ՄԵԼՍ ՄԱՀԱԿՅԱՆ, ՆՈՐԱՅՐ ԲԵԿՆԱԶԱՐՅԱՆ,
ՀԱՄԼԵՏ ՀԱԿՈԲՅԱՆ, ԽԱՆԻԿ ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ՏՆՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

II

Գործույթների հետազոտումը տնտեսության կառավարման խնդիրներում

Հայաստանի Հանրապետության կրթության և գիտության նախարարության կողմից թույլատրված է որպես բարձրագույն ուսումնական հաստատությունների ուսումնական ձեռնարկ

ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչություն
Երևան 2001

MELS SAHAKYAN, NORAJR BEKNAZARYAN
HAMLET HAKOPYAN, KHANIK KEROPYAN,

MATHEMATICAL METHODS OF ECONOMY ANALYSIS

II

Operations Research for Management

Yerevan 2001

МЕЛС СААКЯН, НОРАЙР БЕКНАЗАРЯН
ГАМЛЕТ АКОПЯН, ХАНИК КЕРОПЯН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКОНОМИКИ

II

Исследование операций в управлении экономикой

Ереван 2001

ԴՏՀ 33
ԳՄԴ 65
Տ - 778

Մասնագիտական խմբագիրներ՝
ֆ-մ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Ռոմեն Շահբազյան
ֆ-մ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Էդուարդ Դանիելյան
Շարադրանքի խմբագիր՝ Վրույր Ասլանյան

Գրախոսներ՝

տեխն. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Թորգոմ Նալչաջյան,
ՀՀ ԿԳ նախարարության կրթական բարեփոխումների կենտրոնի
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ առարկայական հանձնաժողով

Տ – 778 Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ. Մաս II. Գործույթների հետազոտումը տնտեսության կառավարման խնդիրներում:
Մ.Սահակյան, Ն.Բեկնազարյան, Հ.Հակոբյան, Խ.Քերոբյան -Եր. 2001, էջ 389:

Ուսումնական ձեռնարկում արծարծվում են տնտեսության իրավիճակների վերլուծության և որոշումների կայացման մաթեմատիկական եղանակները՝ ծրագրերի պլանավորումն ու կառավարումը, պաշարների կառավարման տեսությունն ու որոշումների կայացման հիմունքները, եկամուտով մարկովյան գործընթացներն ու հերթերի տեսությունը, մատրիցային ու բազմաքայլ խաղերը և այլն:

Նախատեսված է ապագա տնտեսագետների, կառավարիչների, գործարարների, մաթեմատիկոսների, ճարտարագետների և այլ հարակից մասնագիտությամբ բակալավրիատի և մագիստրատուրայի ուսանողների համար:

Օգտակար կլինի նաև ասպիրանտների, գիտաշխատողների, տնտեսության տարբեր օղակներում տնտեսական վերլուծության, կառավարման և կազմակերպչական հարցերով զբաղվողների համար:

Ս $\dfrac{0601000000}{703(02)-2001}$ 2001

ԳՄԴ - 65

ISBN 5 – 8080 – 0480 - 2

ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչություն 2001 պս. 2

Հեղինակների մասին

*

Մելս (Սամվել) Ա. Սախակյան՝ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ: Ավարտել է Երևանի պետական համալսարանի մեխանիկա-մաթեմատիկական ֆակուլտետը Մոսկվայի պետական համալսարանի ասպիրանտուրան, որտեղ և պաշտպանել է թեկնածուական ատենախոսությունը:

1967-1972թթ. աշխատել է Մոսկվայի պետական համալսարանում: 1972-1975թ.թ. ղեկավարել է ԳԱ հաշվողական կենտրոնի ընդհանուր կառավարման բաժինը: 1975-1984թ.թ. դասավանդել է Երևանի ժողովրդական տնտեսության ինստիտուտում, իսկ 1984 թվականից՝ Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետում:

1979-1989թթ.համատեղման կարգով եղել է ՀԽՍՀ պետպլանի էկոնոմիկայի և արդյունաբերության պլանավորման գիտահետազոտական ինստիտուտի հատուկ հետազոտումների բաժնի աշխատանքների գիտական ղեկավարը:

1990-1995թթ. եղել է ՀՀ ԳԽ պատգամավոր՝ տնտեսության զարգացման ենթահանձնաժողովի նախագահ:

Գիտական հետաքրքրությունների ոլորտն են գործույթների հետազոտումն ու կառավարումը, մակրոտնտեսագիտությունը: Հեղինակ է ավելի քան 70 գիտական հրապարակումների և 5 մենագրությունների, այդ թվում բուհերի ուսանողների համար մեկ դասագրքի և երկու ուսումնական ձեռնարկի:

1998 թվականից «Գործարարների և գիտնականների միություն» ոչ կառավարական կազմակերպության ղեկավարն է:

**

Նորայր Ա. Բեկնազարյան՝ տնտեսագիտության թեկնածու, դոցենտ: Ավարտել է Երևանի պետական համալսարանի մեխանիկամաթեմատիկական ֆակուլտետը, Երևանի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի ասպիրանտուրան: Թեկնածուական ատենախոսությունը պաշտպանել է Երևանի ժողովըրդական տնտեսության ինստիտուտում:

Աշխատել է կառավարման համակարգերի գիտահետազոտական լաբորատորիայում (1964-1966թ.թ.), էլեկտրոմեխանիկայի համամիութենական գիտահետազոտական ինստիտուտում (1966-1968թ.թ.): 1968-ից աշխատում է Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանում:

Գիտական հետազոտությունների ոլորտներն են տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակները և տնտեսաչափական կանխատեսման մոդելները: Հեղինակ է 33 գիտական աշխատությունների և 5 ուսումնամեթոդական ձեռնարկների:

1998 թվականից «Գործարարների և գիտնականների միություն» ոչ կառավարական կազմակերպության պատասխանատու քարտուղարն է:

***

Խաչիկ Վ. Քերոբյան՝ տեխնիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ: Գերազանցությամբ ավարտել է Երևանի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի ռադիոէլեկտրոնիկայի ֆակուլտետը, եղել է Լենինյան թոշակառու: Սովորել է Կիևի պետական համալսարանի մեխանիկամաթեմատիկական ֆակուլտետում՝ պատահական գործընթացներ և վիճակագրություն մասնագիտացմամբ: Ավարտել է Կիևի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի ասպիրանտուրան, որտեղ և պաշտպանել է թեկնածուական ատենախոսությունը:

1979-1990թթ. աշխատել է մի շարք գիտահետազոտական ինստիտուտներում, կազմակերպել և ղեկավարել է գիտահետազոտական լաբորատորիաներ: Դասավանդել է Երևանի և Կիևի պոլիտեխնիկական ինստիտուտներում, Կիևի պետական համալսարանում:

Գիտական հետազոտությունների ոլորտն են գործույթների հետազոտման, բարդ համակարգերի մոդելավորման և օպտիմացման եղանակները:

Հեղինակ է 100-ից ավելի գիտական աշխատությունների և 6 մենագրությունների:

1998-ից համակարգչային և տեղեկատվական համակարգերի հայկական ասոցիացիայի փոխնախագահն է, «Տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ և կառավարում» միջազգային ամսագրի գլխավոր խմբագիրը:

****

Համլետ Ց. Հակոբյան՝ ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ: Սովորել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի ֆակուլտետում, ավարտել է Մոսկվայի պետական համալսարանի հաշվողական մաթեմատիկայի և կիբեռնետիկայի ֆակուլտետի ասպիրանտուրան, որտեղ և պաշտպանել է թեկնածուական ատենախոսությունը:

1978 թվականից աշխատում է Երևանի պետական համալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում, եղել է մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի ամբիոնի վարիչ: Գիտական հետազոտությունների ոլորտներն են դիսկրետ մաթեմատիկան, գրաֆների տեսությունը: Հեղինակ է 20-ից ավելի գիտական աշխատությունների և 4 ուսումնամեթոդական ձեռնարկների:

1995 թվականից Հայաստանի նկարիչների միության անդամ է:

Վերջաբանի փոխարեն

Ձեռնարկում շարադրված նյութը ընթերցողին ծանոթացնում է ժողովրդական տնտեսության պլանավորման, կառավարման և վերլուծության խնդիրներում գործույթների հետազոտման ժամանակակից մաթեմատիկական եղանակներին: Թե հեղինակներին ինչքանով է հաջողվել հասնել այդ նպատակին, թողնում ենք ընթերցողի դատին:

Գործույթների հետազոտում առարկան, որը հայտնի է նաև որպես կառավարման գիտություն անվանումով, սերտորեն առնչվում է համակարգչային գիտության, տնտեսագիտության, վիճակագրության և կիրառական մաթեմատիկայի հետ: Գործույթների հետազոտման զարգացումն անմիջականորեն կապված է լայն իմաստով կազմակերպչական խնդիրներում ինտուիցիան գիտականորեն հիմնավորված արդյունավետ որոշումների կայացմամբ փոխարինելու հետ:

Գործույթների հետազոտումը գործնականում կիրառելիս անհրաժեշտ է որոշել հետազոտվող խնդրի նպատակը, նկարագրել այլընտրանքային լուծումները, սահմանել վերջիններիս արդյունավետությունը, կառուցել խնդրի մաթեմատիկական մոդելը, ցույց տալ դրա համարժեք լինելը ուսումնասիրվող սկզբնական խնդրին և ընդունված նպատակի համաձայն գտնել լավագույն լուծումը:

Օգտագործվող մաթեմատիկական եղանակները բազմազան են. ներառում են մաթեմատիկայի հարուստ զինանոցը,, հիմք են հանդիսանում տնտեսության տարբեր օղակներում գործող համակագերի կազմակերպման և կառավարման խնդիրների լուծման համար և ընդգրկում են՝

1. Մաթեմատիկական ծրագրումը, որտեղ փնտրում են համակարգի լավագույն գործունեությունը շատ փոփոխականների հարաբերական պարզ կապերի առկայությամբ:

2. Հավանականային գործընթացները, որոնք նկարագրում են համակարգի զարգացումը ժամանակի մեջ և որոնց վարքը բնութագրվում /պայմանավորված/ է պատահական ելքերով:

3. Խաղերի տեսությունը, որը նկարագրում և հետազոտում է շուկայի մասնակիցների կամ կազմակերպիչների միջև դաշինք կազմելու և /կամ/ մրցակցելու մոդելներ:

4. Պլանավորման ու կառավարման մոդելների մի ամբողջ ընտանիք, որոնք լայն կիրառություն են գտել արտադրության և սպասարկման տարբեր ոլորտներում:

Բակալավրիատի համալսարանական ծրագիրը պարունակում է գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական եղանակների հետևյալ երկու ուղղությունները՝

- Մաթեմատիկական ծրագրում՝ օպտիմացման մաթեմատիկական եղանակները, որոնք ուղղված են արտադրության արդյունավետ կազմակերպմանը, տնտեսական համակարգերի հիմնական բնութագրերի հաշվարկմանը՝ ծառներեցության և կառավարման նպատակներով:

- Մատրիցային խաղեր, երբ շուկայի մասնակիցները գտնվում են իրար նկատմամբ խիստ ներհակ՝ հակամարտ վիճակում:

Մագիստրոսներին առաջարկվող ծրագիրը ընդգրկում է գործույթների հետազոտման մաթեմատիկական եղանակների հետևյալ բաժինները՝

- Նախագծերի, արտադրական և սպասարկման համակարգերի, ձեռնարկության պաշարների պլանավորման ու կառավարման մոդելները, որոնք լայն կիրառություն են գտել գործարար աշխարհում.
- Հավանականային գործընթացները, որոնց վարքը բնութագրվում է պատահական ելքերով, որոշումների կայացումը ռիսկի պայմաններում, եկամուտով մարկովյան գործընթացները, հերթերի տեսությունը, նմանակման եղանակները.
- Խաղերի տեսության այն բաժինները, որտեղ շուկայի մասնակիցներն ունեն բանակցելու և դաշինք ստեղծելու իրավունք:

Այդ հարցերին են նվիրված «Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ» դասագրքի I մասը, որը հրատարակվել է 1997թ, և սույն II մասը: Եթե առաջին մասը նախատեսված է բակալավրերի համար, ապա երկրորդ մասը հիմնականում նախատեսված է մագիստրատուրայում և ասպիրանտուրայում սովորողների համար:

Ձեռնարկի հետ միաժամանակ հրատարակվում է III մասը՝ «Գործույթների հետազոտումը տնտեսության կառավարման խնդիրներում» խնդրագիրքը, որտեղ հավաքված են «Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ» դասագրքի I և II մասերում շարադրված տեսական նյութի յուրացմանն ու կիրառմանը վերաբերող խնդիրներ և վարժություններ:

ՀՀ բարձրագույն ուսումնական հաստատությունների ուսանողները առաջին անգամ են մայրենի լեզվով ծանոթանալու գործույթների հետազոտման ժամանակակից մաթեմատիկական եղանակներին:

Շնորհակալություն եմ հայտնում Ամերիկայի Միացյալ Նահանգների միջազգային զարգացման գործակալության (USAID) Եվրասիա հիմնադրամին ֆինանսական աջակցության համար, ձեռնարկի գրախոսներ՝ պրոֆեսորներ Նորայր Ենգիբարյանին, Թորգոմ Նալչաջյանին, Սարգիս Սարգսյանին, դոցենտ Միհրդատ Հարությունյանին ձեռնարկի շահագրգիռ և օգտակար քննարկումների համար:

Մենք հեռու ենք այն մտքից, թե այս ձեռնարկը ձերծ է թերություններից, ուստի շնորհակալությամբ կընդունենք ձեռնարկի լավացմանը հետամուտ ամեն մի առաջարկություն:

Ծրագրի ղեկավար՝
Մելս /Սամվել/ Սահակյան

VIII. ԾՐԱԳՐԵՐԻ ՊԼԱՆԱՎՈՐՈՒՄ ԵՎ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄ

Միայն մի փոքրիկ մասը ցույց տվի,
Մնացածները թողնելով, որ դուք
Սրանց միջոցով ուսումնասիրեք,
Թեպետ ոչ լրիվ ու ամբողջությամբ:

Գրիգոր Նարեկացի
Մատյան ողբերգության, Բան Ձ,Դ,
Ե. 1979:

Մուտք

Ծրագիրը աշխատանքների համախմբություն է, որոնք կատարվում են որոշակի տրամաբանական կարգավորությամբ. աշխատանքների մի մասի կատարման համար պարտադիր է, որ ավարտված լինեն ուրիշ աշխատանքներ: Աշխատանքների կատարումները բնորոշվում են ժամանակի և ռեսուրսների ծախսերով: Պահանջվում է ծրագրի կատարումը պլանավորել այնպես, որ օպտիմացվեն ծախսերը:

Մինչև ծրագրերի պլանավորման ու կառավարման եղանակների ստեղծումը ցանցերի օգնությամբ ոչ մեծածավալ ծրագրերը պլանավորում էին տարբեր եղանակներով: Ժամանակակից ծրագրերի բարդանալը պահանջեց մշակել ավելի արդյունավետ եղանակներ:

Ցանցի միջոցով պլանավորման ու կառավարման զարգացման հիմք հանդիսացան ծրագրերի կառուցվածքային և օրացուցային պլանավորման, ինչպես նաև օպերատիվ կառավարման երկու եղանակներ, որոնք համարյա միաժամանակ ստեղծվեցին ԱՄՆ-ում 1956-58 թ.թ. և հայտնի են որպես կրիտիկական ուղու եղանակ (CPM – Critical Path Method) և ծրագրերի զարգացման և վերանայման եղանակ (PERT – Project (Program) Evaluation and Review Tecnique): Առաջին եղանակը մշակվել է շինարարության ծրագրերի համար «E. I. Du Pont de Memours & Company» ընկերության կողմից և հետագայում զարգացվել Maucly Associates ընկերության աշխատանքներում, երկրորդը՝ «Փոլարիս» հրթիռներով զինված սուզանավերի ստեղծման գիտահետազոտական և փորձառական աշխատանքների պլանավորման ծրագրի համար ԱՄՆ-ի ռազմածովային ուժերի նախարարության պատվերի խորհրդատվական ընկերության կողմից: Հետագայում այս եղանակները ամփոփվեցին և ստացան ծրագրերի պլանավորում և կառավարում անվանումը:

Ցանցի միջոցով ծրագրերի պլանավորումն ու կառավարումը մեծ համակարգերի կառավարման ժամանակակից տեսության բաժիններից մեկն է, ուստի ԱՄՆ պետական մարմինները ընկերություններից ընդունում են միայն այնպիսի առաջարկներ, որոնք պարունակում են նաև այս եղանակի վրա հիմնված նախագծման ցանց:

Ծրագրերի ցանցի միջոցով պլանավորումն ու կառավարումը բաղկացած են հիմնականում երեք փուլից՝ կառուցվածքային պլանավորում, օրացուցային պլանավորում և օպերատիվ կառավարում:

Ծրագրերը նկարագրվում են ցանցերով, որոնցում հանգույցների քանակները կախված են ծրագրում եղած աշխատանքների քանակից: Ըստ հանգույցների քանակների՝ ծրագրերը դասակարգվում են հետևյալ ձևով.

ա) համարվում են փոքր, եթե հանգույցների քանակը չի գերազանցում 1000-ից;

բ) համարվում են միջին, եթե հանգույցների քանակը 1000-ից մինչև 10000 է;

գ) համարվում է մեծ, եթե հանգույցների քանակը գերազանցում է 10000-ից:

1. Ծրագրերի ներկայացումը ցանցերի միջոցով

Գործնականում ծրագիրը նկարագրվում է աշխատանքներով, այդ աշխատանքները բնութագրող թվային տվյալներով և կատարման հերթականությամբ: Պլանավորման մոդելում պետք է կառուցվի ցանցը, որի համար անհրաժեշտ է լինում ներկայացնել վերջավոր քանակությամբ աշխատանքների ցուցակը, ամեն մի աշխատանքի համար նշելով՝

ա) այն աշխատանքները, որոնք պետք է ավարտված լինեն տվյալ աշխատանքի կատարումն սկսվելուց անմիջապես առաջ;

բ) այն աշխատանքները, որոնց կատարումն սկսվելուց անմիջապես առաջ պետք է ավարտված լինի տվյալ աշխատանքը:

Աշխատանքների ցուցակի և կատարման հաջորդականության որոշումը բավականին ծավալուն գործ է, և անհրաժեշտ է, որ դրան մասնակցեն մասնագետներ: Աշխատանքների ընտրության և դրանց կատարման ժամանակի ու պահանջվող ռեսուրսների համար անհրաժեշտ է, որ նկարագրող թվային տվյալների համախումբը որոշակի իմաստով լինի համասեռ:

Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր աշխատանքի կատարումն ունի սկիզբ և ավարտ:

Այն աշխատանքները, որոնց ուրիշները չեն նախորդում կոչվում են սկզբնական, իսկ այն աշխատանքները, որոնց ուրիշները չեն հաջորդում, կոչվում են վերջնական:

Աշխատանքների կարգավորվածությունը ցանցում նկարագրվում է պատահույթների օգնությամբ: Պատահույթները այն պահերն են, որ միմյանցից բաժանում են անմիջապես իրար հաջորդող աշխատանքների կատարումը՝ աշխատանքների մի մասի ավարտը և մյուս մասի սկիզբը: Պատահույթներից մեկը սկզբնական է: Դա այն պահն է, երբ ոչ մի աշխատանք դեռ չի սկսվել, իսկ մյուսը՝ վերջնական, երբ բոլոր աշխատանքներն ավարտված են: Այսպիսով, ամեն մի աշխատանք կարող ենք բնութագրել երկու պատահույթներով՝ այդ աշխատանքի սկզբնական պատահույթով (երբ ավարտված են այդ աշխատանքին նախորդող բոլոր աշխատանքները) և այդ աշխատանքի վերջնական պատահույթով (երբ ավարտված են այն բոլոր աշխատանքները, որոնք նախորդում են այդ աշխատանքին հաջորդող աշխատանքին): Կասենք, որ պատահույթն իրականացված է, եթե ավարտված են բոլոր աշխատանքները, որոնց վերջնական պատահույթը այդ պատահույթն է: Կասենք, որ մի պատահույթ նախորդում է մյուսին, եթե նա ավելի շուտ պետք է կատարվի, քան մյուսը:

Դիցուք՝ ունենք ծրագրի աշխատանքների E ցուցակը՝

$$E = \{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$$

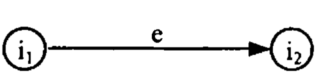
և՝ ամեն մի e_j, $j=1,2,\ldots,m$, աշխատանքի համար ունենք $A(e_j)$ և $B(e_j)$ ցուցակները, որտեղ $B(e_j)$-ն այն աշխատանքներն են, որոնք անմիջապես նախորդում են e_j աշխատանքին, իսկ $A(e_j)$-ն այն աշխատանքներն են, որոնք անմիջապես հաջորդում են e_j-ին: Եթե $B(e_j)=\varnothing$, ապա e_j-ն սկզբնական աշխատանք է, եթե $A(e_j)=\varnothing$, ապա e_j-ն վերջնական աշխատանք է: Այս տվյալները բավարար են ծրագիրը նկարագրող ցանց կառուցելու համար:

Ցանցը գծագրորեն պատկերվում է հանգույցների և այդ հանգույցները միացնող սլաքների միջոցով: Հանգույցները ծրագրի պատահույթներն են, որոնք կհամարակալենք ոչ բացասական ամբողջ թվերով՝

$$V=\{0,1,2,\ldots,n\},$$

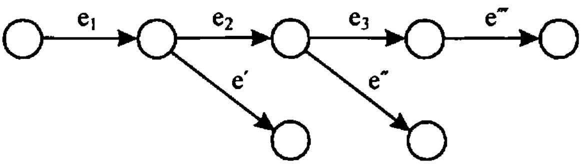
ընդ որում պատահույթների համարակալումը կկատարենք այնպես, որ եթե մի պատահույթը նախորդում է մյուսին, ապա նա կունենա ավելի փոքր համար: Այդպիսի համարակալումը բնական ձևով կարգավորում է պատահույթները և հեշտացնում հետագա հաշվարկները: Ակնհայտ է, որ այս համարակալման դեպքում սկզբնական պատահույթը կունենա 0 համարը, իսկ վերջնականը՝ ամենամեծ n համարը:

Ցանցի մեջ սլաքներով (աղեղներով) կներկայացնենք աշխատանքները: Եթե e աշխատանքի համար սկզբնական պատահույթը i_1-ն է, իսկ վերջնականը i_2-ը ($i_1< i_2$), ապա e աշխատանքը կներկայացնենք $e=(i_1,i_2)$ տեսքով և գծագրում i_1 հանգույցից դեպի i_2 հանգույց կտանենք e սլաքը (գծ. 1.1):



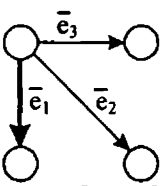
Գծ. 1.1

Գործնականում առաջանում են այսպես կոչված բաղադրված աշխատանքներ՝ կազմված տարրական մասերից, որոնց կատարումը հաջորդում են ուրիշ գործողություններ: Օրինակ՝ e աշխատանքը կազմված է e_1, e_2, e_3 գործողություններից իսկ e′, e″, e‴ գործողությունները հաջորդում են համապատասխանաբար e_1, e_2, e_3 գործողություններին (գծ. 1.2):

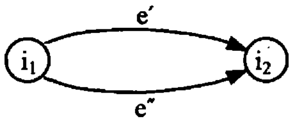


Գծ. 1.2

Այս e, e', e'', e''' աշխատանքները որոշ դեպքերում ավելի նպատակահարմար է լինում ցանցում ներկայացնել երեք աշխատանքի միջոցով (գծ. 1.3)՝ մեկը e_1, e' գործողություններից կազմված աշխատանքն է, (նշանակենք $\bar{e}_1$ -ով), մյուսը՝ e_1, e_2, e''-ից (նշանակենք $\bar{e}_2$ -ով), իսկ երրորդը՝ e_1, e_2, e_3, e'''-ից (նշանակենք $\bar{e}_3$-ով): Նոր աշխատանքների կատարման ժամանակները և ռեսուրսները հավասար կլինեն համապատասխան բաղկացուցիչ գործողությունների ժամանակների և ռեսուրսների գումարին:



Գծ. 1.3



Գծ. 1.4

Կառուցվող ցանցը հետագա հաշվարկները պարզեցնելու և հեշտացնելու համար պետք է բավարարի հետևյալ պայմաններին.

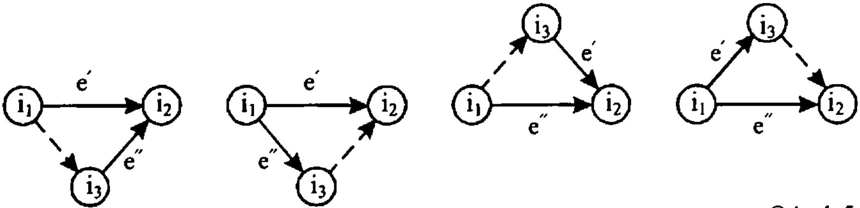
ա) կամայական աշխատանքը ցանցում ներկայացվում է մեկ սլաքով,

բ) երկու տարբեր աշխատանքներ չունեն միաժամանակ նույն սկզբնական և վերջնական պատահույթները:

Առաջին պայմանին բավարարելու համար կենթադրենք, որ աշխատանքները զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են, և ծրագրում ամեն մի աշխատանք կատարվում է միայն մեկ անգամ: Եթե ծրագիրն այնպիսին է, որ անհրաժեշտ է լինում միևնույն աշխատանքի կրկնություն, ապա այդ կրկնությունները կհամարենք նոր աշխատանքներ:

Որպեսզի կարողանանք կառուցել այնպիսի ցանց, որը բավարարի նաև երկրորդ պայմանին, ներմուծում ենք այսպես կոչված թվացյալ աշխատանքներ, որոնց կատարման ժամանակը և ռեսուրսները հավասար են 0-ի: Գծագրորեն թվացյալ աշխատանքները կներկայացնենք կետագիծ սլաքներով: Նաև անհրաժեշտություն է առաջանում ավելացնելու նոր պատահույթներ: Եթե e' և e'' աշխատանքների համար $A(e') = A(e'')$ և $B(e') = B(e'')$, ապա այդ աշխատանքներն ունենում են միևնույն սկզբնական i_1 և վերջնական i_2 պատահույթները (գծ. 1.4):

Այժմ որպեսզի ցանցը բավարարի բ) պայմանին, անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ չորս ձևափոխություններից որևէ մեկը, ավելացնելով i_3 նոր պատահույթը և մեկ թվացյալ աշխատանք (գծ. 1.5):



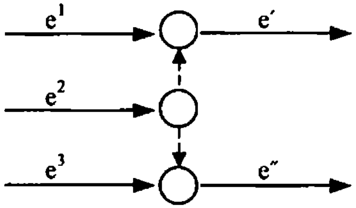
Գծ. 1.5

Այսպիսի ձևափոխությունը կանվանենք α ձևափոխություն:

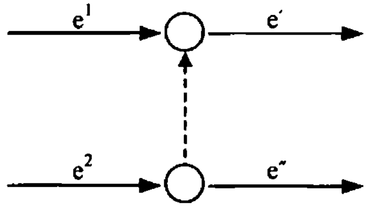
Թվացյալ աշխատանքի ներմուծումը նաև անհրաժեշտ է ցանցում աշխատանքների անմիջական հերթականության կապերը տրամաբանորեն ճիշտ արտահայտելու համար: Օրինակ՝

ա) եթե $B(e')=\{e^1,e^2\}$, $B(e'')=\{e^2,e^3\}$, ապա ցանցում դա հնարավոր է կատարել 2.6-րդ գծագրում պատկերված եղանակով;

բ) եթե $B(e')=\{e^1,e^2\}$, $B(e'')=\{e^2\}$, ապա ցանցում դա հնարավոր է կատարել 1.7-րդ գծագրում պատկերված եղանակով:



Գծ. 1.6



Գծ. 1.7

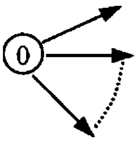
Պարզ է, որ միևնույն ծրագրի համար գոյություն ունեն թվացյալ աշհատանքների և պատահույթների քանակներով տարբերվող ցանցեր, որոնք բավարարում են և՛ ա) և՛ բ) պայմաններին:

Հաշվարկների պարզության առումով գերադասելի են այն ցանցերը, որոնցում թվացյալ աշխատանքների քանակն ավելի քիչ է: Ցանցը կարող ենք կառուցել, օրինակ, հետևյալ ալգորիթմի միջոցով:

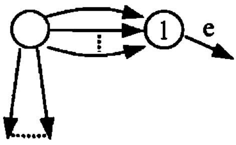
Ցանցի կառուցման ալգորիթմ

Առաջին քայլ: Աշխատանքների ցուցակից ընտրենք և նշենք սկզբնական աշխատանքները: Կառուցենք գծապատկեր, որտեղ 0 հանգույցը սկզբնական պատահույթն է, իսկ այդ հանգույցից դուրս եկող սլաքները սկզբնական աշխատանքներն են (գծ.1.8):

Երկրորդ քայլ: Աշխատանքների ցուցակից ընտրենք և նշենք առաջին չնշված e աշխատանքը, որի համար բոլոր աշխատանքները B(e)-ից նշված են: Ավելացնենք նոր 1 հանգույցը, որի մեջ մտնում են բոլոր սլաքները, որոնք համապատասխանում են B(e)-ի աշխատանքներին, և որից դուրս է գալիս e-ին համապատասխանող սլաքը (գծ. 1.9):



Գծ. 1.8



Գծ. 1.9

Ալգորիթմի ընդհանուր քայլից առաջ նախորդ քայլերում կառուցված ցանցում աշխատանքների մի մասն ունի թե՛ սկզբնական և թե՛ վերջնական պատահույթներ, մյուս մասը՝ միայն սկզբնական պատահույթներ:

Ընդհանուր քայլ: Աշխատանքների ցուցակից ընտրենք և նշենք առաջին չնշված e աշխատանքը, որի համար բոլոր աշխատանքները B(e)-ից նշված են: Եթե այդպիսի աշխատանք գոյություն չունի, ապա կանգնենք վերջին քայլին: Այդ e աշխատանքի համար B(e) ցուցակը տրոհենք հետևյալ կերպ (գծ. 1.10)

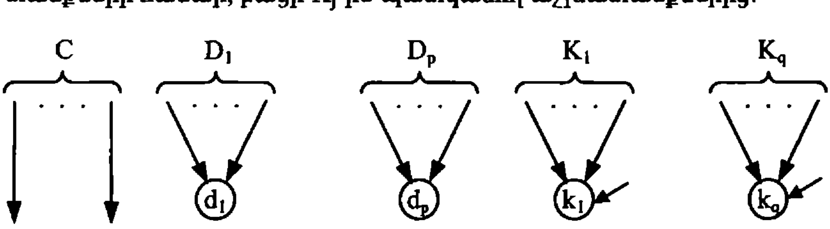
$$B(e) = C \cup D_1 \cup \ldots \cup D_p \cup K_1 \cup \ldots \cup K_q,$$

որտեղ՝

C-ն այն աշխատանքներն են B(e)-ից, որոնք ունեն սկզբնական, բայց չունեն վերջնական պատահույթ;

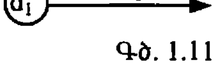
D_i-ն, $i=1,\ldots,p$, այն աշխատանքներն են B(e)-ից, որոնք ունեն միևնույն d_i վերջնական պատահույթը, որը վերջնական չէ ուրիշ աշխատանքների համար, բացի D_i-ին պատկանող աշխատանքներից;

K_j-ն, $j=1,\ldots,q$, այն աշխատանքներն են B(e)-ից, որոնք ունեն միևնույն k_j վերջնական պատահույթը, որը վերջնական է նաև ուրիշ աշխատանքների համար, բացի K_j-ին պատկանող աշխատանքներից:



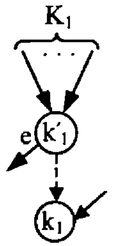
Գծ. 1.10

ա) Եթե $C=\varnothing$, $p=1$, $q=0$, ապա կկառուցենք e սլաքը, որը դուրս է գալիս d_1 հանգույցից (գծ. 1.11):



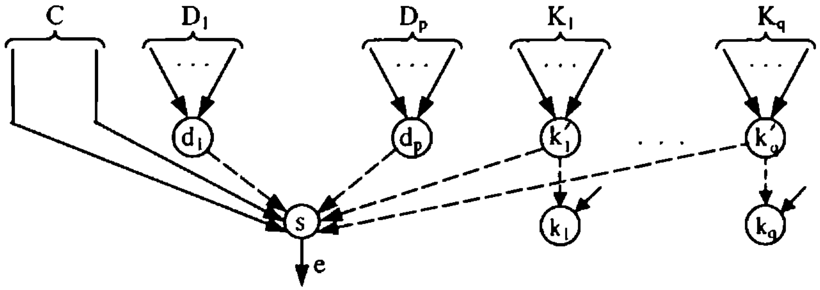
Գծ. 1.11

բ) Եթե $C=\varnothing$, $p=0$, $q=1$, ապա կավելացնենք նոր k_1' հանգույցը, K_1-ին պատկանող բոլոր սլաքները կտանենք դեպի k_1' հանգույցը, կավելացնենք (k_1',k_1) թվացյալ աշխատանքը և k_1' հանգույցից դուրս կհանենք e սլաքը (գծ. 1.12):



Գծ.1.12

գ) Հակառակ դեպքում՝ եթե C=∅, p+q>1 կամ C≠∅, ապա կկատարենք հետևյալը (գծ. 1.13): Կավելացնենք նոր հանգույցներ՝ $s,k_1',\ldots,k_q'$, C-ին պատկանող բոլոր սլաքները կտանենք դեպի s հանգույցը, K_j-ին պատկանող բոլոր սլաքները կտանենք դեպի k_j' հանգույցը, կավելացնենք (d_i,s), $i=1,\ldots,p$,(k_j',s), $j=1,\ldots,q$,(k_j',k_j), $j=1,\ldots,q$, նոր p+2q թվացյալ աշխատանքներ և կկառուցենք e աշխատանքին համապատասխանող սլաք, որը դուրս է գալիս s հանգույցից:



Գծ. 1.13

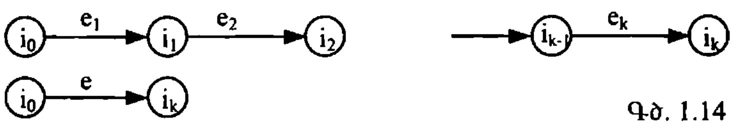
Վերջին քայլ: Կավելացնենք նոր՝ վերջնական պատահույթ (հանգույց), և այն բոլոր աշխատանքները (սլաքները), որոնք վերջնական պատահույթ չունեն կտանենք դեպի այդ հանգույցը: Ալգորիթմի ավարտին միևնույն սկզբնական և վերջնական պատահույթները ունեցող բոլոր աշխատանքների համար կկատարենք α ձևափոխությունը:

Դժվար չէ նկատել, որ ցանցի կառուցման այս ալգորիթմում բավարարվում ենք՝ ամեն մի e աշխատանքի համար տալով այդ աշխատանքին միայն անմիջապես նախորդող աշխատանքների B(e) ցուցակը: Նշենք նաև, որ այս ալգորիթմը առաջացնում է նաև պատահույթների համարակալում ըստ պատահույթների կառուցման հերթականության:

Կառուցված ցանցը որոշ դեպքերում կարելի է փոքրացնել, «խոշորացնելով» աշխատանքները: Այսպես, օրինակ, եթե

$$e_1,e_2,\ldots,e_k,\ e_j=(i_{j-1},i_j),\ j=1,\ldots,k,$$

աշխատանքներն իրար հաջորդում են և $i_1,i_2,\ldots,i_k$ պատահույթների համար չկան մտնող և դուրս եկող ուրիշ սլաքներ, և չկա նաև (i_0,i_k) աշխատանքը, ապա $e_1,e_2,\ldots,e_k$ աշխատանքների հաջորդաբար կատարումը կհամարենք մեկ $e=(i_0,i_k)$ աշխատանք (գծ. 1.14):



Գծ. 1.14

Այդ «խոշորացված» e աշխատանքի կատարման ժամանակը հավասար կլինի $e_1,e_2,\ldots,e_k$ աշխատանքների կատարման ժամանակների գումարին: Աշխատանքների «խոշորացում» կարող ենք կատարել նաև այն դեպքում, երբ այդ աշխատանքները մի մեծ ծրագրի ենթածրագիր են: «Խոշորացված» աշխատանքի կատարման ժամանակը այս դեպքում կարող ենք համարել այդ ենթածրագրի կատարման նվազագույն ժամանակը: Նշենք, որ աշխատանքները «խոշորացնելիս» «խոշորացվում» են նաև պահանջվող ռեսուրսները, որը ինքնտինքյան կարևոր խնդիր է:

Ցանցը կառուցելուց հետո կարող ենք ստացված պատահույթները վերահամարակալել հետևյալ կերպ:

Պատահույթների (ցանցի հանգույցների) վերահամարակալման ալգորիթմ

Առաջին քայլ: Այն հանգույցը, որտեղ սլաք չի մտնում, համարակալենք 0:

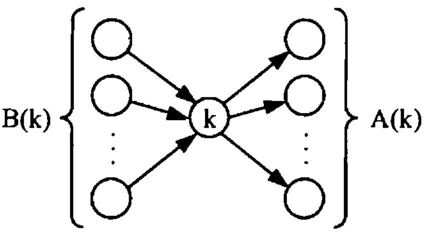
Դիցուք` նախորդ` 1-ին, 2-րդ,…,k–1-րդ քայլերում համարակալվել են համապատասխանաբար $\lambda_1=1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{k-1}$ հանգույցներ, որոնք ստացել են $0,1,\ldots,n_{k-1}-1$ համարներ, որտեղ $n_{k-1}=\lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_{k-1}$:

k-րդ քայլ (k>1): Չհամարակալված հանգույցներից դիտարկենք այն բոլոր հանգուցները, որոնց համար մտնող բոլոր սլաքները դուրս են գալիս նախորդ քայլերում համար ստացած հանգույցներից: Այդ հանգույցների քանակը նշանակենք λ_k-ով և համարակալենք $n_{k-1},n_{k-1}+1,\ldots,n_{k-1}+\lambda_k-1$ համարներով:

Ալգորիթմը կավարտվի, երբ համարակալված կլինեն բոլոր հանգույցները:

Այս համարակալումը պատահույթները կարգավորում է ըստ շերտերի՝ k-րդ քայլում համարակալված λ_k պատահույթները կկազմեն k-րդ շերտը: Հեշտ է նկատել, որ յուրաքանչյուր շերտում հանգույցները իրար հետ սլաքներով միացված չեն, և k-րդ շերտի պատահույթների նախորդող պատահույթները k-ից փոքր համար ունեցող շերտերից են: Նշենք նաև, որ այս համարակալումն այնպիսին է, որ ամեն մի աշխատանքի սկզբնական պատահույթի համարը փոքր է վերջնական պատահույթի համարից (այսինքն, եթե e=(i,j), ապա i<j), որը հեշտացնում է հետագա հաշվարկները:

Նշանակենք B(k)-ով ցանցի բոլոր այն պատահույթները, որոնք անմիջապես նախորդում են k-ին, և A(k)-ով այն բոլոր պատահույթները, որոնք անմիջապես հաջորդում են k-ին (գծ. 1.15):



Գծ. 1.15

Հանգույցների դասակարգումը ըստ շերտերի մեծ ցանցերի համար ավելի հարմար է կատարել Ֆորդի հետևյալ ալգորիթմի միջոցով:

Ֆորդի ալգորիթմ /քայլաշար/

Դիցուք՝ ցանցի հանգույցներն ունեն կամայական համարակալում 0,1,…,n թվերով:

Նախնական փուլ (0-փուլ): Յուրաքանչյուր k, k=0,…,n, հանգույցին կհամապատասխանեցնենք $\varphi_0(k)=0$ թիվը:

Ընդհանուր փուլ (p-փուլ): Յուրաքանչյուր k, k=0,…,n, հանգույցին կհամապատասխանեցնենք՝

$$\varphi_p(k) = 1 + \max_{i \in B(k)} \varphi_q(i),$$

որտեղ

$$q = \begin{cases} p-1, & \text{եթե } i > k \\ p, & \text{եթե } i < k \end{cases}.$$

Ալգորիթմը աշխատանքը կավարտի, եթե հերթական փուլում ստացված թվերը համապատասխանաբար հավասար են նախորդ փուլում ստացված թվերին:

Ալգորիթմով ստացված հանգույցի k համարը ցույց է տալիս այն շերտը, որտեղ գտնվում է այդ հանգույցը: Նկատենք նաև, որ այդ թիվը ցույց է տալիս սկզբնական հանգույցից մինչև k-րդ հանգույց տանող ամենաերկար ուղու սլաքների քանակը:

2. Ծրագրի աշխատանքների կատարման ժամկետների հաշվարկը ցանցերի վրա

Աշխատանքների ծրագրի համար կառուցված ցանցը հնարավորություն է տալիս պարզ ձևով և արագորեն կատարել որոշակի հաշվարկներ՝ կապված ծրագրի աշխատանքների կատարման ժամկետների և պահանջվող պաշարների օպտիմացման հետ: Այս բաժնում կդիտարկենք ժամկետների հետ կապված հարցերը: Պարզության համար կենթադրենք, որ ծրագրի կատարումն սկսվում է 0 պահին:

Սկզբնական փուլում աշխատանքների E ցուցակի հետ միասին տրվում են նաև այդ աշխատանքների կատարման ժամանակները՝

$$\{t(e_1), t(e_2),\ldots,t(e_m)\},$$

որտեղ t(e)-ն e աշխատանքի կատարման տևողությունն է (ակնհայտ է, որ t(e)>0): Եթե e աշխատանքը նկարագրվում է պատահույթների (i,j) զույգով, ապա t(e)-ն կգրենք նաև t(i,j) տեսքով: Եթե աշխատանքը թվացյալ է, ապա դրա կատարման տևողությունը հավասար է 0-ի: Կուսումնասիրենք հետևյալ հարցերը:

ա) Ամենաքիչը ինչքա՞ն ժամանակ է պահանջում ամբողջ ծրագրի կատարումը (նշանակենք այդ ժամանակը T-ով):

բ) Ի՞նչ ժամկետներում կարող է կատարվել յուրաքանչյուր e աշխատանք, որպեսզի ամբողջ ծրագիրն ավարտվի T ժամանակում:

Առաջին հարցի համար էական դեր են խաղում որոշակի այսպես կոչված կրիտիկական աշխատանքները, որոնց կատարման ժամկետներից էապես կախված է ամբողջ ծրագրի կատարման նվազագույն T ժամանակը: Մնացած ոչ կրիտիկական աշխատանքներից յուրաքանչյուրի կատարման ժամկետն կարող է փոփոխվել, որը չի ազդում ծրագրի կատարման նվազագույն T ժամանակի վրա: Այդ դեպքում ասում ենք, որ ոչ կրիտիկական աշխատանքն ունի ժամանակի ռեզերվ կամ պահուստ:

Այսպիսով, յուրաքանչյուր e աշխատանքի համար սահմանվում են հետևյալ չորս ժամկետները՝

$T_0(e)$ - սկսվելու ամենաշուտ ժամկետը

$T_0'(e)$- սկսվելու ամենաուշ ժամկետը

$T_1(e)$ - վերջանալու ամենաշուտ ժամկետը

$T_1'(e)$ - վերջանալու ամենաուշ ժամկետը:

Այս և հաջորդող թվերի սահմանումները ենթադրում են, որ աշխատանքների ամբողջ ծրագիրը պետք է ավարտվի T ժամկետում: Անհրաժեշտություն է առաջանում յուրաքանչյուր k, $k = 0,\ldots,n$ պատահույթի համար սահմանել հետևյալ երկու ժամկետները՝

T(k) - իրականացման ամենաշուտ ժամկետը

T′(k) - իրականացման ամենաուշ ժամկետը:

Ակնհայտ է, որ $T(0) = T'(0) = 0$, $T(k) \leq T'(k)$, $T(n) = T'(n) = T$:

Նախորդ բաժնում ընկարագրված համարակալումն այնպիսին է, որ եթե $i \in B(k)$, ապա $i<k$ և եթե $j \in A(k)$, ապա $j>k$:

Քանի որ k պատահույթի իրականացմանը նախորդում են B(k)-ին պատկանող բոլոր պատահույթների իրականացումները, իսկ B(k)-ին պատկանող բոլոր i պատահույթներից դուրս եկող (i,k) աշխատանքների կատարումը, ապա պարզ է, որ

$$T(k) = \max_{i \in B(k)} \{T(i) + t(i,k)\}:$$

Քանի որ k պատահույթի իրականացումը նախորդում է A(k)-ին պատկանող բոլոր պատահույթների իրաակա նցմանը, իսկ A(k)-ին պատկանող կամայական j պատահույթի (k,j) աշխատանքի կատարումը նույնպես նախորդում է j պատահույթի իրականացմանը, ապա պարզ է դառնում նաև, որ

$$T'(k) = \min_{j \in A(k)} \{T'(j) - t(k,j)\}:$$

Այս թվերի հաշվարկները կատարվում են հետևյալ երկու ալգորիթմներով:

