լեմ: Դիցուք՝ α-ն $(N, \bar{v})$ խաղի բաժանքն է: Այդ դեպքում α-ն կպատկանի C-միջուկին միայն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր $S \subset N$ դաշնախմբերի համար ճիշտ է

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leq v(N) - v(N \setminus S) \qquad (8.2)$$

անհավասարությունը:

$\mapsto$ Քանի որ $\sum_{i \in S} \alpha_i = v(N)$, ապա (8.2) անհավասարությունից կունենանք

$$v(N \setminus S) \leq \sum_{i \in N \setminus S} \alpha_i :$$

Այժմ լեմի պնդումն անմիջապես հետևում է (8.1)-ից: ⅃

(8.1)-ից երևում է, որ եթե α բաժանքը պատկանում է C-միջուկին, ապա որևէ դաշնախումբ չի կարող իր համար ապահովել $\sum_{i \in S} \alpha_i = \alpha(S)$-ին գերազանցող շահում: Այդ պատճառով անհպատակահարմար է առավելագույն մասնակիցներով N դաշնախմբից տարբեր այլ S դաշնախմբերի գոյությունը:

Այն մոտեցումը, որ C-միջուկը կարելի է օգտագործել որպես կոոպերատիվ տեսությունում օպտիմալության կարևոր սկզբունք, բավարար չափով հիմնավորվում է 8.1 թեորեմով: Սակայն, շատ դեպքերում, C-միջուկը կարող է դատարկ լինել, իսկ այլ դեպքերում օպտիմալության բազմության սկզբունք է (դատարկ չէ և պարունակում է բազմաթիվ բաժանքներ):

Օրինակ 13: Դիտարկենք "Ջազ նվագախումբ" խաղը: Երեք երաժիշտների 10000 դրամ առավելագույն եկամուտը ստացվում է նրանց համատեղ ելույթի դեպքում: Եթե երգիչը թմբկահարի հետ ելույթ է ունենում առանց դաշնակահարի, ապա երեքը միասին վաստակում են 6500+2000 դրամ: Եթե դաշնակահարն է ելույթ ունենում միայնակ՝ 3000+5000 դրամ: Վերջապես, եթե դաշնակահարն ու երգիչը ելույթ են ունենում առանց թմբկահարի, ապա ընդհանուր եկամուտը 8000 դրամ է: Մասնակի կոոպերացման և անհատական վարքագծերի առումով խաղացողների նկարագրված հնարավորությունները հաշվի առնելով, ո՞րն է առավելագույն ընդհանուր եկամտի խելամիտ բաշխումը:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)$ վեկտորը "Ջազ նվագախումբ" խաղում C-միջուկին կպատկանի միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq 20, \alpha_2 \geq 30, \alpha_3 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 80, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 65, \alpha_1 + \alpha_3 \geq 5: \end{cases}$$

Այս բազմությունը (3500,4500,2000), (3500,5000,1500), (3000,5000,2000) երեք բաժանքների ուռուցիկ թաղանթն է: Այսպիսով՝ բոլոր երեք խաղացողների շահումները որոշվում են 5 դրամի ճշտությամբ: C-միջուկի բնորոշ ներկայացուցիչը նրա կենտրոնն է (ծայրակետերի միջին թվաբանականը), այսինքն՝ $\alpha^* = (33,3;48,3;18,3)$ վեկտորը: α^* բաժանքին բնորոշ է, որ բոլոր երկանդամ դաշնախմբերը ունեն միևնույն լրացուցիչ եկամուտը՝ $\alpha_i + \alpha_j - v(\{i,j\}) = 1,6$: α^* բաժանքը C-միջուկի ներսում արդարացի փոխզիջումն է:

8.3 Նրանից, որ C-միջուկը դատարկ չէ, չի հետևում N-ի բոլոր խաղացողների կոոպերացման անհնարինությունը: Դա պարզապես նշանակում է, որ ոչ մի բաժանք չի կայունանա վերը նկարագրված պարզագույն սպառնալիքներով: Միջուկը դատարկ է, երբ միջանկյալ դաշնախմբերը չափից ավելի ուժեղ են:

§ 9. Շեպլիի վեկտոր

Արդեն դիտարկված օպտիմալության սկզբունքների բազմազանությունը, կոոպերատիվ խաղերում C-միջուկը, ինչպես նաև այդ սկզբունքի գոյության խիստ պայմանները խթանում են օպտիմալության այնպիսի սկզբունքների որոնում, որոնց գոյությունն ու միակությունը ապահովվեն յուրաքանչյուր կոոպերատիվ խաղում: Օպտիմալության այդպիսի սկզբունքներից է Շեպլիի վեկտորը: Շեպլիի վեկտորը որոշվում է աքսիոմով:

Սահմանում: T դաշնախումբը կանվանենք $(N,\bar{v})$ խաղի կրող, եթե ցանկացած $S \subset N$ դաշնախմբի համար $\bar{v}(S)=\bar{v}(S \cap T)$:

Սահմանումը պնդում է, որ խաղի կրողին չպատկանող ամեն մի խաղացող "անբանի մեկն է", այսինքն ոչ մի դաշնախմբում ոչինչ չի կարող ներդնել:

Դիտարկենք $N=\{1,2,\dots,n\}$ խաղացողների կարգավորված բազմության կամայական P վերադասավորումը: Այս դասավորման հետ կապված է π տեղադրությունը, այսինքն այնպիսի $\pi: N \to N$ ֆունկցիան, որ $i \in N$-ի համար $\pi_i \in N$-ի արժեքը N-ից տարր է, որին P վերադասավորման մեջ համապատասխանում է $i \in N$ տարրը:

Սահմանում: Դիցուք՝ (v,N)-ն n անձանց խաղ է: P-ն N բազմության տեղափոխությունն է, իսկ π-ն դրան համապատասխանող տեղադրություն: $(N,\pi v)$-ով նշանակենք այն (N,u) խաղը, որի համար

$$u(\{\pi(i_1),\pi(i_2),\dots,\pi(i_s)\})=v(S):$$

Ըստ էության, $(N,\pi v)$ խաղը (N,v)-ից տարբերվում է նրանով, որ խաղացողների դերերը փոխվել են վերադասավորությանը համապատասխան:

Վերը բերված սահմանումների օգնությամբ հնարավորություն է ընձեռվում շարադրել Շեպլիի աքսիոմաբանությունը: Նկատենք՝ քանի որ n անձանց կոոպերատիվ խաղերը ըստ էության նույնանում են իրական (բնութագրիչ) ֆունկցիաների հետ, ապա կարելի է խոսել երկու և ավելի խաղերի գումարի, ինչպես նաև խաղը թվով բազմապատկելու մասին:

9.2 Ամեն մի (N,v) կոոպերատիվ խաղին համապատասխանեցնենք $\varphi[v]=(\varphi_1[v],\dots,\varphi_n[v])$ վեկտորը, որի բաղադրիչները կմեկնաբանենք որպես խաղացողների համաձայնության կամ միջնորդի կայացրած որոշման շնորհիվ ստացված շահումներ:

Ընդունենք, որ նշված համապատասխանեցումը բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին:

Շեպլիի աքսիոմներ

1. Եթե S -ը (N,v) խաղի ցանկացած կրող է, ապա

$$\sum_{i\in S}\varphi_i(v)=v(S):$$

2. Ցանկացած π տեղադրության և $i\in N$ -ի համար

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v]=\varphi_i(v):$$

3. Եթե (N,u) -ն և (N,v) -ն ցանկացած կոոպերատիվ խաղեր են, ապա $\varphi_i[u+v]=\varphi_i[u]+\varphi_i[v]$:

Սահմանում: Դիցուք՝ $\varphi^{'}$ -ն ֆունկցիա է, որը, համաձայն 1-3 աքսիոմների, ամեն մի (N,v) խաղին համապատասխանում է $\varphi[v]$ վեկտոր: Այդ պարագայում $\varphi[v]$ -ն կոչվում է (N,v) խաղի արժեքների վեկտոր կամ Շեպլիի վեկտոր:

Պարզվում է, որ այդ աքսիոմները բավարար են, որպեսզի միակ ձևով որոշվեն արժեքները n անձանց բոլոր խաղերի համար:

Թեորեմ: 1-3 աքսիոմներին բավարարող և բոլոր (N,v) խաղերի համար որոշված φ ֆունկցիան միակն է:

9.3 Թեորեմի ապացույցը հենվում է հետևյալ արդյունքների վրա:

Լեմ: Դիցուք՝ ցանկացած $S\subset N$ դաշնախմբի համար $(N,\overline{w}_S)$ խաղը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$w_S(T)=\begin{cases}0, & S\not\subset T,\\ 1, & S\subset T:\end{cases}$$

Այդ դեպքում (N,w_S) խաղի համար 1, 2 աքսիոմները միանշանակ որոշում են $\varphi[w_S]$ վեկտորը՝

$$\varphi_i[w_S]=\begin{cases}1/s, & i\in S\\ 0, & i\notin S\end{cases} \qquad (9.2)$$

որտեղ $s=|S|$ խաղացողների քանակն է S -ում:

$\mapsto$ Պարզ է, որ S -ը w_s -ի կրողն է, ինչպես ցանկացած T բազմություն, որը պարունակում է S բազմությունը: Այդ դեպքում, համաձայն աքսիոմ 1-ի, եթե $S\subset T$, ապա

$$\sum_{i\in T}\varphi_i[w_s]=1:$$

Բայց դա նշանակում է, որ $\varphi_i[w_s]=1$, $i\in S$: Եթե π-ն ցանկացած տեղադրությունն է, որ $S\to S$, ապա $\pi w_s = w_s$: Հետևաբար, համաձայն 2 աքսիոմի, ցանկացած $i,j\in S$-ի համար $\varphi_i[w_s]=\varphi_j[w_s]$ հավասարությունը ճշմարիտ է: Որովհետև այդպիսի մեծությունների քանակն ընդամենը $s=|S|$ է, իսկ դրանց գումարը 1 է, ապա $\varphi_i[w_s]=1/s$, եթե $i\in S$: Խաղը, որի w_s բնութագրիչ ֆունկցիան որոշվում է (9.1)-ով, կոչվում է *n անձանց պարզ խաղ*: Այսպիսով, լեմը հաստատում է, որ (N,w_s) պարզ խաղի համար Շեպլիի վեկտորը որոշվում է (9.2) բանաձևի միջոցով, այն էլ միակ ձևով: ⅃

Հետևանք: Եթե $c\ge 0$, ապա

$$\varphi_i[cw_s]=\begin{cases} c/s, & i\in S\\ 0, & i\in S\end{cases}:$$

Ապացույցն ակնհայտ է: Այսպիսով, $\varphi_i[cw_s]=c\varphi_i[w_s]$, եթե $c\ge 0$: Այժմ ցույց տանք, որ եթե $\sum\limits_S c_s w_s$-ը բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա

$$\varphi_i[\sum_S c_s w_s]=\sum_S \varphi_i[c_s w_s]=\sum c_s\varphi_i[w_s]: \qquad (9.3)$$

↦ Երբ $c_s\ge 0$, ապա (9.3)-ի առաջին հավասարությունը աքսիոմ 3-ի պնդումն է, իսկ երկրորդը՝ հետևանքը: Եթե u,v-ն և $u-v$-ն՝ բնութագրիչ ֆունկցիաներ են, ապա համաձայն աքսիոմ 3-ի՝ $\varphi[u-v]=\varphi[u]-\varphi[v]$: Այստեղից հետևում է (9.3)-ի ճշմարիտ լինելը կամայական c_s-ի համար:

Իսկապես, եթե $\sum\limits_S c_s w_s$-ը բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա,

$$v=\sum_S c_s w_s=\sum_{S:c_s\ge 0} c_s w_s(\sum_{S:c_s<0}(-c_s)w_s),$$

հետևաբար,

$$\varphi[v]=\varphi[\sum_{S:c_s\ge 0} c_s w_s]-\varphi[\sum_{S:c_s<0}(-c_s)w_s]=$$
$$=\sum_{S:c_s\ge 0} c_s\varphi[w_s]-\sum_{S:c_s<0}(-c_s)\varphi[w_s]=\sum_S c_s\varphi[w_s]: \text{ ⅃}$$

9.4 *Լեմ*: Դիցուք՝ $(N,v)^*$-ն ցանկացած խաղ է. կգտնվեն 2^{n-1} իրական այնպիսի c_s թվեր, որ

$$v=\sum_{S\subset N} c_s w_s, \qquad (9.4)$$

որտեղ w_s-ն որոշվում է (9.1)-ով, իսկ գումարը, բացառելով դատարկ բազմությունը, վերցված է ըստ N բազմության բոլոր S ենթաբազմությունների: Այս դեպքում (9.4) ներկայացումը միակն է:

↦ Վերցնենք

$$c_s = \sum_{\{T|T\subset S\}} (-1)^{s-t} v(T) \tag{9.5}$$

(այստեղ՝ t-ն T-ի տարրերի թիվն է): Ցույց տանք, որ այդ c_s թվերը բավարարում են լեմի պայմաններին: Իսկապես, եթե U-ն ցանկացած դաշնախումբ է, ապա

$$\sum_{\{S|S\subset N\}} c_s w_s(u) = \sum_{\{S|S\subset U\}} c_s = \sum_{\{S|S\subset U\}} \Big(\sum_{\{T|T\subset S\}} (-1)^{s-t} v(T)\Big) =$$
$$= \sum_{\{T|T\subset U\}} \Big[\sum_{\{S|T\subset S\subset U\}} (-1)^{s-t} \Big] v(T):$$

Քննարկենք վերջին արտահայտության քառակուսի փակագծում գրված մեծությունը: t-ի և u-ի միջև կամայական s-ի արժեքի համար կա C_{u-t}^{u-s} այնպիսի s տարրերով S բազմություն, որ $T\subset S\subset U$: Հետևաբար, փակագծում գրված արտահայտությունը կարելի է փոխարինել հետևյալ արտահայտությամբ.

$$\sum_{s=1}^{u} C_{u-t}^{u-s}(-1)^{s-t} = \sum_{s=1}^{u} C_{u-t}^{s-t}(-1)^{s-t}:$$

Բայց դա $(1-1)^{u-t}$-ի երկանդամային վերլուծումն է, հետևաբար բոլոր $t<u$-ի համար այն հավասար է 0-ի, իսկ $t=u$-ի համար՝ 1-ի: Այդ պատճառով բոլոր $U\subset N$-ի համար $\sum_{\{S|S\subset U\}} c_s w_s(U) = v(U)$:

Ապացուցենք (9.4)-ի ներկայացման միակությունը: Ցանկացած v բնութագրիչ ֆունկցիային համապատասխանում է R^{2^n-1} տարածության տարր: Իսկապես՝ կարգավորենք $T\subset N$ դաշնախմբերը: Այդ դեպքում ամեն մի ոչ դատարկ T դաշնախմբին $(T\subset N)$ կհամապատասխանի $v(T)$-ին հավասար վեկտորի բաղադրիչ: Այդ վեկտորները, ինչպես որ ֆունկցիաները, նշանակենք v-ով: Ակնհայտ է, որ w_s պարզ բնութագրիչ ֆունկցիաներին կհամապատասխանեն այնպիսի վեկտորներ, որոնց բաղադրիչները 0 կամ 1 են: Ապացուցենք, որ պարզ բնութագրիչ ֆունկցիաները (ավելի ճիշտ՝ դրանց համապատասխանող վեկտորները) գծայնորեն անկախ են: Իսկապես, դիցուք՝

$\sum_{S\subset N} \lambda_s w_s(T) = 0$ բոլոր $T\subset N$:

Այդ դեպքում $T=\{i\}$ համար ճիշտ է $w_s(\{i\})=0$, եթե $S\neq\{i\}$ և $w_s(\{i\})=1$, եթե $S=\{i\}$: Այդ իսկ պատճառով բոլոր $i\subset N$-ի համար $\lambda_{\{i\}}=0$: Շարունակենք ապացուցումը ինդուկցիայի եղանակով: Դիցուք՝ բոլոր $S\subset T$, $S\neq T$-ի համար $\lambda_s=0$: Ցույց տանք, որ $\lambda_T=0$: Իսկապես,

$$\sum_{S\subset N}\lambda_s w_s(T)=\sum_{S\subset T}\lambda_s w_s(T)=\lambda_T=0:$$

Այսպիսով, R^{2^n-1}-ում ունենք 2^n-1 գծայնորեն անկախ վեկտորներ, հետևաբար, ցանկացած θ վեկտորը, իսկ դա նշանակում է, որ ցանկացած բնութագրիչ ֆունկցիան միակ ձևով արտահայտվում է w_s պարզ բնութագրիչ ֆունկցիաների գծային համակցության տեսքով: ┘

9.5 Ապացուցենք 9.2 կետի թեորեմը: 9.4 կետի լեմը ցույց է տալիս, որ ցանկացած խաղ կարող է ներկայացվել խաղերի գծային համակցության միջոցով, և այդ ներկայացումը (9.4) տեսքով միակն է: Համաձայն 9.3 կետի՝ $\varphi[v]$ ֆունկցիան միակ ձևով որոշվում է (9.3), (9.2) առնչությունների միջոցով:

$\mapsto$ Դիցուք՝ (N,v)-ն ցանկացած խաղ է: Այժմ ստանանք $\varphi[v]$ վեկտորի արտահայտությունը: Համաձայն 9.3, 9.4 կետերի՝

$$\varphi_i[v]=\sum_{\{S|S\subset N\}}cs\varphi_i[w_s]=\sum_{\{S|i\subset S\subset N\}}c_s(1/s_i):$$

Բայց C_s-երը որոշված են (9.5) բանաձևով: Տեղադրելով (9.5)-ը վերջին արտահայտության մեջ՝ կստանանք

$$\varphi_i[v]=\sum_{\{S|i\in S\in N\}}(-1)^{s-t}v(T)=\sum_{\{T|T\subset N\}}\Big[\sum_{\{S|T\cup i\subset S\subset N\}}(-1)^{s-t}(1/s)v(T)\Big]:$$

Նշանակենք

$$\gamma_i(T)=\sum_{\{S|T\cup i\subset S\subset N\}}(-1)^{s-t}(1/s): \qquad (9.6)$$

Այնուհետև, եթե $i\notin T^1$ և $T=T^1\cup\{i\}$, ապա $\gamma_i(T^1)=-\gamma_i(T)$: Իսկապես, (9.6)-ի աջ մասում երկու դեպքում էլ բոլոր անդամները նույնն են և միայն $t=t'+1$, հետևաբար, դրանք միայն նշանով են տարբերվում: Այսպիսով, ունենք

$$\varphi_i[v]=\sum_{\{T|i\in T\subset N\}}\gamma_i(T)[v(T)=v(T\setminus\{i\})]:$$

Եթե $i \in T$, ապա կան ճիշտ C_{n-t}^{s-t} այնպիսի տարրերով S դաշնախմբեր, որ $T \subset S$: Արդյունքում ստանում ենք հայտնի որոշյալ ինտեգրալը՝

$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}(1/s) = \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}\int_0^1 x^{s-1}dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}x^{s-1}dx = \int_0^1 x^{t-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{s-t}C_{n-t}^{s-t}x^{s-t}dx = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx:$$

Այսպիսով, ունենք $\gamma_i(T) = (t-1)!(n-t)!/(n)!$ և, հետևաբար,

$$\varphi_i[v] = \sum_{\{T|i\in T\subset N\}}(t-1)!(n-1)!/(n!)[v(T) - v(T\setminus\{i\})]: \;\lrcorner \qquad (9.9)$$