Ցանցի ուղիղ անցման (մղման) այգորիթմ

$$T(o) = 0; \; T(k) = \max_{j \in B(k)} \{T(i) + t(i,k)\}, \; k = 1,2,\ldots,n:$$

Այս ալգորիթմի ավարտին ստանում ենք T=T(n) թիվը:

Ցանցի հակադարձ անցման (մղման) ալգորիթմ

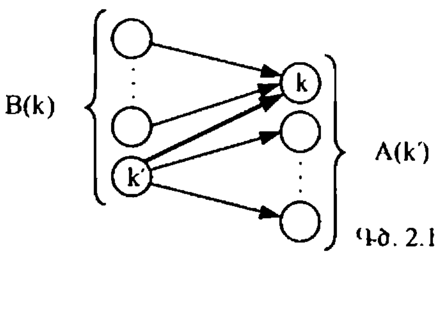
$$T'(n) = T; \; T'(k) = \min_{j \in A(k)} \{T'(j) - t(k,j)\}; \; k = n-1, n-2, \ldots, 0:$$

Ուղիղ և հակադարձ անցման ալգորիթմներից յուրաքանչյուր k պատահույթի համար ստանում ենք T(k) և T′(k) թվերը:

Սահմանում: e=(i,j) աշխատանքը կանվանենք կրիտիկական, եթե $T(i)=T'(i)$, $T(j)=T'(j)$ և $T(j)-T(i)=t(i,j)$:

Պնդում 1: Եթե մի որևէ k պատահույթի համար $T(k)=T'(k)$, ապա գոյություն ունի այնպիսի k′, $k' \in B(k)$ պատահույթ, որ (k′,k) աշխատանքը կրիտիկական է:

Ապացույց: $T(k) = \max_{i \in B(k)} \{T(i)+t(i,k)\}$: Դիտարկենք այն k′-ը, $k' \in B(k)$, որի համար այս մաքսիմումը հասանելի է՝ $T(k)=T(k')+t(k',k)$ (գծ. 3.1): Այստեղից $T(k')=T(k)-t(k',k)$:



Գծ. 2.1

$T'(k) = \min\limits_{j\in A(k')} \{T'(j) - t(k',j)\}$, հետևաբար $T'(k') \le T'(k) - t(k',k) = T(k) - t(k',k) = T(k')$,

այսինքն $T'(k') \le T(k')$:

Բայց քանի որ $T'(k') \ge T(k')$, ապա $T'(k') = T(k')$ և $T(k) - T(k') = t(k',k)$ և (k',k) աշխատանքը կրիտիկական է:

Պնդման ապացուցումից նաև բխում է, որ եթե $T(k)=T'(k)$, ապա կրիտիկական են բոլոր (k',k), $k'\in B(k)$, աշխատանքները, որոնց համար $T(k)$ մաքսիմումը դառնում է հասանելի՝ $T(k')+t(k',k)=T(k)$:

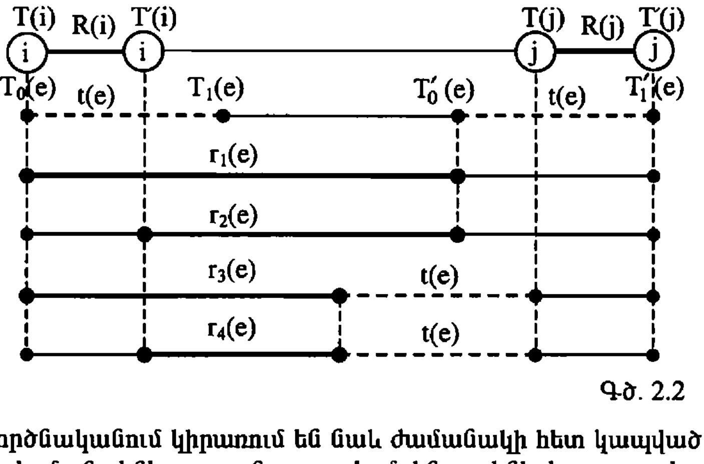
Թեորեմ 1: Ցանցում սկզբնական պատահույթից մինչև վերջնական պատահույթը գոյություն ունի գոնե մեկ ուղի, որի բոլոր աշխատանքները կրիտիկական են:

Ապացուցումը հետևում է $T(n)=T'(n)$ պայմանից և պնդում 1-ից:

0-ից մինչև n հանգույց տանող այն ուղին, որի բոլոր աշխատանքները կրիտիկական են, կոչվում է կրիտիկական ուղի: Թեորեմից հետևում է որ յուրաքանչյուր կրիտիկական աշխատանք պատկանում է որևէ կրիտիկական ուղուն: Կրիտիկական ուղով որոշվում է փաստորեն ծրագրի կատարման նվազագույն T ժամկետը, իսկ այդ ժամկետում ծրագրի ավարտը պահանջում է, որ կրիտիկական ուղու իրար հաջորդող աշխատանքները կատարվեն առանց ընդհատման, մեկը՝ մյուսի ավարտից անմիջապես հետո:

Պատահույթների համար ստացված $T(k)$ և $T'(k)$ թվերը հնարավորություն են տալիս պարզ ձևով հաշվել $e=(i,j)$ աշխատանքի համար սահմանված ժամկետները (տե՛ս գծ. 3.2)՝

$$T_o(e) = T(i);\ T'_o(e) = T'(j) - t(i,j);$$
$$T_1(e) = T(i) + t(i,j);\ T_1'(e) = T'(j):$$



Գծ. 2.2

Գործնականում կիրառում են նաև ժամանակի հետ կապված պահուստային ժամանակները, որոնք որոշվում են ուղիների, պատահույթների և աշխատանքների համար:

Դիտարկենք ցանցում սկզբնական և վերջնական պատահույթները միացնող L ուղին:

Սահմանում: L ուղու ժամանակի պահուստ կոչվում է R(L) թիվը՝

$$R(L) = T - T(L),$$

որտեղ T-ն ծրագրի կատարման նվազագույն ժամկետն է, իսկ

$$T(L) = \sum_{e \in L} t(e):$$

R(L) թիվը ցույց է տալիս, թե L ուղու աշխատանքների տևողությունները ինչքանով կարող ենք ավելացնել՝ ծրագիրն ավարտելով T ժամկետում: Ակնհայտ է, որ R(L)=0 այն և միայն այն դեպքում, երբ L ուղին կրիտիկական է:

Սահմանում: k պատահույթի ժամանակի պահուստ կոչվում է R(k) թիվը՝

$$R(k) = T'(k) - T(k):$$

R(k)-ն ցույց է տալիս, թե k պատահույթի իրականացումը ինչքանով կարող ենք ուշացնել՝ ծրագիրն ավարտելով T ժամկետում:

Ստացված արդյունքներից հետևում է, որ k-ն պատկանում է կրիտիկական ճանապարհին այն և միայն այն դեպքում, երբ R(k)=0:

e=(i,j) աշխատանքի համար սահմանվում են ժամանակի հետևյալ չորս $r_1(e)$, $r_2(e)$, $r_3(e)$, $r_4(e)$ պահուստները (տե՛ս գծ. 3.2):

Սահմանում:

$$r_1(e)=r_1(i,j)=T'(j)-T(i)-t(i,j)$$
$$r_2(e)=r_2(i,j)=T'(j)-T'(i)-t(i,j)$$
$$r_3(e)=r_3(i,j)=T(j)-T(i)-t(i,j)$$
$$r_4(e)=r_4(i,j)=T(j)-T'(i)-t(i,j) :$$

$r_1(e)$ թիվը կոչվում է e աշխատանքի ժամանակի լրիվ պահուստ;

$r_2(e)$ թիվը կոչվում է e աշխատանքի ժամանակի առաջին տեսակի մասնավոր պահուստ (կամ մասնավոր պահուստ);

$r_3(e)$ թիվը կոչվում է e աշխատանքի ժամանակի երկրորդ տեսակի մասնավոր պահուստ (կամ պարզապես ազատ պահուստ);

$r_4(e)$ թիվը կոչվում է e աշխատանքի ժամանակի անկախ պահուստ:

(Ցանցային պլանավորման որոշ աշխատանքներում $r_4(e)$-ն կոչվում է ազատ պահուստ, իսկ $r_3(e)$-ն հատուկ անվանում չունի):

Քանի որ

$$T(i)+t(i,j) \le T(j) \le T'(j)$$
$$T(i) \le T'(i) \le T'(j)\;\; t(i,j),$$

ապա $r_1(i,j) \ge 0$, $r_2(i,j) \ge 0$, $r_3(i,j) \ge 0$: $r_4(i,j)$ թիվը կարող է լինել բացասական, և այդ դեպքում նա իրական իմաստ չունի:

(e)=(i,j) աշխատանքի ժամանակի լրիվ պահուստը ցույց է տալիս, թե i պատահույթի իրականացման ամենաշուտ ժամկետից հետո e աշխա-տանքի կատարման ժամանակից բացի ինչքան ժամանակ է մնում մինչև j պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետը:

$(e)=(i,j)$ աշխատանքի ժամանակի մասնավոր պահուստը ցույց է տալիս, թե i պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետից հետո e աշխատանքի կատարման ժամանակից բացի ինչքան ժամանակ է մնում մինչև j պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետը:

$(e)=(i,j)$ աշխատանքի ժամանակի ազատ պահուստը ցույց է տալիս, թե i պատահույթի իրականացման ամենաշուտ ժամկետից հետո e աշխատանքի կատարման ժամանակից բացի ինչքան ժամանակ է մնում մինչև j պատահույթի իրականացման ամենաշուտ ժամկետը:

Եթե $e=(i,j)$ աշխատանքի ժամանակի անկախ պահուստը ոչ բացասական է, ապա այն ցույց է տալիս, թե i պատահույթի իրականացման ամենաուշ ժամկետից հետո e աշխատանքի կատարման ժամանակից բացի ինչքան ժամանակ է մնում մինչև j պատահույթի իրականացման ամենաշուտ ժամկետը: Եթե $r_4(e)<0$, ապա հնարավոր չէ, որ i պատահույթը իրականացվի ամենաուշ ժամկետում, և j պատահույթը՝ ամենաշուտ ժամկետում: Հեշտ է նկատել, որ

$$r_1(e) = T_0'(e)-T_0(e) = T_1'(e)-T_1(e) = T_1'(e)-T_0(e)-t(e):$$

$e=(i,j)$ աշխատանքի և պատահույթի ժամանակի պահուստների սահմանումներից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} r_1(i,j)-r_2(i,j) &= R(i)\\ r_1(i,j)-r_3(i,j) &= R(j)\\ r_1(i,j)-r_4(i,j) &= R(j)+R(i)\\ r_2(i,j)-r_3(i,j) &= R(j)-R(i)\\ r_2(i,j)-r_4(i,j) &= R(j)\\ r_3(i,j)-r_4(i,j) &= R(i): \end{aligned}$$

Ստացված այս կապերից բխում է, որ կամայական k պատահույթի համար ճշմարիտ են նաև հետևյալ արդյունքները:

Թեորեմ 2: Հետևյալ պնդումները իրար համարժեք են.

ա) $R(k)=0$,

բ) $T(k)=T'(k)$,

գ) $r_1(k,j)=r_2(k,j)$, կամայական j, $j\in A(k)$ պատահույթի համար,

դ) $r_3(k,j)=r_4(k,j)$, կամայական j, $j\in A(k)$ պատահույթի համար,

ե) $r_1(i,k)=r_3(i,k)$, կամայական i, $i\in B(k)$ պատահույթի համար,

զ) $r_2(i,k)=r_4(i,k)$, կամայական i, $i\in B(k)$ պատահույթի համար:

Հետևանք 1: Կամայական (i,j) աշխատանքի համար $R(i)=R(j)=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $r_1(i,j)=r_2(i,j)=r_3(i,j)=r_4(i,j)$:

Հետևանք 2: $e=(i,j)$ աշխատանքը կրիտիկական է այն և միայն այն դեպքում, երբ $r_1(i,j)=r_2(i,j)=r_3(i,j)=r_4(i,j)=0$:

Քանի որ $T(j)\leq T'(j)$, ապա ակնհայտ է, որ $r_1(e)\leq r_3(e)$, մասնավորապես, եթե $r_1(e)=0$, ապա $r_3(e)=0$:

Կրիտիկական աշխատանքի համար տեղի ունեն հետևյալ հեշտ ապացուցվող իրար համարժեք պնդումներ:

Պնդում 2: e աշխատանքը կրիտիկական է այն և միայն այն դեպքում, երբ $T_o(e)=T'_o(e)$, $T_1(e)=T'_1(e)$ և $T_1(e)-T_o(e)=t(e)$:

Պնդում 3: e աշխատանքը կրիտիկական է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ աշխատանքի ժամանակի լրիվ պահուստը հավասար է 0-ի:

Ցանցի համար նկարագրված բոլոր հաշվարկները գործնականում ներկայացվում են հետևյալ աղյուսակ (2.1)-ի միջոցով.

Աղյուսակ 2.1

Աշխա-տանք	Կատարման ժամանակը	Ամենաշուտ		Ամենաուշ		Ժամանակի պահուստ			
		սկիզբ	ավարտ	սկիզբ	ավարտ	լրիվ	մասնավոր	ազատ	անկախ
e	t(e)	$T_o(e)$	$T_1(e)$	$T'_o(e)$	$T'_1(e)$	$r_1(e)$	$r_2(e)$	$r_3(e)$	$r_4(e)$

Ամբողջ ծրագիրը կարելի է կատարել ավելի շուտ, եթե որոշակի աշխատանքների կատարման ժամանակները փոքրացնենք: Ակնհայտ է, որ այդ աշխատանքները պետք է պատկանեն կրիտիկական ուղիներին՝ յուրաքանչյուր կրիտիկական ուղի պետք է պարունակի այդպիսի աշխատանք: Եթե կրիտիկական ուղին միակն է, ապա փոքրացնելով այդ ուղու կամայական ոչ թվացյալ աշխատանքի կատարման ժամանակը փոքրանում է նաև ծրագրի կատարման նվազագույն ժամկետը:

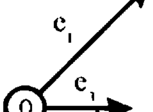
3. Նկարների ցուցահանդեսի կազմակերպման աշխատանքների խնդիր

Այս բաժնում կդիտարկենք ցանցային եղանակով ծրագրի պլանավորման հետ կապված հարցերը իրականությունից վերցված մի օրինակով: Կդիտարկենք ցուցահանդեսի կազմակերպման հետ կապված աշխատանքները, կկառուցենք ցանցը և կուսումնասիրենք կառուցված ցանցը:

3.1 աղյուսակում թվարկված են այն աշխատանքները, որ անհրաժեշտ են նկարների ցուցահանդեսի կազմակերպման համար:

Կառուցենք թվարկված աշխատանքներից կազմված ցանցը 2-րդ բաժնում նկարագրված ալգորիթմի /քայլաշարի/ միջոցով:

1-ին քայլ (գծ. 3.1): Ընտրում ենք e_1 և e_3-ը, քանի որ $B(e_1)=B(e_3)=\varnothing$: Վերցնում ենք 0 պատահույթը: Կառուցում ենք e_1 և e_3 սլաքները:

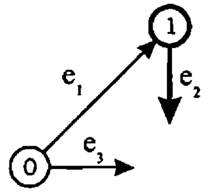


Գծ.3.1

Աղյուսակ 3.1

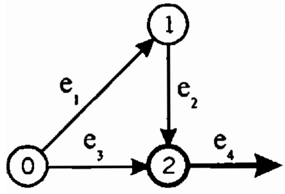
Աշխա-տանք	Աշխատանքի անվանում	Անմիջապես նախորդող աշխատանքները	Պահանջվող ժամանակը (ժամերով)
e_1	Նկարների ընտրություն	–	6
e_2	Նկարների վերջնական ձևավորություն	e_1	24
e_3	Սրահի վարձում	–	24
e_4	Նկարների տեղափոխում	e_2, e_3	3
e_5	Հրավիրատոմսի ձևավորում	e_2, e_3	2
e_6	Ծալովի գովազդագրի ձևավորում	e_2, e_3	6
e_7	Հրավիրատոմսի բազմացում	e_5, e_6	1
e_8	Ծալովի գովազդագրի բազմացում	e_5, e_6	3
e_9	Էքսպոզիցիայի ձևավորում	e_4	4
e_{10}	Տեխնիկական նյութերի պատրաստում	e_2, e_3	2
e_{11}	Նկարների տեղադրում	e_9, e_{10}	6
e_{12}	Ցուցանակի պատրաստում	e_4	3
e_{13}	Երաժշտության սարքավորումների տեղադրում և փորձարկում	e_9	2
e_{14}	Նկարների ցանկի պատրաստում	e_9	1
e_{15}	Նկարների անվանումների սոսնձում	e_{11}, e_{14}	1
e_{16}	Ռադիո- և հեռուստատեսային գովազդներերի պատվիրում	e_7, e_8, e_{12}	3
e_{17}	Հրավիրատոմսերի և ծալովի գովազդագրերի տարածում	e_7, e_8	30
e_{18}	Ցուցանակի տեղադրում	e_{12}, e_{17}	1
e_{19}	Շնորհանդեսի նախապատրաստում	e_3	7
e_{20}	Ձևավորման վերջնական փուլ	e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}	1
e_{21}	Ցուցահանդեսի բացում	e_{20}	1
e_{22}	Շնորհանդես	e_{21}	3

2-րդ քայլ (գծ. 3.2): Ընտրում ենք e_2-ը, ավելացնում 1-ին պատահույթը և e_2 սլաքը:



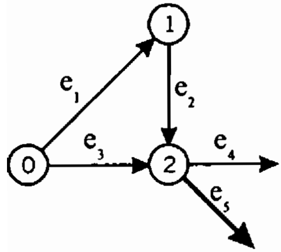
Գծ.3.2

3-րդ քայլ (գծ. 3.3)։ Ընտրում ենք e_4-ը, ավելացնում 2-րդ պատահույթը և e_4 սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։



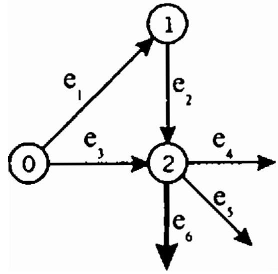
Գծ. 3.3

4-րդ քայլ (գծ. 3.4)։ Ընտրում ենք e_5-ը, ավելացնում e_5 սլաքը (ալգորիթմի ա) դեպք)։



Գծ. 3.4

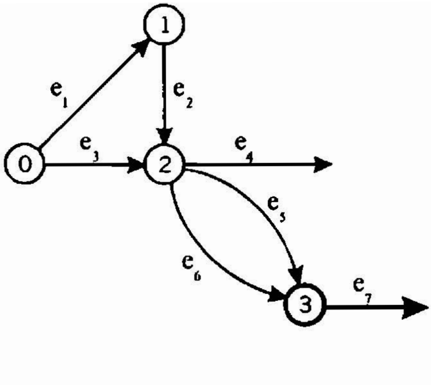
5-րդ քայլ (գծ. 3.5)։ Ընտրում ենք e_6-ը, ավելացնում e_6 սլաքը (ալգորիթմի ա) դեպք)։



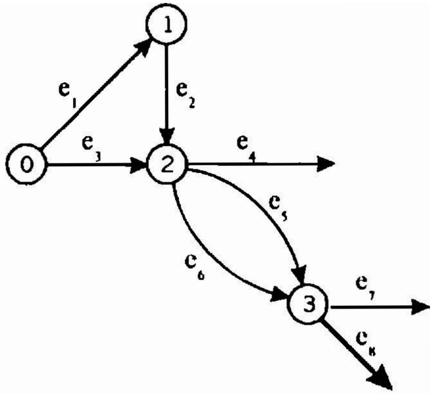
Գծ. 3.5

6-րդ քայլ (գծ. 3.6)։ Ընտրում ենք e_7-ը, ավելացնում 3-րդ պատահույթը և e_7 սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։

7-րդ քայլ (գծ. 3.7)։ Ընտրում ենք e_8-ը և ավելացնում e_8 սլաքը (ալգորիթմի ա) դեպք)։

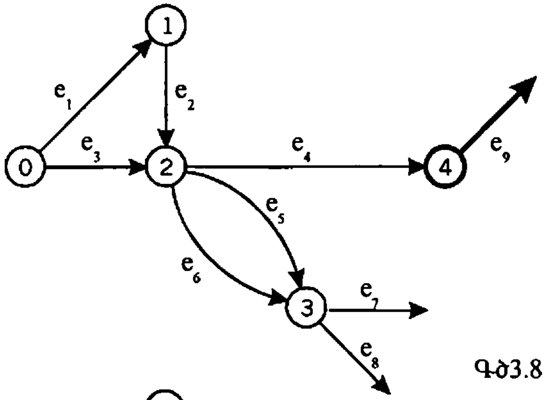


Գծ. 3.6



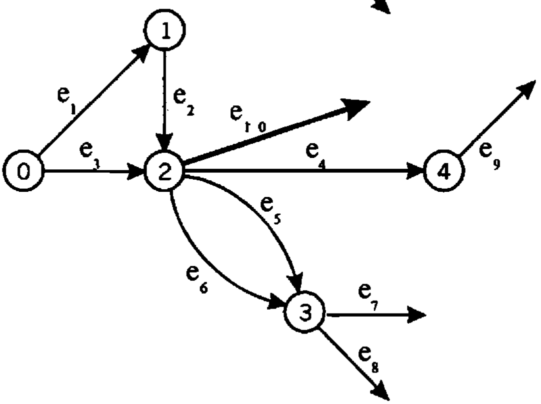
Գծ.3.7

8-րդ քայլ (գծ.3.8): Ընտրում ենք e_9-ը, ավելացնում 4-րդ պատահույթը և e_9 սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք):



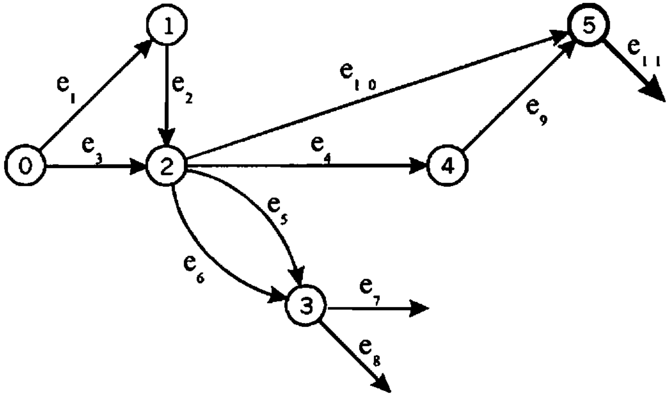
Գծ3.8

9-րդ քայլ (գծ. 3.9): Ընտրում ենք e_{10}-ը և ավելացնում e_{10} սլաքը (ալգորիթմի ա) դեպք):



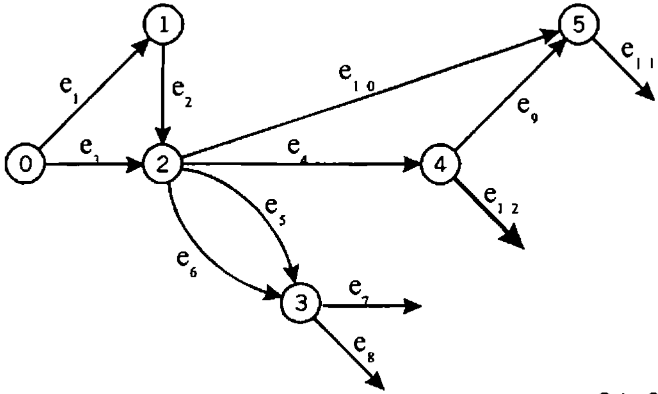
Գծ. 3.9

10-րդ քայլ (գծ. 3.10): Ընտրում ենք e_{11}-ը, ավելացնում 5-րդ պատահույթը և e_{11} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք):



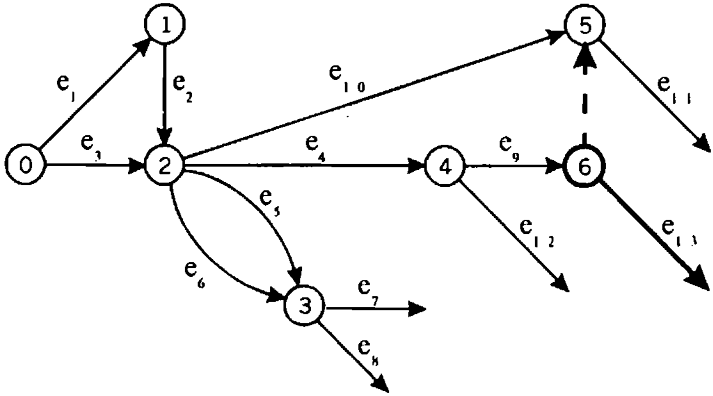
Գծ. 3.10

11-րդ քայլ (գծ. 3.11): Ընտրում ենք e_{12}-ը և ավելացնում e_{12} սլաքը (ալգորիթմի ա) դեպք):



Գծ. 3.11

12-րդ քայլ (գծ. 3.12): Ընտրում ենք e_{13}-ը, ավելացնում 6-րդ պատահույթը, (6,5) թվացյալ աշխատանքը (կետագիծ սլաքը), և e_{13} սլաքը (ալգորիթմի բ) դեպք):

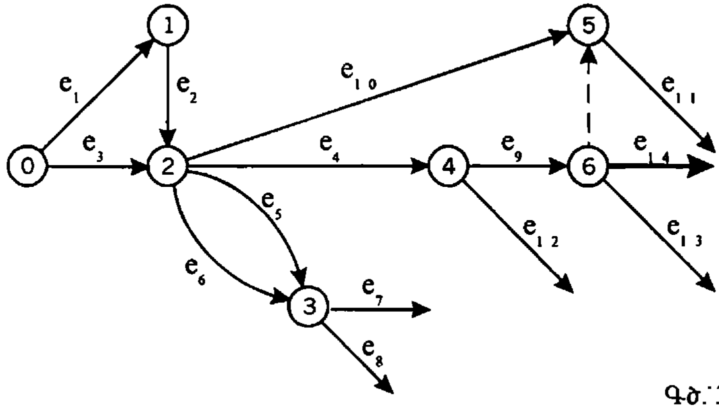


Գծ. 3.12

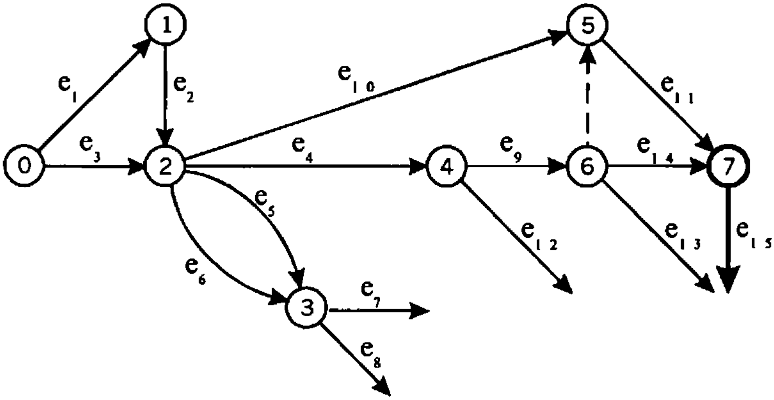
13-րդ քայլ (գծ. 3.13): Ընտրում ենք e_{14}-ը և ավելացնում e_{14} սլաքը (ալգորիթմի ա) դեպք):

14-րդ քայլ (գծ. 3.14): Ընտրում ենք e_{15}-ը, ավելացնում 7-րդ պատահույթը և e_{15} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք):

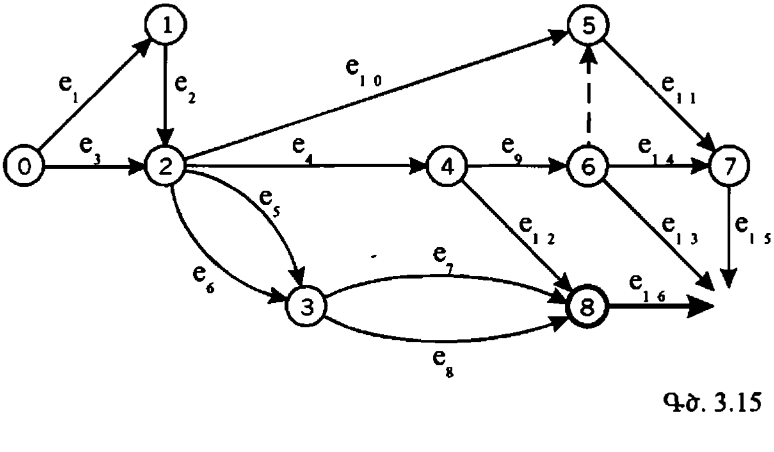
15-րդ քայլ (գծ. 3.15): Ընտրում ենք e_{16}-ը, ավելացնում 8-րդ պատահույթը և e_{16} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք):



Գծ. 3.13

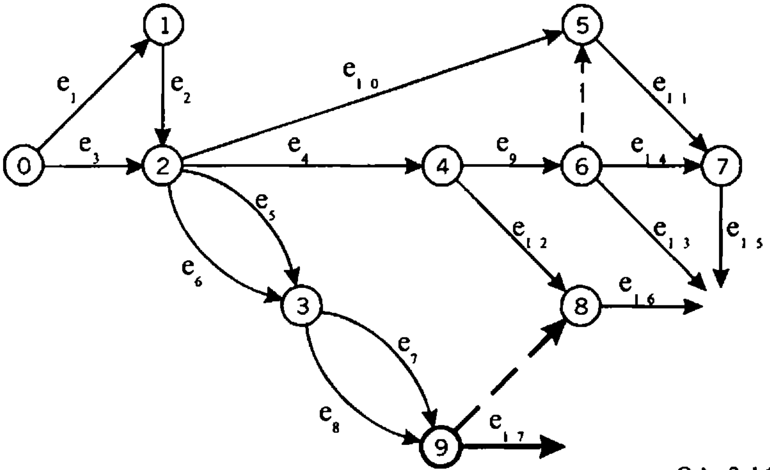


Գծ. 3.14



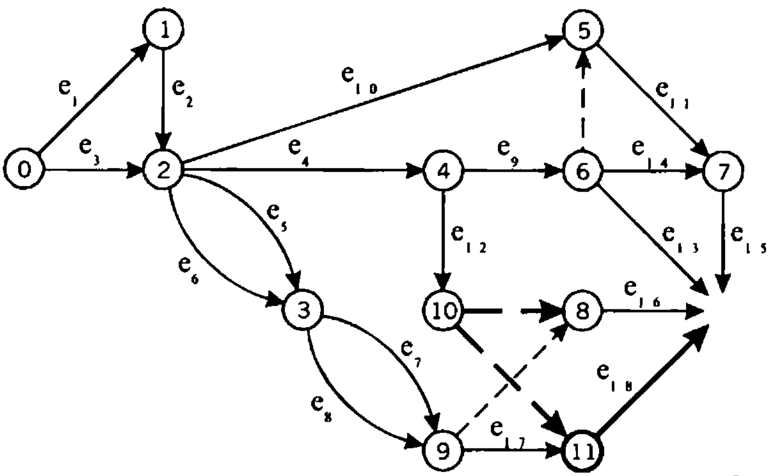
Գծ. 3.15

16-րդ քայլ (գծ. 3.16)։ Ընտրում ենք e_{17}-ը, ավելացնում 9-րդ պատահույթը, (9,8) թվացյալ աշխատանքը (կետագիծ սլաքը) և e_{17} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։



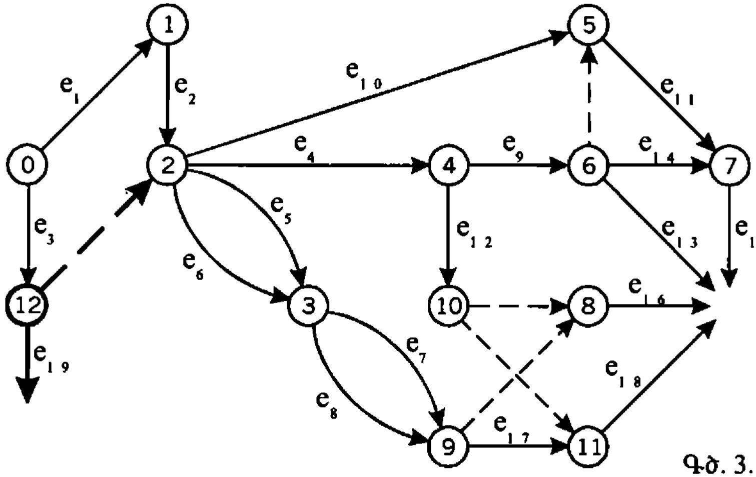
Գծ. 3.16

17-րդ քայլ (գծ. 3.17)։ Ընտրում ենք e_{18}-ը, ավելացնում 10-րդ և 11-րդ պատահույթները, (10,8) և (10,11) թվացյալ աշխատանքները (կետագիծ սլաքները) և e_{18} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։



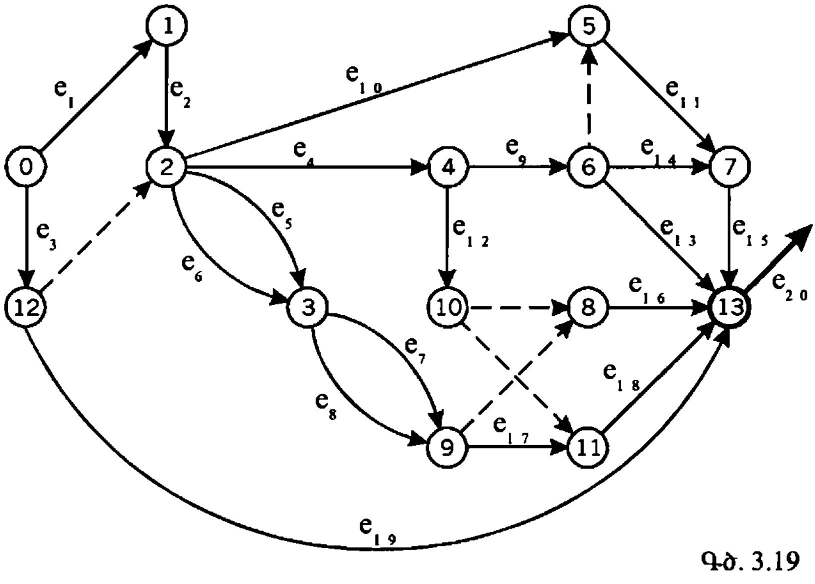
Գծ. 3.17

18-րդ քայլ (գծ. 3.18)։ Ընտրում ենք e_{19}-ը, ավելացնում 12-րդ պատահույթը, (12,2) թվացյալ աշխատանքը (կետագիծ սլաքը) և e_{19} սլաքը (ալգորիթմի բ) դեպք)։



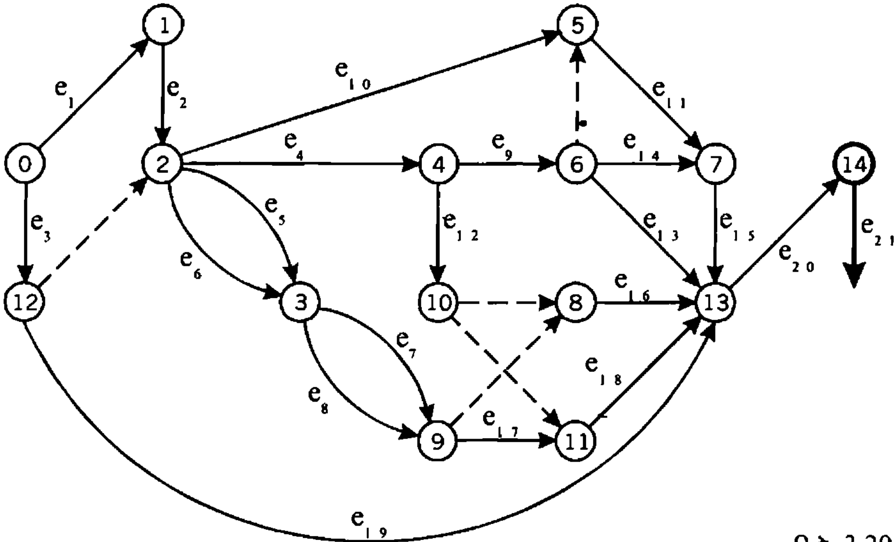
Գծ. 3.18

19-րդ քայլ (գծ. 3.19)։ Ընտրում ենք e_{20}-ը, ավելացնում 13-րդ պատահույթը և e_{20} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։



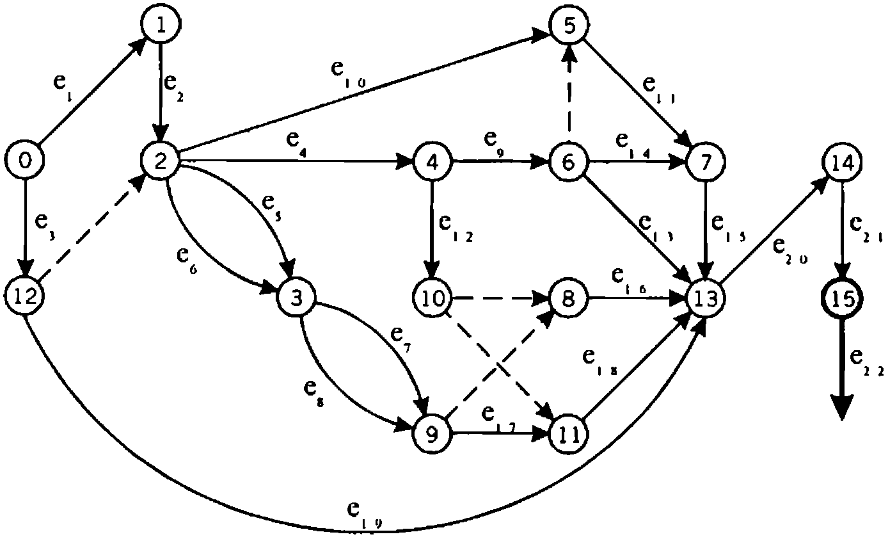
Գծ. 3.19

20-րդ քայլ (գծ. 3.20)։ Ընտրում ենք e_{21}-ը, ավելացնում 14-րդ պատահույթը և e_{21} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։



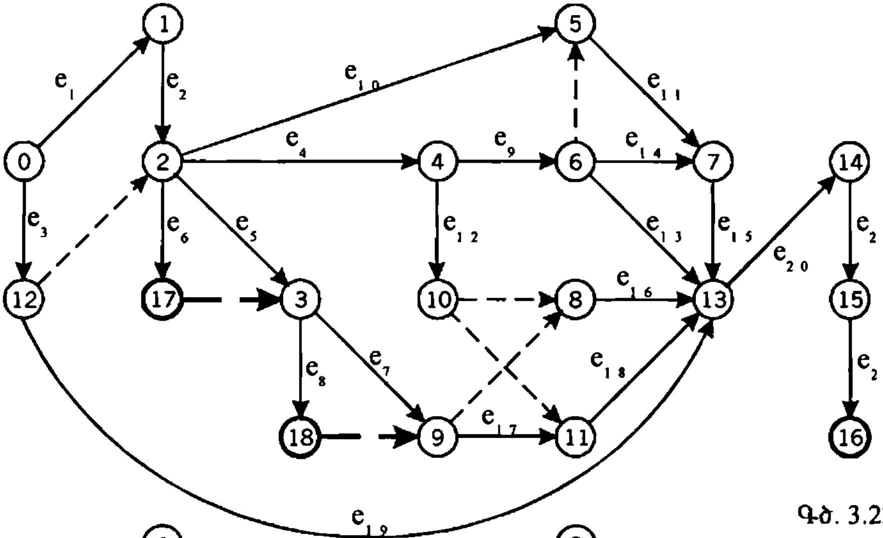
Գծ. 3.20

21-րդ քայլ (գծ. 3.21)։ Ընտրում ենք e_{22}-ը, ավելացնում 15-րդ պատահույթը և e_{22} սլաքը (ալգորիթմի գ) դեպք)։

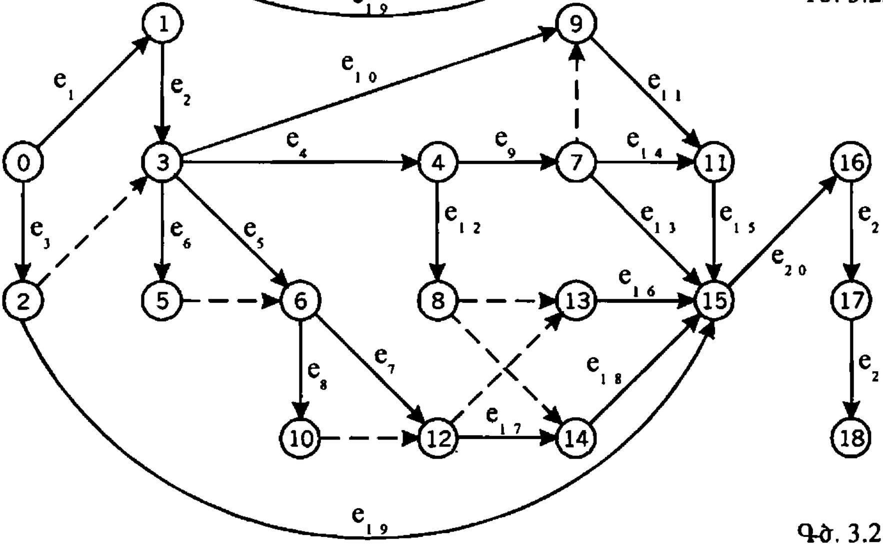


Գծ. 3.21

Վերջին քայլ (գծ. 3.22): Ավելացնում ենք 16-րդ պատահույթը և կատարում α ձևափոխությունը e_5e_6 և e_7e_8 զուգահեռ սլաքների համար:



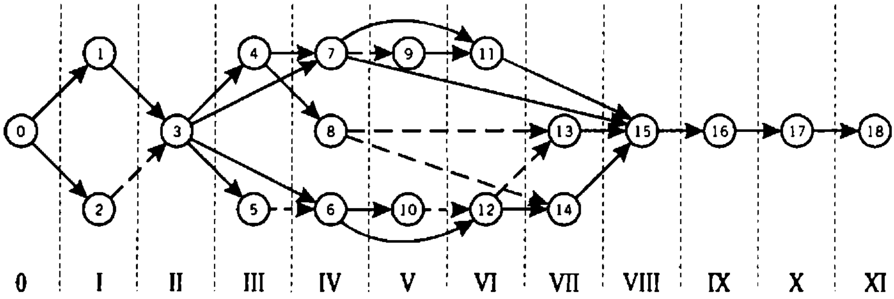
Գծ. 3.22



Գծ. 3.23

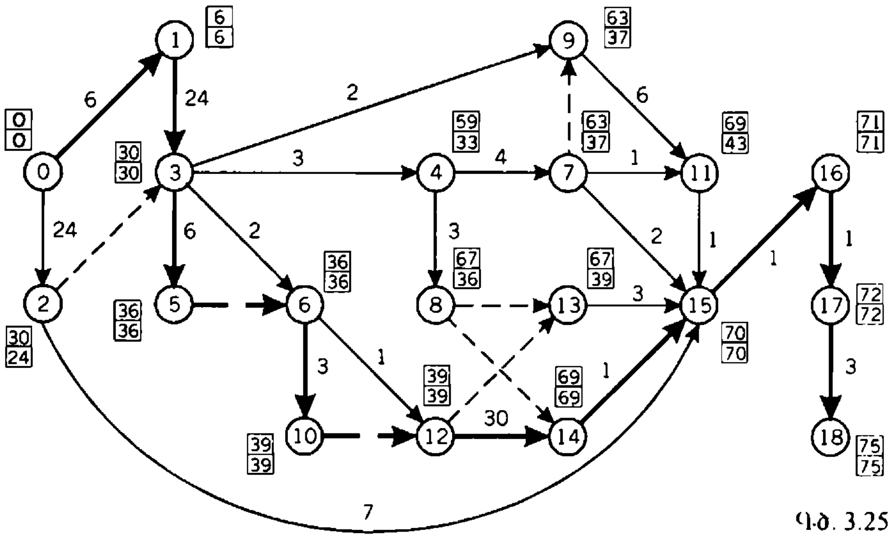
Պատահույթների վերահամարակալումը կատարենք ներկայացված ալգորիթմի միջոցով: Այս վերահամարակալումից ստացված ցանցը ներկայացված է 3.23 գծագրում:

Այսպիսով, կառուցված ցանցը պարունակում է 19 հանգույցներ (պատահույթներ), 22 սլաքներ (ներկայացված աշխատանքներ) և 7 կետագիծ սլաքներ՝ (2,3), (5,6), (7,9), (8,13), (8,14), (10,12), (12,13), որոնք համապատասխանում են թվացյալ աշխատանքներին: Այդ ցանցում կարող ենք «խոշորացնել» e_{20}, e_{21}, e_{22} աշխատանքների հաջորդաբար կատարումը, համարելով այդ երեք աշխատանքները որպես մեկ աշխատանք:



Գծ. 3.24

Հանգույցների դասակարգումը կատարելով ըստ շերտերի՝ ստանում ենք, որ ցանցի հանգույցները բաժանվում են 12 շերտերի, որոնք պատկերված են 3.24 գծագրում:



Գծ. 3.25

Օգտվելով ցանցի ուղիղ անցման, ինչպես նաև հակադարձ անցման ալգորիթմներից, հաշվարկենք ստացված ցանցի աշխատանքների կատարման ժամկետները: Արդյունքները պատկերված են 3.25 գծագրում, որտեղ սլաքների վրա գրված են այդ աշխատանքների կատարման համապատասխան ժամկետները: Ուղիղ անցման ալգորիթմի արդյունքները գծագրում պատկերված են պատահույթներին համապատասխանող ներքևի վանդակներում, իսկ հակադարձ անցման ալգորիթմի արդյունքները՝ վերևի վանդակ-ներում: Այս հաշվարկներից հետևում է, որ կրիտիկական ճանապարհն է 0, 1, 3, 5, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18 պատահույթներով անցնող ուղին, և այդ ուղին պարունակում է e_1, e_2, e_6, e_8, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22} կրիտիկական աշխատանքները և (5,6) ու (10,12) թվացյալ կրիտիկական աշխատանքները: Այս ծրագրի կատարման ամենաշուտ ժամկետը հավասար է 75 ժամի: Աշխատանքների համար կատարված հաշվարկները ներկայացնենք 3.2 աղյուսակի միջոցով (կրիտիկական աշխատանքները վերցված են շրջանակների մեջ):

Աղյուսակ 3.2

Աշխատանք	Կատարման ժամանակը	Ամենաշուտ		Ամենաուշ		Ժամանակի պահուստ			
		սկիզբ	ավարտ	սկիզբ	ավարտ	լրիվ	մասնավոր	ազատ	անկախ
e	t(e)	$T_0(e)$	$T_1(e)$	$T'_0(e)$	$T'_1(e)$	$r_1(e)$	$r_2(e)$	$r_3(e)$	$r_4(e)$
e_1	6	0	6	0	6	0	0	0	0
e_2	24	6	30	6	30	0	0	0	0
e_3	24	0	24	6	30	6	6	0	0
e_4	3	30	33	56	59	26	26	0	0
e_5	2	30	32	34	36	4	4	4	4
e_6	6	30	36	30	36	0	0	0	0
e_7	1	36	37	38	39	2	2	2	2
e_8	3	36	39	36	39	0	0	0	0
e_9	4	33	37	59	63	26	0	0	-26
e_{10}	2	30	32	61	63	31	31	5	5
e_{11}	6	37	43	63	69	26	0	0	-26
e_{12}	3	33	36	64	67	31	5	0	-26
e_{13}	2	37	39	68	70	31	5	31	5
e_{14}	1	37	38	68	69	31	5	5	-21
e_{15}	1	43	44	69	70	26	0	26	0
e_{16}	3	39	42	67	70	28	0	28	0
e_{17}	30	39	69	39	69	0	0	0	0
e_{18}	1	69	70	69	70	0	0	0	0
e_{19}	7	24	31	63	70	39	33	39	33
e_{20}	1	70	71	70	71	0	0	0	0
e_{21}	1	71	72	71	72	0	0	0	0
e_{22}	3	72	75	72	75	0	0	0	0

3.3 աղյուսակում ներկայացված են բոլոր պատահույթների ժամանակի պահուստները:

Աղյուսակ 3.3

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
R(k)	0	1	6	0	26	0	0	26	31	26	0	26	0	28	0	0	0	0	0

4. Ռեսուրսների օրացուցային պլանավորումը և բաշխումը

Դիցուք՝ ծրագրի համար կառուցված է մի ցանց, որի պատահույթներն են $V=\{0,1,\ldots,n\}$-ը, իսկ աշխատանքները՝ $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$-ը:

Ծրագրի ցանցային մոդելի հաշվարկների վերջնական փուլն է օրացուցային պլանավորումը, որում անհրաժեշտ է հաշվի առնել և լավագույն ձևով բաշխել եղած ռեսուրսները:

Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր e_j, $j=1,\ldots,m$, աշխատանքի համար տրվում է a_j թիվը, որը ցույց է տալիս աշխատողների քանակը, որոնք e_j աշխատանքը կարող են կատարել $t(e_j)$ ժամանակում: Հաճախ անհրաժեշտ է լինում լուծել հետևյալ խնդիրը:

Ռեսուրսների հավասարաչափ բաշխման խնդիր:

Յուրաքանչյուր t, $0\le t\le T$, պահին a(t)-ով նշանակենք t պահին օգտագործվող ռեսուրսների (տվյալ դեպքում՝ աշխատողների) քանակը, այսինքն՝

$$a(t) = \sum_{e\in E(t)} a(e),$$

որտեղ E(t)-ն t պահին կատարվող աշխատանքների ցանկն է: Նպատակն է աշխատանքների կատարումը այնպես պլանավորել, որ

$$\max_{0\le t\le T} a(t)$$

թիվը լինի նվազագույնը:

Այս խնդիրը այսպիսի ընդհանուր դրվածքով մաթեմատիկական լուրջ դժվարություններ ունի և մինչև այժմ չի մշակված մի այնպիսի եղանակ, որով կարելի լինի գտնել լավագույն լուծումը: Գործնականում խնդրի համար հաճախ կազմվում են հետևյալ երկու օրացուցային պլանները:

ա) Վաղ (կամ ձախ) օրացուցային պլանավորում՝ յուրաքանչյուր e աշխատանք սկսում են $T_0(e)$ պահին:

բ) Ուշ (կամ աջ) օրացուցային պլանավորում՝ յուրաքանչյուր e աշխատանք սկսում են $T_0^1(e)$ պահին:

Վաղ և ուշ օրացուցային պլանավորումները հնարավորություն են տալիս իրար հետ համեմատելով, կազմել որոշ դեպքերում ավելի լավ պլանա-վորում, որում օգտագործվող ռեսուրսների առավելագույն քանակը ավելի փոքր կլինի, քան վաղ և ուշ օրացուցային պլանավորումների ժամանակ:

Օրացուցային պլանավորման համար հաճախ օգտագործվում է y=a(t) ֆունկցիան պատկերող Հանտի դիագրամը, որում հորիզոնական առանցքը ցույց է տալիս ժամանակը, իսկ ուղղահայաց առանցքը՝ ռեսուրսները:

Վաղ և ուշ օրացուցային պլանավորումները դիտարկենք, օրինակ, նախորդ բաժնում նկարագրված ցուցահանդեսի կազմակերպման խնդրի համար: Ստորև բերվող աղյուսակում տրված է այդ խնդրի յուրաքանչյուր e_j աշխատանքի համար աշխատողների a_j քանակը, որոնք e_j աշխատանքը կկատարեն պահանջվող $t(e_j)$ ժամանակում

Աղյուսակ 4.1

e_j	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}	e_{21}	e_{22}
$t(e_j)$	6	24	24	3	2	6	1	3	4	2	6	3	2	1	1	3	30	1	7	1	1	3
a_j	3	4	1	6	2	2	3	3	3	1	6	2	2	1	1	3	6	2	3	3	6	6

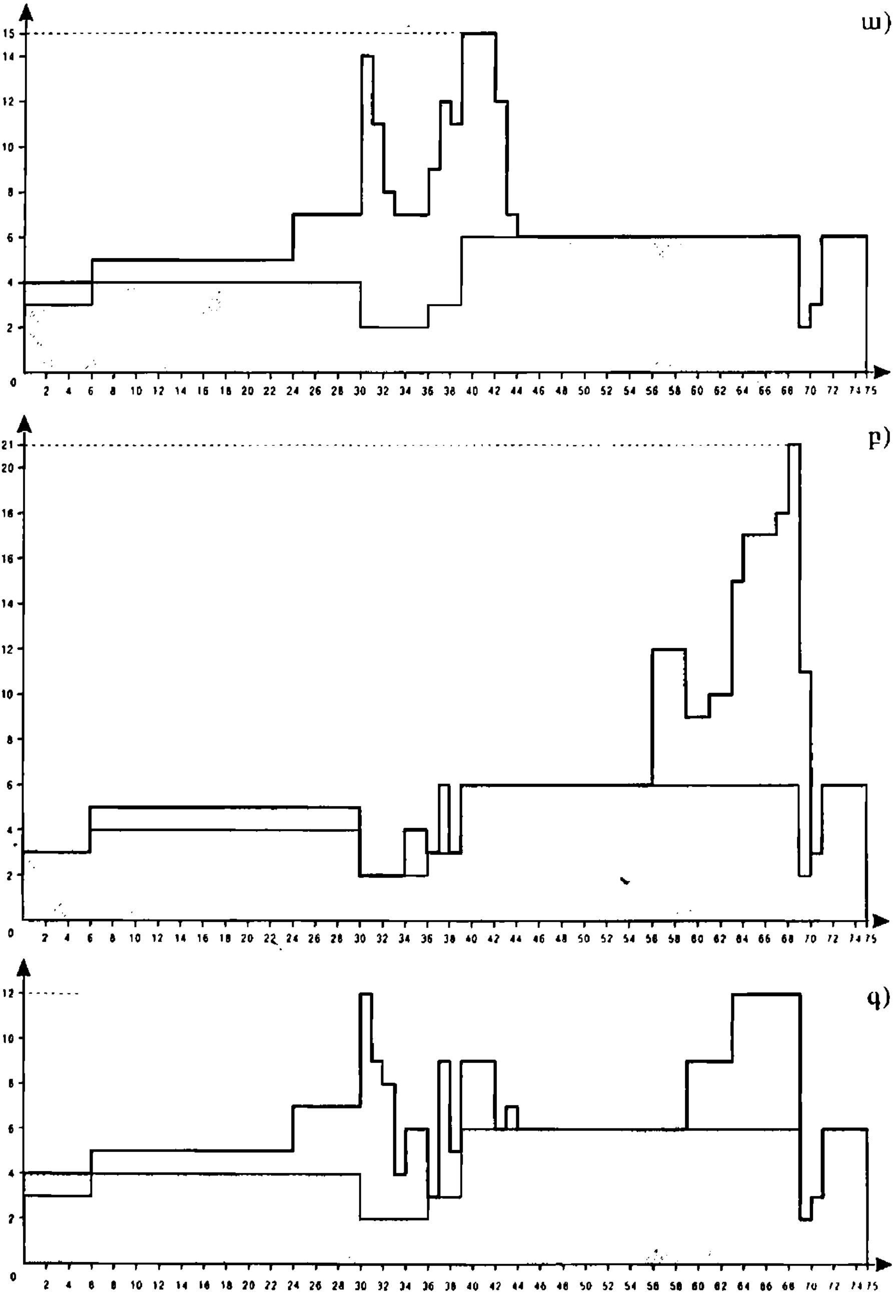
4.1 (ա,բ) գծագրերում Հանտի դիագրամները պատկերված են համապատասխանաբար վաղ և ուշ պլանավորումների դեպքերում նկարների ցուցահանդեսի կազմակերպման ծրագրի համար:

Վաղ պլանավորման դեպքում 3.2 աղյուսակից (տե՛ս $T_0(e)$ և $T_1(e)$ սյունակներ) հետևում է, որ, օրինակ, 39-41 ժամերին միաժամանակ կատարվում են e_{11}, e_{16}, e_{17} աշխատանքները և աշխատանքների քանակը հավասար է $a(e_{11}) + a(e_{16}) + a(e_{17}) = 6+3+6 = 15$ (տե՛ս աղյուսակ 4.1): Ուշ պլանավորման դեպքում 4.2 աղյուսակից (տե՛ս $T_0'(e)$ և $T_1'(e)$ սյունակներ) հետևում է, որ, օրինակ, 69-րդ ժամին միաժամանակ կատարվում են e_{11}, e_{13}, e_{14}, e_{16}, e_{17}, e_{19} աշխատանքները և աշխատանքների քանակը հավասար է $a(e_{11}) + a(e_{13}) + a(e_{14}) + a(e_{16}) + a(e_{17}) + a(e_{19}) = 6+2+1+3+6+3=21$ (տե՛ս աղյուսակ 4.1): 4.1 (ա, բ) գծագրից հետևում է, որ վաղ պլանավորման դեպքում աշխատողների առավելագույն քանակը հավասար է 15-ի, ուշ պլանավորման դեպքում՝ 21-ի: Նույն ծրագիրը կարելի է կատարել 12 աշխատողներով, եթե ոչ կրիտիկական աշխատանքներից e_3, e_4, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}-ը կատարվեն վաղ պլանավորման ձևով, իսկ e_5, e_7, e_9, e_{11}, աշխատանքները՝ ուշ պլանավորման ձևով: Այս երրորդ պլանավորմանը համապատասխանող Հանտի դիագրամը պատկերված է 4.1(գ) գծագրում:

Այս երեք դիագրամներում մուգ գույնով նշված է կրիտիկական աշխատանքներին համապատասխանող աշխատողների քանակը (երեքում էլ նույնն է): Ակնհայտ է, որ այս երեք դիագրամներում նշված մակերեսներն իրար հավասար են (այն է՝ 485) և ցույց են տալիս ծրագիրն ամբողջությամբ կատարելու համար անհրաժեշտ աշխատանքային ժամերի S քանակը՝

$$S = \sum_{j=1}^{22} t(e_j) \cdot a_j :$$

Ցուցահանդեսի կազմակերպման խնդիրը լուծելիս առաջանում են նոր մոտեցումներ, եթե ամեն մի աշխատանքի կատարման ժամանակի և ռեսուրսների հետ միասին սահմանենք նաև պահանջվող ծախսը:


ա)
15
14
12
10
8
6
4
2
0
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 75
բ)
21
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 75
գ)
12
10
8
6
4
2
0
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 75

Գծ.4.1

Դիցուք՝ 4.2 աղյուսակում տրված են այդ ծրագրի e_j աշխատանքների համար սովորական կատարման $t(e_j)$ ժամանակները, a_j ռեսուրսները և $c(e_j)$ ծախսերը (դրամով), ինչպես նաև արագ կատարման (սահմանային) $t'(e_j)$ ժամանակները, a'_j ռեսուրսները և $c'(e_j)$ ծախսերը: Աղյուսակից հետևում է, որ, օրինակ, e_1 աշխատանքը սովորականում կատարվում է 3 հոգով 6 ժամում և արժե 15000 դրամ, իսկ արագ այդ աշխատանքը կկատարվի 9 հոգով 2 ժամում և կարժենա 27000 դրամ: Աղյուսակում տվյալները պարզության համար վերցված են այնպես, որ յուրաքանչյուր e_j աշխատանքի «ծավալը» մնա նույնը՝

$$t(e_j)\cdot a_j = t'(e_j)\cdot a'_j,$$

իսկ c(e)-ն հաշվարկված է հետևյալ բանաձևի միջոցով՝

$$c(e) = 2000\cdot a + 500\cdot a\cdot t(e) = 500\cdot a\cdot(t(e)+4):$$

Վերջին բանաձևը կազմված է իրականությունից վերցված հետևյալ պայմանից՝ յուրաքանչյուր աշխատողի հրավերքը արժե 2000 դրամ, և նրա մեկ ժամը անկախ աշխատանքի բնույթից գնահատվում է 500 դրամ:

Աղյուսակում աշխատանքների սովորական կատարման ժամանակներն ու ռեսուրսները համընկնում են արդեն դիտարկված ժամանակների ու ռեսուրսների հետ, իսկ e_7, e_8, e_{14}, e_{15}, e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22} աշխատանքների համար սովորական և արագ կատարման ժամանակները, ռեսուրսներն ու ծախսերը համընկնում են:

Նախորդ բաժնում կատարած հաշվարկներից հետևում է, որ սովորական կատարման տվյալների դեպքում ծրագիրը կարելի է կատարել 75 ժամում, ծախսելով 380500 դրամ:

Այս ծրագիրը կարելի է կատարել ավելի շուտ, եթե փոքրացնենք ստացված միակ կրիտիկական ուղու ոչ թվացյալ e_1, e_2, e_6, e_8, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{22} աշխատանքների կատարման ժամանակները: Այս աշխատանքներից ընտրենք այն աշխատանքը, որի համար որոշված է

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c'(e) - c(e)}{t(e) - t'(e)}$$

թիվը: Աղյուսակից հետևում է, որ այս թիվը որոշված է e_1, e_2, e_6, e_{17} աշխատանքների համար և նվազագույն արժեքը՝ 1000-ը ընդունում է e_2-ի համար (վերցնում ենք նվազագույնը, որպեսզի ծրագրի կատարման ժամանակի կրճատումը կատարենք ավելի էժան): Եթե ընտրված e_2 աշխատանքի կատարման ժամանակը 24 ժամից իջեցնենք մինչև 8 ժամ, ավելացնելով ծախսը 16000 դրամով, և կատարենք նոր հաշվարկները, ապա կտեսնենք, որ ամբողջ ծրագրի կատարման նվազագույն ժամանակը կլինի 69 ժամ, 6 ժամ ավելի քիչ: Այս ուղղությամբ կարելի է շարունակել և ավելի մանրամասն ուսումնասիրել ցանցերի ցուցահանդեսի կազմակերպման խնդրի կատարման ժամկետի կրճատումը ռեսուրսների և, հետևաբար, ծախսերի ավելացման դեպքում:

Այսպիսով, գործնականում ծրագրերի ցանցային պլանավորման համար դիտարկում են նաև ավելի ընդհանրացված խնդիրներ:

Ենթադրենք, որ կամայական e աշխատանքի համար տրվում են d(e) և D(e), d(e) ≤ D(e), թվերը, որոնք սահմանափակում են e աշխատանքի կատարման t(e) ժամանակը՝

$$d(e) \le t(e) \le D(e).$$

Դիցուք՝ e աշխատանքի համար նաև տրվում է այդ աշխատանքի կատարման c(e) արժեքը (գինը), որը կախված է e աշխատանքի կատարման ժամանակից (հիմնականում այդ արժեքը փոքրանում է կատարման ժամանակը մեծացնելիս): Այստեղից հետևում է, որ e աշխատանքի c(e) արժեքը ամենամեծն է, եթե e-ն կատարվում է d(e) ժամանակում և՝ ամենափոքրը, եթե e-ն կատարվում է D(e) ժամանակում:

Աղյուսակ 4.2

Աշխատանք	Սովորական կատարում			Արագ կատարում			$\frac{\Delta c}{\Delta t}$
e_j	$t(e_j)$	a_j	$c(e_j)$	$t'(e_j)$	a'_j	$c'(e_j)$	
e_1	6	3	15000	2	9	27000	3000
e_2	24	4	56000	8	12	72000	1000
e_3	24	1	14000	4	6	24000	500
e_4	3	6	21000	2	9	27000	6000
e_5	2	2	6000	1	4	10000	4000
e_6	6	2	10000	2	6	18000	2000
e_7	1	3	7500	1	3	7500	-
e_8	3	3	10500	3	3	10500	-
e_9	4	3	12000	2	6	18000	3000
e_{10}	2	1	3000	1	2	5000	2000
e_{11}	6	6	30000	3	12	42000	4000
e_{12}	3	2	7000	1	6	15000	4000
e_{13}	2	2	6000	1	4	10000	4000
e_{14}	1	1	2500	1	1	2500	-
e_{15}	1	1	2500	1	1	2500	-
e_{16}	3	3	10500	1	9	22500	6000
e_{17}	30	6	102000	6	30	150000	2000
e_{18}	1	2	5000	1	2	5000	-
e_{19}	7	3	16500	3	7	24500	2000
e_{20}	1	3	7500	1	3	7500	-
e_{21}	1	6	15000	1	6	15000	-
e_{22}	3	6	21000	3	6	21000	-

Շատ դեպքերում գործնականում e աշխատանքի կատարման արժեքը վերցվում է հետևյալ երկու բանաձևերից մեկի միջոցով՝

$$c(e) = \mu(e) - \nu(e)\,t(e) \text{ կամ } c(e) = \pi(e)/t(e),$$

որտեղ $\mu(e)$, $\nu(e)$ և $\pi(e)$-ն e աշխատանքի համար վերցված հաստատուն գործակիցներ են: Մենք կօգտագործենք այս բանաձևերից առաջինը:

Որոշվում է նաև ծրագրի կատարման արժեքը, որը հավասար կլինի ծրագրի բոլոր աշխատանքների արժեքների (գների) գումարին՝

$$\sum_{j=1}^{m} c(e_j):$$

Այս տիպի խնդիրների շարքում կարևոր տեղ է զբաղեցնում հետևյալ խնդիրը.

Նվազագույն արժեք ունեցող ծրագրի կատարման պարամետրական խնդիր

Տրված λ, $T_d \le \lambda \le T_D$, թվի համար անհրաժեշտ է ծրագրի յուրաքանչյուր e աշխատանքի համար գտնել այն $t(e)$, $d(e) \le t(e) \le D(e)$ կատարման ժամանակը, որի դեպքում ծրագրի կատարման նվազագույն T ժամկետը չի գերազանցում λ թվից, իսկ ծրագրի արժեքը կլինի նվազագույնը:

Եթե i, i=0,…,n, պատահույթի իրականացման ժամանակը նշանակենք t(i), ապա այս խնդիրը կարող ենք ձևակերպել նաև հետևյալ ձևով.

Տրված են ծրագրի ցանցը, և

$$d(e_1),\ldots,d(e_m),\ D(e_1),\ldots,D(e_m),\ \lambda$$

թվերը, որտեղ $T_d \le \lambda \le T_D$:

Անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի

$$t(e_1),\ t(e_2),\ldots,t(e_m),\ t(0),\ t(1),\ldots,t(n),$$

թվեր, որ

$$\begin{cases} d(e) \le t(e) \le D(e) & \forall e\text{-ի համար} \\ t(e) \le t(j) - t(i) & \forall e = (i,j)\text{-ի համար} \\ t(n) - t(0) \le \lambda \\ \min \sum\limits_{e} c(e) \end{cases}$$

Քանի որ

$$\sum_{e} c(e) = \sum_{e} (\mu(e) - \nu(e)t(e)) = \sum_{e} \mu(e) - \sum_{e} \nu(e)t(e),$$

ապա խնդիրը համարժեք է հետևյալին՝

$$(*)\quad \begin{cases} t(e) \le D(e) & \forall e\text{-ի համար} \\ -t(e) \le -d(e) & \forall e\text{-ի համար} \\ t(e) + t(i) - t(j) \le 0 & \forall e = (i,j)\text{-ի համար} \\ t(n) - t(0) \le \lambda \\ \max \sum\limits_{e} \nu(e)t(e) \end{cases}$$

Ստացված խնդիրը ներկայացնենք մատրիցային տեսքով՝

$$\begin{cases} y\bar{A} \le \bar{c} \\ \max \bar{b}y \end{cases},$$

որտեղ y-ը և $\bar{b}$-ն հետևյալ m+n+1-չափանի վեկտորներն են

$$y = (t(e_1), t(e_2),\ldots,t(e_m), t(0), t(1),\ldots,t(n))$$

$$\bar{b} = (\nu(e_1),(\nu(e_2),\ldots,\nu(e_m),0,0,\ldots,0),$$

$\bar{c}$-ն հետևյալ 3m+1 չափանի վեկտորն է՝

$$\bar{c} = (D(e_1),D(e_2),\ldots,D(e_m),-d(e_1),-d(e_2),\ldots,-d(e_m),0,0,\ldots,0,\lambda):$$

$\bar{A}$-ն հետևյալ (m+n+1)×(3m+1) չափանի մատրիցն է՝

$$\bar{A}=\begin{array}{|c|c|c|c|l}\hline \begin{matrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{matrix} & \begin{matrix}-1&0&&0\\0&-1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{matrix} & \begin{matrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{matrix} & \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\} m \\ \hline 0 & 0 & A & \begin{matrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{matrix} & \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{matrix}}\right\} n+1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{m}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{m}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{m}} & \multicolumn{1}{c}{} & \end{array}$$

0-ն (n+1)×m-չափանի զրոներից կազմված մատրից է:

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij}= \begin{cases} 1 \text{ եթե } i\text{-ն } e_j\text{-ի սկզբնական պատահույթն է,} \\ -1 \text{ եթե } i\text{-ն } e_j\text{-ի վերջնական պատահույթն է,} \end{cases}$$

i=0,1,…,n, j=1,2,…,m:

Ստացված խնդիրը գծային ծրագրման խնդիր է:

Հայտնի է, որ գծային ծրագրման ստորև բերված խնդիրները մեկը մյուսի երկակին են՝

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ Ax \ge b \\ \min cx \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 0 \\ yA \le c \\ \max by \end{cases}$$

Տեղի ունի հետևյալ լեմը.

Լեմ. $\begin{cases} yA \le c \\ \max by \end{cases}$ խնդրի երկակին

$\begin{cases} x \ge 0 \\ Ax = b \\ \min cx \end{cases}$ խնդիրն է:

Ապացուցում. y վեկտորը ներկայացնենք $y=y'-y''$ տեսքով, որտեղ $y'\ge 0$, $y''\ge 0$:

$$\begin{cases} yA \le c \\ \max by \end{cases} \text{ խնդիրը գրենք } \begin{cases} y'A - y''A \le c \\ \max(by' - by'') \end{cases} \text{ տեսքով:}$$

Եթե դիտարկենք $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ մատրիցը $\bar{y} = (y', y'')$ և $\bar{b} = (b, -b)$ վեկտորները, ապա նույն խնդիրը կարող ենք գրել

$$\begin{cases} \bar{y} \ge 0 \\ \bar{y}A \le c \\ \max by \end{cases} \text{ տեսքով:}$$

Վերջինիս երկակին է

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \bar{A}x \ge \bar{b} \\ \min cx \end{cases} \text{ խնդիրը:}$$

$\bar{A}'x \ge \bar{b}$ համասարազոր է $Ax\ge b$ և $-Ax\ge -b$ կամ $Ax=b$: Հետևաբար՝ սկզբնական խնդրի երկակին է

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ Ax = b \\ \min cx \end{cases} \text{ խնդիրը:}$$

Ուստի և օգտվելով այս լեմից, ստանում ենք, որ

$$\begin{cases} y\bar{A} \le \bar{c} \\ \max by \end{cases} \text{ խնդրի երկակին է } \begin{cases} x \ge 0 \\ \bar{A}x = \bar{b} \\ \min \bar{c}x \end{cases} \text{ խնդիրը,}$$

որտեղ x-ը 3m+1-չափանի հետևյալ վեկտորն է.

$$x = (g(e_1),\dots,g(e_m),h(e_1)\dots,h(e_m),f(e_1),\dots,f(e_m),v):$$

Երկակի խնդիրը գրելով բացված տեսքով, ստանում ենք հետևյալ խնդիրը.

Գտնել $g(e_1),\dots,g(e_m)$, $h(e_1),\dots,h(e_m)$, $f(e_1),\dots,f(e_m)$ և v այնպիսի ոչ բացասական թվեր, որ

$$g(e_1) - h(e_1) + f(e_1) = \nu(e_1)$$
$$g(e_2) - h(e_2) + f(e_2) = \nu(e_2)$$

$$g(e_m) - h(e_m) + f(e_m) = \nu(e_m)$$

$$\sum_{e\in A(i)} f(e) - \sum_{e\in B(i)} f(e) = \begin{cases} v & \text{եթե } i=0 \\ 0 & \text{եթե } i\ne 0, n \\ -v & \text{եթե } i=n \end{cases},$$

$$\min(\sum_{i=1}^{m} D(e_i)g(e_i) - \sum_{i=1}^{m} d(e_i)h(e_i) + \lambda\cdot v),$$

որտեղ $g(e_i)$, $h(e_i)$, $i=1,\ldots,m$, (*) խնդրի առաջին երկու անհավասարումներով տրվող խմբերի սահմանափակումներին համապատասխանող երկակի խնդրի փոփոխականներն են, $f(e)$-ն երրորդ անհավասարումներով տրվող խմբի սահմանափակումներին համապատասխանող երկակի փոփոխականներն են, և ν-ն՝ $t(n)-t(o)\le\lambda$ անհավասարմանը համապատասխանող երկակի փոփոխականն է:

Քանի որ $g(e_j) - h(e_j) + f(e_j) = \nu(e_j)$, $j=1,\ldots,m$, ապա համաձայն գծային ծրագրման հավասարակշռության թեորեմի (տե՛ս [11], 78 էջ) երկակի խնդրի համար գոյություն ունի այնպիսի լուծում, որ $g(e_k)$ և $h(e_k)$ թվերից մեկը հավասար կլինի 0-ի:

Այստեղից հետևում է, որ

$$g(e_j) = \max(0;\ \nu(e_j) - f(e_j))$$
$$h(e_j) = \max(0;\ \nu(e_j) - \nu(e_j)):$$

Հետևաբար երկակի խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

Գտնել $f(e_1), f(e_2),\ldots,f(e_m)$ և v այնպիսի ոչ բացասական թվեր, որ մինիմացվի

$$\sum_{j=1}^{m} D(e_j)\max(0;\nu(e_j)-f(e_j)) - \sum_{j=1}^{m} d(e_j)\max(0;f(e_j)-\nu(e_j)) + \lambda v$$

գումարը:

$f(e_j)$ փոփոխականը ներկայացնենք

$$f(e_j) = f_1(e_j) + f_2(e_j)$$

տեսքով, որտեղ

$$f_1(e_j)\ge 0,\ f_2(e_j)\ge 0 \text{ և } f_1(e_j)\le\nu(e_j),\ f_2(e_j)<\infty:$$

Այդ դեպքում $f_1(e_j)$-ի գործակիցը գումարի մեջ կլինի $D(e_j)$-ն, իսկ $f_2(e_j)$-ի գործակիցը՝ $-d(e_j)$: Եվ մինիմացվող գումարը կարող ենք գրել

$$\sum_{j=1}^{m} D(e_j)\nu(e_j) - \sum_{j=1}^{m} D(e_j)f_1(e_j) - \sum_{j=1}^{m} d(e_j)f_2(e_j)$$

տեսքով:

Եթե դիտարկենք $\nu_k(e_j)$ և $d_k(e_j)$, $k=1,2$, $j=1,\ldots,m$, թվերը, որտեղ

$$\nu_k(e_j) = \begin{cases} \nu(e_j) & \text{եթե } k=1 \\ \infty & \text{եթե } k=2 \end{cases} \quad \text{և} \quad d_k(e_j) = \begin{cases} D(e_j) & \text{եթե } k=1 \\ d(e_j) & \text{եթե } k=2 \end{cases},$$

ապա մինիմացվող գումարի մեջ դեն նետելով հաստատուն անդամները, երկակի խնդիրը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

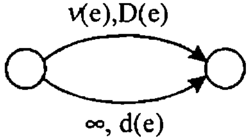
Գտնել այնպիսի $f_k(e_j)$, $k=1,2$, $j=1,\ldots,m$ և v այնպիսի ոչ բացասական թվեր, որ

$$f_k(e_j) \le \nu_k(e_j),\ k=1,2,\ j=1,\ldots,m$$

և

$$\min(\lambda v - \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m} d_k(e_j)f_k(e_j)):$$

Եթե ծրագրի ցանցի յուրաքանչյուր e աշխատանքին համապատասխան սլաքը կրկնապատկենք (տե՛ս գծ. 4.2), որից հետո մեկի համար սահմանենք թողունակությունը, որը հավասար է $\nu(e)$-ի, և արժեքը, որը հավասար է $D(e)$-ի, իսկ մյուսի համար՝ ∞ թողունակությունը և $d(e)$ արժեքը, ապա երկակի խնդիրը այս նոր ցանցում հոսքային խնդիր է:



Գծ. 4.2

Ստացված հոսքային խնդրի համար կարող ենք կիրառել Ֆալկերսոնի ալգորիթմը և ստացված արդյունքների միջոցով ստանալ նվազագույն արժեք ունեցող ծրագրի կատարման պարամետրական խնդրի լուծումը (տե՛ս. [5,11]):

5. Տվյալների հավանականային բաշխումով ցանցերի միջոցով պլանավորման խնդիրները

Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք այնպիսի ծրագրեր, որոնց աշխատանքների համար ենթադրվում էր, որ տրված է դրանց կատարման ճշգրիտ ժամանակները: Սակայն այդ ենթադրությունը գործնականում քիչ է հանդիպում, քանի որ ցանցային պլանավորման եղանակը օգտագործվում է այնպիսի նոր և բարդ մշակումների պլանավորման համար, որոնց աշխատանքների կատարման ժամկետները նախապես հայտնի չեն և կարող են հավասարվել մի շարք արժեքներից մեկին: Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր e աշխատանքի կատարման ժամանակը պատահական մեծություն է, որը բնութագրվում է իր բաշխման օրենքով և հետևաբար, թվային բնութագրիչներով՝ միջին արժեքով կամ մաթեմատիկական սպասելիով (այդ արժեքը նշանակենք $\bar{t}(e)$ -ով) և ցրվածքով (այդ արժեքը նշանակենք $\tau^2(e)$-ով):

Վիճակագրական տվյալների հետազոտումը ցույց է տվել, որ տարբեր տիպի աշխատանքների տևողությունների համար կարելի է կիրառել մաթեմատիկական վիճակագրության բնագավառում հայտնի β-բաշխումը:

Հետազոտվող ծրագրի համար գործնականում յուրաքանչյուր e աշխատանքի կատարման ժամանակի համար տրվում են հետևյալ երեք թվերը, որոնք որոշվում են ծրագրի կատարման պատասխանատուների և փորձագետների հարցումների հիման վրա:

ա) $t_1(e)$՝ լավատեսական գնահատական, որը ցույց է տալիս e աշխատանքի կատարման նվազագույն ժամանակը,.որը կստացվի e աշխատանքի կատարման բարենպաստ պայմանների դեպքում:

բ) $t_2(e)$՝ հոռետեսական գնահատական, որը ցույց է տալիս e աշխատանքի կատարման առավելագույն ժամանակը, որը կստացվի e աշխատանքի կատարման անբարենպաստ պայմանների դեպքում:

գ) $t'(e)$՝ հավանական գնահատականը, որը ցույց է տալիս e աշխատանքի կատարման միջին ժամանակը, որը կստացվի e աշխատանքի կատարման սովորական պայմանների դեպքում:

Յուրաքանչյուր e աշխատանքի կատարման ժամանակի β բաշխման ենթադրությունը հնարավորություն է տալիս $\bar{t}(e)$-ի և $\tau^2(e)$-ի համար ստանալ հետևյալ թվային գնահատականները՝

$$\bar{t}(e) = \frac{t_1(e) + 4t'(e) + t_2(e)}{6},$$

$$\tau^2(e) = \left[\frac{t_2(e) - t_1(e)}{6}\right]^2:$$

Նշենք, որ սովորաբար մասնագետների համար բավականին դժվար է տալ աշխատանքի հավանական գնահատականը, և այդ դեպքում $\bar{t}(e)$-ն ստանալու համար օգտվում են ավելի պարզեցված և ոչ այնքան ճշգրիտ հետևյալ գնահատականից, որը հիմնվում է միայն լավատեսական և հոռետեսական գնահատականների վրա՝

$$\bar{t}(e) = \frac{2t_1(e) + 3t_2(e)}{5},$$

Այսպիսով, յուրաքանչյուր e աշխատանքի համար հաշվում են այդ աշխատանքի կատարման ժամանակի մաթեմատիկական սպասելին՝ $\bar{t}(e)$-ն, և ցրվածքը՝ $\tau^2(e)$-ն:

Որոշ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում գտնել սկզբնական պատահույթից դուրս եկող L ուղու աշխատանքների կատարման ժամանակի միջին արժեքը կամ մաթեմատիկական սպասելին և ցրվածքը: Աշխատանքների բավականին մեծ քանակությունների դեպքում կարող ենք օգտվել հավանականության տեսության կենտրոնական սահմանային թեորեմից, որից հետևում է, որ L ուղու աշխատանքների կատարման ժամանակի միջին $\bar{t}(L)$ արժեքը և $\tau^2(L)$ ցրվածքը հավասար կլինեն այդ ուղու աշխատանքների միջին արժեքների և ցրվածքների գումարին՝

$$\bar{t}(L) = \sum_{e \in L} \bar{t}(e) \quad \text{և} \quad \tau^2(L) = \sum_{e \in L} \tau^2(e):$$

Նշենք, որ եթե աշխատանքների կատարման ժամանակի համար վերցնենք միջին արժեքները և կատարենք նախորդ բաժիններում նկարագրված ժամանակի հետ կապված հաշվարկները, ապա ստացված կրիտիկական ուղու երկարությունը նույնպես հավասար կլինի ուղու աշխատանքների կատարման ժամանակի միջին արժեքին:

Ցանցային պլանավորման տվյալների հավանականային բաշխման ուղղության համար հիմնականում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը: Յուրաքանչյուր պատահույթի համար պատասխանատու անձի կողմից սահմանվում է այդ պատահույթի իրականացման ցանկալի վերջնական ժամկետը և, օգտվելով աշխատանքի համար որոշվող $\bar{t}(e)$ և $\tau^2(e)$ գնահատականներից, ուղու $\bar{t}(L)$ և $\tau^2(L)$ արժեքներից, կատարվում է հաշվարկ, որի արդյունքում ստացվում է սահմանված ժամկետում պատահույթի իրականացման հավանականային գնահատականը (տե'ս [4,5]):

6. Ստուգողական հարցեր

Որոշեք, թե հետևյալ պնդումներից որն է ճիշտ և որը՝ սխալ:

1. Կամայական թվացյալ աշխատանքի տևողությունը հավասար է 0-ի:
2. Կամայական թվացյալ աշխատանքի ռեսուրսը հավասար է 0-ի:
3. Կամայական ոչ թվացյալ աշխատանքի կատարման ժամանակը 0-ից մեծ է:
4. Կամայական ոչ թվացյալ աշխատանքի ռեսուրսը 0-ից մեծ է:
5. Գոյություն ունի աշխատանքների ծրագրի ցանց, որը պարունակում է կողմնորոշված ցիկլ:
6. Գոյություն ունի ցանց, որի համար 2-րդ բաժնում նկարագրված աշխատանքների խոշորացումից հետո ստանում ենք մեկ աշխատանք:
7. Գոյություն ունի ցանց, որի համար 2-րդ բաժնում նկարագրված աշխատանքների խոշորացումից հետո ստանում ենք երկու աշխատանք:
8. Գոյություն ունի ցանց, որը չի պարունակում թվացյալ աշխատանք:
9. Եթե $e_1 \in B(e_2)$, ապա e_2 աշխատանքը պետք է սկսվի անմիջապես e_1-ի ավարտից հետո:
10. Եթե $e_1 \in B(e_2)$, ապա $e_2 \in A(e_1)$:
11. Եթե $e_1 \in B(e_2)$ և $e_2 \in B(e_3)$, ապա $e_1 \in B(e_3)$:
12. Եթե $e_1 \in A(e_2)$, ապա e_2 աշխատանքը պետք է ավարտված լինի e_1 աշխատանքի սկզբից անմիջապես առաջ:
13. Եթե e_1 աշխատանքի ավարտից անմիջապես հետո սկսվում է e_2 աշխատանքը, ապա $e_2 \in A(e_1)$:
14. Եթե ծրագրի բոլոր աշխատանքները կատարում է մեկ աշխատող, ապա ծրագրի ավարտման ամենաուշ ժամկետը հավասար է բոլոր աշխատանքների կատարման ժամանակների գումարին:
15. Գոյություն ունի այնպիսի ծրագիր, որի բոլոր աշխատանքները կրիտիկական են:
16. Գոյություն ունի այնպիսի ծրագիր, որի մեկ աշխատանքն է կրիտիկական:

17. 2-րդ բաժնում նկարագրված պատահույթների վերահամարակալումից հետո, եթե i<j, ապա i պատահույթը պետք է կատարվի ավելի շուտ քան j պատահույթը:
18. Ցանցի կրիտիկական ուղու բոլոր աշխատանքների կատարման ժամանակների գումարը հավասար է T-ի:
19. Ցանցի բոլոր կրիտիկական աշխատանքների կատարման ժամանակների գումարը հավասար է T-ի:
20. Ցանցը կարող է ունենալ մեկից ավելի կրիտիկական ուղիներ:
21. Կրիտիկական ուղիների երկարությունները կարող են լինել տարբեր:
22. Կրիտիկական ուղին կարող է պարունակել թվացյալ աշխատանք:
23. Եթե ուղին անցնում է կրիտիկական աշխատանքով, ապա այն կրիտիկական է:
24. Կրիտիկական տարբեր ուղիներ կարող են ունենալ ընդհանուր աշխատանք:
25. Կամայական ցանցի կամայական կրիտիկական աշխատանքի կատարման ժամանակը փոքրացնելով փոքրանում է ծրագրի կատարման նվազագույն ժամկետը:
26. Եթե սկզբնական պատահույթից վերջնական պատահույթը միացնող կամայական ուղի անցնում է e աշխատանքով, ապա e աշխատանքը կրիտիկական է:
27. Կրիտիկական աշխատանքի ժամանակի լրիվ պահուստը հավասար է 0-ի:
28. Եթե աշխատանքի ժամանակի լրիվ պահուստը հավասար է 0-ի, ապա այդ աշխատանքը կրիտիկական է:
29. Եթե պատահույթի ժամանակի պահուստը հավասար է 0-ի, ապա այդ պատահույթը պատկանում է կրիտիկկան ուղուն:
30. Եթե պատահույթը պատկանում է կրիտիկկան ուղուն, ապա նրա ժամանակի պահուստը հավասար է 0-ի:
31. Եթե ուղու ժամանակի պահուստը հավասար է 0-ի, ապա այն կրիտիկական է:
32. Եթե ուղին կրիտիկական է, ապա նրա ժամանակի պահուստը հավասար է 0-ի:
33. Կամայական ցանցում գոյություն ունի աշխատանք, որի համար ժամանակի լրիվ, մասնավոր, ազատ և անկախ պահուստները իրար հավասար են:
34. Կամայական աշխատանքի ժամանակի ազատ պահուստը չի գերազանցում լրիվ պահուստից:
35. Աշխատանքի ժամանակի անկախ պահուստը կարող է լինել բացասական:

Նշված պնդումներից սխալ պնդումների համարներն են՝ 4,5,7,9,11,12, 13,19,21,23,25:

Գրականություն

1. Зуховицкий С. И. Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. –М.: Наука, 1965.
2. Миллер Р. В. ПЕРТ – система управления. /Пер. с англ./ -М.:Экономика, 1965.
3. Форд Л.П.,Фалкерсон Д.П. Потоки в сетях. /Пер с англ./-М.:Мир, 1966
4. Голенко Д. И. Статистические методы сетевого планирования и управления. -М.: Наука, 1968.
5. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования и их применение. -М.: Прогресс, 1968.
6. Исследование операций. т.2. Модели и применения./Пер. с англ./ Под ред. Моддера Дж., Эммаграби. -М.: Мир, 1981.
7. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. /Пер с англ./ -М.: Мир, 1981
8. Филлипс Д.. Гарсиа-Диас А.. Методы анализа сетей. /Пер с англ./ -М.:Мир, 1984.
9. Таха Х. Введение в исследование операций. т.2. /Пер с англ./ -М.: Наука, 1985.
10. Исследование операций в экономике. /Под ред. Н.Ш.Кремера/ -М.: ЮНИТИ, 1997.
11. Սահակյան Մ.Ա. և ուրիշներ: Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ. /Գործույթների հետազոտում.Կառավարման գիտություն/ Մաս 1, ԷԿԱԳՄԱՀԲ, Երևան, 1997:

11 Winston W.L.,Albright S.C.Practical Management Science.Duxbury Press,1997.

IX. ՊԱՇԱՐՆԵՐԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Պաղատեմ, սակայն տնտեսված մնամ...

Գրիգոր Նարեկացի
Մատյան ողբերգության, բան Բ,Բ,
Ե.1979։

Մուտք

Պաշարների կառավարման խնդիրները առաջանում են, երբ անհրաժեշտ է լինում ստեղծել նյութական ռեսուրսների կամ սպառման ապրանքների պաշարներ, նպատակ ունենալով տվյալ ժամանակահատվածում բավարարել արտադրության և բնակչության պահանջարկը։

Գործույթների հետազոտման տեսության մեջ դրանց առանձնահատուկ տեղ է հատկացվում, որովհետև պաշարների կառավարման լավագույն վարվելակերպի ժամանակին կատարված ընտրությունը հնարավորություն է տալիս ազատել զգալի քանակությամբ շրջանառու միջոցներ, ինչն ի վերջո նպաստում է ռեսուրսների արդյունավետ օգտագործմանը։