(9.7) բանաձևը Շեպլիի վեկտորի բաղադրիչները որոշում է բացահայտ տեսքով: Այդ արտահայտությունը բավարարում է 9.2-ի 1-3 աքսիոմներին:

Նկատենք նաև, որ $\varphi[v]$ վեկտորը միշտ բաժանք է: Իսկապես $\varphi[v]$-ի գերգումարականության համաձայն

$$\varphi_i[v] \geq v(\{i\}) \sum_{\{T|i\in T\subset N\}}(t-1)!(n-t)!/(n!) = v(\{i\}) \cdot \sum_{\{T|i\in T\subset N\}}C_{n-1}^{t-1}(t-1)!(n-1)!/(n!) = v(\{i\}):$$

9.6 Եթե անտեսենք Շեպլիի վեկտորի աքսիոմային սահմանումը, ապա, օգտվելով (9.7) բանաձևից, Շեպլիի վեկտորին կարելի է տալ հետևյալ բովանդակային մեկնաբանությունը: Ենթադրենք՝ խաղացողները (N բազմության տարրերը) որոշել են հանդիպել որոշակի ժամի: Բնական է, որ պատահական շեղումների պատճառով նրանք հանդիպավայր կհասնեն տարբեր պահերի: Ենթադրվում է, որ խաղացողների ժամանման բոլոր կարգերը (այսինքն՝ նրանց վերադասավորումները) ունեն միևնույն հավանականությունը՝ $1/n!$: Ենթադրենք, որ եթե i-րդ խաղացողը, տեղ հասնելով՝ այնտեղ հանդիպում է $T\setminus\{i\}$ դաշնախմբի անդամների (և միայն նրանց), ապա նա ստանում է $v(T)0 - v(T\setminus\{i\})$ շահումը. այլ կերպ ասած՝ նրա շահումը այն սահմանային մեծությունն է, որ նա բերում է դաշնախմբին իր մասնակցությամբ: Այդ դեպքում Շեպլիի վեկտորի $\varphi_i[v]$ բաղադրիչը՝ i-րդ խաղացողի շահումի մաթեմատիկական սպասումն է պատահականացված սխեմայի պայմաններում:

9.7 Շեպլիի վեկտորի բանաձևը առանձնապես մատչելի է պարզ խաղերի դեպքում: Իսկապես, $v(T) = v(T\setminus\{i\})$-ն միշտ հավասար է 0-ի կամ 1-ի, ընդ որում այդ արտահայտությունը 1-ի է հավասար, եթե T-

ն շահող դաշնախումբ է, իսկ $T\setminus\{i\}$ դաշնախումբը շահող չէ: Հետևաբար,

$$\varphi_i[v]=\sum_T (t-1)!(n-t)!/n!,$$

որտեղ գումարումը տարածվում է այնպիսի շահող $i\in T$ դաշնախմբերի վրա, որոնց համար $T\setminus\{i\}$ դաշնախմբերը շահող չեն:

Օրինակ 14 (Գլխավոր խաղացողով խաղ): Խաղին մասնակցում են n խաղացողներ, որոնցից մեկը կոչվում է "գլխավոր": S դաշնախումբը շահում է 1, եթե կազմված է կամ մեկ "գլխավոր" խաղացողից և, բացի նրանից, ևս գոնե մեկից կամ բոլոր $n-1$ "ոչ գլխավոր" խաղացողներից: Եթե գլխավոր խաղացողի համարը n է, ապա այդ խաղի բնութագրիչ ֆունկցիան գրվում է հետևյալ կերպ

$$v(S)=\begin{cases}1, S\supset\{i,n\}, i\neq m\\ 1, S\supset\{1,\ldots,n-1\}\\ 0, \text{մնացած բոլոր դեպքերում:}\end{cases}$$

Պարզ է, որ ցանկացած $T\supset\{n\}$ դաշնախմբի համար $v(T)=1$ և $v(T\setminus\{n\})=0$ պայմանները կատարվում են այն և միայն այն դեպքում, երբ $2\leq|T|\leq n-1$: Հետևաբար,

$$\varphi_n[v]=\sum_{i=2}^{n-1}C_{n-1}^{t-1}(t-1)!(n-1)!/n!=(n-2)/n,$$

և, որովհետև խաղն ունի (0-1) համառոտացված ձև՝

$$\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i[v]=1=\varphi_n[v]=2/n:$$

Բոլոր ոչ գլխավոր խաղացողները հավասար իրավունքներ ունեն և սիմետրիայի պատճառով $\varphi_i[v]=2/n(n-1)$, $i=1,\ldots,n-1$:

Այսպիսով, գլխավոր խաղացողի "մենաշնորհ" դիրքն իր համար ապահովում է $(n-1)(n-2)/2$ անգամ մեծ շահում, քան խաղի "շարքային" մասնակիցների համար:

Օրինակ 15 ("Կալվածատեր և բատրակներ"): Ենթադրենք, որ կան $n-1$ բատրակներ ($i=1,\ldots,n-1$ խաղացողներ) և կալվածատեր (n-րդ խաղացող), որը վարձելով k բատրակներ, բերքից ստանում է $f(k)$ եկամուտ ($f(k)$-ն՝ միապաղաղորեն աճող է), իսկ բատրակներն իրենք եկամուտ ստանալ չեն կարող: Դա նկարագրվում է հետևյալ բնութագրիչ ֆունկցիայի միջոցով՝

$$v(S)=\begin{cases}f(|S|-1), n\in S,\\ 0, \text{հակառակ դեպքում:}\end{cases}$$

Այստեղ բոլոր $T \supset \{n\}$ բազմությունների համար, $|T| > 1$, $v(T) = v(T \setminus \{n\}) = f(t-1)$, որտեղ $t = |T|$ և (9.7)-ից հետևում է

$$\varphi_n[v] = \sum_{t=2}^{n} [C_{n-1}^{t-1}(t-1)!(n-1)!/n!] f(t-1) = (1/n)\sum_{t=1}^{n-1} f(t):$$

Բոլոր խաղացողների արդյունավետության և սիմետրիկության պայմանների հիման վրա ունենք

$$\varphi_i[v] = (1/(n-1)(f(n-1) - 1/n\sum_{t=1}^{n-1} f(t)), \ i = 1,\dots,n-1:$$

Գրականություն

1. Leon A.Petrosyan, Nikolay A.Zenkovich. Game theory, SERIES ON OPTIMIZATION, vol. 3. World Scientific - 1996.

*

* *

"ԱՆՀԱԿԱՄԱՐՏ ԽԱՂԵՐ" *բաժինը ռուսերենից թարգմանել են՝*

- Մ.Սահակյանը
- Ս.Սարգսյանը

խմբագիր՝

- Մ.Սահակյան

ՏՆՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

Գործույթների հետազոտում
Կառավարման գիտություն
Մաս I

Ծրագրի ղեկավար՝
Մելս (Սամվել) Սահակյան

Խմբագիրներ՝

Ստեփան Մարկոսյան	(III, IV, V, VI, VII գլուխներ)
Ռաֆայել Տոնոյան	(I, II, V, VI, VII գլուխներ)

Հեղինակներ՝

Մելս (Սամվել) Սահակյան	(II, V, VI, VII գլուխներ)
Հայկ Սարգսյան	(I գլուխ)
Սարգիս Սարգսյան	(III գլուխ)
Ռաֆայել Տոնոյան	(II, IV գլուխներ)

III, V- VII *խնդիրները և առաջադրանքները պատրաստել է*
Լաուրա Սարդարյանը

Ծարադրանքի խմբագիր՝
Վրույր Ասլանյան

Հրատարակիչ՝
Էկոլոգիայի և կենսապահովման անվտանգության գիտություն-ների միջազգային ակադեմիայի հայկական բաժանմունքը

Ծավալը՝ 20 հրատ. մամ.: Տպաքանակ՝ 1500: Ֆորմատ՝ 60x84 1/16
Օֆսեթ տպագրության լաբորատորիա
375051, Երևան, Կոմիտասի պող. 49/3, ՀԳՏԼԳՀԻ