Պաշարների կուտակումը հանգեցնում է որոշակի ծախսերի, որովհետև անհրաժեշտ է լինում դրանց պահպանությանը հատկացնել տարածքներ, ստեղծել որոշակի պայմաններ, պահել համապատասխան աշխատակազմ և այլն։ Այդ տեսանկյունից բնական է ենթադրել, որ ամեն մի ձեռնարկության նպատակն է ունենալ ըստ հնարավորին նվազագույն մակարդակով պաշարներ։ Այնուամենայնիվ, պետք է հաշվի առնել նաև այն հանգամանքը, որ պահանջարկը մեծ մասամբ լինում է անորոշ, և այդ պատճառով որքան քիչ է լինում պաշարների մակարդակը, այնքան հաճախ է առաջանում պատվերներ կատարելու կարիքը, և, որպես հետևանք, մեծանում է արտադրանքի պակասի առաջացման հավանականությունը։ Այս կամ այն արտադրանքի պակասի առկայությունը որոշակի կորուստների աղբյուր է դառնում ցանկացած ձեռնարկության համար, ինչպես արտադրության ոլորտում, այնպես էլ հաճախորդներ կորցնելու առումով։

Այսպիսով, պաշարի չափը և պատվիրման պահը որոշվում են համապատասխան ընդհանուր ծախսերի ֆունկցիայի նվազագույն արժեքով, ներառյալ այն ծախսերը, որոնք պայմանավորված են ավելցուկային պաշարով և պակասի հետ կապված կորուստներով։

Պաշարների կառավարման խնդիրներում օգտագործվում են բազմազան մաթեմատիկական գործիքներ. ինչպես դասական՝ դիֆերենցիալ հաշվի և Լագրանժի բազմապատիկների եղանակը, այնպես էլ ժամանակակից օպտիմացման եղանակներ՝ գծային և ոչ գծային, դինամիկ ծրագրման, հերթերի տեսության, որոշումների ընդունման, նմանակման և այլն։

1. Հիմնական հասկացություններ և պաշարների կառավարման մոդելների տեսակներ

1.1 Պաշարների կառավարման խնդիրներ

Պաշարների կառավարման մոդելների ընդգրկումը բավականին լայն է՝ սկսած դետերմինայինի՝ այս կամ այն ճշտությամբ կանխատեսելի համակարգերի մոդելներից մինչև բարդ մոդելներ, որոնցում հաշվի է առնվում պատվերի մատակարարման ժամկետների կամ պահանջարկի անորոշությունը:

Պաշարների կառավարման ամեն մի մոդելի լուծումը ի վերջո պետք է պատասխանի հետևյալ երկու հարցերին `

ա) ինչ՞ քանակությամբ արտադրանք (ապրանք) պաշարել և

բ) երբ՞ պատվիրել:

Առաջին հարցի պատասխանը տրվում է պատվերի ծավալի միջոցով, որը կարող է ժամանակի ընթացքում փոփոխվել՝ կախված իրավիճակից:

Երկրորդ հարցի պատասխանը կախված է պաշարների կառավարման համակարգի ձևից: Եթե համակարգը ենթադրում է պաշարի վիճակի պարբերական վերահսկում հավասար ժամանակահատվածներում (օրինակ՝ շաբաթը մեկ, ամիսը մեկ և այլն), ապա նոր պատվերի պահը սովորաբար համընկնում է յուրաքանչյուր ժամանակահատվածի սկզբի հետ: Իսկ եթե համակարգում նախատեսվում է պաշարի վիճակի անընդհատ վերահսկում, ապա պատվերի տրման պահը որոշվում է պաշարի առկա մակարդակով:

Պատվերի ծավալը և պատվիրման պահը որոշվում են՝ ելնելով պաշարների կառավարման համակարգի նվազագույն գումարային ծախսումների պայմանից:

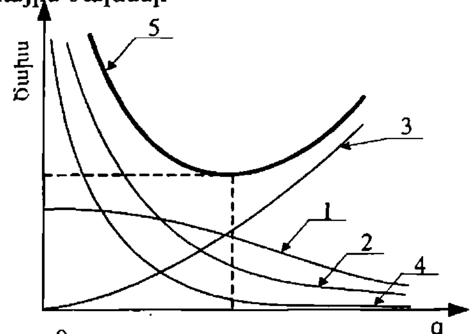
$$\begin{bmatrix}\text{Պաշարների}\\ \text{կառավարման}\\ \text{համակարգի}\\ \text{ծախսումներ}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Ձեռքբերման}\\ \text{ծախսեր}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Պատվերի}\\ \text{ձևակերպման}\\ \text{ծախսեր}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Պահպանման}\\ \text{ծախսեր}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Կորուստներ}\\ \text{պակասուրդ}\end{bmatrix}$$

Ձեռքբերման ծախսերը կարևոր գործոն են դառնում, երբ միավոր արտադրանքի գինը կախված է լինում պատվերի ծավալից: Դա պայմանավորված է նրանով, որ, երբ պատվերի ծավալը մեծանում է, ապա միավոր արտադրանքի գնի որոշակի զեղչ է արվում:

Պատվերների ձևակերպման ծախսերը հաստատուն ծախսեր են և կախված են պատվերների տրման հաճախությունից, իսկ պահպանության փոփոխուն ծախսերը աճում են պաշարի մակարդակը բարձրանալուց:

Վերջապես, պակասուրդից առաջացող կորուստները՝ անհրաժեշտ արտադրանքի պաշարի բացակայությամբ պայմանավորված ծախսերն են: 1-ին գծանկարում պատկերված են գումարային ծախսերի կորը և վերահիշյալ չորս բաղադրիչների կախումները պաշարի մակարդակից, որտեղ՝

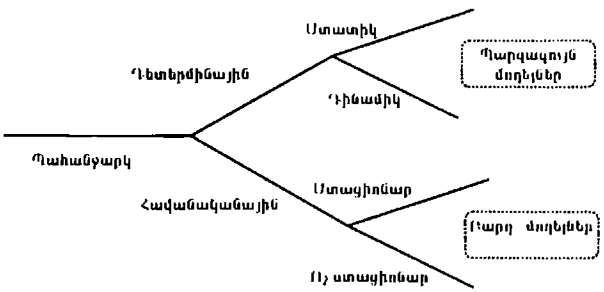
1. Գնման գին (ծախսեր)
2. Պատվերների ձևակերպման ծախսեր
3. Պահպանության ծախսեր
4. Տուգանքների հետ կապված կորուստներ:
5. Գումարային ծախսեր



Գծ.1

Հարկ է նշել, որ պաշարների կառավարման մոդելի մեջ պարտադիր չէ բոլոր չորս ծախսերի ներառումը, մանավանդ, երբ դրանք աննշան գումար են կազմում: Բացի դրանից, որոշ դեպքերում բոլոր ծախսերի ներառումը չափազանց բարդացնում է գումարային ծախսերի ֆունկցիայի տեսքը:

Պաշարների կառավարման՝ վերևում բերված խնդրի նկարագրությունը բավականին պարզ է, և հարց է առաջանում, թե ինչո՞վ է բացատրվում այդ դասի խնդիրների և դրանց լուծման եղանակների բազմազանությունը: Այդ հարցի պատասխանը պայմանավորված է միայն պահանջարկի բնույթից, որը կարող է լինել դետերմինային կամ հավանականային:



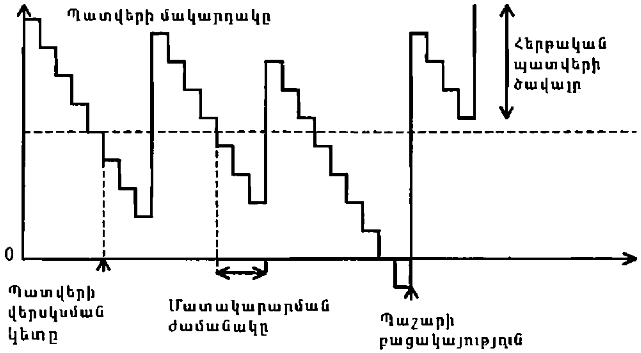
Գծ.2

2-րդ գծանկարում բերված է պահանջարկի այն կառուցվածքը, որ ընդունված է պաշարների կառավարման տեսության մեջ: Այսպես, դետերմինային պահանջարկը կարող է ստատիկ լինել այն իմաստով, որ սպառման հաճախությունը ժամանակի ընթացքում մնում է անփոփոխ, կամ էլ դինամիկ, երբ պահանջարկը ստույգ հայտնի է, բայց փոփոխվում է ժամանակից կախված:

Պատահական պահանջարկը կարող է լինել ստացիոնար (կայուն), երբ պահանջարկի հավանականության խտության ֆունկցիան ժամանակի ընթացքում անփոփոխ է, և ոչ ստացիոնար, երբ այն փոփոխվում է:

Ստատիկ պահանջարկը գործնականում հազվադեպ է հանդիպում, և այն կարելի է դիտարկել որպես պարզագույն դեպք: Օրինակ, թեպետև հացի պահանջարկը օրեցօր կարող է փոփոխվել, բայց այդ փոփոխությունները կարող են լինել այնքան աննշան, որ դրանց ստատիկ լինելու ենթադրությունը էապես չի աղավաղում իրականությունը:

Պաշարների կառավարման ամեն մի համակարգում պաշարների մակարդակը փոփոխվում է պարբերաբար, ընդ որում՝ մակարդակի նվազումը որոշվում է պահանջարկի բնույթից: Պաշարը լրացնելու նպատակով ժամանակի որոշակի պահին տրվում է նոր պատվեր: Որոշ ժամանակ անց, որն անվանվում է մատակարարման ժամանակ, պատվերը կբավարարվի, իսկ մակարդակը կբարձրանա: Դրանից հետո սկսվում է պաշարների կազմավորման նոր պարբերաշրջան: (Տե՛ս գծ. 3):



Գծ.3

1.2 Օգտագործելի նշանակումներ

q - պատվերի ծավալը

q_i - պատվերի այն ծավալը, որ տրվում է i-րդ միջակայքի սկզբում

q_0 - պատվերի լավագույն ծավալը

r - պահանջարկը որոշակի ժամանակահատվածում

r_i - i-րդ միջակայքի պահանջարկը

S_i - պաշարի մակարդակը i-րդ միջակայքի սկզբում

s_i - պաշարի մակարդակը i-րդ միջակայքի վերջում՝ $s_i=S_i-r_i$ և $S_i=s_{i-1}+q_i$

S_0 - պաշարի լավագույն մակարդակը

t - ժամանակի միջակայք

t_s - երկու հաջորդական պատվերների միջև ընկած ժամանակի միջակայքը

t_{s0} - պատվերների միջև ընկած լավագույն ժամանակի միջակայքը

T - այն ժամանակահատվածը, որի համար որոշվում է լավագույն վարվելակերպը

R - լրիվ պահանջարկը T ժամանակահատվածում

C_1 - միավոր արտադրանքի պահպանման ծախսերը միավոր ժամանակաշրջանում

C_2 - տուգանքի (տույժի) չափը (մեծությունը) միավոր արտադրանքի պակասուրդի դեպքում

C_s - պատվերի կատարման հետ կապված ծախսերը (գնման և արտադրության դեպքում)

Q - սպասվելիք գումարային ծախսերը

Q_0 - սպասվելիք գումարային ծախսերի նվազագույն չափը

P(r) - հավանականությունը, որ պահանջարկը կկազմի r միավոր արտադրանք

f(r) - r պատահական մեծության հավանականության խտությունը

F(r) - r պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան

P(r≤S) - հավանականություն, որ պահանջարկը չի գերազանցի S մակարդակը

$F(S) = \int_0^S f(r)dr$ հավանականություն, որ պահանջարկը չի գերազանցի S մակարդակը:

2. Դետերմինային մոդելներ

Չափազանց դժվար է ստեղծել պաշարների կառավարման մի այնպիսի ընդհանուր մոդել, որտեղ հաշվի առնված լինեն գործնականում դիտարկվող պայմանների բոլոր տարատեսակները: Նույնիսկ եթե դա իրականացվեր, ապա դժվար թե այդ մոդելը վերլուծորեն լուծելի լիներ:

Ստորև ներկայացվող մոդելներից հինգը մեկապրտադրանքային են, իսկ մեկում հաշվի է առնվում մի քանի «մրցող» արտադրատեսակների ազդեցությունը: Մոդելների հիմնական տարբերությունը կախված է պահանջարկի բնույթից (ստատիկ կամ դինամիկ լինելուց):

Մոդելների հետազոտման համար օգտագործվում են մաթեմատիկական վերլուծությունից հայտնի դասական, ինչպես նաև գծային, ոչ գծային և դինամիկ ծրագրման եղանակներ:

2.1 Մեկարտադրանքային ստատիկ մոդել պակասուրդի բացակայության դեպքում

Դիցուք՝ մի ձեռնարկատեր պարտավորվել է իր հաճախորդին T ժամանակահատվածում մատակարարել հավասարաչափ բաշխված R քանակությամբ որոշակի արտադրանք որի պակասուրդը բացառվում է:

Այսինքն՝ չբավարարված պահանջարկի դեպքում տուգանքը անվերջորեն մեծ է ($C_2 \to \infty$):

Արտադրության փոփոխուն ծախսերը կախված են՝

C_1 - միավոր արտադրանքի պահպանության և

C_s - արտադրանքի միավոր խմբաքանակի թողարկման ծախսերից:

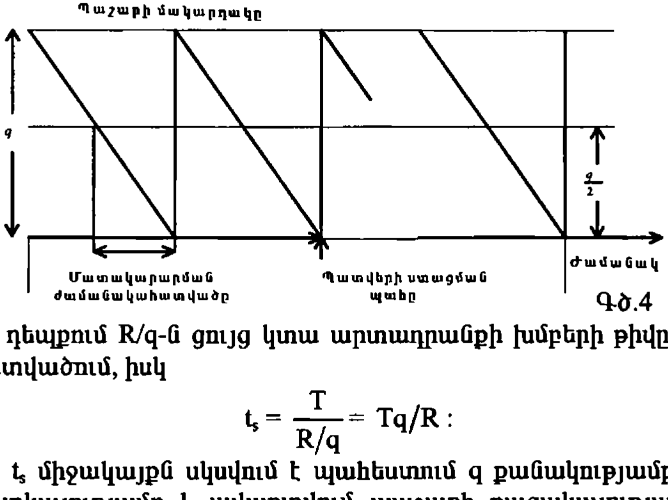
Ձեռնարկատերը պետք է որոշի խմբաքանակների թողարկման հաճախությունը և յուրաքանչյուր խմբաքանակի ծավալը: Նկարագրված իրավիճակը պատկերված է 4-րդ գծանկարում:

Դիցուք՝

q-ն արտադրանքի խմբաքանակի ծավալն է,

t_s-ը՝ երկու հաջորդական խմբաքանակների թողարկման միջև ընկած ժամանակահատվածը

R-ը՝ լրիվ պահանջարկն է նախատեսված T ժամանակահատվածում:



Գծ.4

Այդ դեպքում R/q-ն ցույց կտա արտադրանքի խմբերի թիվը T ժամանակահատվածում, իսկ

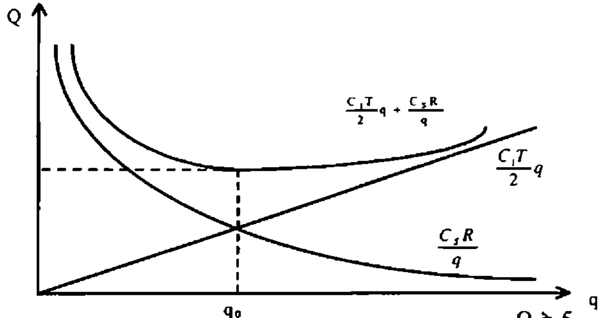
$$t_s = \frac{T}{R/q} = Tq/R :$$

Եթե t_s միջակայքն սկսվում է պահեստում q քանակությամբ արտադրանքի առկայությամբ և ավարտվում պաշարի բացակայությամբ, ապա q/2-ը կլինի միջին պաշարը t_s ժամանակահատվածում, իսկ $(q/2)C_1t_s$-ը կկազմի պահպանության ծախսերը այդ միջակայքում: Այսպիսով, պաշարների ստեղծման ընդհանուր ծախսերը t_s ժամանակահատվածում հավասար կլինեն՝ $C_1t_s \cdot q/2+C_s$-ի, որտեղ C_s-ը արտադրական ծախսերն են:

T ժամանակահատվածում լրիվ ծախսերը որոշելու համար ընդհանուր ծախսերը պետք է բազմապատկել արտադրանքի խմբերի թվով՝

$$Q = (C_1t_s\, q/2+C_s)\cdot R/q = C_1T\cdot q/2 + C_s\cdot R/q:$$

Պարզ է, որ արտադրանքի խմբաքանակի ծավալը մեծացնելիս ընդհանուր ծախսերի առաջին գումարելին աճում է, իսկ երկրորդը՝ նվազում: Պաշարների կառավարման բերված խնդրի լուծումն այն է, որ պետք է որոշել խմբաքանակի լավագույն չափը՝ q_0-ն, երբ ընդհանուր ծախսերը նվազագույնն են: Այդ չափի որոշումը պատկերված է 5-րդ գծանկարում:



Գծ.5

Որոշենք Q ֆունկցիայի նվազագույն արժեքը՝ զրոյի հավասարեցնելով նրա ածանցյալը ըստ q-ի՝

$$\frac{dQ}{dq} = \frac{1}{2}C_1T - \frac{C_sR}{q^2} = 0,$$

որտեղից կստանանք Ուիլսոնի հայտնի բանաձևը՝

$$q_0 = \sqrt{2RC_s/TC_1}\ : \qquad (2.1.1)$$

Այժմ հնարավոր է որոշել t_{s0}-ն և Q_0-ն՝

$$t_{s0} = \frac{Tq_0}{R} = \frac{T}{R}\sqrt{2RC_s/TC_1}\ , \qquad (2.1.2)$$

$$Q_0 = \frac{C_1T}{2}q_0 + \frac{C_sR}{q_0} = \frac{C_1T}{2}\sqrt{2RC_s/TC_1} + C_sR\Big/\sqrt{2RC_s/TC_1} =$$

$$= \sqrt{2RTC_1C_s} \qquad (2.1.3)$$

Օրինակ 1: Ձեռնարկատերը պետք է մեկ տարում պատվիրատուին մատակարարի 24000 միավոր արտադրանք: Ընդ որում՝ մատակարարումը, ըստ պայմանագրի, պետք է կատարվի յուրաքանչյուր օր: Միավոր արտադրանքի պահպանման ծախսերը մեկ ամսում կազմում են 0.1, իսկ միավոր խմբաքանակի արտադրական ծախսերը՝ 350 պայմանական դրամ միավոր (պդմ):

Անհրաժեշտ է որոշել խմբաքանակի q_0 լավագույն չափը, լավագույն t_{s0} ժամանակահատվածը և հաշվարկել սպասվելիք տարեկան ընդհանուր ծախսերի նվազագույն Q_0 արժեքը:

Լուծում: Տվյալ դեպքում՝ T=12 ամիս, R=24000 միավոր, C_1= 0,1պդմ և C_2=350 պդմ: Հետևաբար՝

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 24000\cdot 350}{12\cdot 0.1}} = 3740 \text{ միավոր},$$

$$t_{s0} = \sqrt{\frac{2\cdot 12\cdot 350}{24000\cdot 0.1}} = 1{,}87 \text{ ամիս} \approx 8{,}1 \text{շաբաթ},$$

$$Q_0 = \sqrt{2\cdot 24000\cdot 12\cdot 0{,}1\cdot 350} = 4490 \text{ պդմ}:$$

Օրինակ 2: Ձեռնարկության որոշակի արտադրատեսակի պահանջարկը, որը արտադրության ընթացքում ծախսվում է անընդհատ և հավասարաչափ, կազմում է տարեկան 120000 միավոր: Պատվերը տրվում է տարին մեկ անգամ, իսկ մատակարարումը կատարվում է միևնույն ծավալի խմբաքանակներով, որոնց պահպանման ծախսերը կազմում են օրեկան 0,35 պդմ, իսկ ամբողջ խմբաքանակի մատակարարումը՝ 10000 պդմ:

Պահանջարկի բացակայության պատճառով արտադրանքի թողարկման հապաղումը անթույլատրելի է: Պահանջվում է՝

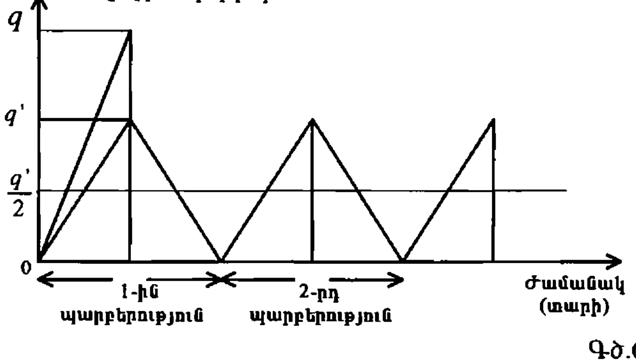
1. Որոշել արտադրանքի խմբաքանակի առավել արդյունավետ ծավալը և մատակարարումների միջև ընկնող լավագույն ժամանակահատվածը:
2. Պաշարի հետ կապված ծախսերը նվազագույն ծախսերի համեմատ քանի՞ տոկոսով կավելանան, եթե արտադրանքի խմբաքանակի ծավալը կազմի 5000 միավոր:
3. Պատասխաններ՝ 4335 միավոր, 13 օր: 1,2 %- ով:

2.2 Արտադրանքի խմբաքանակի արտադրության մոդել

Ենթադրենք, որ P և D տարբեր արտադրողականությամբ երկու հաստոցների վրա հաջորդաբար մշակվում է q ծավալի մանրամասերի խմբաքանակ: Ընդ որում երկրորդ հաստոցի արտադրողականությունը ավելի ցածր է, քան առաջին հաստոցինը P > D: Բնականաբար, առաջին հաստոցի աշխատանքի ընթացքում մանրամասերի մի մասը կուտակվում է, ապա պաշարվում մինչև որ հնարավոր լինի դրանց մշակումը երկրորդ հաստոցի վրա:

Տվյալ դեպքում առաջին հաստոցի աշխատաժամանակի ընթացքում պաշարները հավասարաչափ աճում են զրոյից մինչև q′ և ապա սկսում են նվազել մինչև զրո, երբ խմբաքանակի բոլոր մանրամասերի մշակումը ավարտվում է:

Նկարագրված արտադրության պայմաններում արտադրանքի խմբաքանակի պաշարների փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում պատկերված է 6-րդ գծանկարում:



Գծ.6

Հարց է առաջանում թե ո՞րն է խմբաքանակի լավագույն ծավալը և ի՞նչ հաճախությամբ պետք է թողարկել:

Մեկ տարում սպասվելիք գումարային ծախսերը կներառեն արտադրության և պահպանության ծախսերը:

Որպեսզի որոշենք պաշարի միջին մակարդակը, մանրամասն դիտարկենք նրա փոփոխության ընթացքը մեկ պարբերաշրջանում: Եթե մանրամասերի թողարկումն իրագործվում է տարեկան P արտադրողականությամբ, իսկ երկրորդ հաստոցի արտադրողականությունը D է, ապա պաշարների համալրումը հավասար է (P–D)-ի:

Եթե արտադրության պարբերաշրջանը տևում է t_1 տարի, ապա արտադրանքի ընդհանուր ծավալը այդ ժամանակահատվածում կկազմի

$$q = P \cdot t_1 \text{ միավոր,}$$

որտեղից

$$t_1 = q/P \text{ տարի:}$$

Պաշարի առավելագույն մակարդակը հավասար է

$$(P–D)t_1 = (P–D)\, q/P$$

միավորի, իսկ միջին մակարդակը՝

$$(P–D)q/2P:$$

Այժմ հնարավոր է կազմել սպասվելիք գումարային ծախսերի նպատակային ֆունկցիան՝

$$Q = C_s D/q + C_1 (P–D)\, q/2P,$$

որը նվազագույն արժեք է ընդունում, երբ՝

$$Q' = -C_s D/q^2 + C_1(P–D)/2P = 0:$$

Այս առնչությունից էլ կորոշվի խմբաքանակի այն լավագույն ծավալը, որի դեպքում գումարային ծախսերը նվազագույնն են՝

$$q_0 = \sqrt{\frac{2C_s D}{C_1} \cdot \frac{P}{P-D}} : \qquad (2.2.1)$$

Օրինակ 3: Դիցուք՝ առաջին հաստոցով մեկ ամսում մշակվում է 2000 միավոր մանրամաս, որը շարունակում է երկրորդ հաստոցով մշակել ամսական 500 միավոր քանակությամբ, իսկ մնացածը պաշարվում է: Ձեռնարկության մասնագետների գնահատմամբ՝ պահպանության ծախսերը կազմում են տարեկան միջին պաշարների արժեքի 20%-ը, իսկ միավոր արտադրանքի արտադրական ծախսերը կազմում են 2.5 պդմ:

Որքա՞ն մանրամասից պետք է բաղկացած լինի խմբաքանակը և ի՞նչ հաճախությամբ պետք է կազմակերպել մանրամասերի մշակման պարբերաշրջանը: Ինչպիսի՞ն կլինեն հարցերի պատասխանը, եթե խմբաքանակի արտադրական ծախքերը հնարավոր լինեն իջեցնել մինչև

ա) 500 պդմ-ի,

բ) 250 պդմ-ի:

Խնդրի ելակետային տվյալներն են՝

C_s = 1000 պդմ՝ մեկ խմբաքանակ թողարկելիս,

D = ամսական 500, կամ տարեկան 6000 մանրամաս,

P = ամսական 2000, կամ տարեկան 24000,

C_1 = 0,2·2,5 = 0,5 պդմ՝ միավոր մանրամաս թողարկելիս:

Լուծում: 1. Մանրամասերի մշակման լավագույն մակարդակը ըստ (2.2.1) բանաձևի կկազմի՝

$$q_0=\sqrt{2\cdot1000\cdot6000/0.5\cdot24000/(24000-600)}=5656.8\approx5657 \text{ միավոր:}$$

Մեկ տարում անհրաժեշտ կլինի թողարկել՝

$$D/q_0 = 6000/5657 = 1{,}06 \text{ խմբաքանակ,}$$

հետևաբար, խմբաքանակների թողարկման հաճախությունը կկազմի՝

$$q_0/D = 0{,}94 \text{ տարի, կամ } 11{,}24 \text{ ամիս:}$$

Սպասվելիք նվազագույն գումարային ծախսը մեկ տարում կլինի՝

$$Q_0= 1000\cdot1{,}6 + 0{,}5\cdot18000\cdot5657/2\cdot24000 = 2121{,}32 \text{ պդմ:}$$

Գործնականում q_0 ստացված մեծությունը նպատակահարմար է կլորացնել մինչ մոտակա ամբողջ թիվը:

Եթե մեկ տարում թողարկվի մանրամասերի միայն մեկ խմբաքանակ՝ 6000 միավորի չափով, ապա վերը հաշվարկված ծախսերը կկազմեն՝

$$Q_0= 1000 + 0.5\cdot18000\cdot6000/2\cdot24000 = 2125 \text{ պդմ:}$$

Բնականաբար, ձեռնարկության ղեկավարությունը կնախընտրի արտադրության կազմակերպման վերջին տարբերակը:

2. ա) Եթե խմբաքանակի արտադրական ծախսերը նվազեն մինչև 500 պդմ,ապա

$$q_0=\sqrt{2\cdot500\cdot6000/0.5\cdot24000/(24000-600)}= 4000 \text{ միավոր,}$$

D/q_0= 1.5 խմբաքանակ, q_0/D = 2/3 տարի, կամ 8 ամիս, իսկ

$$Q_0= 500\cdot1.5 + 0.5\cdot18000\cdot4000/2\cdot24000 = 1500 \text{ պդմ:}$$

բ) Համանման հաշվարկների արդյունքները տալիս են՝

$$q_0 = 2828 \text{ միավոր, } D/q_0= 2.12 \text{ խմբաքանակ,}$$

$$q_0/D = 0.47 \text{ տարի, կամ } \approx5.6 \text{ ամիս}$$

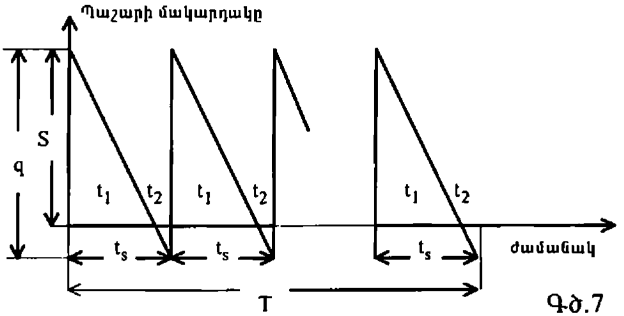
և, վերջապես՝

$$Q_0= 1066.6 \text{ պդմ:}$$

2.3 Մենարտադրանքային ստատիկ մոդել պակասուրդով

Այս ենթաբաժնում դիտարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ պահանջարկը գերազանցում է պաշարները, որի հետևանքով առաջանում է պակասուրդ և վերջինիս համապատասխան չափով՝ տուգանք:

Նման իրավիճակ է պատկերված 7-րդ գծանկարում, որտեղից հետևում է որ յուրաքանչյուր t_s միջակայքի սկզբում ենթադրվում է S ծավալով պաշարի առկայություն:



Գծ.7

Եռանկյունների նմանությունից հետևում է՝

$$t_1 = \frac{S}{q} t_s \text{ և } t_2 = \frac{q-S}{q} t_s :$$

Միջին պաշարի ծավալը t_1 ժամանակահատվածում կազմում է S/2, որի հետևանքով պահպանության ծախսերը կհավասարվեն $C_1 t_1 S/2$, իսկ միջին պակասուրդը և դրան համապատասխանող տուգանքը t_2 ժամանակահատվածում կկազմի (q–S)/2 և $C_2 t_2 (q\text{-}S)/2$:

Այսպիսով, սպասվելիք գումարային ծախսերը ամբողջ ժամանակահատվածում կորոշվեն հետևյալ արտահայտությունից՝

$$Q(q,S) = (\frac{S}{2} C_1 t_1 + \frac{q-S}{2} C_2 t_2 + C_s) \frac{R}{q} :$$

Տեղադրելով t_1-ի, t_2-ի և t_s-ի արժեքները, կստանանք՝

$$Q(q,S) = \frac{S^2 C_1 T}{2q} + \frac{(q-S)^2 C_2 T}{2q} + \frac{C_s R}{q} :$$

Վերջին հավասարումից հնարավոր է լավագույն q_0 և S_0-ի արժեքները դուրս բերել՝ լուծելով հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial S} = \dfrac{SC_1 T}{q} - \dfrac{(q-S)C_2 T}{q} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial q} = -\dfrac{S^2 C_1 T}{2q^2} + \dfrac{4q(q-S) - 2(q-S)^2}{4q^2} C_2 T - \dfrac{C_s R}{q^2} = 0, \end{cases}$$

որտեղից հետևում է՝

$$\begin{cases} q_0 = \sqrt{\dfrac{2RC_s}{TC_1}} \cdot \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{C_2}} \\ S_0 = \sqrt{\dfrac{2RC_s}{TC_1}} \cdot \sqrt{\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}} = q_0 \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

և հետևաբար՝

$$t_{s0} = \frac{Tq_0}{R} = \sqrt{2\frac{TC_s}{RC_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} : \qquad (2.3.1)$$

Որպեսզի ստանանք Q-ն, նկատենք, որ

$$\frac{S_0^2}{q_0} = q_0\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 :$$

Տեղադրելով S_0-ի և t_{s0}-ի արժեքները ելակետային հավասարման մեջ և կատարելով պարզեցումներ, ի վերջո կստանանք՝

$$Q_0 = \sqrt{2RTC_1C_s} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} , \qquad (2.3.2)$$

որտեղ $\rho = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$ մեծությունը, որի արժեքները գտնվում են [0;1] միջակայքում անվանվում է չբավարարված պահանջարկներից առաջացած վնասների խտություն:

Այդ մեծության արժեքը կարևոր կարգավորիչ դեր ունի այն խնդիրներում, որտեղ ստեղծվում է այնպիսի իրավիճակ, երբ պաշարները անբավարար չափով են կամ լիովին սպառված են: Ակնհայտ է, որ ρ<1 պայմանը հանգեցնում է q_0-ի և t_{s0}-ի արժեքների մեծացման, իսկ S_0-ի և Q_0-ի փոքրացման և, բնականաբար, տվյալ ρ-ի արժեքի դեպքում q_0-ի և S_0-ի արժեքները նպատակահարմար է ընտրել այնպես, որ բավարարվի $\rho=S_0/q_0$ պայմանը:

Օրինակ 4: Դիցուք՝ պահպանվում են 1-ին օրինակի բոլոր ելակետային պայմանները, սակայն C_2 տուգանքի չափը միավոր արտադրանքի պակասուրդի դեպքում կազմում է 0.2 դրմ:

Օգտվելով վերը բերված բանաձևերից, ստանում ենք՝

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 24000 \cdot 350}{12 \cdot 0.1}} \cdot \sqrt{\frac{0.1 + 0.2}{0.2}} = 4578 \text{ միավոր},$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 350}{12 \cdot 0.1}} \cdot \sqrt{\frac{0.2}{0.1 + 0.2}} = 3056 \text{ միավոր},$$

$$t_{s0} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 350}{24000 \cdot 0.1}} \cdot \sqrt{\frac{0.1 + 0.2}{0.2}} = 2.29 \text{ ամիս} \approx 9.9 \text{ շաբաթ},$$

$$Q_0 = \sqrt{2 \cdot 24000 \cdot 12 \cdot 0.1 \cdot 350} \cdot \sqrt{\frac{0.2}{0.1 + 0.2}} = 3667 \text{ դրմ}:$$

Այսպիսով լավագույն վարվելակերպի դեպքում սպասվելիք պակասուրդը յուրաքանչյուր պարբերության վերջում կկազմի

4578 – 3056 = 1522 միավոր:

2.4 Գների «խզումներով» մենարտադրանքային ստատիկ մոդել

Հաճախ միավոր արտադրանքի գինը գործնականում կախված է լինում գնվող խմբաքանակի ծավալից: Նման դեպքերում գները փոփոխվում են թռիչքաձև, կամ էլ զեղչեր են արվում մեծաքանակ գնումների համար:

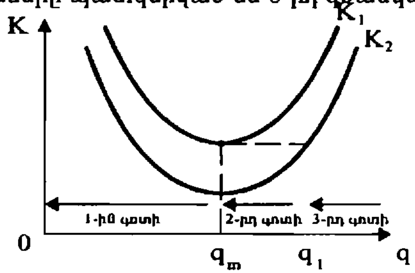
Մինչև այժմ դիտարկվող մոդելներում այդ հանգամանքը անտեսվում էր, և գնման ծախսերը հաստատուն էին, այնպես որ չէին ազդում պաշարի մակարդակի վրա:

Այժմ դիտարկենք պաշարների կառավարման մի մոդել, որում հաշվի կառնվի վերը նշված գների փոփոխման հանգամանքը: Ենթադրվում է, որ միավոր արտադրանքի գինը հավասար է p_1-ի, երբ $q< q^*$-ից և հավասար է p_2-ի, երբ $q \geq q^*$, $p_1 > p_2$, իսկ q^*-ը պատվերի ծավալն է, որը գերազանցվելիս գնազեղչ է տրվում: Այդ դեպքում որոշակի t_s ժամանակահատվածում կատարված գումարային ծախսերն ընդգրկում են գնման պաշարների ձևակերպման և պահպանության ծախսերը: Ժամանակի միավորի համար դրանք հետևյալն են՝

$$K_1 = \frac{R}{T}P_1 + \frac{C_s R}{Tq} + \frac{C_1}{2}q, \text{ երբ } q < q^*$$

$$K_2 = \frac{R}{T}P_2 + \frac{C_s R}{Tq} + \frac{C_1}{2}q, \text{ երբ } q \geq q^*:$$

Այս ֆունկցիաները պատկերված են 8-րդ գծանկարում:



Գծ.8

Անտեսելով գների իջեցման ազդեցությունը, q_m-ով նշանակենք պատվերի այն ծավալը, երբ K_1 և K_2 ֆունկցիաներն ընդունում են իրենց նվազագույն արժեքները: Ակնհայտ է, որ

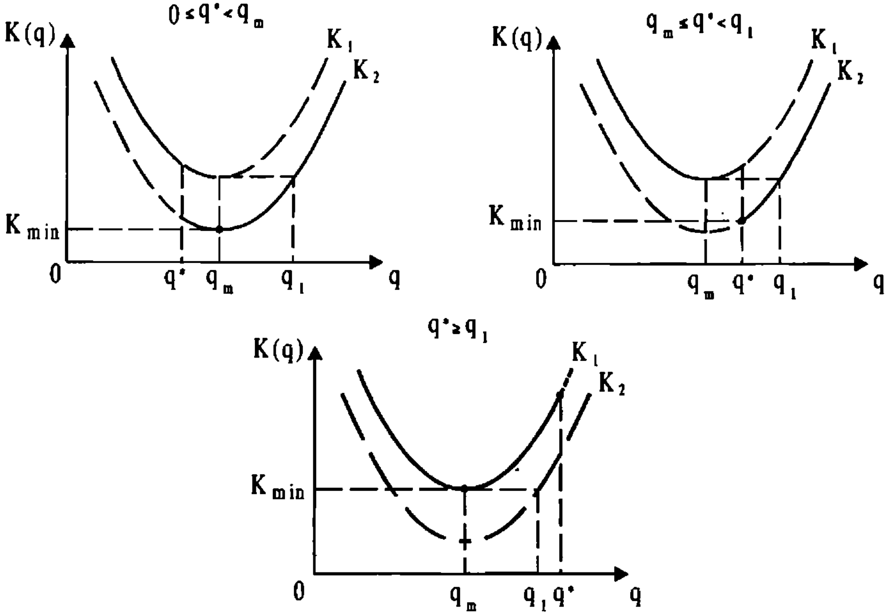
$$q_m = \sqrt{2RC_s/TC_1}$$

K_1 և K_2 գումարային ծախսերի ֆունկցիաների տեսքից հետևում է, որ պատվերի q_0 լավագույն ծավալը կախված է նրանից, թե գծանկարում պատկերված երեք գոտիներից որում է գտնվում գնի խզման կետը: Այդ գոտիների սահմանային արժեքները պարզաբանվում են $K_1(q_m)=K_2(q_1)$ հավասարման լուծումից ստացվող q_1-ի արժեքի միջոցով: Ընդ որում՝

- առաջին գոտում $0 \leq q^* < q_m$,

- երկրորդ գոտում $q_m \le q^* < q_1$,
- երրորդ գոտում $q^* \ge q_1$:

$K_1(q_m)=K_2(q_1)$ հավասարման լուծումների երեք հնարավոր դեպքերը պատկերված են 9-րդ գծանկարում:



Գծ.9

Այսպիսով, պատվերի q_0 լավագույն ծավալը կորոշվի հետևյալ առնչություններից

$$q_0=\begin{cases} q_m, & \text{եթե } 0 \le q^* < q_m \\ q^*, & \text{եթե } q_m \le q^* < q_1 \\ q_m, & \text{եթե } q^* \ge q_1 : \end{cases}$$

Պաշարների լավագույն ծավալի հաշվարկման քայլաշարը կարելի է ներկայացնել հետևյալ քայլերի հաջորդականությամբ՝

1. Որոշել

$$q_m=\sqrt{2RC_s/TC_1}\ ,$$

եթե $q^*<q_m$ (I-ին գոտի), ապա $q_0=q_m$, և խնդիրը լուծված է: Հակառակ դեպքում անցնել 2-րդ քայլին:

2. Որոշել q_1-ի արժեքը $K_1(q_m)=K_2(q_1)$ հավասարումից և պարզել, թե 2-րդ և 3-րդ գոտիների նկատմամբ որտեղ է գտնվում q^*-ի արժեքը.

ա) եթե $q_m \le q^* < q_1$ (2-րդ գոտի), ապա $q_0=q^*$, բ) եթե $q^* \geq q_1$ (3-րդ գոտի), ապա $q_0 = q_m$:

Օրինակ 5: Դիտարկենք պաշարների կառավարման մոդելը հետևյալ ելակետային տվյալների համար. C_s=10 պդմ, C_1=1պդմ, միավոր ժամանակահատվածում պահանջարկը՝ R/T=5 միավոր, p_1=2 պդմ, p_2=1 պդմ և q^*=15 միավոր:

Լուծում: Նախ՝ որոշենք q_m-ի արժեքը՝

$$q_m=\sqrt{2\cdot 5\cdot 10/1}=10 \text{ միավոր},$$

և քանի որ, $q^*>q_m$-ից, ապա անհրաժեշտ է որոշել, թե q^*-ը որ գոտում է գտնվում: Դրա համար հաշվենք q_1-ի արժեքը՝ օգտվելով $K_1(q_m)=K_2(q_1)$ հավասարումից: Տեղադրելով համապատասխան արժեքները, ստանում ենք՝

$$q_1^2-30q_1+100=0, \text{ որտեղ } q_1=26{,}18,\ q_2=3{,}82:$$

Ըստ սահմանման՝ ընտրվում է դրանցից ավելի մեծ արժեք՝ q_1: Քանի որ $q_m<q^*<q_1$, ապա եզրակացնում ենք, որ q^*-ի արժեքը գտնվում է 2-րդ գոտում: Եվ այսպես, $q_0=q^*$=15 միավոր, իսկ միավոր ժամանակում գումարային ծախսերը կկազմեն՝

$$K_2(15) = 1\cdot 5 +10\cdot 5/15+15/2 = 15{,}83 \text{ պդմ/օր}:$$

2.5 Բազմարտադրանքային ստատիկ մոդել՝ պահեստային տարածքների սահմանափակ տարողությունների դեպքում

Վերնագրում նշված սահմանափակումը պայմանավորում է տարբեր արտադրատեսակների քանակների փոխադարձ կապը: Դիցուք՝ n արտադրատեսակների պահպանության համար նախատեսված պահեստային տարածքի առավելագույն թույլատրելի մակերեսը A-է: Ենթադրենք, որ i-րդ արտադրատեսակի միավորի պահպանության անհրաժեշտ մակերեսը հավասար է a_i-ի, իսկ պատվերի ծավալը կազմում է q_i միավոր: Այդ դեպքում պահեստային տարածքի պահանջարկի սահմանափակումը հետևյալն է՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i q_i \leq A: \qquad (2.5.1)$$

Ենթադրենք նաև, որ յուրաքանչյուր արտադրանքի պաշարները համալրվում են ակնթարթորեն, պակասուրդ չի թույլատրվում և զեղչեր չկան: Պահանջվում է որոշել q_i ոչ բացասական փոփոխականների այնպիսի արժեքներ, որոնք բավարարեն (2.5.1) սահմանափակմանը ,իսկ

$$K(q_1,q_2,\ldots,q_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_{si}\beta_i}{q_i}+\frac{C_{1i}q_i}{2}\right)(i=\overline{1,n})$$

նպատակային ֆունկցիան ընդունի իր նվազագույն արժեքը: Այստեղ β_i-ն, C_{si}-ն և C_{1i}-ն համապատասխանաբար միավոր ժամանակահատվածում i-րդ միավոր արտադրանքի պահանջարկը, պատվերի և պահպանության ծախսերն են:

Խնդրի ընդհանուր լուծումը կարելի է գտնել Լագրանժի բազմապատիկների եղանակի միջոցով: Սակայն մինչև այդ եղանակի կիրառումը, անհրաժեշտ է այն լուծել առանց հաշվի առնելու (2.5.1) սահմանափակումը: Եթե ստացված

$$q_i^* = \sqrt{2\beta_i C_{si}/C_{1i}} \quad (i=\overline{1,n})$$

արժեքները բավարարում են սահմանափակմանը, ապա խնդրի լուծումն ավարտված է: Հակառակ դեպքում՝ վերևում նշված եղանակով լուծում ենք դասական մաթեմատիկական ծրագրման խնդիրը: Այս դեպքում պետք է որոշել q_i-երի նոր արժեքները, որոնք պահեստի ընդհանուր մակերեսի (2.5.1) սահմանափակմանը բավարարում են հավասարման տեսքով:

Կառուցենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = (\lambda, q_1, q_2, \ldots, q_n) = K(q_1, q_2, \ldots, q_n) -$$

$$-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i q_i - A\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_{si}\beta_i}{q_i} + \frac{C_1 q_i}{2}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i q_i - A\right),$$

որտեղ λ-ն Լագրանժի բազմապատիկն է:

Լուծելով

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = -\dfrac{C_{si}\beta_i}{q_i^2} + \dfrac{C_{1i}}{2} - \lambda a_i = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i q_i - A = 0 \end{cases} \quad (i=\overline{1,n})$$

համակարգը, կստանանք q_i-երի և λ-ի համապատասխան արժեքները:

Երկրորդ հավասարումից հետևում է, որ q_i^*-ի արժեքը պետք է բավարարի (2.5.1) սահմանափակմանը:

Առաջին հավասարումից հետևում է, որ

$$q_i^* = \sqrt{2\beta_i C_{si}/(C_{1i} - 2\lambda^* a_i)} \quad (i=\overline{1,n}): \qquad (2.5.2)$$

Ուշագրավ է, որ q_i^*-երի արժեքները կախված են Լագրանժի λ^* բազմապատիկի արժեքից: Բացի այդ, $\lambda^* = 0$ դեպքում q_i^*-երի արժեքները համապատասխանում են առանց սահմանափակման խնդրի լուծմանը:

λ^*-ը կարելի է գտնել փորձարկումների և սխալների եղանակով:

Քանի որ ըստ խնդրի դրվածքի $\lambda < 0$-ից, ապա λ-երի հաջորդական ստուգման ընթացքում որոշվում են λ^*-ը և միաժամանակ q_i^*-երի այն արժեքները, որոնք կբավարարեն հավասարման տեսքով տրված (2.5.1) սահմանափակմանը:

Օրինակ 6: Դիտարկենք երեք արտադրատեսակներով (n=3) պաշարների կառավարման մի խնդիր, որի տվյալները բերված են 2.1 աղյուսակում:

Աղյուսակ 2.1

Արտադրանք i	C_{si} (դրամ)	R_i/T_i միավոր	C_{1i} (դրամ)	a_i (մ^2)
1	10	2	0.3	1
2	5	4	0.1	1
3	15	4	0.2	1

Դիցուք՝ պահեստային տարածքների ընդհանուր A մակերեսը կազմում է 25մ^2: Համապատասխան հաշվարկների արդյունքները ըստ (2.5.2) բանաձևի միաբերված են 2.2 աղյուսակում: A=25մ^2 պահեստային մակերեսի վերաբերյալ սահմանափակումը բավարարվում է որպես հավասարություն λ-ի ինչ-որ արժեքի համար՝ $\lambda \in [-0{,}25, -0{,}37]$ միջակայքում: λ^*-ի արժեքը կարելի է գնահատել գծային միջարկումների միջոցով, որոնցով և կորոշվեն q_i^*-երի արժեքները: 2.2 աղյուսակից հետևում է, որ λ^*-ի արժեքը շատ մոտ է $-0{,}3$-ի, հետևաբար q_i^*-երի մոտավոր արժեքները կլինեն՝

$$q_1^* = 6{,}7,\ q_2^* = 7{,}6 \text{ և } q_3^* = 10{,}6:$$

Աղյուսակ 2.2

λ	q_1	q_2	q_3	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i q_i - A$
0	11.5	20.0	24.5	+31
– 0.05	10.0	14.1	17.3	+16.4
– 0.10	9.0	11.5	14.9	+10.4
– 0.15	8.2	10.0	13.4	+6.6
– 0.20	7.6	8.9	12.2	+3.7
– 0.25	7.1	8.2	11.3	+1.6
– 0.30	6.7	7.6	10.6	0.1

Եթե $A \geq 52{,}4$մ^2, ապա q_i^*-երի արժեքները կարելի է ստանալ առանց հաշվի առնելու (2.5.1) սահմանափակումը, որը համարժեք է $\lambda^* = 0$ դեպքին:

2.6 Մենարտադրանքային N փուլանոց դինամիկ մոդել

Առաջարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ պահանջարկը հայտնի է, սակայն ժամանակի ընթացքում կարող է փուլ առ փուլ փոփոխվել, իսկ պաշարի մակարդակը, փուլերին համապատասխան, պարբերաբար վերահսկվում է: Չնայած մատակարարման ուշացումը թույլատրելի է, մոդելում ենթադրվում է, որ պաշարի համալրումը կատարվում է ակնթարթորեն փուլի սկզբում, և պակասուրդը բացառվում է:

Դինամիկ դետերմինային մոդելի կառուցումը հանգում է ժամանակի վերջավոր հորիզոնի հետազոտմանը: Դա բացատրվում է նրանով, որ համապատասխան խնդիրների թվային լուծումների ստացման համար պահանջվում է օգտագործել դինամիկ ծրագրման եղանակը, որը տվյալ դեպքում գործնականորեն կարելի է կիրառել միայն վերջավոր փուլերի (քայլերի) առկայության դեպքում:

Սակայն, մեր խնդրի պարագայում դա լուրջ խոչընդոտ չէ, որովհետև հեռավոր ապագայում պահանջարկը սովորաբար էական ազդեցություն չի ունենում դիտարկվող վերջավոր ժամանակահատվածում ընդունվող որոշումների վրա: $i=1,2,\ldots,N$ փուլերի համար պահպանելով նախկին նշանակումները՝

q_i - պատվիրվող արտադրանքի քանակը (պատվերի չափը)

r_i - արտադրանքի պահանջարկը

S_i - ելակետային պաշարը (i-րդ փուլի սկզբում), լրացուցիչ ներմուծենք՝

C_{1i} - միավոր պաշարի պահպանության ծախսերը, որոնք i-րդ փուլից անցնում են (i+1)-րդ փուլ

C_{si} - պատվերի ձևակերպման ծախսերը

$k_i(q_i)$- սահմանային ծախսերի ֆունկցիան:

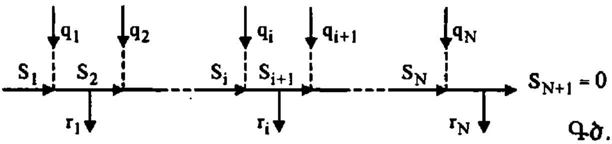
Դիցուք՝ $K_i(q_i) = \delta_i C_{si}+k_i(q_i)$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{ եթե } q_i = 0 \\ 1, \text{ եթե } q_i > 0 \end{cases} \quad (i=\overline{1,N}):$$

$k_i(q_i)$ ֆունկցիան հետաքրքրություն է ներկայացնում միայն այն դեպքում, երբ միավոր արտադրանքի գնման ծախսերը փոփոխվում են ժամանակի ընթացքում կամ գոյություն ունի գների «խզում»:

Քանի որ արտադրանքի պակասուրդը բացառվում է, ապա պահանջվում է որոշել q_i-երի այնպիսի արժեքներ, որոնք մինիմացնեն պաշարների ձևակերպման, գնման և պահպանման ընդհանուր ծախսերը ըստ բոլոր N փուլերի: Պահպանության ծախսերը ենթադրվում են ուղիղ համեմատական $S_{i+1} = S_i+q_i-r_i$ մեծությանը, որն իրենից ներկայացնում է պաշարի այն ծավալը, որ i-րդ փուլից անցնում է (i+1)-րդ փուլ: Արդյունքում՝ պահպանության ծախսերը i-րդ փուլում կկազմեն $C_{1i}\cdot S_{i+1}$ միավոր: Այս ենթադրությունը ընդունվում է բացառապես խնդրի դրվածքը պարզեցնելու նպատակով, որովհետև մոդելը հեշտությամբ կարելի է ընդհանրացնել ծախսերի գործառույթի ամեն մի տեսքի համար:

Դինամիկ ծրագրման մոդելի կառուցումը կպարզեցվի, եթե խնդրի լուծման ընթացքը ներկայացնենք 9-րդ գծանկարում բերված սխեմայի տեսքով՝



Գծ.10

Յուրաքանչյուր փուլ համապատասխանում է մեկ քայլի: Օգտագործելով դինամիկ ծրագրման անդրադարձ հավասարումը՝ i-րդ քայլում որոշենք համակարգի վիճակները որպես ելակետային S_i պաշարի ծավալ:

Դիցուք՝ $f_i(S_i)$ ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է ընդհանուր նվազագույն ծախսերը i, i+1,...,N փուլերում: Անդրադարձ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$f_N(S_N) = \min_{\substack{q_n+S_N=r_N \\ q_N\geq 0}} \{K_N(q_N)\},$$

$$f_i(S_i) = \min_{\substack{r_i\leq S_i+q_i\leq r_i+...+r_N \\ q_N\geq 0}} \{K_i(q_i)+C_{1i}(S_i+q_i-r_i)+f_{i+1}(S_i+q_i-r_i)\} \; (i=\overline{1,N}) :$$

Ուղիղ անդրադարձ հավասարումը կարելի է ստանալ i-րդ փուլի վիճակները որոշելով՝ որպես պաշարի ծավալը փուլի վերջում: 10-րդ գծանկարում այդ վիճակները տրված են S_{i+1} մեծություններով: Ամեն մի քայլում S_{i+1} մեծությունները պետք է բավարարեն հետևյալ սահմանափակումներին.

$$0 \leq S_{i+1} \leq r_{i+1}+...+r_n:$$

Այսպիսով, սահմանային դեպքում պատվիրվող արտադրանքի ծավալը՝ q_i-ն $(i=\overline{1,N})$ i-րդ փուլում կարող է լինել այնքան մեծ, որ S_{i+1} պաշարը բավարարի հաջորդ բոլոր փուլերի պահանջարկներին:

Դիցուք՝ $f_i(S_{i+1})$-ը նվազագույն ընդհանուր ծախսերն են 1,2,...,i-րդ փուլերում, երբ հայտնի է i-րդ փուլի վերջում պաշարի S_{i+1} քանակը:

Այդ դեպքում անդրադարձային հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f_1(S_2) = \min_{0\leq q_1\leq r_1+S_2} \{K_1(q_1)+C_{11}S_2\},$$

$$f_i(S_{i+1}) = \min_{0\leq q_i\leq r_i+S_{i+1}} \{K_i(q_i)+C_{1i}S_{i+1}+f(S_{i+1}+q_i-r_i)\} \; (i=\overline{1,N}) :$$

Օրինակ 7: Դիտարկենք դինամիկ դետերմինային պահանջարկով երեքփուլային պաշարների կառավարման համակարգը: Խնդրի ելակետային տվյալները տրված են 2.3 աղյուսակում:

Աղյուսակ 2.3

Փուլ (i)	Պահանջարկը (r_i)	Պատվերի ձևակերպման ծախսերը (C_{si})	Միավոր արտադրանքի պահպանության ծախսերը (C_{1i})
1	3	3.00	1.00
2	2	7.00	3.00
3	4	6.00	2.00

Նախնական պաշարը առաջին փուլում կազմում է 1 միավոր: Ենթադրվում է, որ միավոր արտադրանքի ձեռքբերման սահմանային ծախսերը առաջին երեք միավորի համար կազմում են 10 պդմ, իսկ լրացուցիչ միավորների համար՝ 20 պդմ:

Հետևաբար՝

$$K_i(q_i) = \begin{cases} 10q_i & \text{եթե } 0\leq q_i\leq 3 \\ 30+20(q_i-3), & \text{եթե } q_i\geq 4 \end{cases} :$$

Խնդրի լուծման քայլաշարը և հաշվարկների արդյունքները միաբերված են 2.4 - 2.6 աղյուսակներում:

Քայլ 1` $r_1 = 3,\ 0 \le S_2 \le 2+4 = 6$:

Աղյուսակ 2.4

		$f_1(q_1\|S_2) = K_1(q_1) + C_{11}S_2$							Լավագույն լուծումը	
		$q_1 = 2$	3	4	5	6	7	8	$f_1(S_2)$	q_1^*
S_2	$C_{11}S_2$	$K_1(q_1) = 23$	33	53	73	93	113	133		
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Քանի որ $S_1=1$, ապա q_1-ի նվազագույն արժեքը հավասար է $r_1-S_1=3-1=2$

Քայլ 2` $r_2 = 2,\ 0 \le S_3 \le 4$:

Աղյուսակ 2.5

		$f_2(q_2\|S_3) = K_2(q_2) + C_{12}S_3 + f_1(S_3+r_2-q_2)$							Լավագույն լուծումը	
		$q_2 = 0$	1	2	3	4	5	6	$f_2(S_3)$	q_2^*
S_3	$C_{13}S_3$	$K_2(q_2)=0$	17	27	37	57	77	97		
0	0	0+55 =55	17+34 =51	27+23 =50					50	2
1	3	3+76 =79	20+55 =75	30+34 =64	40+23 =63				63	3
2	6	6+97 =103	23+76 =99	33+55 =88	43+34 =77	63+23 =86			77	3
3	9	9+118 =127	26+97 =123	36+76 =112	46+55 =101	66+34 =100	86+23 =109		100	4
4	12	12+139 =151	29+118 =147	39+97 =136	49+76 =125	69+55 =124	89+34 =123	109+23 =132	123	5

Քայլ 3` $r_3 = 4,\ S_4 = 4$:

Աղյուսակ 2.6

		$f_3(q_3\|S_4) = K_3(q_3) + C_{13}S_4 + f_2(S_4+r_3-q_3)$					Լավագույն լուծումը	
		$q_3 = 0$	1	2	3	4	$f_3(S_4)$	q_3^*
S_4	$C_{13}S_4$	$K_3(q_3)=0$	16	26	36	56		
0	0	0+123= 123	16+100=116	26+77=103	36+63=99	56+50=106	99	3

Այսպիսով, լավագույն լուծումն է` $q_1^* = 2$, $q_2^* = 3$և $q_3^* = 3$, իսկ նվազագույն ընդհանուր ծախսերը կկազմեն 99 պդմ:

3. Հավանականային մոդելներ

3.1 Նախնական տեղեկություններ

Վերը քննարկված մոդելներում ենթադրվում էր, որ ինչպես պահանջարկը, այնպես էլ պատվերների մատակարարման ժամանակը հաստատուն մեծություններ են: Սակայն գործնականում բազմակի պաշարների կառավարման համակարգերում վերջիններս պարունակում են անորոշության տարր՝ պահանջարկը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է և, որպես հետևանք, պատվերների տրման ժամանակահատվածները լինում են տարբեր:

Ի տարբերություն դետերմինային մոդելների «պարբերություն» հասկացությունը փոխարինվում է «պարբերաշրջան» հասկացությամբ, որովհետև պահանջարկը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է:

Նման համակարգերում հազիվ թե հնարավոր լինի կիրառել այն մաթեմատիկական մոդելները, որ օգտագործվում էին մինչև այժմ: Եթե պահանջարկի մակարդակը որոշված չէ, ապա ենթադրվում է, որ այն փոփոխվում է որոշակի բնութագրերին համապատասխան, որոնք կարելի է ստանալ փորձառական տվյալների հիման վրա, կամ էլ ընդունել, որ պահանջարկը որոշվում է բաշխման հայտնի օրենքներով՝ Պուասոնի կամ բնականոն:

Եթե պահանջարկի մակարդակը, և՛ մատակարարման ժամանակը փոփոխական են, ապա հնարավոր է, որ առաջանան այնպիսի իրավիճակներ, որ պաշարը բացակայի: Եթե կրկնվող պատվերի մակարդակը որոշվում է՝ ելնելով միջին ժամանակահատվածում միջին պաշարի բավարարման սկզբունքից, ապա պաշարի բացակայությունը կարող է առաջանալ տարվա ընթացքում գործող պաշարների կազմավորման՝ որոշ պարբերաշրջաններում:

Դիցուք՝ պաշարի բացակայության հավանականությունը յուրաքանչյուր պարբերաշրջանում հավասար է 0,2-ի: Եթե պատվերը տրվում է տարեկան մեկ անգամ, ապա յուրաքանչյուր տարում պաշարի պակասուրդի հնարավորությունը մեծ չէ, բայց եթե տարվա ընթացքում հայտը տրվում է օրինակ 50 անգամ, ապա պաշարի պակասուրդը ի հայտ կգա 50·0,2=10 անգամ:

Պաշարների պակասուրդի հավանականության ընդունելի մեծությունը որոշելու համար, անհրաժեշտ է պարզել սպասարկման այն մակարդակը, որին նպատակ ունենք հասնելու: Սպասարկման մակարդակը որոշվում է (1–p) մեծությամբ, որտեղ p-ն պակասուրդի ի հայտ գալու հավանականությունն է: Այսպես օրինակ, եթե պաշարի պակասուրդի հավանականությունը մեկ պարբերաշրջանում հավասար է 0,2-ի կամ 20%-ի, ապա սպասարկման մակարդակը հավասար է 80%-ի, և այն բարձրացնելու համար պետք է փոքրացնել պակասուրդի ի հայտ գալու հավանականության մեծությունը՝ փոխելով կրկնվող պատվերի ծավալը:

Վերջինս կարելի է մեծացնել՝ սպասարկման միջին ժամանակահատվածում միջին պահանջարկին ավելացնելով այսպես կոչված պահուստային պաշարի ծավալը: Որքան մեծ է այդ ծավալը, այնքան փոքր է պաշարների պակասուրդի հավանականությունը, բայց մեծ են պահպանության ծախսերը:

Պաշարի պակասուրդի արժեքի նվազեցումը բնականաբար, պետք է փոխհատուցվի պահպանության ծախսերի ավելացումով:

Պահուստային պաշարի համապատասխան ծավալի ընտրությունը կախված է այն կոնկրետ նպատակից, որին ձգտում են հասնել: Այդպիսի նպատակ կարող են լինել ինչպես սպասարկման նվազագույն մակարդակի ապահովումը, այնպես էլ նվազագույն գումարային ծախսերը:

Տարբերում են պաշարների կառավարման երկու համակարգեր, որոնցում հաշվի են առնվում պահանջարկի և պատվերի սպասարկման ժամանակի անորոշությունները՝

ա) Կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգ և

բ) Կրկնվող պատվերի պարբերաշրջանային համակարգ:

Առաջին տեսակի համակարգերում՝ փոփոխական ժամանակահատվածների միջակայքերում պատվիրվում են որոշակի ծավալով արտադրանքներ: Ընդ որում պատվերները տրվում են այն պահերին, երբ պաշարի մակարդակը նվազում է մինչև նախապես հաշվարկված արժեքը:

Երկրորդ համակարգերում՝ որոշակի հաստատագրված ժամանակային միջակայքերում պատվիրվում են տարբեր քանակությամբ արտադրանքներ:

3.2. Կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգ

Ա-մոդել՝ սպասարկման նվազագույն մակարդակի ապահովում:
Ուսումնասիրվող մոդելը տալիս է պատասխան հետևյալ հարցերին՝

ա) պաշարների մակարդակի ո՞ր արժեքի դեպքում պետք է ներկայացնել նոր պատվերի հայտ:

բ) Որքա՞ն են ընդհանուր տարեկան ծախսերը:

Մոդելի լուծումն իրագործվում է երկու փուլով. նախ՝ հաշվարկվում է պատվերի լավագույն ծավալը՝ g_o-ն ըստ մեզ հայտնի Ուիլսոնի բանաձևի, ապա դրա հիման վրա որոշվում է կրկնվող պատվերի հաստատագրված R մակարդակը: Խնդրի լուծման տվյալ մոտեցումը ոչ միշտ է տալիս լավագույն արդյունքը, սակայն հնարավորություն է ընձեռում ստանալու լավագույնին մոտ լուծում:

Կրկնվող պատվերի R ծավալը հաստատագրելու համար անհրաժեշտ է իմանալ, թե պատվերի կատարման ժամանակաշրջանում ինչպես է փոփոխվում պահանջարկը և սպասարկման մակարդակի սպասվելիք արժեքը:

Օրինակ 8: Տարեկան 50 (5 օրյա) շաբաթ աշխատող ձեռնարկության հավաքման արտադրամասը օգտագործում է որոշակի մանրամասեր, որոնց միավորը մատակարարից (առաքողից) գնվում է 250 դրամով: Պահանջարկը պարբերաբար փոփոխվում է, սակայն այն մոտավորապես կարելի է նկարագրել բնականոն բաշխվածության օրենքով, որի միջին արժեքը և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար հավասար են 80 և 10 մանրամասեր 1 օրում: Յուրաքանչյուր պատվերի սպասարկման հաստատագրված ժամանակահատվածը 8 օր է, իսկ ձևակերպման ծախսերը կազմում են 12500 դրամ:

Ըստ ձեռնարկության մասնագետների գնահատման պահպանության ծախսերը կազմում են միջին տարեկան պաշարների արժեքի 20%-ը:

Որպիսի՞ք են յուրաքանչյուր պատվերի ծավալը և կրկնվող պատվերի մակարդակը, եթե պաշարների պակասուրդը ավելի քան 20 պարբերաշրջաններում ցանկալի չէ:

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի կրկնվող պատվերին համապատասխանող պահուստային պաշարի մակարդակը:

Լուծում: Դիցուք՝ պահանջարկը հաստատուն է և հաստատագրված է միջին արժեքի չափով: Խնդրի ելակետային տվյալներն են՝

C_s=12500 դրամ մեկ պատվերի համար

D=80×50×5=20 000 մանրամաս տարեկան

C_I=0.2·250=50 դրամ մեկ մանրամասի համար տարեկան:

Հաստատուն պահանջարկի դեպքում՝

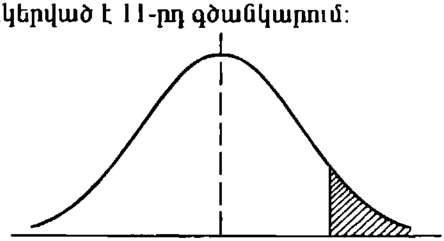
$$q_0 = \sqrt{2C_sD/C_I} = \sqrt{2\cdot12500\cdot20000/50} = 3162{,}3:$$

Որպես պատվերի ծավալ ընդունենք 3162 մանրամաս: Պաշարի պակասուրդի առավելագույն թույլատրելի մակարդակը համաձայն խնդրի նախնական պայմանի կարող է լինել 20 պարբերաշրջաններից միայն մեկում, այսինքն՝ միջինում պարբերաշրջանների միայն 5%-ում է թույլատրվում ունենալ պաշարների պակասուրդ: Հետևաբար սպասարկման մակարդակը հավասար է 95%-ի:

Հաշվի առնելով, որ մեկ օրվա պահանջարկը մոտարկվում է նորմալ բաշխման օրենքով, կարելի է ենթադրել, որ սպասապկման ժամանակահատվածում ևս այն բաշխված կլինի նույն օրենքով:

Պահանջարկի միջին արժեքը մատակարարման ութ օրվա ընթացքում կազմում է 80·8=640 մանրամասեր, իսկ միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sqrt{80\cdot10}\approx28{,}28$ մանրամաս:

Պահանջարկի բաշխվածությունը մատակարարման ժամանակահատվածում պատկերված է 11-րդ գծանկարում:



Գծ.11

Կրկնվող պատվերի մակարդակը՝ R-ը, ընտրվում է՝ ելնելով հետևյալ պայմանից. հավանականությունը, որ պահանջարկի մեծությունը փոքր է կրկնվող պատվերի մակարդակից, կլինի 0.95-ից ոչ պակաս: R-ը իրենից ներկայացնում է միջին արժեքին գումարած Z քանակով շեղումներ, որտեղ

$$z=\frac{R-640}{28{,}28}:$$

Նորմալ բաշխման աղյուսակներից, որոնք տրվում են վիճակագրության դասընթացների հավելվածներում, գտնում ենք, որ եթե

$$P(z>\frac{R-640}{28{,}28})=0{,}5\text{-ի},$$

ապա z=1,645:

Հետևաբար՝

$$1{,}645=\frac{R-640}{28{,}28},$$

որտեղից՝ R=686,55:

Այսպիսով՝ կրկնվող պատվերի մակարդակը կարելի է ընդունել 687 մանրամաս, որից $q_պ$=47-ը (687–640) կկազմեն պահուստային պաշարը: Մանրամասերի այդ քանակը անհրաժեշտ կլինի պախանջարկի տատանումների դեպքում սպասարկման մակարդակը ապահովելու համար: Ընդ որում, ենթադրվում է, որ դրանք են գտնվում պահեստում պարբերաշրջանի ամբողջ ժամանակահատվածում, այնպես որ միջին տարեկան պաշարի մակարդակը կկազմի (q/2+47) մանրամաս:

Հետևաբար, եթե հաշվի չառնվի պաշարի պակասուրդի արժեքը, ապա ընդհանուր տարեկան ծախսերը կկազմեն՝

$$Q = C_s \cdot D/q+C_1/(q/2+q_պ) \doteq$$

$$= 12500 \cdot 20000/3162+50/(3162/2+47) = 160465 \text{ դրամ}:$$

Տարեկան պահուստային պաշարի արժեքը հավասար է 50·47=2350 դրամ:

Բ-մոդել՝ նվազագույն արժեքի ապահովում:

Անհրաժեշտ է հիմնավորված որոշում կայացնել նախորդ՝ ա) և բ} հարցերի վերաբերյալ ինչ և Ա-մոդելում, բայց նպատակ ունենալով հասնել տարեկան ընդհանուր ծախսերի նվազագույն արժեքի:

Ա-մոդելի խնդրի լուծումը ցույց տանք հետևյալ օրինակով:

Օրինակ 9: Մեծածախ վաճառքի խանութը կատարում է որոշակի մակնիշի հեռուստացույցների գնումներ՝ մեկ միավորի համար վճարելով 125000 դրամ: Տարվա 300 օրվա ընթացքում վաճառքի միջին ծավալը կազմում է 475 հեռուստացույց: Յուրաքանչյուր պատվեր իրականացնելիս խանութը ծախսում է 25000 դրամ, իսկ պահպանության ծախսերը կազմում են միջին տարեկան պաշարների արժեքի 15%-ը:

Պատվերի մատակարարման ժամանակահատվածը 3 օր է, ընդ որում վերջին 50 պարբերաշրջանների տվյալների հիման վրա ստացվել է պահանջարկների հաճախությունների հետևյալ բաշխումը (տե՛ս աղ. 3.1):

Աղյուսակ 3.1

Հեռուստացույցների պահանջարկը (հատ) մատակարարման ժամանակահատվածում	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Պաշարի պարբերաշրջանների քանակը	1	2	6	8	10	8	8	5	2

Ամեն անգամ, երբ հեռուստացույցների պաշարը սպառվում է, խանութը կատարում է շտապ պատվեր, որի հետ կապված լրացուցիչ ծախսերը գնահատվում են մեկ հեռուստացույցի համար մոտավորապես 10000 դրամ:

Անհրաժեշտ է տալ հետևյալ երեք հարցերի պատասխանները.

Խանութը որքա՞ն հեռուստացույց պետք է միանվագ պատվիրի և ինչպիսի՞ն պետք է լինի կրկնվող պատվերի մակարդակը, որպեսզի նվազագույնի հասցվեն տարեկան գումարային ծախսերը:

Պահանջվում է նաև գտնել պահուստային պաշարի այն ծավալը, որ համապատասխանում է կրկնվող պատվերի մակարդակին:

Լուծում: C_s=25000 դրամ,

C=125000 դրամ/հեռուստացույց,

C_1=0,15·125000= =18750 դրամ/հեռուստացույց,

C_2=10000 դրամ/ հեռուստացույց:

Ընդհանուր տարեկան ծախսերը կազմվում են երեք գումարելիներից՝ պատվերի ձևակերպման, միջին պաշարի պայպանության, պահուստային պաշարի և վերջապես, պաշարի պակասուրդի հետևանքով կատարված տարեկան ծախսերից:

Այսպիսով՝

$$Q = C_sD/q+C_1q/2+C_1q_պ+C_2M[q_{պակ}],$$

որտեղ $q_պ$-ն՝ պահուստային պաշարի ծավալն է, $M[q_{պակ}]$-ը՝ տարվա ընթացքում պաշարի պակասուրդի մաթեմատիկական սպասելին է:

Նախ՝ հաշվարկենք պահանջարկի միջին արժեքը.

$$q = \sqrt{2C_s \cdot D/C_1} = \sqrt{2 \cdot 25000 \cdot 475/18750} = 35{,}6:$$

Պատվերի հաստատագրված ծավալն ընդունենք 36 հեռուստացույց:

Անհրաժեշտ է որոշել պահուստային պաշարի այն մակարդակը, որի դեպքում վերջին երկու ծախսերը ընդունում են նվազագույն արժեք, որովհետև առաջին երկուսը հաստատուն են և հավասար են՝

$C_sD/q+C_1q/2$ = 25000 · 475/36+18750 · 36/2 = 667360 դրամ/տարի:

Եթե պահանջարկը մատակարարման ժամանակահատվածում չի գերազանցում միջին պահանջարկի արժեքը, ապա պակասուրդը բացառվում է, իսկ հակառակ դեպքում առաջանում է պակասուրդ:

Միջին օրական պահանջարկը կազմում է 475/300=1,58 հեռուստացույց, իսկ պահանջարկը մատակարարման (սպասարկման) ամբողջ ժամանակահատվածում՝ 3·1,58=4,75 հեռուստացույց: Թույլ տալով ինչ-որ սխալանք, ընդունենք, որ դա կազմում է 4 հեռուստացույց:

Մատակարարման ժամանակահատվածում պահանջարկի հավանականությունների բաշխումը կարելի է որոշել հեռուստացույցների համապատասխան բաշխումից (տե՛ս աղյուսակ 3.2):

Աղյուսակ 3.2

Հեռուստացույցների պահանջարկը (հատ) մատակարարման ժամանակահատվածում	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Պաշարի պարբերաշրջանների քանակը	1	2	6	8	10	8	8	5	2
Հավանականությունը	0.02	0.04	0.12	0.16	0.20	0.16	0.16	0.10	0.04

Մատակարարման ժամանակահատվածում համապատասխան պահանջարկների համար անհրաժեշտ պահուստային պաշարների ծավալները բերված են 3.3 աղյուսակում:

Աղյուսակ 3.3

Հեռուստացույցների պահանջարկը (հատ) մատակարարման ժամանակահատվածում	Պահանջարկի հավանականությունը	Պահանջարկի բավարարման համար անհրաժեշտ պահուստային պաշարը
4	0.20	0
5	0.16	1
6	0.16	2
7	0.10	3
8	0.04	4

Պահուստային պաշարի յուրաքանչյուր արժեքի համար հաշվարկենք մեկ պարբերաշրջանում պաշարի պակասուրդի մաթեմատիկական սպասելիները: Ստացված արժեքները բազմապատկելով տարվա ընթացքում պարբերաշրջանների քանակով կստանանք պաշարների պակասուրդի մաթեմատիկական սպասելիները տարվա կտրվածքով:

Տվյալ պահուստային պաշարին համապատասխանող սպասելի ընդհանուր արժեքը ստանալու համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել ինչպես լրացուցիչ պաշարի պահպանության ծախսերը (1870 դրամ/հեռուստացույց), այնպես էլ պաշարի պակասորդի հետ կապված ծախսերը (10000 դրամ/հեռուստացույց): Պարբերաշրջանների քանակը մեկ տարում կազմում է 475/36=13.2:

Աղյուսակ 3.4.

Պահուս-տային պաշար	Բավա-րարված պահան-ջարկ	Պաշարների պակասուրդի մաթեմատիկական սպասելի		Տարեկան արժեքը (դրամ/տարի)		
		Պարբերա-շրջանի ընթացքում	Տարվա ընթացքում	Պաշարների պակասուրդ	Պահուստա-յին պաշար	Ընդհա-մենը
4	8	0	0	0	4·18750= 75000	75000
3	7	1· 0,04=0,04	0,04·13,2= 0,528	0,528·10000= 5280	3·18750= 56250	61530
2	6	2· 0,04+1· 0,1= 0,18	0,18·13,2= 2,376	2,376·10000= 23760	2·18750= 37500	61260
1	5	3· 0,04+2· 0,1+ +1· 0,16=0,48	0,48·13,2= 6,336	6,336·10000= 63360	1·18750= 18750	82110

Ինչպես երևում է 3.4 աղյուսակից, նվազագույն ընդհանուր արժեքը ստացվում է, երբ պահուստային պաշարը կազմում է 2 հեռուստացույց: Եթե ենթադրենք, որ մատակարարման ժամանակահատվածում պահանջարկի միջին արժեքը հավասար է 4-ի, ապա կրկնակի պատվերը կկազմի 4+2=6 հեռուստացույց: Այդ դեպքում տարեկան ընդհանուր ծախսերը հավասար կլինեն՝ Q = 667360+37500+23760 = 728620 դրամ/տարի:

Այսպիսով հանգում ենք այն եզրակացությանը, որ տարեկան նվազագույն գումարային ծախսերն ապահովելու համար խանութը պետք է պարբերաբար պատվիրի 36 հեռուստացույցից բաղկացած խմբաքանակներ, երբ պաշարների մակարդակը նվազում է մինչև 6 հեռուստացույցի:

3.3. Կրկնվող պատվերի պարբերաշրջանային համակարգը

Կրկնվող պատվերի պարբերաշրջանային մոդելների նպատակն է պատասխաններ տալ հետևյալ երկու հարցերին.

ա) Որո՞նք են հաստատագրված միջակայքի այն սահմանները, որոնց ներքո պետք է իրագործվի պահանջարկի պատվերը,

բ) Ի՞նչ քանակությամբ (ծավալով) արտադրանք է անհրաժեշտ պատվիրել:

Ինչպես և պաշարի մակարդակային մոդելում, տվյալ խնդրի լուծումը կատարվում է երկու փուլով:

Նախ՝ հաշվարկվում է պարբերաշրջանի տևողությունը՝ հաշվի չառնելով պահանջարկի և մատակարարման ժամանակահատվածի տատանումները, որից հետո ընտրվում է նրա հաստատագրված արժեքը: Նշենք, որ պաշարների կառավարման համակարգում գործնականում ստուգումները կատարվում են հարմարավետ ժամանակահատվածներում: Այդ իսկ պատճառով T-ի հաստատագրված արժեքը տրվում է ամբողջի ճշտությամբ: Նման մոտեցումը սովորաբար հնարավորություն է տալիս ստանալ ոչ թե լավագույն, այլ նրան բավականաչափ մոտ լուծում:

Ուսումնասիրվող համակարգն այժմ հետազոտենք, ինչպես և 3.2 ենթաբաժնում երկու տեսանկյունից՝ սպասարկման նվազագույն մակարդակի ապահովում և գումարային ծախսերի նվազեցում:

Ա-մոդել՝ սպասարկման նվազագույն մակարդակի ապահովում

Որոշենք կրկնվող պատվերի տրման այն միջակայքը, որում պաշարների ձևակերպման և պահպանության ընդհանուր տարեկան ծախսերը ընդունում են նվազագույն արժեք, և անտեսենք պահանջարկի ու մատակարարման ժամանակահատվածի տատանումները:

Եթե, օրինակ, կրկնվող պատվերի միջակայքը հավասար է T տարի, ապա, բնականաբար մեկ տարում պատվերների քանակը կկազմի 1/T և, հետևաբար, յուրաքանչյուր պատվերի q ծավալը հավասար կլինի $q=D\cdot T$, որտեղ D-ն տարվա պահանջարկն է: Իսկ եթե պահուստային պաշարը անտեսել, ապա պաշարի միջին մակարդակը կկազմի՝ $q/2=DT/2$ միավոր:

Այսպիսով, ընդհանուր տարեկան ծախսերը կորոշվեն հետևյալ բանաձևից՝

$$Q = C_s(1/T)+C_1(DT/2):$$

Q-ն իր նվազագույն արժեքը կընդունի, երբ՝

$$T = \sqrt{2C_s/C_1D}: \qquad (3.3.1)$$

(3.3.1) բանաձևով որոշված T-ի արժեքը կարելի է ճշգրտել՝ ստուգումների համար հարմարավետ ժամանակահատված ստանալու նպատակով:

Եթե, օրինակ, հաշվարկների արդյունքում ստացվում է T=4,2 օր, ապա նպատակահարմար է կլորացնել և ընդունել մեկ շաբաթ (հինգ օր):

Օրինակ 10: Ենթադրենք՝ ինչ-որ արտադրատեսակի համար տարվա ընթացքում սպասարկման մակարդակը համընկնում է պակասուրդի ծավալի մեկ անգամ ի հայտ գալու հետ, ընդ որում կրկնվող պատվերի պարբերաշրջանը կազմում է չորս շաբաթ:

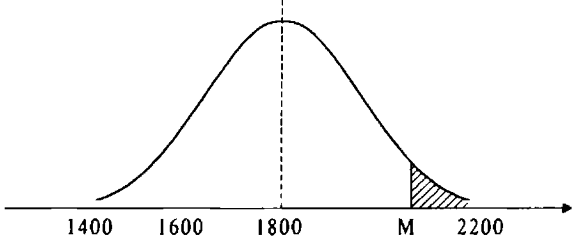
Ենթադրենք նաև, որ տարին բաղկացած է 50 շաբաթից, իսկ պատվերի մատակարարման հաստատագրված ժամանակահատվածը կազմում է 2 շաբաթ:

Տվյալ արտադրատեսակի շաբաթական պահանջարկը մոտարկվում է բնականոն /նորմալ/ բաշխմամբ, որի միջին արժեքը և քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար հավասար են՝ 300 և 50 միավորի:

Լուծում: Պաշարի պարբերաշրջանների տարեկան քանակը կկազմի 50/4=12,5, միավոր իսկ մեկ պարբերաշրջանում պաշարի պակասուրդի հավանականությունը՝ 1/12,5=0,08-ի: Հետևաբար, այն սպասարկման մակարդակը, որը պետք է ապահովել, հավասար է 0,92-ի:

Լուծման ընթացքում պետք է հաշվի առնել փոփոխուն պահանջարկը, որը ձևավորվում է կրկնվող պատվերի ամբողջ պարբերաշրջանի ընթացքում և մատակարարման ժամանակահատվածում:

Ելակետային տվյալների համաձայն փոփոխուն պահանջարկի միջին արժեքը և քառակուսային շեղումը 6 շաբաթում («պարբերաշրջանի տևողությունը՝ 4 շաբաթ» + «մատակարարման ժամանակահատվածը՝ 2 շաբաթ») համապատասխանաբար կկազմեն 6·300=1800 և $\sqrt{6 \cdot 50^2}$ միավոր արտադրանք: Պահանջարկի բաշխման գծանկարը բերված է ստորև:



Գծ.12

Պատվերի ծավալն ընտրվում է այնպես, որ պաշարի մակարդակն աճի մինչև M մեծությունը: M-ը իրենից ներկայացնում է միջին արժեքին գումարած z քանակությամբ շեղումներ, որտեղ

$$z = (M-1800)/122{,}5:$$

Նորմալ բաշխման աղյուսակից գտնում ենք՝ $P(z>(M-1800)/122{,}5) = 0.08$-ի և $z = 1{,}405$, հետևաբար՝ $M = 1800 + (1405 \cdot 122{,}5) = 1972{,}1$ միավոր:

Եզրակացություն՝ պաշարները 4 շաբաթը մեկ անգամ ստուգելու ժամանակ պետք է տրվի նոր պատվեր, որի չափը հնարավորություն կտա արտադրատեսակների պաշարի մակարդակը հասցնել 1972 միավորի: Այս դեպքում հնարավոր կլինի սպասարկման մակարդակը ապահովել 92%-ի չափով, կամ միջինում տարվա ընդացքում կլինի պաշարների մեկ պակասուրդ:

Բ մոդել՝ նվազագույն արժեքի ապահովում

Այն մոտեցումը, որը կիրառվեց Ա մոդելում, կարելի է օգտագործել նաև կրկնակի պատվերի գործնականում առավել ընդունելի պարբերաշրջանի տևողությունը որոշելիս:

Պաշարի այն M մակարդակը, որի դեպքում ստացվում է ընդհանուր տարեկան ծախսերի նվազագույն արժեքը, կարելի է որոշել համանմանորեն 3.2 ենթաբաժնում տրված եղանակով:

Օրինակ 11: Օգտագործելով 8-րդ օրինակի ելակետային տվյալները, որոշել կրկնակի պատվերի տրման հաստատագրված միջակայքը:

C_s=25000 դրամ/հեռուստացույց

D=475 հեռուստացույց /տարի

C=125000 դրամ/ հեռուստացույց

C_1=18750 դրամ/ հեռուստացույց

C_2=10000 դրամ/ հեռուստացույց

L=3 օր:

Լուծում: Կրկնակի պատվերի լավագույն միջակայքը որոշենք (3.3.1) բանաձևից՝

$$T=\sqrt{(2\cdot 25000)/(18750\cdot 475)}=0{,}07\text{տարի}=0{,}07\cdot 300=21\text{աշխատ. օր:}$$

Ենթադրելով, որ տարին բաղկացած է 50 6-օրյա աշխատանքային շաբաթից, կրկնակի պատվերի տրման առավել ընդունելի միջակայքը գործնականում նպատակահարմար է համարել 4 շաբաթը: Հերթական պատվերը կատարելիս նրա ծավալը պետք է լինի այնպիսին, որ պաշարների մակարդակը հասցվի մինչև M մեծություն, որովհետև այդ դեպքում նվազեցվում են պահուստային պաշարի պահպանության և պակասորդի հետ կապված ընդհանուր ծախսերը: Պահուստային պաշարի ծավալը որոշվում է որպես M-ի և կրկնակի պատվերի պահանջարկի միջին արժեքի տարբերություն:

Մեր օրինակում՝ կրկնակի պատվերի պարբերաշրջանը կազմում է 4·6=24 օր, իսկ մատակարարման ժամանակահատվածը՝ 3 օր: Այսպիսով, անհրաժեշտ է հաշվի առնել այն միջին պահանջարկը, որ առաջանում է 27 օրվա ընթացքում,այսինքն՝ (475/300)·27=42,75 հեռուստացույց: Պահուստային պաշարը հավասար կլինի M–42,75, իսկ նրանց պահպանության ծախսերը կկազմեն (M–42,75)·18750 դրամ/տարի: Սպասվելիք տարեկան այն ծախսերը, որոնք առնչվում են պաշարի պակասուրդի հետ, կախված են 27 օրվա ընթացքում պահանջարկի տատանումներից: Ցավոք, հետագա հաշվարկները հնարավոր չեն ելակետային տվյալների աղքության պատճառով: Գործնականում անհրաժեշտ կլիներ մոտարկել պահանջարկի բաշխումը և ստուգել նրա հուսալիությունը՝ հավաքագրելով լրացուցիչ տվյալներ: Միայն դրանից հետո հնարավոր կլիներ կատարել (3.2) ենթաբաժնում արված համանման վերջնական հաշվարկները:

3.4 Պատահական ընդհատուն և անընդհատ պահանջարկով պաշարների կառավարման մոդել

Ենթադրենք, որ T ժամանակահատվածի համար տրված է r պահանջարկի p(r) բաշխման օրենքը, կամ φ(r) հավանականությունների խտությունը: Եթե r պահանջարկը S պաշարից ցածր է (r≤S), ապա ավելցուկ արտադրանքի գնումը (պահպանությունը, վաճառքը) կպահանջի լրացուցիչ (S–r) C_1 ծախս և (r–S) C_2 ծախս, եթե պաշարները անբավարար են (r>S):

Պատահական ընդհատուն պահանջարկի դեպքում, որի բաշխման օրենքը p(r) է, ընդհանուր ծախսերի մաթեմատիկական սպասելին ունի հետևյալ տեսքը.

$$Q(S)=C_1\sum_{r=0}^{s}p(r)(S-r)+C_2\sum_{r>S}p(r)(r-S): \qquad (3.4.1)$$

Այստեղ առաջին գումարելին հաշվի է առնում գնման (պահպանության) այն ծախսերը, որոնք պայմանավորված են (S–r) միավոր ավելցուկային արտադրանքով,իսկ երկրորդը պայմանավորված է պակասուրդի հետևանքով (r–S) միավոր արտադրանքի տուգանքի մեծությամբ:

Պատահական անընդհատ պահանջարկի դեպքում, որը տրվում է $\varphi(r)$ հավանականությունների խտությամբ Q(S)- ի համար ունենք՝

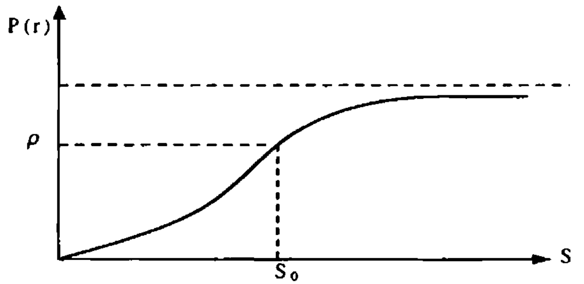
$$Q(S) = C_1\int_0^S (S-r)\;\;(r)dr + C_2\int_S^\infty (r-S)\;\;(r)dr\,:$$

Պաշարների կառավարման խնդրի լուծումը տվյալ դեպքում պատասխան է տալիս այն հարցին, թե ինչ՞ S_0 մակարդակի պաշարներ պետք է ապահովել, որպեսզի ընդհանուր ծախսերի մաթեմատիկական սպասելին ընդունի նվազագույն արժեք: Ապացուցված է (տե՛ս [6]), որ այն պետք է բա-վարարի հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը.

$$P(r \le S_0-1) < \rho < P(r \le S_0), \qquad (3.4.2)$$

որտեղ ρ-ն չբավարարված պահանջարկից առաջացած վնասների խտությունն է:

Պաշարի լավագույն մակարդակը՝ S_0-ն, անընդհատ պահանջարկի դեպքում, ըստ տրված ρ-ի արժեքի, հնարավոր է որոշել նաև գծանկարի միջոցով (տե՛ս գծ. 13):



Գծ.13

Օրինակ 12: Ձեռնարկությունը մտադիր է գնել սարքավորումներ իրենց պահեստամասերով: Վերջիններիս միավորի արժեքը 5 պդմ է: Սարքավորումը խափանվելու դեպքում պահեստամասի բացակայության պատճառով նրա պարապուրդը և ծախսերը՝ կապված նոր պատվերի իրականացման հետ, կազմում են 100 պդմ:

Սարքավորումների փորձնական բաշխումը ըստ փոխարինվող պահեստամասերի քանակի, տրված է 3.5 աղյուսակում:

Աղյուսակ 3.5

Փոխարինվող պահեստամասերի քանակը՝ r	0	1	2	3	4	5	6
r քանակությամբ պահեստամաս փոխարինելու հավանականությունը՝ P(r)	0.90	0.05	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00

Անհրաժեշտ է որոշել պահեստամասերի այն քանակը, որ անհրաժեշտ է գնել սարքավորման հետ, որպեսզի նվազագույնի հասցվեն ընդհանուր ծախսերը:

Լուծում: Ըստ պայմանի $C_1 = 5$, $C_2 = 100$, հետևաբար՝

$$\rho = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100}{5+100} = 0,952:$$

Պահանջարկի բաշխման ֆունկցիայի հաշվարկված արժեքները տրր-ված են 3.6 աղյուսակում:

Աղյուսակ 3.6

S = r	0	1	2	3	4	5	6	> 6
P(r ≤ S)	0.00	0.00	0.90	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00

Աղյուսակից երևում է, որ պաշարի լավագույն մակարդակն է $S_0=3$, որովհետև այդ արժեքի դեպքում բավարարվում է (3.4.2) անհավասարումը՝

$$P(3) < 0.952 < P(4):$$

Օրինակ 13: Լուծել նախորդ խնդիրը r պատահական պահանջարկի անընդհատության պայմանի դեպքում, երբ այն բաշխված է ցուցչային օրենքով՝

$$P(r) = 1 - e^{-\lambda r},$$

որտեղ $\lambda = 0.98$:

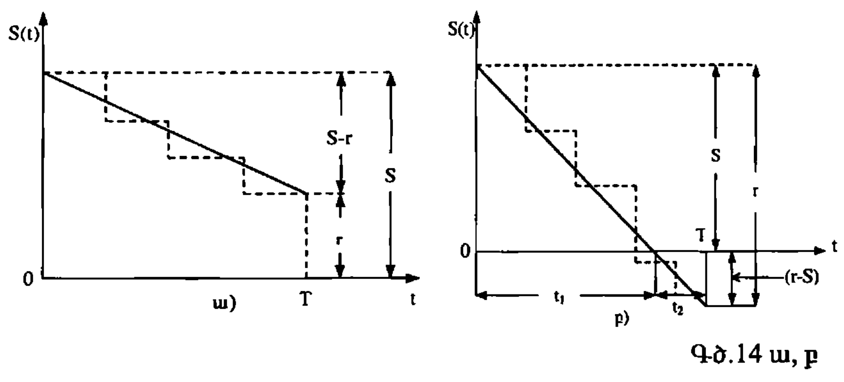
Լուծում: Պահեստամասերի պաշարների լավագույն մակարդակը՝ S_0-ն որոշենք $1 - e^{-\lambda S_0} = \rho$ հավասարումից

$$S_0 = -\frac{1}{\lambda}\ell n(1-\rho):$$

Տեղադրելով $\lambda = 0.98$, ստանում ենք

$$S_0 = -\frac{1}{0.98}\ell n 0.02 \approx 4:$$

Այս խնդրի պայմաններում ենթադրենք, որ պաշարի սպառումը միա-վոր ժամանակում հաստատուն է: Նման իրավիճակը կարելի է պատկերել գծանկարի միջոցով (գծ. 14):



Գծ.14 ա, բ

Այստեղ, 14(ա) գծանկարը համապատասխանում է $r \le S$ դեպքին, երբ պահանջարկը չի գերազանցում պաշարների մակարդակը, իսկ 14(բ) գծանկարը՝ այն դեպքին, երբ $r > S$: Հարկ է նշել, որ իրականում ինչպես և պատկերված է 14-րդ գծանկարներում, $S(t)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը աստիճանաձև բեկյալ է, բայց մոդելի հետազոտումը պարզեցնելու նպատակով մենք այն դիտարկում ենք ուղիղի տեսքով:

Պաշարների միջին մակարդակները, որոնք համապատասխանում են 14(ա) և 14(բ) դեպքերին համապատասխանաբար հավասար կլինեն՝

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{2}[S + (S - r)] = S - \frac{1}{2}r,$$

$$\overline{S}_2 = \frac{1}{2}(r - S)\frac{t_1}{T} = \frac{1}{2}\frac{S^2}{r} \quad (q=r):$$

Միջին պաշարների պակասուրդը t_2 ժամանակահատվածում, հաշվի առնելով, որ $t_1=ST/r$-ի և $t_2=(r-S)T/2$-ի վերջին դեպքում կկազմի՝

$$\overline{S}_3 = \frac{1}{2}(r - S)\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{2}\frac{(r - S)^2}{r}:$$

Ընդհանուր ծախսերի մաթեմատիկական սպասելին հավասար կլինի՝

$$Q(S) = C_1\sum_{r=0}^{S}(S - r/2)p(r) + C_1\sum_{r=S+1}^{\infty}S^2p(r)/2r + C_2\sum_{r=S+1}^{\infty}(r - S)^2p(r)/2r:$$

Ապացուցված է [6], որ $Q(S)$-ը նվազագույն արժեք է ընդունում այն S_0-ի համար, որը բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$[P[r \le (S-1)] + (S-1)\sum_{r=S}^{\infty}P(r)/r\,] < \rho < [P(r \le S) + (S + \tfrac{1}{2})\sum_{r=S+1}^{\infty}P(r)/r\,],$$

կամ պարզեցված տեսքով՝

$$L(S-1) < \rho < L(S), \qquad (3.4.3)$$

որտեղ

$$L(S) = P(r \le S) + (S + 1/2)\sum_{r=S+1}^{\infty}P(r)/r:$$

Օրինակ 14: Պահեստավորված արտադրանքը հավասարաչափ ծախսվում է մեկ ամսվա ընթացքում: Միավոր արտադրանքի պահպանության ծախսերը կազմում են 1 պղմ, իսկ տուգանքը միավորի պակասուրդի դեպքում՝ 20 պղմ է: Արտադրանքի պահանջարկի վերաբերյալ մեկ ամսվա կտրվածքով վիճակագրական տվյալները ներկայացված են 3.7 աղյուսակում:

Աղյուսակ 3.7

Պահանջարկը (r)	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Վիճակագրական հավանականություն՝ P(r)	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1	0.0

Անհրաժեշտ է որոշել մեկամսյա պաշարի լավագույն մակարդակը:

Լուծում: Նախ՝ որոշենք

$$\rho = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{20}{1+20} = 0.9524:$$

Հետագա հաշվարկների արդյունքները միաբերված են հետևյալ աղյուսակում.

Աղյուսակ 3.8

S	r	P(r)	$\frac{P(r)}{r}$	$\sum_{S+1}^{\infty} \frac{P(r)}{2}$	$\left(S+\frac{1}{2}\right)\sum_{S+1}^{\infty} \frac{P(r)}{r}$	$P(r \le S)$	$L(s) = P(r \le S) + \left(S+\frac{1}{2}\right)\sum_{S+1}^{\infty} \frac{P(r)}{r}$
0	0	0.1	∞	0.445	0.2225	0.1	0.3225
1	1	0.2	0.200	0.245	0.3675	0.3	0.6675
2	2	0.2	0.100	0.145	0.3625	0.5	0.8625
3	3	0.3	0.100	0.045	0.1575	0.8	0.9575
4	4	0.1	0.025	0.020	0.0900	0.9	0.9900
5	5	0.1	0.020	0.000	0.0000	1.0	1.0000
≥ 6	≥ 6	0.0	0.000	0.000	0.0000	1.0	1.0000

Աղյուսակից ընտրենք S_0-ի այն արժեքը, որ բավարարում է (3.4.3) պայմանին:

Ակնբախ է, որ դա S_0=3 արժեքն է: Հետևաբար՝ սպասվելիք նվազագույն գումարային ծախսերը կկազմեն՝

$$Q(3) = 1\cdot(0{,}1\cdot 3 + 0{,}2\cdot 2{,}5 + 0{,}2\cdot 2 + 0{,}3\cdot 1{,}5) + 1\cdot(0{,}1\cdot 1{,}125 + 0{,}1\cdot 0{,}9) +$$
$$+ 20\cdot(0{,}1\cdot 0{,}125 + 0{,}1\cdot 0{,}4) = 2{,}9095 \text{ պդմ}:$$

3.5 Պաշարների կառավարման մոդելներ, երբ մատակարարման հապաղումը հաստատագրված է ժամանակով

Պաշարների կառավարման՝ մինչև այժմ դիտարկվող մոդելներում ենթադրվում էր, որ պաշարների համալրումը գործնականում տեղի է ունենում ակնթարթորեն: Սակայն մատակարարման հապաղման ժամանակը որոշ իրավիճակներում այնքան նշանակալի է լինում, որ այն անտեսել չի կարելի և պետք է մոդելում հաշվի առնել:

Դիցուք՝ T ժամանակահատվածում պատվիրվել են n քանակությամբ արտադրանքի խմբաքանակներ՝ յուրաքանչյուրը Ct_s=T/n հաճախությամբ պարբերաշրջանում:

Նշանակենք $S_{\text{ն.պ}}$-ով պաշարի նախնական մակարդակը առաջին պարբերաշրջանի սկզբում,իսկ S_i, r_i և q_i-ով՝ համապատասխանաբար i-րդ ժամանակահատվածի պաշարի, պահանջարկի և պաշարի համալրման քանակները: Այդ դեպքում n-րդ ժամանակահատվածի վերջում պահեստ կմուտքագրվի $\sum_{i=1}^{n} q_i$, իսկ սպառումը կկազմի $\sum_{i=1}^{n} r_i$ միավոր արտադրանք, այսինքն՝

$$S_n = S_{ն.պ}+\sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} r_i ,$$

կամ

$$S_n = S-r, \text{ որտեղ } S = S_{ն.պ}+\sum_{i=1}^{n} q_i , r = \sum_{i=1}^{n} r_i :$$

Պահանջվում է որոշել խմբաքանակի հայտի այն ծավալը, որ անհրաժեշտ է պատվիրել վերջին՝ n-րդ ժամանակահատվածում:

Գումարային ծախսերի մաթեմատիկական սպասելին կորոշվի ըստ (3.4.1) բանաձևի, իսկ պաշարի լավագույն ծավալը՝ (3.4.3) կրկնակի անհավասարումից:

Որոշելով պաշարի S_0 լավագույն մակարդակը և գիտենալով $q_1,q_2,\ldots, q_{n-1}$ մեծությունները, հնարավոր է հաշվարկել վերջին պատվերի q_n-ի ծավալը՝

$$q_n = S_0-(S_{ն.պ.}+ \sum_{i=1}^{n} q_i)$$

բանաձևի օգնությամբ:

Օրինակ 15: Յուրաքանչյուր օր մատակարարվող շուտ փչացող մթերքը խանութում ընդունվում է հայտը ներկայացվելուց 7 օր հետո: Հերթական պատվերը ներկայացվելու պահին մթերքի պաշարը կազմում էր 10 պդմ: Միավոր քարմ մթերքը նույն օրն իրացվելիս տալիս է 0,95 պդմ եկամուտ, իսկ եթե այդ օրը չի իրացվում, ապա վաճառվում է 0,1 պդմ վնասով: Փորձնական տվյալների հիման վրա ստացվել է տվյալ մթերքի պահանջարկի հետևյալ բաշխումը.

Աղյուսակ 3.9

r	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
P(r)	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.12	0.14	0.13	0.10
r	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	>200
P(r)	0.08	0.05	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00

Հայտը ներկայացվելուց 7 օր հետո անհրաժեշտ է որոշել պատվիրվող մթերքի լավագույն q_7 ծավալը:

Լուծում: Որոշ հայտերի չբավարարելու հետևանքով վնասների խտությունը կազմել է՝

$$\rho = 0,95/(0,1+0,95) = 0,905:$$

Պահանջարկի բաշխման ֆունկցիայի հաշվարկված արժեքները բերված են 3.10 աղյուսակում:

Աղյուսակ 3.10

S	r	F(S)= P(r<S)	S	r	F(S)= P(r < S)	S	r	F(S)= P(r < S)	S	r	F(S)= P(r < S)
0	0	0.00	50	50	0.16	100	100	0.76	150	150	0.96
10	10	0.00	60	60	0.27	110	110	0.84	160	160	0.97
20	20	0.01	70	70	0.39	120	120	0.89	170	170	0.98
30	30	0.03	80	80	0.53	130	130	0.92	180	180	0.99
40	40	0.08	90	90	0.66	140	140	0.94	≥190	≥190	1.00

Վերը բերված (3.4.9) անհավասարմանը բավարարում է $S_0=120$ արժեքը, որովհետև $F(120) < 0.905 < F(130)$:Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը՝ յոթ օրվա համար լավագույն պաշարը կկազմի 120 պղմ: Հետևաբար՝ պատվիրվող մթերքի ծավալը յոթերորդ օրվա համար կլինի՝

$$q_7 = 120 - [10+(10+20+10+10+20+10)] = 30 \text{ պղմ:}$$

Ստուգողական հարցեր

1. Ինչպիսի՞ ծախսերից են կազմվում պաշարների կառավարման համակարգի գումարային ծախսերը:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում մատակարարվող արտադրանքի խմբաքանակների միջև ընկած լավագույն ժամանակահատվածը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում յուրաքանչյուր խմբաքանակի լավագույն ծավալը մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում պակասուրդի բացակայության դեպքում:
4. Ինչպե՞ս է որոշվում պատվերի լավագույն ծավալը պակասուրդով մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում:
5. Ինչպե՞ս են որոշվում գումարային ծախսերի նվազագույն մակարդակը պակասուրդի բացակայության և առկայության դեպքում:
6. Ինչպե՞ս են որոշվում պատվերների միջև ընկած լավագույն ժամանակի միջակայքը պակասուրդի բացակայության և առկայության դեպքում:
7. Ինչպե՞ս է որոշվում արտադրանքի խմբաքանակի լավագույն ծավալը արտադրության ոլորտում:
8. Ո՞ր մեծությունն է կոչվում չբավարարված պահանջարկների հետևանքով վնասների խտություն և դա ի՞նչ կարգավորիչ դեր է խաղում պակասուրդով ստատիկ մոդելում:
9. Նկարագրեք պաշարների լավագույն ծավալի հաշվարկման քայլաշարը գնազեղչով մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում:

10. Ինչպե՞ս է որոշվում արտադրանքների պաշարների լավագույն ծավալները սահմանափակ տարողությամբ պահեստային տարածքների դեպքում:
11. Նկարագրեք դինամիկ ծրագրման մոդելի կառուցվածքը մենարտադրանքային պաշարների կառավարման համակարգերում:
12. Ինչպիսի՞ տեսք ունի անդրադարձային հավասարումը մենարտադրանքային N փուլանոց դինամիկ մոդելում:
13. Պաշարների մակարդակի ո՞ր արժեքի դեպքում պետք է կատարել նոր պատվերի հայտ կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգում:
14. Ինչպիսի՞ն է ընդհանուր տարեկան ծախսերը կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգում:
15. Որո՞նք են հաստատագրված միջակայքի այն սահմանները, որի ներքո պետք է իրագործել պահանջարկի պատվերը:
16. Ի՞նչ ծավալով արտադրանք անհրաժեշտ է պատվիրել պարբերաշրջանային համակարգում:
17. Որոնք ե՞ն կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգերում պաշարների կառավարման A և B մոդելների էական տարբերությունները:
18. Ինչպե՞ս է որոշվում պաշարների տրման լավագույն ժամանակահատվածը կրկնվող պատվերի պարբերաշրջանային համակարգում:
19. Ինչպե՞ս են որոշվում պաշարների լավագույն մակարդակները պատահական ընդհատուն և անընդհատ պահանջարկներով պաշարների կառավարման մոդելներում:
20. Նկարագրեք պաշարների կառավարման մոդելը, երբ հաշվի է առնվում հաստատագրված ժամանակով մատակարարման հապաղումը

Գրականություն

1. Սահակյան Մ. Ա. և ուրիշներ. Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ /Գործույթների հետազոտում. Կառավարման գիտություն/ Մաս 1, Երևան, ԷԿԱԳՄԱՀԲ, 1997.
2. Томас Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. /Пер. с англ./-М.: Дело и сервиз, 1999.
3. Исследование операций в экономике. /Под ред. Н. Ш. Кремера/-М.: ЮНИТИ,1997.
4. Эддоус М., Стенсфилд П.Методы принятия решений /Пер. с англ./-М.: ЮНИТИ,1997.
5. Таха Х. Введение в исследование операций 2, /Пер. с англ./- М.: Мир, 1985.
6. Букан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами /Пер. с англ./ -М.: Наука,1977.
7. Кофман А. Методы и модели исследования операций /Пер. с франц./ - М.:Мир,1968.
8. Хедли Дж., Уайти Т. Анализ системы управления запасами /Пер. с англ./ -М.: Наука,1968.
9. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций /Пер. с англ./-М.: Наука,1968.
10. Winston W.L.Albright S.C. Practical Management Science, Duxbury Press, USA, 1997.
11. Hiller F, Liberman G. Introduction to operations research. McGrow Hill, USA, 1993.
12. Gould F, Eppen G, Schmidt C, Introductory management science. N.Y.: Englwood Cliffs ,1991.
13. Shogan A.Management science. Prentice Hall, USA, 1988.

X. ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՈՒՆՄԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

Ներկան անգո է, անցյալն՝ անորոշ,

գալիքն՝ անստույգ,...

Գրիգոր Նարեկացի,
Մատյան ողբերգության, բան Ծ,Ե,Գ,
Ե. 1979:

Մուտք

Ժամանակին և ճիշտ որոշումների ընդունումը ամեն մի անհատի և հատկապես ղեկավարի գործունեության առանցքն է: Միալ և պարզապես անհեթեթ որոշումները կարող են ունենալ անուղղելի, իսկ հաճախ նաև ճակատագրական հետևանքներ: Ուստի որոշումներ ընդունելիս շատ կարևոր է, որ բոլոր հնարավոր միջոցներն օգտագործվեն «լավագույն» որոշումը գտնելու համար:

Որոշումներ ընդունելիս անհրաժեշտ է հստակ ձևակերպել, թե ինչ է նշանակում «լավագույն» որոշում, ում համար է այն լավագույնն և ինչ նպատակով է ընդունվում: Միևնույն իրավիճակում որոշում ընդունող տարբեր անձինք կարող են կայացնել միմյանցից տարբեր, իսկ հաճախ նաև հակադիր որոշումներ: Այս իմաստով «լավագույն» որոշումների ընդունումը կախված է որոշումներ ընդունող անձի նախապատվություններից, նրա հետապնդած նպատակներից, փորձառությունից և այլ սուբյեկտիվ գործոններից: «Լավագույն» որոշումներ անձը կարող է ընդունել ինչպես ներըմբռնման, տրամաբանական, այնպես էլ տարբեր մաթեմատիկական եղանակների օգնությամբ:

Անկախ որոշումներ ընդունող անձի նախապատվություններից և նրա կողմից օգտագործվող եղանակներից, «լավագույն» որոշումներ կայացնելու համար անհրաժեշտ է իրականացնել հետևյալ ընթացակարգերը:

- Ձևակերպել լուծվող հիմնահարցի նպատակները:
- Ընտրել որոշումների գնահատման չափանիշները:
- Որոշել հիմնահարցի լուծման հնարավոր տարբերակները:
- Յուրաքանչյուր տարբերակի համար կանխատեսել հնարավոր ելքերը:
- Գնահատել առանձին ելքերի արդյունքները:
- Ըստ տրված չափանիշների ընդունել «լավագույն» որոշումները:

Որոշումների ընդունման խնդիրները և դրանց լուծման եղանակները շատ բազմազան են: Այդ խնդիրները կարող են դասակարգվել ըստ տարբեր հայտանիշների: Օրինակ՝ ըստ որոշումների գնահատման չափանիշների թվի տարբերում են մենաչափանիշ և բազմաչափանիշ որոշումների ընդունման խնդիրներ: Մենաչափանիշ խնդիրների լուծման տարբեր եղանակներին մենք ծանոթացել ենք առաջին հատորում [1] և այս գրքում: Ըստ անորոշությունների գործոնի՝ տարբերում են՝ որոշակիության (դետերմինիկ) և անորոշությունների (կամ ռիսկային) պայմաններում որոշումների ընդունման խնդիրներ: Որոշումների ընդունման դետերմինիկ խնդիրները բնորոշվում են լուծվող խնդրի մասին ամբողջական և հավաստի տեղեկատվության առկայությամբ: Այս տեսակի խնդիրներից են առաջին հատորից մեզ ծանոթ մաթեմատիկական ծրագրման խնդիրները:

Երկրորդ դասի խնդիրները ըստ անորոշությունների տեսակի բաժանվում են՝ հավանականային, «բնական» և վարքի անորոշություններով խնդիրների:

Ըստ որոշումներ ընդունողների թվի տարբերում են՝ որոշումների անհատապես և խմբովի ընդունման խնդիրներ:

Այս բաժնում կդիտարկվեն անորոշությունների (ռիսկի) պայմաններում, մեծաչափանիշ և երկչափանիշ անհատական որոշումների ընդունման խնդիրներում օգտագործվող չափանիշները, և լավագույն որոշումների ընդունման եղանակները:

1. Որոշումների ընդունման տարրեր

Որոշումների ընդունման ժամանակ անհրաժեշտ է առաջնորդվել որոշակի չափանիշներով: Եթե որոշված են հիմնախնդրի նպատակները, ապա որոշումներ ընդունողն ընտրում է հնարավոր որոշումների (լուծումների) գնահատման չափանիշները և լավագույն որոշումի ընդունման եղանակները: Մենք կդիտարկենք՝

- ***առանց ելքերի հավանականության արժեքների օգտագործման (կամ վարքի անորոշություններով) որոշումների ընդունման խնդիրներ:***
- ***ելքերի հավանականության արժեքների օգտագործմամբ (կամ հավանականային անորոշություններով) որոշումների ընդունման խնդիրներ:***

Վերն ասվածը կքննարկենք հետևյալ օրինակով:

Օրինակ 1: Ենթադրենք դուք «Առագաստ» սրճարանի տնօրենն եք: Հաճախորդների պահանջարկը բավարարելու համար ամեն առավոտ դուք պետք է գնեք որոշակի քանակությամբ գաթա: Նախորդ օրերին գաթայի պահանջարկի տվյալները բերված են 1-ին աղյուսակում:

Աղյուսակ 1

Գաթայի օրական պահանջարկը	1	2	3	4	5
Բացարձակ հաճախականությունը	5	10	15	15	5
Հարաբերական հաճախականությունը (հավանականությունը)	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Դիցուք՝ դուք գաթան կարող եք գնել հատը 70 դրամով և սրճարանում վաճառել 130 դրամով: Որպեսզի սրճարանը լավ համբավ ունենա դուք հաճախորդներին միշտ մատուցում եք թարմ գաքա, իսկ օրվա ընթացքում չիրացված գաքաները երեկոյան վաճառում եք հատը 30 դրամով: Ինչպես երևում է 1-ին աղյուսակից, ամեն առավոտ դուք կարող եք գնել 1-ից 5 գաքա: Ձեզ հարկավոր է որոշել ամեն առավոտ սրճարանի համար գնվող գաքաների քանակը:

1.1 Որոշումների ընդունման չափանիշներ

Վերը բերված խնդիրը ուսումնասիրենք որոշումների ընդունման տարբեր չափանիշների օգնությամբ: Այս դեպքում որոշումների ընդունման համար օգտվում են մաքսիմաքսի, մաքսիմինի, մինիմաքսի, Գուրվիցի, Սևիջի և այլ չափանիշներից և դրանց համապատասխան եղանակներից:

Նշենք, որ անորոշության պայմաններում որոշում կայացնելիս *(ինչքան գաքա գնել)* դուք չեք կարող վերահսկել դրանց համապատասխան ելքերը *(ինչքան գաքա կվաճառվի)*, քանի որ դրանք պայմանավորված են հաճախորդների պահանջարկով: Այսինքն՝ դիտարկվող խնդրում որոշումների ելքերը «անորոշության գործոններ» են:

Լավագույն որոշման ընտրության համար կազմենք հնարավոր լուծումների և դրանց համապատասխան ելքերի $A=\|a_{ij}\|$ մատրիցը, որտեղ a_{ij}-ն i որոշման և j ելքի դեպքում եկամուտի կամ կորուստի արժեքն է:

Դիտարկվող խնդրի բոլոր լուծումների և ելքերի համար եկամուտների արժեքները բերված են 2-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 2

Հնարավոր ելքերը. գաքայի օրական պահանջարկը	Վաճառքի համար առկա գաքայի քանակը (հնարավոր լուծումները)				
	1	2	3	4	5
1	60	20	-20	60	-100
2	60	120	80	40	0
3	60	120	180	140	100
4	60	120	180	240	200
5	60	120	180	240	300

Գտնենք խնդրի լավագույն լուծումները որոշումների ընդունման տարբեր չափանիշների դեպքում:

Ա. Մաքսիմաքսի չափանիշ

Այս չափանիշի դեպքում լավագույն որոշումն ընտրվում է առավելագույն եկամուտի մաքսիմացման պայմանից: Սկզբում, ըստ եկամուտների A մատրիցի տողերի, որոշվում են $\max_j(a_{ij})$-երը, այնուհետև՝ $\max_i \max_j(a_{ij})$ պայմանից ընտրվում է լավագույն որոշումը:

3-րդ աղյուսակում բերված են բոլոր հնարավոր որոշումների համար առավելագույն եկամուտները: Ինչպես երևում է աղյուսակից, այս չափանիշի դեպքում ամեն առավոտ սրճարանը պետք է գնի 5 զաքս:

Աղյուսակ 3

Օրվա ընթացքում առկա զաքայի քանակը	Օրվա առավելագույն եկամուտը, (դրամ)
1	60
2	120
3	180
4	240
5	300 ← առավելագույն

Նշենք, որ նման չափանիշի դեպքում, երբ որոշումն ընդունվում է ըստ հնարավոր առավելագույն եկամուտի մեծության և անտեսվում են մյուս տարբերակները, ընդունված որոշումը կապված է մեծ ռիսկի հետ և համապատասխանում է խաղամոլի վարքին:

Բ. Մաքսիմինի չափանիշ

Այս չափանիշը համապատասխանում է որոշումների ընդունման հոռետեսական մոտեցմանը: Լավագույնն է համարվում այնպիսի որոշումը, որը մաքսիմացնում է նվազագույն եկամուտը: Սկզբում եկամուտների A մատրիցից հաշվում են $\min_j(a_{ij})$ -ն, որից հետո $\max_i \min_j(a_{ij})$ պայմանից գտնվում է լավագույն որոշումը:

Աղյուսակ 4

Օրվա ընթացքում առկա զաքայի քանակը	Օրվա նվազագույն եկամուտը, (դրամ)
1	60 ← առավելագույնը
2	20
3	– 20
4	– 60
5	– 100

Դիտարկվող խնդրում նվազագույն եկամուտների արժեքները բերված են 4-րդ աղյուսակում: Մաքսիմինի չափանիշի համաձայն սրճարանը ամեն առավոտ պետք է գնի մեկ զաքս:

Գ. Մինիմաքսի չափանիշ

Այս չափանիշի դեպքում լավագույն է համարվում այնպիսի որոշումը, որը մինիմացնում է առավելագույն հնարավոր կորուստները: Այս դեպքում A մատրիցի տարրերը ցույց են տալիս տարբեր ելքերին համապատասխանող հնարավոր կորուստների արժեքները: Բոլոր լուծումների համար հաշվարկվում են առավելա գույն կորուստների արժեքները՝ $\max_j(a_{ij})$ -ն, այնուհետև ընտրվում է

$\max_j(a_{ij})$-ի նվազագույն արժեքն ապահովող լուծումը՝ $\min_i \max_j(a_{ij})$-ն: Օրինակ, եթե գաքայի պահանջարկը հավասար է 2-ի և սրճարանը գնել է 2 գաքա, ապա նրա եկամուտը կկազմի 120 դրամ: Եթե նույն պահանջարկի դեպքում սրճարանը գնել է 3 գաքա, ապա նրա եկամուտը կկազմի 80 դրամ, իսկ հնարավոր կորուստը՝ 40 դրամ: Այս 40 դրամը անվանում են բաց թողնված եկամուտ կամ հնարավոր կորուստ: Դիտարկվող խնդրում սխալ որոշումների դեպքում հնարավոր կորուստների արժեքները բերված են 5-րդ աղյուսակում, իսկ տարբեր ելքերի համար առավելագույն հնարավոր կորուստները՝ 6-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 5

Հնարավոր ելքերը. գաքայի օրական պահանջարկը	Վաճառքի համար առկա գաքայի քանակը (լուծումների տարբերակներ)				
	1	2	3	4	5
1	0	40	80	120	160
2	60	0	40	80	120
3	120	60	0	40	80
4	180	120	60	0	40
5	240	180	120	60	0

Աղյուսակ 6

Օրվա ընթացքում առկա գաքայի քանակը	Օրվա ընթացքում առավելագույն հնարավոր կորուստը, (դրամ)
1	240
2	180
3	120 ← նվազագույնը
4	120 ←նվազագույնը
5	160

Ինչպես երևում է 6-րդ աղյուսակից, այս չափանիշի դեպքում լավագույն որոշումը համապատասխանում է սրճարանի կողմից օրական 3 կամ 4 գաքա գնելուն: Այս դեպքում երկու որոշումներն էլ համարժեք են:

Դ. Գուրվիցի փոխզիջումային չափանիշ

Գուրվիցի չափանիշը ծայրաստիճան՝ լավատեսական և հոռետեսական վարքերի միջև հաշվեկշիռ է հաստատում h և 1- h կշռային գործակիցների միջոցով, որտեղ $h \in [0,1]$ միջակայքին և կոչվում է հոռետեսության գործակից: Այս չափանիշի դեպքում լավագույն որոշում ընդունելու համար սկզբում ընտրվում է h գործակիցը: Եթե A մատրիցի տարրերը ցույց են տալիս տարբեր ելքերի դեպքում հնարավոր եկամուտները, ապա որոշվում են

$$h \max_j a_{ij} + (1-h) \min_j a_{ij} \qquad (1.1ա)$$

արժեքները, իսկ հնարավոր կորուստների դեպքում որոշվում են

$$h\min_j a_{ij} + (1-h)\max_j a_{ij} \qquad (1.1բ)$$

արժեքները:

Լավագույն որոշումն ընդունվում է հետևյալ պայմաններից.

$$\max_i [h\max_j a_{ij} + (1-h)\min_j a_{ij}] \qquad (1.2ա)$$

$$\min_i [h\min_j a_{ij} + (1-h)\max_j a_{ij}]: \qquad (1.2բ)$$

Գուրվիցի չափանիշի դեպքում սկզբում հաշվում են լավագույն և վատագույն տարբերակները: Այնուհետև (1.1ա) և (1.1բ) բանաձևերով որոշվում են գումարային միջինները: Լավագույն որոշումն ընդունվում է համաձայն (1.2ա) և (1.2բ) չափանիշների: Խնդրի h գործակիցը, եկամուտների լավագույն և վատագույն արժեքները բերված են 7-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 7

Օրվա ընթացքում առկա զաքայի քանակը	Օրվա եկամուտը, (դրամ)		Կշռային h գործակիցը		Ընդամենը (օր/դրամ)
	ցածր	բարձր	0.4	0.6	
1	60	60	2.4	3.6	60
2	20	120	8	72	80
3	–20	180	– 8	108	100
4	– 60	240	– 24	144	120
5	– 100	300	– 40	180	140 ← առավելագույնը

Նվազագույն եկամուտն ստացվում է մեկ զաքայի, իսկ առավելագույնը՝ 5 զաքայի գնման դեպքում: Եթե հոռետեսության h գործակիցը հավասար է 0.4-ի, ապա ըստ Գուրվիցի, լավագույն որոշումն է 5 զաքայի գնումը:

Ե. Սևիջի ափսոսանքի չափանիշ

Մինիմաքսի չափանիշը այնքան «հոռետեսական» է, որ հաճախ կարող է բերել ոչ տրամաբանական որոշումների: Սևիջի չափանիշը թույլ է տալիս ուղղել վիճակը կորուստների նոր B մատրիցի ներմուծմամբ: B մատրիցը կոչվում է «ափսոսանքի» մատրից, իսկ նրա տարրերը ցույց են տալիս «իրական և ամենաբարենպաստ լուծումների միջև» «ափսոսանքի» արժեքը: B մատրիցի b_{ij} տարրերը որոշվում են հետևյալ բանաձևից՝

$$b_{ij} = \begin{cases} \max\limits_k (a_{kj}) - a_{ij}, & \text{եթե } a_{ij} \text{ եկամուտ է} \\ a_{ij} - \min\limits_k (a_{kj}), & \text{եթե } a_{ij} \text{ կորուստ է} \end{cases}$$

որտեղ b_{ij} տարրերը հավասար են j-րդ սյունակի լավագույն՝ $\max\limits_j(a_{ij})$ արժեքի և a_{ij}–ի տարբերությանը: Այսպիսով, b_{ij}-երը արտահայտում են որոշում ընդունողի «ափսոսանքը», երբ նա j ելքի դեպքում չի ընդունել լավագույն որոշում: Սևիջի չափանիշի դեպքում անկախ նրանից, թե A մատրիցի a_{ij} տարրերը եկամուտներ են, թե կորուստներ B մատրիցի տարրերը կորուստներ են: Հետևաբար Սևիջի չափանիշի դեպքում լավագույն որոշումը ընդունվում է միայն մինիմաքսի չափանիշի օգնությամբ.

$$\min_i \max_j (b_{ij}):$$

Մեր խնդրում լավագույն որոշումն է 5 զաքայի գնումը:

Ինչպես տեսնում ենք տարբեր չափանիշների դեպքում ստացվում են տարբեր արդյունքներ:

Զ. Առավելագույն հավանականության չափանիշ

Այս չափանիշի դեպքում լավագույն որոշումն ընդունվում է համաձայն ամենահավանական եկամուտների մաքսիմացման պայմանի:

Հիշեցնենք, որ դիտարկվող խնդրում զաքայի պահանջարկի հավանականությունները տրված են 1-ին աղյուսակում:

Առավելագույն 0.3 հավանականությունը համապատասխանում է 3 և 4 զաքայի պահանջարկին: Այժմ դիտարկենք այս ելքերի համար եկամուտները և ընտրենք դրանցից առավելագույնը (տե՛ս. աղ.8):

Աղյուսակ 8

Օրվա ընթացքում առկա զաքայի քանակը	Օրվա առավելագույն եկամուտը (դրամ)
3	180, երբ գնված է 3 և ավելի
4	240, երբ գնված է 4 և ավելի ←առավելագույնը

Պարզ է, որ այս չափանիշի դեպքում սրճարանը պետք է գնի 4 զաքա:

Է. Միջին արժեքի օպտիմացման չափանիշ

Որոշումների ընդունման խնդիրներում հավանականությունների օգտագործման ամենատարածված եղանակը եկամուտների կամ կորուստների միջին արժեքների օպտիմացումն է: Այս դեպքում լավագույն որոշումն ընտրվում է համաձայն միջին եկամուտի մաքսիմացման կամ միջին կորուստի մինիմացման չափանիշի: Մենք կօգտվենք միջին եկամուտների մաքսիմացման չափանիշից: Դիցուք՝ E(m)-ը միջին եկամուտն է՝

$$E(m) = \sum_{i=1}^{n} m_i p_i :$$

Այստեղ m_i-ն և p_i-ն i-րդ ելքի եկամուտի և հավանականության արժեքներն են, իսկ n-ը՝ ելքերի քանակն է:

5 զաքայի գնման դեպքում E(m)-ի արժեքը հավասար է՝

$$E(m) = 0.1\times(-100)+(0.2\times0.0)+(0.3\times100)+(0.3\times200)+(0.1\times300) = 110 \text{ դրամ}:$$

Այսինքն՝ սրճարանի օրական միջին եկամուտը կկազմի 110 դրամ:

9-րդ աղյուսակում բերված են տարբեր որոշումների դեպքում սրճարանի միջին եկամուտի արժեքները:

Աղյուսակ 9

Գաքայի օրական հնարավոր պահանջարկը	Օրվա եկամուտը (դրամ) Օրվա ընթացքում գնված զաքաների քանակը (լուծումների տարբերակներ)					Հավանականությունը
	1	2	3	4	5	
1	60	20	– 20	– 60	– 100	0.1
2	60	120	80	40	0	0.2
3	60	120	180	140	100	0.3
4	60	120	180	240	200	0.3
5	60	120	180	240	300	0.1

Ինչպես հետևում է 10-րդ աղյուսակի տվյալների վերլուծությունից, սպասելի եկամուտների առավելագույն արժեքը հավասար է 140 դրամի: Լավագույն որոշմանը համապատասխանում է 3 կամ 4 զաքայի գնումը:

Աղյուսակ 10

Հնարավոր ելքերը, զաքայի պահանջարկը օրվա ընթացքում	Օրվա ընթացքում գնված զաքաների քանակը (լուծումների տարբերակներ)				
	1	2	3	4	5
1	6	2	– 2	– 6	– 10
2	12	24	16	8	0
3	18	36	54	42	30
4	18	36	54	72	60
5	6	12	18	24	30
Օրվա սպասելի եկամուտը (դրամ)	60	110	140	140	110

Կորուստների մինիմացման դեպքում որոշումների ընդունման համար օգտվում են կորուստների աղյուսակից և հնարավոր ելքերի հավանականություններից (աղյուսակ 11):

Աղյուսակ 11

Հնարավոր ելքերը՝ օրվա պահանջարկը	Հնարավոր կորուստը, օրվա ընթացքում առկա զաքաների քանակը					Հավանականությունը
	1	2	3	4	5	
1	0	40	80	120	160	0.1
2	60	0	40	80	120	0.2
3	120	60	0	40	80	0.3
4	180	120	60	0	40	0.3
5	240	180	120	60	0	0.1

Լավագույն համարվում է այնպիսի որոշումը, որն ապահովում է նվազագույն միջին կորուստ:

Ինչպես տեսնում ենք 12-րդ աղյուսակից, դիտարկվող խնդրում նըվազագույն կորուստը հավասար է 46 դրամի: Այսինքն՝ այս դեպքում ես լավագույն լուծմանը համապատասխանում է 3 կամ 4 զաքա գնելը:

Աղյուսակ 12

Հնարավոր ելքերը, օրվա պահանջարկը	Օրվա ընթացքում առկա զաքաների քանակը				
	1	2	3	4	5
1	0	4	8	12	16
2	12	0	8	16	24
3	36	18	0	12	24
4	54	36	18	0	12
5	24	18	12	6	0
Օրվա սպասելի հնարավոր կորուստը (դրամ)	126	76	46	46	76

1.2 Հավաստի տեղեկատվության արժեքը

Որոշումների ընդունման խնդիրներում անորոշությունը կարելի է փոքրացնել լրացուցիչ տեղեկություններ հավաքելով: Հասկանալի է, որ նման տեղեկատվության համար հարկավոր է վճարել: Այն առավելագույն գումարը, որ նման դեպքում պետք է վճարել կազմում է հավաստի տեղեկատվության արժեքը: Եթե նախօրոք հայտնի է, թե ինչպիսի ելք կիրականանա, ապա կարելի է ընդունել այնպիսի որոշում, որն ապահովի առավելագույն եկամուտ: Օրինակ, «Առագաստ» սրճարանի խնդրում ճշտելով հաճախորդների կողմից գնվող զաքաների քանակը, կարելի է հասնել առավելագույն եկամտի: Գնվող զաքաների քանակի վրա այստեղ ազդում է դրանց պահանջարկը: Սպասվող միջին եկամուտը հավասար է՝

$$60\times0.1+120\times0.2+180\times0.3+240\times0.3+300\times0.1=186 \text{ դրամ}$$

Հավաստի տեղեկատվության արժեքը հավասար է ստացված միջին եկամուտի՝ 186 դրամի և առանց հավաստի տեղեկատվության առավելագույն սպասելի միջին եկամուտի՝ 140 դրամի, տարբերությանը՝ 186 140 = 46 դրամ:

Այսպիսով հավաստի տեղեկատվության արժեքն է 46 դրամ:

Եթե հայտնի է հավաստի տեղեկատվության արժեքը, ապա հայտնի է այն առավելագույն գումարը, որ կարելի է վճարել ելքերի հավանականությունների մասին լրացուցիչ տեղեկությունների համար: Դիտարկվող խնդրում զաքայի պահանջարկի մասին ճշգրիտ տեղեկատվության համար սրճարանը կարող է վճարել օրական 46 դրամ:

1.3 Ռիսկի գնահատման համար միջին արժեքի և կանոնական շեղման օգտագործումը

Ըստ միջին եկամուտների կամ միջին կորուստների լավագույն որոշումներ ընդունելու համար նախորդ բաժնում մենք օգտվեցինք եկամուտների կամ կորուստների աղյուսակներից: Այդ աղյուսակները հաճախ լրացվում են նաև հնարավոր տարբեր ելքերի եկամուտների հավանականությունների արժեքներով, որոնց վերլուծությունը թույլ է տալիս գնահատել յուրաքանչյուր հնարավոր որոշման ռիսկի աստիճանը:

Որոշումների ռիսկի գնահատման համար սովորաբար օգտագործում են եկամուտների միջին քառակուսային՝ կանոնական շեղումը կամ ցրվածքը: Դիտարկենք երկու ներդրումների եկամտաբերության և ռիսկի համեմատման խնդիրը:

Օրինակ 2: Դիցուք՝ տրված են երկու ներդրումների հնարավոր զուտ եկամուտները և դրանց հավանականությունները (աղյուսակ 13):

Աղյուսակ 13

	Համեմատվող տարբերակները							
Զուտ եկամուտը (մլն. դրամ) m_i	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Հավանականությունները P_i							
Ա ներդրում	0	0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	0
Բ ներդրում	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2

Առաջին ներդրման համար միջին եկամուտը հավասար է

$$E_1=(-3\times0)+(-2\times0)+(-1\times0.1)+(0\times0.2)+(1\times0.3)+(2\times0.3)+(3\times0.2)+(4\times0)=$$
$$=1200000 \text{ դրամ:}$$

Երկրորդ ներդրման դեպքում՝

$$E_2=(-3\times0.0)+(-2\times0)+(-1\times0.1)+(0\times0.1)+(1\times0.1)+(2\times0.1)+(3\times0.2)+(4\times0.2)=$$
$$=1100000 \text{ դրամ:}$$

Եթե համեմատենք միայն ներդրումների միջին եկամուտները, ապա ակնհայտ է, որ առաջին ներդրումը լավագույնն է: Սակայն նման գնահատականը հաշվի չի առնում դիտարկվող ներդրումների ռիսկը, այսինքն՝ հնարավոր արդյունքների ցրվածքը: Այս խնդրում ներդրումների ռիսկը կարելի է գնահատել դրանց եկամուտների ցրվածքի կամ միջին քառակուսային (կանոնական) շեղման՝ σ-ի օգնությամբ:

Հավանականությունների բաշխման ցրվածքը σ^2 կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով.

$$\sigma^2 = \sum_i p_i m_i^2 - (E(m))^2 ,$$

որտեղ m_i-ն i-րդ ներդրման եկամուտն է, իսկ p_i-ն տվյալ եկամուտի ստացման հավանականությունն է: 14-րդ աղյուսակում բերված են երկու ներդրումների միջին եկամուտների արժեքները և համապատասխան հաշվարկները:

Աղյուսակ 14

Եկամուտը (մլն. դրամ)	Ա ներդրում			Բ ներդրում		
m	p	pm	pm^2	p	pm	pm^2
– 3	0	0	0	0.1	– 0.3	0.9
– 2	0	0	0	0.1	– 0.2	0.4
– 1	0.1	– 0.1	0.1	0.1	– 0.1	0.1
0	0.2	0	0	0.1	0	0
1	0.3	0.3	0.3	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.4	0.8	0.1	0.2	0.4
3	0.2	0.6	1.8	0.2	0.6	1.8
4	0	0	0	0.2	0.8	3.2
Ընդամենը	1.0	1.2	3.0	1.0	1.1	6.9

Առաջին ներդրման համար՝

$$\sigma_1^2 = 3.0 - (1.2)^2 = 1.56:$$

Որտեղից ներդրման ռիսկի համար կստանանք՝

$$\sigma_1 = \sqrt{1.56} = 1.25 \text{ մլն. դրամ:}$$

Երկրորդ ներդրման ռիսկի համար համապատասխանաբար՝

$$\sigma_2^2 = 6.9 - (1.1)^2 = 5.69, \quad \sigma_2 = \sqrt{5.69} = 2.385 \text{ մլն դրամ:}$$

Ինչպես երևում է ստացված տվյալներից, առաջին ներդրման ռիսկը ավելի փոքր է, քան երկրորդինը (1.25<2.385) և եթե որպես որոշումների ընդունման չափանիշ օգտագործվի ռիսկի մեծությունը, ապա ակնհայտ է, որ նախապատվությունը պետք է տրվի առաջին ներդրմանը: Դիտարկվող խնդրում ինչպես ցույց է տալիս սպասելի եկամուտների և ռիսկի համեմատությունը, նախընտրելին առաջին ներդրումն է:

1.4 Որոշումների օգտակարության գնահատում

Դիտարկված օրինակների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ որոշումների ընդունման միևնույն խնդիրը լուծելիս տարբեր չափանիշների կիրառումը կարող է հանգեցնել տարբեր լուծումների:

Քննարկման ժամանակ մենք հաշվի չառանք, թե այդ չափանիշներն ընտրող անձը ինչին է նախապատվություն տվել: Այսինքն՝ որոշումների ընդունման ժամանակ այդ անձը որքանով է հակված ռիսկի դիմելու, կամ նրա համար ինչ արժեք ունեն տվյալ մեծությամբ եկամուտը կամ կորուստը: Օգտակարության վերլուծությունը որոշում ընդունողին թույլ է տալիս ըստ իր նախապատվությունների գնահատել տարբեր որոշումների օգտակարությունը և վերը քննարկված չափանիշների օգնությամբ դրանցից ընտրել լավագույնը: Քանի որ եկամուտների (կամ կորուստների) միևնույն արժեքները որոշում ընդունող տարբեր անձանց համար կարող են ունենալ տարբեր օգտակարություն, ապա հասկանալի է, որ որոշումների ընդունման միևնույն չափանիշի դեպքում նրանք կտանան տարբեր «զավազույն» լուծումներ:

Օրինակ 3: Ավածը քննարկենք 500 պդմ ներդրումների երկու տարբերակների համեմատման օրինակով: Առաջին տարբերակի համաձայն գումարը կարելի է ներդրել ռիսկազերծ գործարքի մեջ տարեկան 10%-ով և տարվա վերջին ստանալ 550 պդմ: Ըստ երկրորդ տարբերակի, գումարը կարելի է ներդրել ռիսկավոր գործարքի մեջ և տարվա վերջին կամ ստանալ 1000 պդմ, կամ կորցնել ամբողջ գումարը: Տեսնենք թե ինչպիսին է 550 պդմ-ի օգտակարությունը որոշումներ ընդունող տարբեր անձանց համար:

Դիցուք՝ առաջին ներդրողը ուսանող է, որն այդ գումարով պետք է վճարի իր հաջորդ տարվա ուսման վարձը: Այս գումարի կորուստը նրան կզրկի ուսումը շարունակելու հնարավորությունից ուստի այդ ներդրման օգտակարությունը նրա համար շատ բարձր է: Օգտակարության գնահատման համար ուսանողին առաջարկենք նախքան որևէ որոշում կայացնելը գնահատել այն առավելագույն P հավանականությունը, երբ 550 պդմ հավաստիորեն ստանալու կամ P հավանականությամբ 1000 պդմ ստանալու և 1–P հավանականությամբ կրախի մատնվելու ելքերը իր համար համարժեք են:

Դիցուք՝ P=0.95: Եթե U(x)-ով նշանակենք x գումարի օգտակարությունը, ապա՝

$$U_1(550) = P\,U(1000)+(1-P)\,U(0):$$

Եթե U(0)-ն ընդունենք հավասար է 0-ի, իսկ U(1000)=100-ի, ապա 550 պդմ-ի օգտակարությունը կգնահատվի 95 միավոր: Պետք է նշել, որ օգտակարության սանդղակը կարող է ընտրվել կամայականորեն: Գործնականում հաճախ են օգտագործվում [0.1] և [0.100] միջակայքերը:

Այսպիսով դրամական 0-550-1000 սանդղակը փոխարինվեց օգտակարության 0-95-100 սանդղակով:

Դիցուք՝ երկրորդ ներդրողը 500000 պդմ դրամագլուխ ունեցող ձեռներեց է: Հասկանալի է, որ 500 պդմ-ի կորուստը նրա համար էական նշանակություն չունի, և որոշման ընդունման ժամանակ ռիսկը մեծ դեր չի խաղում: Ձեռներեցին նույնպես առաջարկենք գնահատել P հավանականությունը: Դիցուք՝ այս դեպքում P=0.2-ի: Հետևաբար 550 պդմ-ի օգտակարությունը նրա համար հավասար կլինի՝

$$U_2(550) = 0.2\times U(1000)+0.8\times U(0) = 0.2\times 100 = 20:$$

Այսինքն՝ ձեռներեցի համար 550 պդմ-ն ունի 20 միավոր օգտակարություն: Այս դեպքում գումարային 0-550-1000 սանդղակը փոխարինվում է 0-20-100 օգտակարության սանդղակով:

Այսպիսով միևնույն գումարային սանդղակը կարելի է փոխարինել տարբեր օգտակարության սանդղակներով: Օգտակարության սանդղակի կիրառման առավելությունների քննարկման համար դիտարկենք ներդրումների հետ կապված միջին եկամտի մաքսիմացման հետևյալ խնդիրը:

Օրինակ 4: Դիցուք՝ դուք ունեք 5000 պդմ բնակարան գնելու համար: Նման գումարը չի բավարարում բնակարան գնելու, և դուք պատրաստ եք

5000 պդմ ներդրել որևէ գործարքի մեջ: Ձեզ առաջարկվում է գումարի ներդրման երկու տարբերակ: Առաջինի դեպքում գումարը տարեկան 9%-ով ներդրվում է բանկում, և տարվա վերջին դուք ստանում եք 5450 պդմ: Երկրորդ տարբերակի դեպքում գումարը ներդրվում է ռիսկավոր գործարքի մեջ, որի հաջողության հավանականությունը հավասար է 0.3-ի և տարվա վերջին դուք կարող եք ստանալ 30000 պդմ: Գործարքի ձախողման դեպքում՝ 0.7 հավանականությամբ դուք կարող եք կորցնել 5000 պդմ գումարը:

Յուրաքանչյուր տարբերակի եկամուտները բերված են ստորև:

Աղյուսակ 15

Հնարավոր ելքերը	Գումարի ներդրման հնարավոր տարբերակները		Հավանականությունը
	Գործարք	Բանկ	
Հաջողված գործարք	30000	-	0.3
Չհաջողված գործարք	0	-	0.7
Միջին եկամուտը (պդմ)	9000	5450	

Ինչպես երևում է աղյուսակից, ըստ դրամական սանդղակի առավելագույն միջին եկամուտը ստացվում է գումարը գործարքի մեջ ներդնելու դեպքում: Սակայն նման ներդրումը կապված է մեծ ռիսկի հետ, և գործարքի ձախողման դեպքում դուք կկորցնեք ամբողջ գումարը և տուն գնելու հնարավորությունը: Օգտակարության սանդղակը ունի հետևյալ տեսքը .

0 – նվազագույն եկամուտ – 0 պդմ,

100 – առավելագույն եկամուտ - 30000 պդմ:

Այսինքն՝ U(0)=0 և U(30000)=100 միավոր: Նախորդ օրինակի նմանությամբ որոշենք 5450 պդմ-ի օգտակարությունը: Դիցուք՝ գործարքի հաջողության 0.6 հավանականության դեպքում ներդրման երկու տարբերակներն էլ ձեզ համար համարժեք են: Հետևաբար, առաջին ներդրման օգտակարությունը՝ U(5450)-ը հավասար կլինի՝

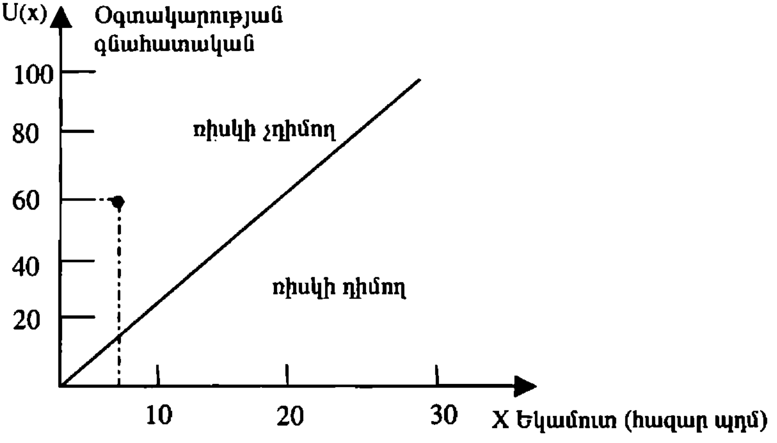
$U(5450) = 0.6 \times U(30000) + 0.4 \times U(0) = 0.6 \times 100 + 0.4 \times 0 = 60$ /միավոր/:

Դիտարկվող խնդրի համար օգտակարության գնահատականները բերված են 16-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 16

Հնարավոր ելքերը	Գումարի ներդրման հնարավոր տարբերակները		Հավանականություն
	Գործարք	Բանկ	
Հաջողված գործարք	100	-	0.3
Չհաջողված գործարք	0	-	0.7
Միջին օգտակարությունը	30	60	

Ինչպես հետևում է աղյուսակից ըստ առավելագույն միջին օգտակարության լավագույն լուծմանը համապատասխանում է գումարի ռիսկազերծ ներդրումը, որը առավելագույն միջին եկամտի չափանիշի համաձայն ընդունված որոշման ուղղակի հակադարձն է: Նման արդյունքը պայմանավորված է գործարքի հաջողության մեծ ռիսկով: Այդ ռիսկի գնահատման համար կառուցենք օգտակարության գնահատականների եկամուտներից կախման կորը: (0,U(0))=(0,0) և (30000,U(30000))=(0,100) կետերը միացնելով կստանանք մի ուղիղ գիծ (տե՛ս գծ. 1).



Գծ.1

Եթե 5450 դրմ-ի օգտակարության գնահատականը՝ (5450,U(5450)) = = (5450,60) կետը, գծից բարձր է, ապա դուք զգուշավորությամբ եք ընդունում որոշումները, հակառակ դեպքում, դուք նախընտրում եք ռիսկավոր ներդրումները: Դիտարկվող խնդրի դեպքում դուք նախընտրում եք ռիսկի չդիմելու զգուշավոր վարքը:

2. Որոշումների ծառ

Դիտարկված օրինակներում որոշումների ընդունումը կատարվում էր մեկ անգամ: Գործնական շատ խնդիրներում հաճախ ենք հանդիպում հաջորդական որոշումների ընդունման անհրաժեշտությանը, երբ ընդունված որոշումը պայմանավորում է մի այլ որոշում (կամ որոշումներ) ընդունելու անհրաժեշտությունը: Որոշումների նման հաջորդականությունը հնարավոր չէ նկարագրել և հետազոտել եկամուտների աղյուսակների օգնությամբ: Այսպիսի դեպքերում օգտվում են այսպես կոչված որոշումների ծառի եղանակից:

Որոշումների ծառը իր կառուցվածքով նման է հավանականության տեսությունից մեզ հայտնի հավանականությունների ծառին: Այս եղանակն օգտագործում են այն դեպքերում, երբ անորոշության պայմաններում անհրաժեշտ է ընդունել տարբեր որոշումներ, որոնցից յուրաքանչյուրը կախված է ընդունված նախորդ որոշման (որոշումների) կամ ելքի (ելքերի) արդյունքներից:

Որոշումների ծառը արտացոլում է լուծվող հիմնախնդրի կառուցվածքը և կազմված է քնից, հանգույցներից ու դրանցից դուրս եկող ճյուղերից: Որոշումների ծառը ներկայացվում է ձախից աջ: Նրա ճյուղերը ցույց են տալիս հնարավոր այլընտրանքային որոշումները և դրանց ընդունման դեպքում հնարավոր ելքերը: ծառի ներկայացման համար օգտագործվում են երկու տեսակ ճյուղեր՝ հնարավոր որոշումներին համապատասխանող կետագծեր և ելքերին համապատասխանող հոծ գծեր:

Որոշումների ծառն ընդգրկում է երկու տեսակ հանգույցներ: Ուղղանկյունով նշանակվում են որոշումների ընդունման հանգույցները, իսկ շրջանակով՝ հնարավոր պատահական ելքերին համապատասխանող հանգույցները: Քանի որ որոշում ընդունողը չի կարող ազդել բոլոր հնարավոր ելքերի վրա, ապա ծառի հետազոտման ժամանակ նա գնահատում է միայն տարբեր ելքերի հավանականությունները:

Որոշումների ծառի հետազոտումը կատարվում է մի քանի փուլերով: Սկզբում՝ «շարժվելով ձախից դեպի աջ», կառուցվում է ծառի կմախքը, որտեղ որոշումներին համապատասխանող ճյուղերի մոտ գրվում են դրանց հետ կապված ծախսերը, իսկ ելքերի ճյուղերի մոտ՝ դրանց հավանականությունները: Այնուհետև կատարվում է տարբեր ելքերի հավանականություններին և դրանց համապատասխանող եկամուտների հաշվարկը: Երրորդ փուլում կատարվում է տարբեր հանգույցներում միջին եկամուտների հաշվարկը և «շարժվելով աջից դեպի ձախ» ընդունվում են առավելագույն միջին եկամուտներ ապահովող որոշումները:

Նախքան որոշումների ծառի եղանակի քննարկմանն անցնելը, վերհիշենք հավանականության տեսությունից մի քանի սահմանումներ և բանաձևեր:

Դիցուք՝ A-ն և B-ն կամայական պատահույթներ են: P(A)-ով և P(B)-ով նշանակենք դրանց հավանականությունները:

A և B պատահույթների գումարը (նշանակենք $A \cup B$) այնպիսի պատահույթ է, որին համապատասխանում է կամ A, կամ B պատահույթների կամ էլ դրանց միաժամանակյա իրականացումը:

A և B պատահույթների արտադրյալը (նշանակենք $A \cap B$) այնպիսի պատահույթ է, որին համապատասխանում է A-ի և B-ի միաժամանակյա իրականացումը:

A և B պատահույթները կոչվում են անհամատեղելի, եթե դրանք միաժամանակ իրականանալ չեն կարող, այսինքն դրանց արտադրյալը անհընար պատահույթ է:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$, պատահույթները կազմում են անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ, եթե.

ա) ցանկացած $i \neq j$-ի համար $A_i \cap A_j$-ն անհնար պատահույթ է,

բ) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ գումարը հավաստի պատահույթ է:

Եթե B պատահույթի համար $P(B)>0$-ից, ապա կամայական A պատահույթի հանդես գալու պայմանական հավանականությունը, պայմանով, որ B պատահույթը տեղի է ունեցել (նշանակենք $P(A|B)$-ով) որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B):$$

Այս բանաձևից A և B պատահույթների արտադրյալի համար կստանանք՝

$$P(A \cap B) = P(A|B)/P(B) = P(B|A)P(A):$$

Եթե A և B պատահույթները միմյանցից անկախ են, ապա՝

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ \ P(A|B) = P(A),\ \ P(B|A) = P(B):$$

Եթե $A_1, A_2, \ldots, A_n$, պատահույթները կազմում են անհամատեղելի պատահարների լրիվ խումբ, ապա կամայական B պատահույթի համար ճշմարիտ են լրիվ հավանականությունների՝ (2.1) և Բայեսի (2.2) բանաձևերը՝

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i), \qquad (2.1)$$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}: \qquad (2.2)$$

Օրինակ 5: Դիցուք՝ «Կատակ» ձեռնարկությունը դիմել է բանկին մեկ տարով 15 մլն. դրամ վարկ վերցնելու հայտով: Նախորդ տարիների փորձից բանկին հայտնի է, որ վարկառուների 4%-ը վարկը չի վերադարձնում: Բանկը կարող է «Կատակ» ֆիրմային տարեկան 15%-ով այդ գումարի վարկ տալ, սակայն նա կարող է նաև այդ գումարը տարեկան 9%-ով ներդրել որևէ ռիսկազերծ գործարքի մեջ: Վերջին դեպքում բանկը ունի ներդրված գումարը հետ ստանալու 100%-անոց երաշխիք:

Այսպիսով բանկը պետք է ընդունի «Կատակ» ձեռնարկության վարկավորելու կամ գումարը ռիսկազերծ գործարքի մեջ ներդրելու որոշում: Խնդրի լուծման համար կարող են օգտագործվել ինչպես եկամուտների աղյուսակի, այնպես էլ որոշումների ծառի եղանակները:

Դիտարկենք երկու եղանակներն էլ:

Եկամուտների աղյուսակի եղանակ

Դիտարկվող խնդրում բանկին անհրաժեշտ է ընդունել այնպիսի որոշում, որը մաքսիմացնի տարվա վերջին ստացվելիք զուտ եկամուտը, այսինքն՝ տարվա վերջին ստացվելիք և տարվա սկզբին ներդրված գումարների տարբերությունը: Եթե բանկը վարկավորի «Կատակ» ձեռնարկությանը և տարվա վերջին հետ ստանա ամբողջ գումարն ու շահը, ապա նրա զուտ եկամուտը կկազմի՝

(15.000.000+0.15×15.000.000)–15.000.000 = 2.250.000 դրամ:

Եթե «Կատակ» ֆիրման տարվա վերջին չվերադարձնի գումարը, ապա բանկը կկորցնի 15000000 դրամ:

Եթե բանկը գումարը տարեկան 9%-ով ներդրի անռիսկ գործարքի մեջ, ապա տարվա վերջին նրա զուտ եկամուտը կկազմի 1350000 դրամ:

Խնդրի տվյալները բերված են 17-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 17

Հնարավոր ելքերը	Հնարավոր որոշումները		Հավանականությունը
	վարկ տալ	վարկ չտալ	
Վարկը վերադարձվում է	2250000	-	0.96
Վարկը չի վերադարձվում	·15000000	-	0.04
Սպասվելիք զուտ եկամուտը	1560000	1350000	

Տվյալների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ընտրված չափանիշի դեպքում բանկը պետք է ընդունի «Կատակ» ձեռնարկության վերաբերյալ վարկավորման որոշում, որի դեպքում իր առավելագույն զուտ եկամուտը կկազմի 1560000 դրամ:

Որոշումների ծառի եղանակ

Այս դեպքում ևս կօգտվենք որոշումների գնահատման նույն չափանիշից: Խնդրի որոշումների ծառը բերված է 2-րդ գծանկարում:

A և B հանգույցներում սպասվելիք զուտ եկամուտները հաշվարկվում են հետևյալ կերպ.

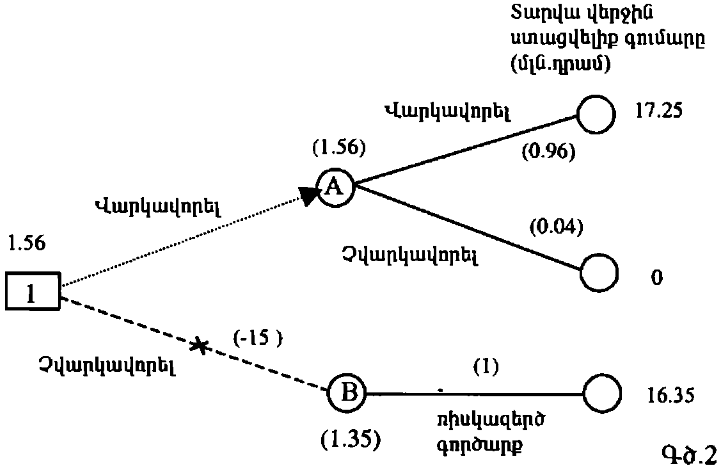
A հանգույց՝

(17250000×0.96+0.04×0) 15000000 = 1560000 դրամ:

B հանգույց՝

(16350000×1.0 15000000) = 1350000 դրամ:

Քանի որ A հանգույցում սպասվող զուտ եկամուտը ավելի մեծ է, ապա բանկը կընդունի «Կատակ» ձեռնարկությանը վարկավորելու որոշում:



Գծ.2

Այժմ քննարկենք ավելի բարդ իրավիճակ, երբ նախքան վարկավորման որոշում ընդունելը բանկը կարող է ստուգել հայտող ձեռնարկությունների վստահելիությունը, վճարունակությունը և մրցունակությունը: Նման ստուգման համար բանկը կարող է դիմել հաշվաստուգիչ ծառայություններ իրականացնող «Աուդիտ» ֆիրմային, որը մեկ ձեռնարկության ստուգման համար պահանջում է վճարել 80000 դրամ: Այսպիսով նկարագրված իրավիճակում բանկը պետք է կայացնի երկու որոշում. Նախ՝ հայցվոր ձեռնարկության հաշվաստուգում կատարել, թե ոչ և, երկրորդ, «Կատակ» ձեռնարկությանը վարկավորել, թե ոչ:

Առաջին որոշումը կայացնելու համար բանկը կարող է ստուգել «Աուդիտ» ֆիրմայի տված տեղեկությունների հավաստիությունը: Դրա համար նա կարող է, օրինակ, ընտրել «Աուդիտ» ֆիրմայի կողմից արդեն հաշվաստուգված հազար ձեռնարկության և անհատ: Համապատասխան տվյալները բերված են 18-րդ աղյուսակում՝

Աղյուսակ 18

Առաջարկությունը ստուգումից հետո	Փաստացի արդյունքը		
	վարկը մարվել է	վարկը չի մարվել	ընդամենը
Վարկ տալ	735	15	750
Վարկ չտալ	225	25	250
Ընդամենը	960	40	1000

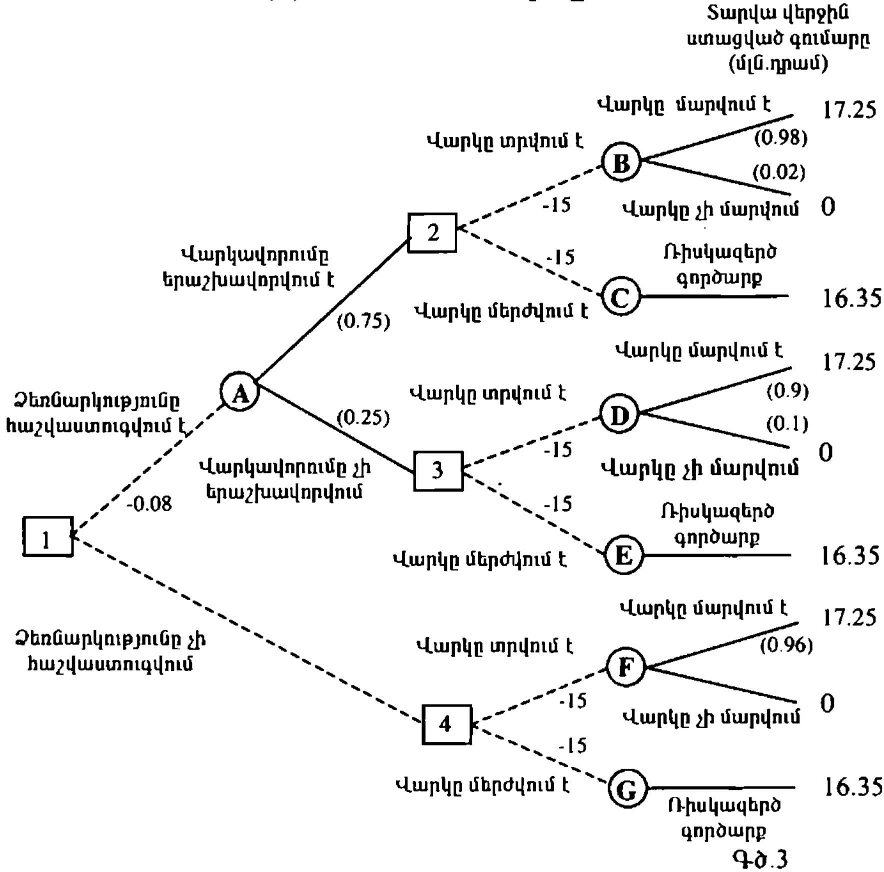
Սկզբում վերլուծենք որոշումների ծառի 4-րդ հանգույցի հնարավոր ելքերը: Եթե բանկն ընդունում է «Կատակ»-ին վարկավորելու որոշում, ապա տարվա վերջին 0.04 հավանականությամբ գումարը հետ չի ստանա, իսկ 0.96 հավանականությամբ ձեռնարկությունը կմարի վարկը:

F հանգույցում սպասվելիք եկամուտը կկազմի՝

E(F) = 17.25×0.96+0×0.04=16.56 մլն. դրամ:

Եթե բանկն ընդունի գումարի ռիսկազերծ ներդրման որոշում, ապա G հանգույցում սպասվելիք եկամուտը կկազմի՝

E(G)=16.35×1.0=16.35 մլն. դրամ:



Գծ.3

Այժմ քննարկենք ելքերի հավանականությունները A հանգույցում: Ինչպես երևում է աղյուսակից, «Աուդիտ» ֆիրման երաշխավորում է հայցվող ձեռնարկություններից միայն 75%-ի վարկավորումը: Հետևաբար՝ A հանգույցից դեպի 2-րդ հանգույց գնացող ճյուղը կունենա 0.75 հավանականություն, իսկ դեպի 3-րդ հանգույց գնացող ճյուղը՝ 0.25 հավանականություն:

Տեսնենք, թե ինչի են հավասար B հանգույցի ելքերի հավանականությունները, եթե հայտնի է, որ «Աուդիտ» ֆիրման երաշխավորել է վարկավորումը: «Կատակ» ձեռնարկության վարկը մարելու հավանականությունը, պայմանով, որ վարկավորումը երաշխավորվել է, կարելի է որոշել պայմանական հավանականությունների կամ Բայեսի բանաձևից:

18-րդ աղյուսակից որոշենք հետևյալ հավանականությունները.

P(վարկավորումը երաշխավորված է, և վարկը մարվել է) = 0.735:

P(վարկավորումը երաշխավորվում է) = 0.75:

P(վարկավորումը երաշխավորված է, բայց վարկը չի մարվել) = 0.015:

P(վարկավորումը չի երաշխավորված, բայց վարկը մարվել է) = 0.225:

P(վարկավորումը չի երաշխավորված է, և վարկը չի մարվել) = 0.025:

P(վարկավորումը չի երաշխավորված) = 0.25:

Այստեղից B հանգույցում վարկը մարելու ելքի պայմանական հավանականության համար կստանանք՝

$$\frac{\text{P(վարկավորումը երաշխավորվել է և վարկը վերադարձվել է)}}{\text{P(վարկավորումը երաշխավորվել է)}} =$$

$$= \frac{0.735}{0.75} = 0.98.$$

Իսկ B հանգույցում վարկը չմարելու ելքի պայմանական հավանականությունը հավասար կլինի 0.02-ի:

D հանգույցի համար վարկը մարելու և չմարելու ելքերի պայմանական հավանականությունները կորոշվեն նույն ձևով՝

$$\frac{\text{P(վարկավորումը չի երաշխավորվել է և վարկը վերադարձվել է)}}{\text{P(վարկավորումը երաշխավորված չէ)}} =$$

$$= \frac{0.225}{0.25} = 0.9.$$

Իսկ D հանգույցում վարկը չմարելու հավանականությունը հավասար կլինի 0.1-ի:

Այսպիսով ավարտվում է որոշումների ծառի կառուցման փուլը: Այժմ որոշենք ծառի հանգույցներում սպասվելիք եկամուտները և ընտրենք առավելագույն եկամուտ ապահովող այլընտրանքները: Նախ քննարկենք B և C հանգույցները:

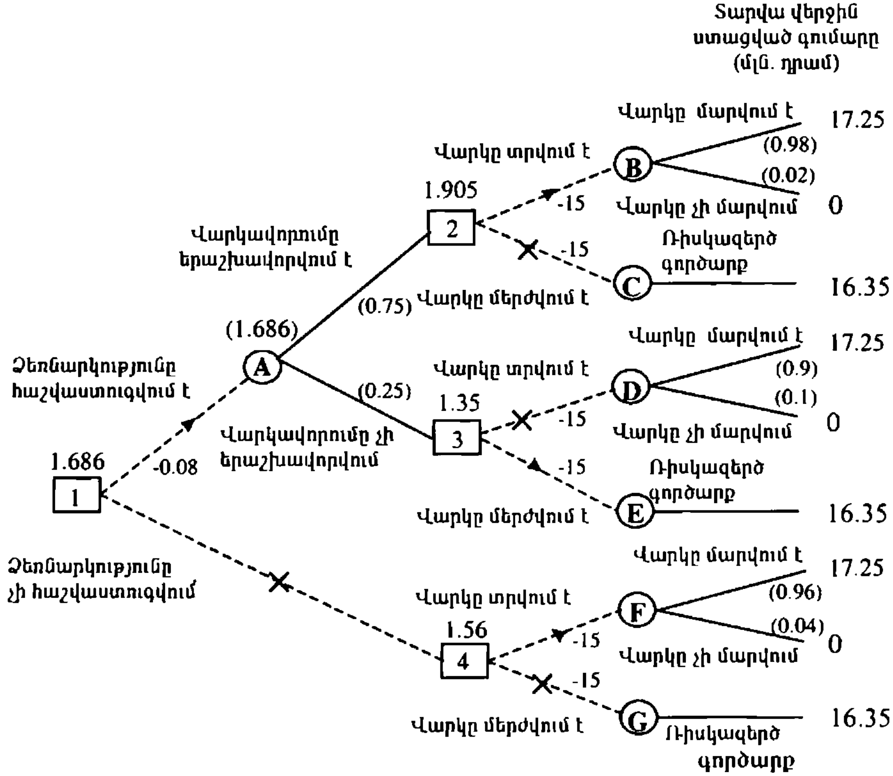
B հանգույցում սպասվելիք եկամուտը հավասար է՝

E(B) = 17.25×0.98+0×0.02 = 16.905 մլն. դրամ, իսկ սպասվելիք զուտ եկամուտը՝ 16.905–15=1.905 մլն. դրամ:

C հանգույցում սպասվելիք եկամուտը՝ հավասար է

E(C) = 16.35×1.0 = 16.35 մլն. դրամ, իսկ սպասվելիք զուտ եկամուտը՝ 16.35–15 = 1.35 մլն դրամ:

Այժմ դիտարկենք որոշումների ընդունման հանգույցները (քառակուսիները): Այստեղ առավելագույն սպասվելիք եկամուտը՝ 1.905 մլն. դրամ, ստացվում է B ելքի դեպքում, երբ ընդունվում է «Կատակ» ձեռնարկությանը վարկ տալու որոշում: Որոշումների ծառի 2-րդ հանգույցի վրա գրվում է այդ հանգույցում սպասվող եկամտի արժեքը և ընդգծվում է վարկ տալուն համապատասխանող ճյուղը, իսկ մյուս այլընտրանքային ելքերը՝ ճյուղերը, նշվում են X նշանով (տե՛ս գծ.4):



Գծ. 4

Նույն ձևով հաշվարկները կատարվում են նաև D և E հանգույցների համար: D ելքի համար սպասվելիք եկամուտը որոշվում է՝

E(D) = 17.25×0.9+0×0.1 = 15.525 մլն. դրամ:

Քանի որ, ձեռնարկության հաշվաստուգումն արժե 0.08 մլն. դրամ, ապա A հանգույցում սպասվելիք զուտ եկամուտը հավասար կլինի՝

1.766–0.08 = 1.686 մլն. դրամ,

իսկ սպասվելիք զուտ եկամուտը՝

15.525–15 = 0.525 մլն.դրամ:

E ելքի համար սպասվելիք եկամուտը հավասար է՝

E(E) = 16.35×1.0 = 16.35 մլն. դրամ,

իսկ սպասվելիք զուտ եկամուտը՝

16.35–15 = 1.35 մլն. դրամ:

Այսպիսով 3-րդ հանգույցում առավելագույն սպասվելիք եկամուտը հավասար է 1.35 մլն. դրամի: Հետևաբար, բանկը պետք է ընդունի «Կատակ» ձեռնարկությանը վարկ տալը մերժելու որոշում և գումարը ներդրի տարեկան

9%-ով ռիսկազերծ գործարքի մեջ:

Այժմ դիտարկենք A և 1-ին հանգույցները: Օգտագործելով 2-րդ և 3-րդ հանգույցներում ստացված արդյունքները, A հանգույցում սպասվելիք եկամուտի համար կստանանք՝

$$E(A) = 1.905 \times 0.75 + 1.35 \times 0.25 = 1.766 \text{ մլն. դրամ:}$$

Հետևաբար 1-ին հանգույցում սպասվելիք առավելագույն եկամուտը կլինի 1.686 մլն. դրամ, այսինքն՝ բանկը պետք է ընդունի «Կատակ» ֆիրմայի հաշվաստուգման որոշում:

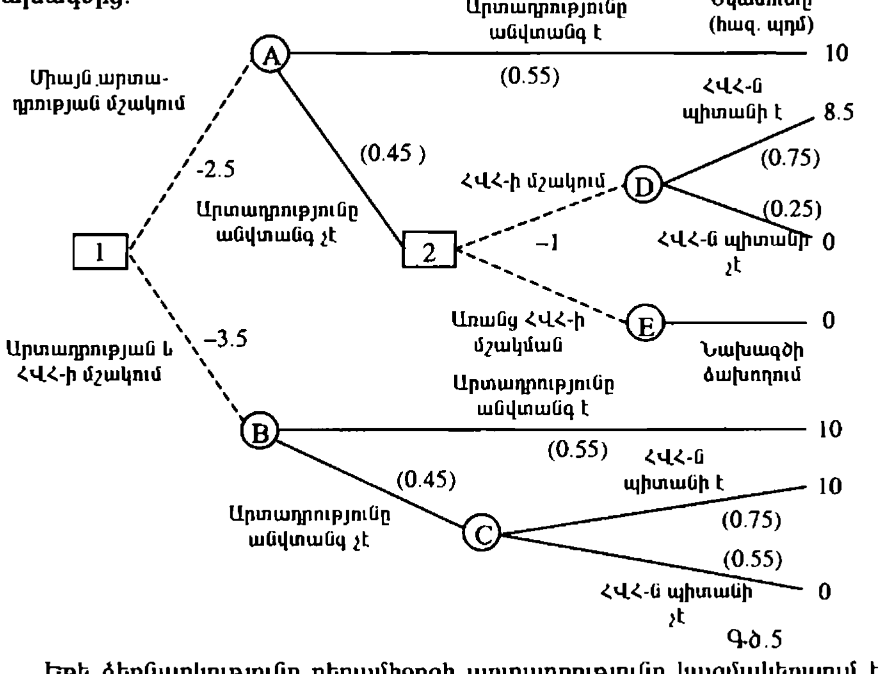
Որոշումների ծառի վրա սլաքներով նշանակված են հանգույցներում առավելագույն սպասվելիք զուտ եկամուտներ ապահովող որոշումներին համապատասխանող ճյուղերը: Օրինակ՝ դիտարկված խնդրում 1-ին հանգույցում պետք է իրականացնել հայցվոր ձեռնարկության հաշվաստուգում, եթե հայտող ձեռնարկության վարկավորումն երաշխավորվում է, ապա 2-րդ հանգույցում պետք է ընդունել վարկավորման որոշում, հակառակ դեպքում, 3-րդ հանգույցում պետք է ընդունել տարեկան 9%-ով ռիսկազերծ ներդրում կատարելու որոշում: Որոշումների ծառի վերջնական տեսքը բերված է 4-րդ գծապատկերում:

2.2. Որոշումների զգայունության վերլուծություն

Ինչպես տեսանք քննարկված օրինակում, ծառի օգնությամբ ընդունված որոշումները կախված են նրա հանգույցներում ելքերի հավանականություններից: Քանի որ գործնական խնդիրներում հանգույցների ելքերի հավանականությունները սովորաբար կանխատեսվում են որոշակի սխալով, ապա ընդունելով որևէ որոշում՝ անհրաժեշտ է պարզել, թե որքանով է դա կախված նշված հավանականությունների արժեքների փոփոխությունից (կամ սխալից) և ինչպիսին է ընդունված որոշումների «ամրության պաշարը»: Այսինքն պետք է գնահատել դրանց զգայունությունը: Նման վերլուծությունը կատարվում է այն ընդունված որոշումների զգայնությունը հետազոտելու նպատակով, որոնք ընդունվել են՝ նկատի ունենալով հանգույցների ելքերի հավանականությունների փոփոխությունը:

Օրինակ 6: Դիցուք՝ «Արմենիկում» դեղագործական ձեռնարկությունը մշակել է շուկայում լայն պահանջարկ ունեցող մի նոր դեղամիջոց: Սակայն մի շարք բարդ տեխնոլոգիական գործընթացների օգտագործումը դեղամիջոցի արտադրությունը թանկացնում է 2.5 մլն. պղմ-ով: Դիցուք՝ ամբողջ արտադրական գործընթացի կազմակերպումը տևում է մեկ տարի և միայն 0.55 հավանականությամբ կարելի է ապահովել նրա տեխնիկական անվտանգության անհրաժեշտ մակարդակը: Արտադրության անվտանգության մակարդակի բարձրացման համար կարող է ներդրվել նրա համակարգչային վերահսկման համակարգ (ՀՎՀ): Հայտնի է, որ նման համակարգի մշակման և ներդրման համար պահանջվում է մեկ տարի ժամանակ և արժե 1 մլն. պղմ: Պահանջվող անվտանգության մակարդակն ապահովող համակարգի մշակման հավանականությունը հավասար է 0.75-ի: Ընդ որում վերահսկման համակարգի մշակումը կարելի է սկսել ինչպես արտադրական գործընթացի հետ միաժամանակ, այնպես էլ արտադրությունն սկսելուց հետո, երբ պարզ կլինի տեխնոլոգիական գործընթացների անվտանգության իրական մակարդակը: Եթե համակարգչային վերահսկման համակարգի մշակումն սկսվի արտադրական գործընթացի հետ միաժամանակ, և վերջինիս անվտանգության մակարդակը համարվի բավարար, ապա վերահսկման համակարգի ներդրումը ավելորդ կլինի, իսկ ձեռնարկությունը կկրի 1 մլն պդմ-ի վնաս: Մյուս կողմից, եթե համակարգի մշակումը հետաձգվի, իսկ տեխնոլոգիական գործընթացները չբավարարեն անվտանգության պահանջներին, ապա ձեռնարկությունը ստիպված կլինի նոր դեղամիջոցի արտադրությունը հետաձգել մեկ տարով՝ մինչև համակարգի մշակումը և տեղադրումը:

Եվ, վերջապես, եթե անվտանգ արտադրության կազմակերպումն անհրաժեշտ է, իսկ վերահսկման համակարգը չի ապահովում պահանջվող մակարդակը, ապա ձեռնարկությունը, չունենալով դեղամիջոցի արտադրության այլընտրանքային եղանակներ, ստիպված կլինի հրաժարվել նման նախագծից:



Գծ.5

Եթե ձեռնարկությունը դեղամիջոցի արտադրությունը կազմակերպում է մեկ տարում, ապա նրա եկամուտը, առանց հաշվի առնելու արտադրական միջոցների մաշվածքագրումը համակարգչային վերահսկման համակարգի արժեքը կկազմի 10 մլն. պդմ:

Եթե դեղամիջոցի արտադրությունը հետաձգվի մեկ տարով, ապա շուկայում հնարավոր մրցակիցների հայտնվելու պատճառով ձեռնարկության եկամուտները 10 մլն. պդմ-ից կընկնեն 8.5 մլն. պդմ-ի:

Դեղագործական ձեռնարկության ղեկավարությանը անհրաժեշտ է ընդունել հետևյալ որոշումները՝

1. Ինչպես կազմակերպել դեղամիջոցի թողարկումը, որպեսզի ձեռնարկությունն ստանա առավելագույն եկամուտ:

2. Ինչպիսին է ընդունվող որոշման զգայունությունը:

Անցնենք խնդրի լուծմանը:

Խնդրի որոշումների ծառը բերված է 5-րդ գծագրում:

Ծառի կառուցման համար հաշվարկենք նրա հանգույցներում սպասվելիք զուտ եկամուտները:

D հանգույցում սպասվող եկամուտը հավասար է

$$8.5\times0.75+0\times0.25 = 6.375 \text{ մլն. պդմ},$$

իսկ սպասվելիք զուտ եկամուտը՝

$$6.375-1=5.375 \text{ մլն. պդմ}:$$

E հանգույցում սպասվելիք զուտ եկամուտը հավասար է 0-ի: Հետևաբար, 2 հանգույցում պետք է ընդունել ՀՎՀ-ի մշակման որոշում, որի դեպքում կստացվի 5.375 մլն. պդմ զուտ եկամուտ:

A հանգույցում սպասվող զուտ եկամուտը հավասար է

$$(10\times0.55+5.375\times0.45)-2.5 = 5.419 \text{ մլն. պդմ},$$

իսկ B հանգույցում՝

$$10\times0.55+(10\times0.75+0\times0.25)\times0.45)-3.5 = 5.375 \text{ մլն. պդմ}:$$

Հետևաբար 1 հանգույցում պետք է ընդունել միայն արտադրական գործընթացի մշակման որոշում: Եթե մեկ տարի հետո պարզվի, որ արտադրությունը անվտանգ չէ, ապա ձեռնարկությունը կանցնի վերահսկման համակարգի մշակմանը և տեղադրմանը:

Արտադրական գործընթացի P անվտանգության հավանականությունից կախված՝ հետազոտենք ընդունված որոշման զգայունությունը: Նշենք, որ A և B հանգույցներում սպասվելիք զուտ եկամուտները միմյանց շատ մոտ են և համապատասխանորեն հավասար են՝ 5.419 և 5.375 մլն. պդմ: Դիտարկված դեպքում P=0.55-ի:

P-ի կամայական արժեքի դեպքում A հանգույցում սպասվելիք զուտ եկամուտը հավասար է՝

$$10\times P+5.375\times(1-P)-2.5 = 4.625P+2.875 \text{ մլն. պդմ},$$

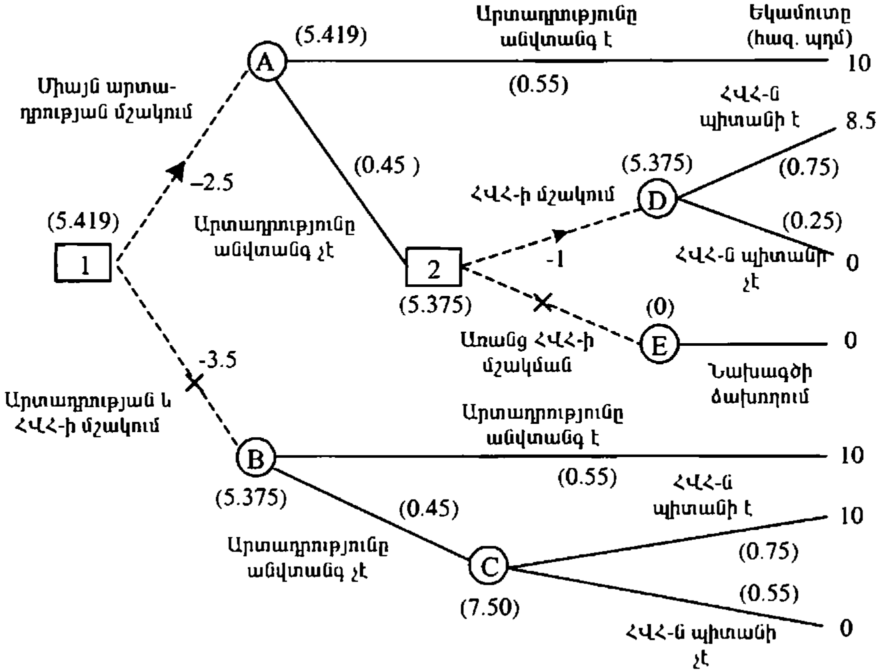
իսկ B հանգույցում՝

$$10\times P+(10\times0.75+0\times0.25)(1-P)-3.5 = 2.5P+4.0 \text{ մլն. պդմ}:$$

Հավասարեցնելով երկու արդյունքները, կստանանք՝

$$4.625P+2.875 = 2.5P+4.0,$$

որտեղից՝ P = 0.529:



Գծ.6

Այսպիսով, եթե արտադրական գործընթացի անվտանգության P հավանականությունը հավասար է 0.529-ի, ապա երկու երկընտրանքներն էլ կբերեն միևնույն զուտ եկամուտը: Եթե P-ն փոքր է 0.529-ից, ապա գործընթացի և վերահսկման համակարգի մշակման որոշումը կբերի ավելի մեծ զուտ եկամուտ, այսինքն՝ անհրաժեշտ կլինի սկզբնական որոշումը փոխարինել այլընտրանքայինով: Քանի, որ P=0.529 սահմանային արժեքը շատ մոտ է 0.55-ին, ապա ընդունված սկզբնական որոշումը զգայուն է P-ի արժեքի փոփոխման նկատմամբ և P-ի արժեքի նույնիսկ փոքր աճը կարող է հանգեցնել այդ որոշման փոփոխմանը:

3. Ներդրումների փաթեթի ընտրության խնդիր

Նախորդ բաժնում քննարկեցինք ներդրումների գնահատման խնդիրը, երբ որոշում կայացնողը, ելնելով սպասվելիք եկամտաբերությունից և ռիսկի մեծությունից, համեմատելով տարբեր ներդրումներից սպասվելիք առավելագույն հատույցները, ընտրում է գումարների լավագույն ներդրման տարբերակը: Այս խնդիրը անմիջականորեն կապված է տնտեսագիտության մեջ հայտնի ներդրումների փաթեթի ընտրության խնդրի հետ:

Ներդրումների փաթեթի ձևավորման և ընտրության խնդրի դասական լուծումը առաջարկված է 1952թ. հայտնի տնտեսագետ Հարրի Մարկովիցի կողմից: Ներդրումների փաթեթը իրենից ներկայացնում է տարբեր արժեթղթերից կազմված համախումբ, որը բնութագրվում է որոշակի եկամտաբերությամբ ու ռիսկի մակարդակով: Գործնականում փաթեթի ձևավորման համար օգտագործում են ինչպես ռիսկազերծ, այնպես էլ ռիսկավոր արժեթղթերը: Առաջին տեսակի արժեթղթերը բնութագրվում են տարեկան տոկոսադրույքով, և ներդրողը տարվա կամ արժեթղթերի տիրապետման ժամանակի վերջին երաշխավորված կարգով ստանում է ինչպես ներդրված գումարը, այնպես էլ համապատասխան շահութաբաժինը կամ շահը: Նման տեսակի արժեթղթերից են, օրինակ, պետական կարճաժամկետ պարտատոմսերը: Երկրորդ տեսակի արժեթղթերը տարբեր ձեռնարկությունների, ընկերությունների և բաժնետիրությունների բաժնետոմսերն ու արժեթղթերն են: Վերջիններիս եկամտաբերությունը պայմանավորված է զանազան գործոններով և ժամանակի ընթացքում կարող է փոփոխվել մեծ տիրույթում: Նման արժեթղթերի եկամտաբերությունը պատահական մեծություն է և բնորոշվում է բաշխման ֆունկցիայով, միջին արժեքով ու ցրվածքով:

Ներդրումների փաթեթի ընտրության Մարկովիցի տեսությունը հիմնվում է հետևյալ դրույթների վրա:

Ռիսկավոր արժեթղթերի եկամտաբերությունը ունի բնականոն բաշխվածություն և բնութագրվում է իր միջին արժեքով ու կանոնական շեղմամբ: Ժամանակի t=0 պահին ներդրողն ունի որոշակի C գումար, որը նա պատրաստ է որոշակի ժամանակով, որը կոչվում է փաթեթի տիրապետման ժամանակ, ներդրել տարբեր արժեթղթերից բաղկացած փաթեթի մեջ: Ենթադրվում է, որ տիրապետման ժամանակի վերջին փաթեթի բոլոր արժեթղթերը վաճառվում են: Նման ենթադրությունը թույլ է տալիս փաթեթի բնութագրերը հետազոտել միայն մեկ տիրապետման ժամանակի ընթացքում: Գումարների ներդրման որոշում կայացնելիս ներդրողը պետք է հաշվի առնի, որ ինչպես առանձին արժեթղթերի, այնպես էլ դրանցից կազմված փաթեթի եկամտաբերությունը պատահական մեծություն է, որը նույնպես ունի բնականոն բաշխվածություն: Ներդրողը կարող է t=0 սկզբնական պահին գնահատել տարբեր արժեթղթերի միջին եկամտաբերությունն ու կանոնական շեղումը և որոշում կայացնել դրանք փաթեթի մեջ ներառելու վերաբերյալ: Որպես ներդրումների փաթեթների գնահատման չափանիշներ, օգտագործվում են դրանց միջին եկամտաբերությունը և կանոնական շեղումը՝ ռիսկը:

Օրինակ 7: Դիցուք՝ ներդրողին առաջարկված են երկու՝ A և B երկընտրանքային փաթեթներ: A փաթեթի տարեկան սպասվելիք եկամտաբերությունը 8% է, իսկ B փաթեթինը՝ 12%: Փաթեթում ներդրվող գումարը կազմում է 100000 միավոր: Ներդրման ժամկետը, այսինքն՝ փաթեթի տիրապետման ժամանակը, հավասար է մեկ տարվա: Դա նշանակում է, որ մեկ տարի հետո A փաթեթի դեպքում ներդրողը կստանա 108000 միավոր, իսկ B-ի դեպքում՝ 112000 միավոր: Եթե ներդրողը հաշվի առնի միայն սպասվելիք եկամուտի մեծությունը, ապա ակնհայտ է, որ նա կնախընտրի B փաթեթը

Դիցուք՝ A և B փաթեթների եկամտաբերության կանոնական շեղումները համապատասխանորեն հավասար են՝ 10%-ի և 20%-ի: Ինչպես երևում է ստորև բերված 20-րդ աղյուսակից, ներդրողը B փաթեթի դեպքում 0.02 հավանականությամբ մեկ տարի հետո կստանա 70000 միավորից պակաս գումար, իսկ A փաթեթի դեպքում 70000 միավորից պակաս գումար ստանալու հավանականությունը հավասար է զրոյի:

Աղյուսակ 20

Տարվա վերջին ստացվելիք գումարը (միավոր)	Տարվա մակարդակից ցածր գումար ստանալու հավանականությունը	
	A փաթեթ	B փաթեթ
70000	0	2
80000	0	5
90000	4	14
100000	21	27
110000	57	46
120000 ·	88	66
130000	99	82

Նույն կերպ B փաթեթի դեպքում ներդրողը 80000 միավորից ցածր գումար կստանա 0.05 հավանականությամբ, իսկ A-ի դեպքում նման պատահույթի հավանականությունը դարձյալ հավասար է զրոյի: Եթե շարունակենք վերլուծել աղյուսակը, ապա կտեսնենք, որ ներդրողը B փաթեթի դեպքում 0.27 հավանականությամբ կարող է ստանալ 100000 միավորից պակաս գումար, իսկ A-ի դեպքում նման պատահույթն ունի միայն 0.21 հավանականություն: Քանի որ ներդրողն ունի ընդամենը 100000 միավոր սկզբնական գումար, ապա դա նշանակում է, որ նա B փաթեթի դեպքում ավելի մեծ՝ 0.27 հավանականությամբ կարող է ստանալ բացասական արդյունք, քան A-ի դեպքում՝ 0.21 հավանականությամբ: Ի վերջո՝ աղյուսակից հետևում է, որ A փաթեթը պակաս ռիսկավոր է քան B-ն, և ներդրողի համար կարող է լինել ավելի նախընտրելի:

Ներդրողի կողմից A կամ B փաթեթի ընտրությունը կախված է նաև նրա նախապատվություններից՝ որն է նրա համար նախընտրելի, ռիսկի դիմե՞լը, թե՞ եկամտաբերությունը: Հաշվարկներում ենթադրվում է, որ երկու փաթեթների եկամտաբերությունները էլ ունեն բնականոն բաշխվածություն:

Այսպիսով ներդրումների փաթեթի ընտրության խնդիրը կարելի է ձևակերպել որպես երկչափանի օպտիմացման խնդիր:

4. Ներդրումների փաթեթի գնահատման չափանիշները

Դիցուք՝ ներդրողն ունի որոշակի C գումար, որը ցանկանում է ներդրել N արժեթղթերից բաղկացած փաթեթում: Յուրաքանչյուր արժեթուղթ բնորոշվում է իր միջին եկամտաբերությամբ՝ $\bar{r}_i$, և կանոնական շեղումով՝ σ_i, $i=\overline{1,N}$: Եթե C_i-ով նշանակենք i արժեթղթում ներդրված գումարի մեծությունը, ապա $x_i=C_i/C$ հարաբերությունը ցույց կտա ներդրման փաթեթում տվյալ արժեթղթի մասնաբաժինը՝ կշիռը: $\bar{r}$-ով նշանակենք փաթեթի միջին եկամտաբերությունը, իսկ σ-ով նրա կանոնական շեղումը: N արժեթղթերից բաղկացած փաթեթի համար $\bar{r}$-ն և σ-ն որոշվում են հետևյալ բանաձևերից.

$$\bar{r}=\sum_{i=1}^{N}x_i\bar{r}_i\ ,\ \sigma=[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j]^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

Այստեղ σ_{ij}-ն i և j արժեթղթերի եկամտաբերությունների համասփռման (Cov՝ կովարիացիա) մատրիցի տարրն է: σ_{ij}-ն ցույց է տալիս i և j արժեթղթերի եկամտաբերությունների փոխազդեցության չափը: Եթե $\sigma_{ij}>0$ դրական է, ապա դա նշանակում է, որ i արժեթղթի եկամտաբերության աճը պայմանավորում է j արժեթղթի միջինից բարձր եկամտաբերություն, իսկ $\sigma_{ij}<0$ դեպքում i արժեթղթի եկամտաբերության աճը պայմանավորում է j արժեթղթի միջինից ցածր եկամտաբերություն: $\sigma_{ij}=0$-ի դեպքում i և j արժեթղթերի եկամտաբերությունները իրարից անկախ են: σ_{ij} գործակիցները կարող են որոշվել

$$\sigma_{ij}=\sigma_i\,\sigma_j\,\rho_{ij}$$

բանաձևով, որտեղ ρ_{ij}-ն i և j արժեթղթերի եկամտաբերությունների հարաբերակցության գործակիցն է: ρ_{ij}-ն փոփոխվում է [–1,1] միջակայքում: Եթե $\rho_{ij}=-1$, ապա երկու i և j արժեթղթերի միջև գոյություն ունի բացասական հարաբերակցություն, $\rho_{ij}=+1$-ի դեպքում, դրական հարաբերակցություն, իսկ $\rho_{ij}=0$-ի դեպքում՝ i և j արժեթղթերի եկամտաբերությունները միմյանցից անկախ են: Օրինակ, եթե $\rho_{ij}=+1$, ապա i արժեթղթի բարձր (ցածր) եկամտաբերությունը ուղեկցվում է j արժեթղթի բարձր (ցածր) եկամտաբերությամբ: $\rho_{ij}=-1$-ի դեպքում i արժեթղթի բարձր (ցածր) եկամտաբերությունը ուղեկցվում է j արժեթղթի ցածր (բարձր) եկամտաբերությամբ:

Նշենք համասփռման՝ Cov մատրիցի մի քանի հատկություններ: Այն քառակուսային մատրից է և ունի N տողեր ու N սյունակներ: Մատրիցի σ_{ii} անկյունագծային տարրերը հավասար են i արժեթղթի եկամտաբերության ցրվածքին՝ $\sigma_{ii}=\sigma_i^2$:

Cov մատրիցը համաչափ մատրից է, այսինքն՝ $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, $i,j=1,2,\ldots,N$: Դիցուք՝ ներդրման փաթեթը կազմված է երեք A, B, C ձեռնարկությունների արժեթղթերից: 21-րդ աղյուսակում բերված են նշված արժեթղթերի փաթեթում ունեցած մասնաբաժինները և միջին եկամտաբերությունները:

Աղյուսակ 21

Արժեթղթի անվանումը	Արժեթղթերի մասնաբաժինը փաթեթում (x_i)	Արժեթղթի սպասվելիք եկամտաբերությունը (r_i)	Արժեթղթերի մասնաբաժինը փաթեթի սպասելի եկամտաբերության մեջ ($x_i r_i$)
A	0.2325	16.2%	3.77%
B	0.4070	24.6%	10.01%
C	0.3605	22.8%	8.22%

Փաթեթի միջին եկամտաբերությունը՝ $\bar{r}=22\%$:

Եթե արժեթղթերի եկամտաբերությունների համասփռման մատրիցը հավասար է՝

$$\mathrm{Cov}=\begin{pmatrix}146 & 187 & 145\\ 187 & 854 & 104\\ 145 & 104 & 289\end{pmatrix}:$$

Ապա փաթեթի σ ռիսկը՝ կանոնական շեղումը կորոշվի (4.1) բանաձևից՝

$$\sigma=\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i x_j \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}=16.65\%:$$

4.1. Լավագույն ներդրման փաթեթի ընտրության խնդիր

Եթե t=0 պահին ներդրողն ունի C գումար, որը նա ցանկանում է ներդրել N ռիսկավոր արժեթղթերից բաղկացած փաթեթի մեջ, ապա լավագույն փաթեթի ընտրության խնդիրը կարող է ձևակերպվել հետևյալ երկչափանիշ օպտիմացման խնդրի տեսքով՝

$$\bar{r}=\sum_{i=1}^{N}x_i r_i \rightarrow \max$$

$$\sigma=\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_i x_j \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում՝

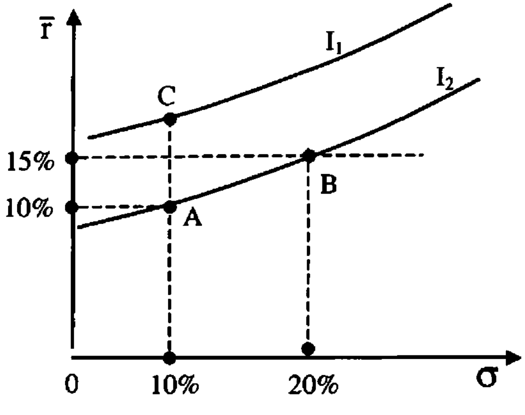
$$\sum_{i=1}^{N}x_i=1,\quad x_i\geq 0,\quad i=\overline{1,N}:$$

Խնդրի նպատակն է N ռիսկավոր արժեթղթերի համար ընտրել այնպիսի մասնաբաժիններ՝ x_i, $i=\overline{1,N}$, որ ստացված ներդրման փաթեթն ունենա առավելագույն միջին եկամտաբերություն և նվազագույն կանոնական շեղում՝ ռիսկ:

Լավագույն փաթեթի ընտրության խնդիրը կարելի է լուծել բազմաչափանիշ օպտիմացման տարբեր եղանակներով: Դիտարկենք Մարկովիցի առաջարկած գրաֆիկական-վերլուծական եղանակը: Այս եղանակի հիմքում ընկած են ներդրողի անտարբերության կորերը և արդյունավետ փաթեթների բազմությունը:

Անտարբերության կորերն ունեն խիստ անհատական բնույթ և բնութագրում են ներդրողի նախապատվությունները եկամտաբերության և ռիսկի նկատմամբ: Այս կորերը կառուցվում են $\bar{r}$ և σ բաղադրիչների համակարգում, որտեղ ուղղահայաց առանցքին համապատասխանում է փաթեթի միջին եկամտաբերությունը, իսկ հորիզոնականին համապատասխանում է փաթեթի ռիսկը՝ σ կանոնական շեղումը: Ստորև 7-րդ գծապատկերում բերված են ներդրողի անտարբերության կորերի օրինակներ: Անտարբերության կորերը բնութագրվում են հետևյալ հատկություններով.

Մեկ անտարբերության կորի վրա գտնվող բոլոր փաթեթները ներդրողի համար համարժեք են: Միևնույն ներդրողի անտարբերության կորերը միմյանց զուգահեռ են և չեն կարող հատվել: Ներդրողի համար կարելի է կառուցել անվերջ թվով անտարբերության կորեր: Անտարբերության կորի վրա փաթեթը որքան դեպի ձախ և վերև գտնվի, այնքան ավելի նախապատվելի է ներդրողի համար: Այստեղ ենթադրվում է, որ ներդրողը խուսափում է ռիսկից և միևնույն ռիսկի դեպքում նախընտրում է առավել միջին եկամտաբերություն ունեցող փաթեթը:

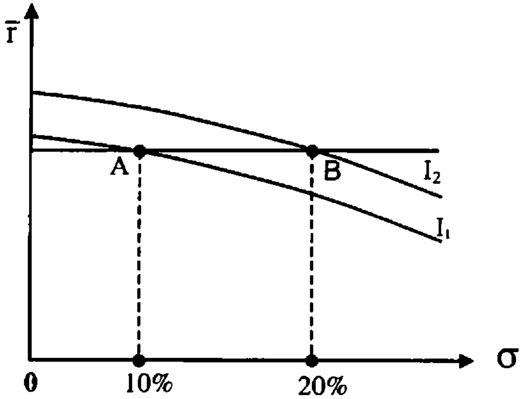


Գծ. 7

Գծագրում բերված A և B փաթեթները ներդրողի համար համարժեք են: Օրինակ՝ B փաթեթի ռիսկը 2 անգամ մեծ է A փաթեթի ռիսկից, բայց նա ապահովում է A-ի համեմատությամբ 1.5 անգամ մեծ միջին եկամտաբերություն: Ներդրողի համար C փաթեթը ավելի նախընտրելի է քան A և B փաթեթները, որովհետև նա գտնվում է ավելի բարձր անտարբերության կորի վրա, քան A և B փաթեթները: Թե ինչպիսի փաթեթ կնախընտրի ներդրողը, դա կախված է նրա նախապատվություններից: Լավագույն փաթեթի ընտրության խնդիրը լուծելիս Մարկովիցը ենթադրում է, որ ներդրողը միևնույն միջին եկամտաբերության դեպքում նախընտրում է նվազագույն ռիսկը, իսկ միևնույն ռիսկի դեպքում՝ առավելագույն միջին եկամտաբերությունը: Գործնականում ներդրողները կարող են ունենալ ռիսկի նկատմամբ տարբեր նախապատվություններ:

Հասկանալի է, որ նրանք կունենան նաև տարբեր անտարբերության կորեր: Ստորև գծապատկերում բերված են ներդրողների տարբեր նախապատվություններին համապատասխանող կորեր: Օրինակ՝ գծապատկերում I_1 կորը համապատասխանում է մոլի ներդրողին, որը նախընտրում է մեծ ռիսկի հետ կապված փաթեթները, իսկ I_2 կորը համապատասխանում է ռիսկի նկատմամբ անտարբեր ներդրողին: Մոլի ներդրողի համար B փաթեթը ավելի նախապատվելի է քան A-ն, իսկ չեզոք ներդրողի համար այս երկու փաթեթներն էլ համարժեք են:

Անտարբերության կորերի կառուցման համար ներդրողին զննահատման են տրվում տարբեր ստուգանմուշային փաթեթներ:



Գծ.8

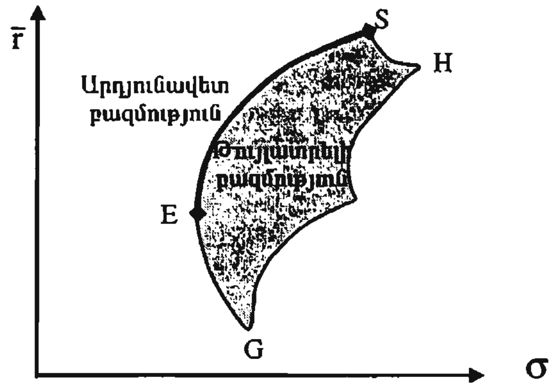
Ներդրողի ընտրած համարժեք փաթեթների բազմության օգնությամբ էլ կառուցվում են անտարբերության կորերը: Լավագույն փաթեթի ընտրության համար ներդրողը պետք է ըստ միջին եկամտաբերության և ռիսկի գնահատի բոլոր երկընտրանքային փաթեթները և, օգտվելով անտարբերության կորերից, դրանցից ընտրի լավագույնը: Սակայն N արժեթղթերից կարելի է կազմել անվերջ թվով փաթեթներ: N արժեթղթերից բաղկացած փաթեթների համախումբը կազմում է թույլատրելի փաթեթների բազմությունը: 9-րդ գծապատկերում բերված է այդպիսի բազմության մի օրինակ:

Ըստ Մարկովիցի՝ լավագույն փաթեթի ընտրության համար ներդրողին բավական է գնահատել միայն արդյունավետ բազմության մեջ մտնող փաթեթները, որոնցից յուրաքանչյուրը.

ա) Տրված ռիսկի արժեքի դեպքում ապահովում է առավելագույն միջին եկամտաբերություն:

բ) Միջին եկամտաբերության տրված արժեքի դեպքում ապահովում է նվազագույն ռիսկ:

Նշված երկու պայմաններին բավարարող փաթեթների համախումբը կոչվում է արդյունավետ փաթեթների բազմություն:



Գծ.9

Այժմ քննարկենք թույլատրելի փաթեթների բազմությունում արդյունավետ բազմության տեղաբաշխման հարցը: 9-րդ գծապատկերից երևում է, որ թույլատրելի բազմությունում ամենափոքր ռիսկն ունեցող փաթեթին համապատասխանում է E կետը, իսկ առավելագույն միջին եկամտաբերությամբ փաթեթին՝ S կետը: Փոփոխվող ռիսկի արժեքի դեպքում առավելագույն միջին եկամտաբերություն ապահովող փաթեթների բազմությունը կազմում է թույլատրելի բազմության E և H կետերի միջև ընկած վերին սահմանը, իսկ փոփոխվող միջին եկամտաբերության դեպքում նվազագույն ռիսկ ապահովող փաթեթների բազմությունը կազմում է թույլատրելի բազմության S և G կետերի միջև ընկած ձախ սահմանը: Քանի որ արդյունավետ բազմության փաթեթները պետք է միաժամանակ բավարարեն նշված երկու պայմաններին էլ, ապա այս բազմության տարրերը կգտնվեն թույլատրելի բազմության E և S կետերի միջև ընկած վերին ձախ սահմանի վրա:

Փաթեթների արդյունավետ բազմությունը գոգավոր է և չի կարող պարունակել իջվածքներ ու բարձունքներ: Արդյունավետ բազմության ձևի քննարկման համար դիտարկենք երկու՝ 1-ին և 2-րդ արժեթղթերից բաղկացած փաթեթների բազմությունը: Դիցուք՝ փաթեթի մեջ 1-ին արժեթղթի մասնաբաժինը հավասար է x_1-ի, իսկ 2-ի՝ $1-x_1=x_2$-ի: 1-ին և 2-րդ արժեթղթերից կարելի է կազմել տարբեր փաթեթներ՝ փոփոխելով դրանց x_1 և x_2 մասնաբաժինների արժեքները: Դիցուք՝ այս արժեթղթերի միջին եկամտաբերությունները հավասար են $r_1=5\%$ և $r_2=15\%$, իսկ ռիսկերը՝ $\sigma_1=20\%$ և $\sigma_2=40\%$: Դիտարկենք այս արժեթղթերից կազմված հետևյալ փաթեթները՝

Աղյուսակ 22

	A	B	C	D	E	F	G
$0\leq x_1\leq 1$	1.00	0.83	0.67	0.5	0.33	0.17	0.00
$0\leq x_2\leq 1$	0.00	0.17	0.33	0.5	0.67	0.83	1.00

A և G փաթեթները կազմված են միայն 1-ին և միայն 2-րդ արժեթղթերից համապատասխանաբար և $r_A=r_1=5\%$, $\sigma_A=\sigma_1=20\%$ իսկ $r_G=r_2=15\%$, $\sigma_G=\sigma_2=40\%$: B,C,D,E և F փաթեթների $\bar{r}$ միջին եկամտաբերությունը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևից՝

$$\bar{r} = x_1\times5\%+ x_2\times15\%,$$

իսկ σ կանոնական շեղումը՝ ռիսկի մեծությունը՝ հետևյալ բանաձևից.

$$\sigma = [(x_1^2\times400)+(x_2^2\times1600)+2x_1x_2\sigma_{AG}]^{\frac{1}{2}}:$$

Քանի որ, $\sigma_{ij}=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$, ապա $\sigma_{AG}=\rho_{AG}\times20\times40=\rho_{AG}\times800$, որտեղից σ-ի համար կստանանք՝

$$\sigma = [x_1^2\times400+x_2^2\times1600+2x_1x_2\rho_{AG}800]^{\frac{1}{2}}:$$

Քննարկվող փաթեթների միջին եկամտաբերությունների համար կստանանք՝

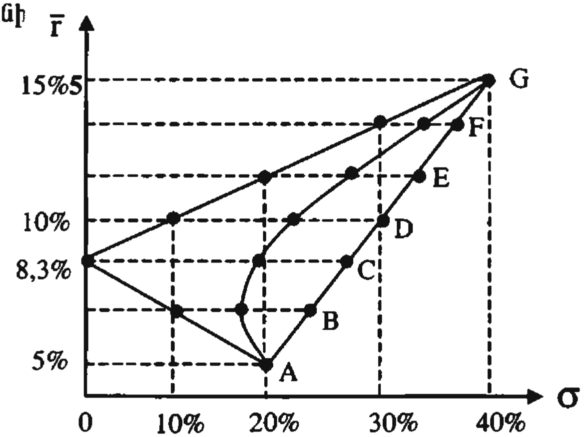
$\bar{r}_B=6.7\%$, $\bar{r}_C=8.3\%$, $\bar{r}_D=10\%$, $\bar{r}_E=11.7\%$, $\bar{r}_F=13.3\%$:

Քանի որ, հարաբերակցությանρ_{12} գործակիցը փոփոխվում է [−1,1] միջակայքում, ապա դիտարկվող փաթեթների համար որոշենք ռիսկի (նվազագույն՝ $\rho_{12}=-1$-ի և առավելագույն՝ $\rho_{12}=1$) արժեքները:

Աղյուսակ 23

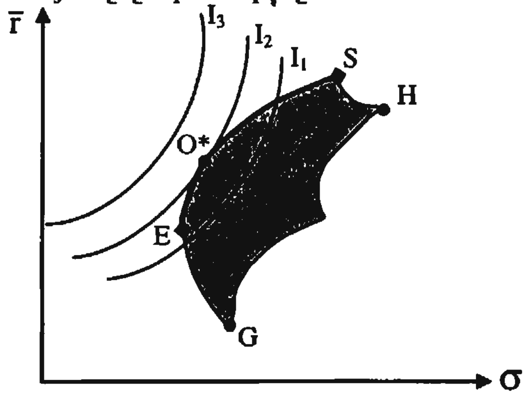
Փաթեթներ	Նվազագույն ռիսկի արժեքները (%)	Առավելագույն ռիսկի արժեքները (%)
A	20	20
B	10	23.33
C	0	26.67
D	10	30.00
E	20	33.33
F	30	36.67
G	40	40.00

10-րդ գծապատկերում բերված են դիտարկվող փաթեթները: Պետք է նշել, որ առավելագույն ռիսկ ունեցող բոլոր փաթեթները գտնվում են A և G կետերը միացնող գծի վրա: Դա նշանակում է, որ դիտարկվող արժեթղթերից չի կարելի կազմել այնպիսի փաթեթ, որի ռիսկի արժեքը գտնվի այս գծից ավելի աջ: Այս արժեթղթերից կազմված փաթեթները կգտնվեն գծի վրա կամ նրանից ձախ: Դա նշանակում է, որ փաթեթի մեջ ներառված արժեթղթերի թվի մեծացումը հանգեցնում է նրա կանոնական շեղման փոքրացման: Կանոնական շեղումների նվազագույն արժեքներ ունեցող փաթեթները գտնվում են A, (8.3%,0) և G կետերը միացնող հատվածների վրա: Հետևաբար, դիտարկվող երկու արժեթղթերից չի կարելի կազմել փաթեթ, որի կանոնական շեղումը լինի ավելի ձախ, քան նշված հատվածները: Քանի որ, ρ_{ij}-ն արժեքներ է ընդունում [−1,1] միջակայքից, ապա դիտարկվող արժեթղթերից կազմված փաթեթները կգտնվեն ստորև բերված եռանկյան մեջ: Օրինակ, $x_1=0.5$, $x_2=0.5$ դեպքում դիտարկվող փաթեթները կգտնվեն եռանկյան մեջ բերված կորի վրա: Որքան ρ_{12}-ը մոտ է–1-ին այնքան այս կորը գոգավոր կլինի



Գծ.10

Արդյունավետ բազմության նշված հատկությունները ճշմարիտ են նաև N արժեթղթերից կազմված փաթեթների համար: Լավագույն փաթեթի ընտրության խնդիրը լուծվում է հետևյալ կերպ: Սկզբում կառուցվում են ներդրողի անտարբերության կորերը և N արժեթղթերից կազմված փաթեթների արդյունավետ բազմությունը: Այնուհետև որոշվում է անտարբերության կորի և արդյունավետ բազմության շոշափման կետը:



Գծ.11

Այս կետին համապատասխանող փաթեթը ապահովում է տվյալ անտարբերության կորի դեպքում առավելագույն միջին եկամտաբերությունը և նվազագույն կանոնական շեղումը՝ ռիսկը: Այս դատողությունները ներկայացված են 11-րդ գծապատկերում, որտեղ լավագույն փաթեթին համապատասխանում է O կետը:

4.2. Փաթեթների արդյունավետ բազմության կառուցման ալգորիթմ

Ալգորիթմի հիմքում ընկած է «անկյունային» փաթեթների հաջորդական կառուցման եղանակը: Անկյունային փաթեթները արդյունավետ բազմության այնպիսի տարրեր են, որոնք ունեն հետևյալ հատկությունը՝ երկու հարակից անկյունային փաթեթների համադրմամբ կարելի է կառուցել արդյունավետ բազմությունում նրանց միջև ընկած բոլոր հնարավոր փաթեթները: Ալգորիթմի աշխատանքը քննարկենք երեք արժեթղթերից բաղկացած փաթեթների համար արդյունավետ բազմության կառուցման օրինակով:

Ալգորիթմի սկզբում որոշվում են բոլոր դիտարկվող արժեթղթերի միջին եկամտաբերությունները և Cov մատրիցը: Դիցուք՝ քննարկվող A,B և C արժեթղթերի համար միջին եկամտաբերությունները և կովարիացիայի մատրիցը համապատասխանաբար հավասար են՝

$$(16.2;\ 24.6;\ 22.8),\quad Cov=\begin{pmatrix} 146 & 187 & 145 \\ 187 & 854 & 104 \\ 145 & 104 & 289 \end{pmatrix}:$$

Այնուհետև արժեթղթերը կարգավորվում են ըստ միջին եկամտաբերությունների աճի: Դիտարկվող օրինակում առավելագույն եկամտաբերություն՝ 24.6% ունի B արժեթուղթը: Ըստ արժեքի՝ երկրորդ եկամտաբերությունը՝ 22.8% ունի C արժեթուղթը: Իսկ ամենափոքր եկամտաբերությունը՝ 16.2% ունի A արժեթուղթը:

Առաջին «անկյունային» փաթեթը կազմվում է առավելագույն միջին եկամտաբերություն ունեցող արժեթղթից: Քննարկվող օրինակում առաջին «անկյունային» փաթեթը կազմված կլինի միայն B արժեթղթից և կունենա x(1) կշռային վեկտորը:

$$x(1)=\begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 1{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix}:$$

Այս փաթեթի միջին եկամտաբերությունը և ռիսկը համապատասխանորեն հավասար կլինեն 24.6%-ի և 29.22%-ի: 12-րդ գծապատկերումում առաջին անկյունակային փաթեթը նշանակված է C(1)-ով:

Երկրորդ «անկյունային» փաթեթը կառուցվում է ըստ եկամտաբերության առաջին և երկրորդ արժեթղթերից (մեր օրինակում՝ B և C արժեթղթերից): Այս «անկյունային» փաթեթի կշռային վեկտորն ընտրվում է այնպես, որ ստացված փաթեթը ունենա նվազագույն ռիսկ՝ կանոնական շեղում: Եթե y-ը B արժեթղթի մասնաբաժինն է փաթեթում, ապա C արժեթղթի մասնաբաժինը հավասար կլինի 1–y-ի: Երկրորդ «անկյունային» փաթեթի կանոնական շեղումը կորոշվի հետևյալ բանաձևից.

$$\sigma_2=(\sigma_B^2y^2+\sigma_C^2(1-y)^2+2y(1-y)\sigma_{BC})^{\frac{1}{2}}$$

σ_2-ի նվազագույն արժեքը ստացվում է y=0.20 դեպքում:

Հետևաբար, երկրորդ «անկյունային» փաթեթի կշռային վեկտորը հավասար կլինի՝

$$x(2)=\begin{pmatrix}0.00\\0.20\\0.80\end{pmatrix},$$

իսկ նրա միջին եկամտաբերությունը և ռիսկը համապատասխանորեն կորոշվեն հետևյալ բանաձևերից.

$$\bar{r}_2=24.6\times0.20+22.8\times0.80=23.16\%,$$

$$\sigma_2=(854\times0.04+289\times0.64+2\times0.2\times0.8\times104)^{\frac{1}{2}}=15.89\%:$$

Գծապատկերում երկրորդ «անկյունային» փաթեթը նշանակված է C(2)-ով: Քանի, որ առաջին և երկրորդ փաթեթները հարակից են, ապա նրանց միջև ընկած ամեն մի արդյունավետ փաթեթ կարելի է ստանալ նրանց համադրությունից: Այսպիսի փաթեթների կշռային վեկտորը՝ x_{12}-ը որոշվում է հետևյալ բանաձևից.

$$x_{12}=z\times x(1)+(1-z)\times x(2),$$

որտեղ z-ը փոփոխվում է [0.1] միջակայքում: Երրորդ «անկյունային» փաթեթը կազմվում է ըստ եկամտաբերության երկրորդ և երրորդ արժեքներն ունեցող արժեթղթերով: Դիտարկվող օրինակում C և A արժեթղթերով: Այս արժեթղթերի մասնաբաժինները՝ y-ը և 1–y-ը, որոշվում են այնպես, որ երրորդ «անկյունային» փաթեթի կանոնական շեղումը լինի նվազագույնը: Դիտարկվող օրինակում երրորդ անկյունային փաթեթի ռիսկի արժեքը որոշվում է հետևյալ բանաձևից.

$$\sigma_3=(\sigma_C^2y^2+\sigma_A^2(1-y)^2+2y(1-y)\sigma_{AC})^{\frac{1}{2}}:$$

σ_3-ի նվազագույն արժեքը ստացվում է y=0.01-ի դեպքում: Հետևաբար, երրորդ «անկյունային» փաթեթի կշռային վեկտորը x(3)-ը, հավասար կլինի՝

$$x(3)=\begin{pmatrix}0.99\\0.00\\0.01\end{pmatrix},$$

իսկ նրա միջին եկամտաբերությունը և կանոնական շեղումը կորոշվեն հետևյալ բանաձևերից.

$$\bar{r}_3=16.2\times0.99+22.8\times0.01=16.27\%,$$

$$\sigma_3=(0.01^2\times289+0.99^2\times146+2\times0.01\times0.99\times145)^{\frac{1}{2}}=12.08\%:$$

Գծապատկերում երրորդ «անկյունային» փաթեթը նշանակված է C(3)-ով: Քանի, որ երկրորդ և երրորդ փաթեթները հարակից են, ապա դրանց միջև ընկած ամեն մի արդյունավետ փաթեթ կարելի է ստանալ դրանց համադրությունից: Այսպիսի փաթեթների կշռային վեկտորը կորոշվի հետևյալ բանաձևից.

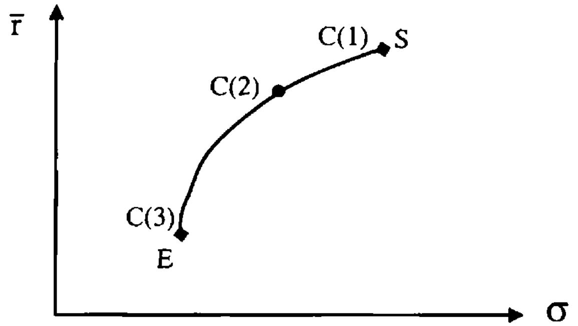
$$x_{23}=z\times x(2)+(1-z)\times x(3):$$

Որտեղ z-ը փոփոխվում է [0.1] միջակայքում:

Օրինակ, եթե z=0.33-ի, ապա նման արդյունավետ փաթեթի կշռային x_{23} վեկտորը հավասար կլինի՝

$$x_{23}=0.33\times x(2)+0.67\times x(3)=\begin{pmatrix}0.57\\0.07\\0.36\end{pmatrix}:$$

Ալգորիթմը նման ձևով շարունակվում է մնացած արժեքորերի համար: Վերջին (մեր դեպքում C(3)) «անկյունային» փաթեթին համապատասխանում է արդյունավետ բազմության E կետը:



Գծ.12

Գրաֆիկական-վերլուծական եղանակի դեպքում «անկյունային» փաթեթների օգնությամբ հաշվարկվում են արդյունավետ բազմության նաև մյուս տարրերը: Սովորաբար երկու հարակից փաթեթների միջև հաշվարկվում են 10-ից 20 արդյունավետ փաթեթներ՝ արդյունավետ բազմության կորը ճշգրտելու նպատակով: Ալգորիթմի աշխատանքն ավարտվում է փաթեթների արդյունավետ բազմության կորը ճշգրտելուց հետո:

Ներդրողի անտարբերության կորի և արդյունավետ փաթեթների բազմության տարրերի որոշումից հետո կատարվում է ներդրման լավագույն փաթեթի ընտրությունը: Ինչպես արդեն նշվել է, նման փաթեթին համապատասխանում է ներդրողի անտարբերության կորի և արդյունավետ բազմության շոշափման O^* կետը: Այս կետին համապատասխանող եկամտաբերության $\bar{r}^*$ և ռիսկի σ^* արժեքների որոշումից հետո, կատարվում է լավագույն փաթեթի կազմի ընտրությունը: Դրա համար արդյունավետ փաթեթների բազմության մեջ վերցվում են այնպիսի երկու հարևան անկյունային փաթեթներ, որ լավագույն փաթեթի եկամտաբերության արժեքը գտնվի այս փաթեթների եկամտաբերությունների միջև: Դիտարկվող օրինակում O^* կետի եկամտաբերությունը գտնվում է երկրորդ և երրորդ անկյունային փաթեթների եկամտաբերությունների միջև: Քանի որ հարևան անկյունային փաքեթների համադրմամբ կարելի է կառուցել նրանց միջև ընկած ամեն մի արդյունավետ փաթեթ, ապա լավագույն փաթեթում անկյունային փաթեթների մասնաբաժինները՝ y-ը և (1–y)-ը, կորոշվեն հետևյալ բանաձևից.

$$\bar{r}^* = y\bar{r}_{II} + (1-y)\bar{r}_{III},$$

որտեղ $\bar{r}_{II}$-ն և $\bar{r}_{III}$-ը համապատասխանում են $\bar{r}^*$-ից բարձր, այսինքն՝ երկրորդ և ցածր, այսինքն՝ երրորդ եկամտաբերություն ունեցող անկյունային փաթեթներին:

Այստեղից y-ի համար կստանանք՝

$$y = \frac{\bar{r}^* - \bar{r}_{III}}{\bar{r}_{II} - \bar{r}_{III}} = \frac{\bar{r}^* - \bar{r}_2}{\bar{r}_2 - \bar{r}_3}:$$

5. Ռիսկավոր և ռիսկազերծ արժեթղթերից ներդրումային փաթեթների ձևավորումը

Ներդրումային փաթեթներ ձևավորելիս ներդրողները աշխատում են նրանցում ընդգրկել ըստ հնարավորին բազմատեսակ արժեթղթեր: Փաթեթների բազմատեսակացման շնորհիվ կարելի է զգալիորեն փոքրացնել ձևավորվող փաթեթների ռիսկը: Նախորդ բաժնում մենք դիտարկեցինք միայն ռիսկավոր արժեթղթերից կազմված փաթեթները: Նշեցինք, որ նման արժեթղթերի և դրանցից կազմված փաթեթների եկամտաբերությունը պատահական մեծություն է և բնութագրվում է միջին արժեքով ու կանոնական շեղումով: Ներդրման այսպիսի փաթեթները կոչվում են ռիսկավոր փաթեթներ:

Ռիսկազերծ արժեթղթերը և դրանցից կազմված փաթեթները բնութագրվում են եկամտաբերության հաստատուն արժեքով: Նման արժեթղթերի եկամտաբերության կանոնական շեղումը, ինչպես նաև ամեն մի այլ արժեթղթի հետ հարաբերակցության գործակիցը հավասար են զրոյի:

Այս բաժնում կքննարկենք ռիսկավոր և ռիսկազերծ արժեթղթերից կազմված ներդրման փաթեթների ձևավորման խնդիրը:

Պարզության համար սկզբում կդիտարկենք մեկ ռիսկավոր և մեկ ռիսկազերծ արժեթղթից կազմված փաթեթների բնութագրերը: Դիցուք՝ $\bar{r}_1$-ը և $\bar{r}_2$-ը ռիսկավոր և ռիսկազերծ արժեթղթերի եկամտաբերություններն են, իսկ σ_1-ը և σ_2-ը դրանց կանոնական շեղումները: Եթե x_1-ով նշանակենք ռիսկավոր արժեթղթերի կշիռը (մասը,բաժինը) փաթեթում, իսկ x_2-ով՝ ռիսկազերծ արժեթղթերինը, ապա դիտարկվող արժեթղթերից կազմված փաթեթների $\bar{r}$ եկամտաբերությունը և σ կանոնական շեղումը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևերից.

$$\bar{r} = x_1\bar{r}_1 + x_2\bar{r}_2 \tag{5.1}$$

$$\sigma = [x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12}]^{\frac{1}{2}} =$$

$$=[x_1^2\sigma_1^2+(1-x_1)^2\sigma_2^2+2x_1(1-x_1)\sigma_{12}]^{\frac{1}{2}}:$$

Քանի որ ռիսկազերծ արժեթղթի $\sigma_2=0$ և $\sigma_{12}=0$, ապա դիտարկվող փաթեթների σ կանոնական շեղման և r եկամտաբերության համար (5.1) բանաձևից կստանանք՝

$$\sigma=x_1\sigma_1,\quad \bar{r}_1=x_1(\bar{r}_1-\bar{r}_2)+\bar{r}_2$$

Որտեղից՝

$$\bar{r}=\sigma\frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_2)}{\sigma_1}+\bar{r}_2 \qquad (5.2)$$

Սակայն (5.2)-ը նկարագրում է ($\bar{r}_1,\sigma_1$) և ($\bar{r}_2$,0) կետերով անցնող գծի հավասարումը:

Հետևաբար, դիտարկվող արժեթղթերից կազմված բոլոր փաթեթները կգտնվեն ($\bar{r}_1,\sigma_1$) և ($\bar{r}_2$,0) կետերը միացնող գծի վրա: x_1-ին տալով տարբեր արժեքներ, կարելի է ստանալ ռիսկավոր ($\bar{r}_1,\sigma_1$) և ռիսկազերծ ($\bar{r}_2$,0) արժեթղթերից կազմված բոլոր հնարավոր փաթեթները:

Այժմ դիտարկենք N–1 արժեթղթեր պարունակող ռիսկավոր փաթեթից և մեկ ռիսկազերծ արժեթղթից կազմված ներդրման փաթեթները: Դիցուք՝ ռիսկավոր փաթեթի եկամտաբերությունը հավասար է $\tilde{r}$-ի, իսկ կանոնական շեղումը՝ $\tilde{\sigma}$-ի: Այս դեպքում ռիսկավոր փաթեթից և ռիսկազերծ արժեթղթերից կազմված փաթեթների $\bar{r}$ եկամտաբերությունը և σ կանոնական շեղումը, նախորդ օրինակի նմանողությամբ, կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով.

$$\bar{r}=x_1\tilde{r}+x_2\bar{r}_2,$$

$$\sigma=[x_1^2\tilde{\sigma}^2+x_2^2\sigma_2^2+2x_1x_2\sigma_{12}]^{\frac{1}{2}}:$$

Այստեղ x_1-ը ռիսկավոր փաթեթի, իսկ x_2 ռիսկազերծ արժեթղթի կշիռներն են: Քանի որ, $x_2=1-x_1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_{12}=0$, ապա՝

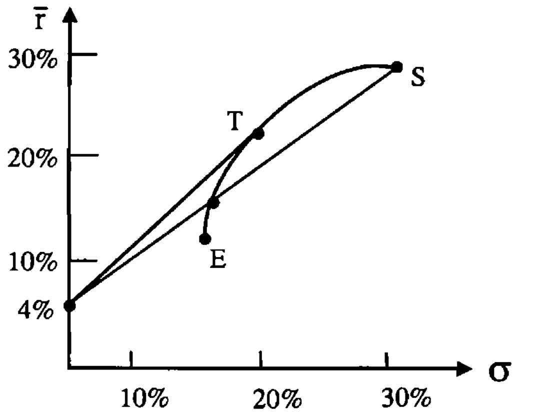
$$\bar{r}=x_1(\tilde{r}-\bar{r}_2)+\bar{r}_2,\ \sigma=x_1\tilde{\sigma}: \qquad (5.3)$$

Սակայն (5.3)-ը նկարագրում է ($\bar{r}_2$,0) և ($\tilde{r}$, $\tilde{\sigma}$) կետով անցնող գծի հավասարումը: Հետևաբար, նախորդ օրինակի նմանողությամբ, ռիսկավոր փաթեթից և ռիսկազերծ արժեթղթից կազմված բոլոր փաթեթները կգտնվեն ($\bar{r}_2$,0) և ($\tilde{r}$, $\tilde{\sigma}$) կետերը միացնող գծի վրա: Եթե A=($\tilde{x}$(1),…,$\tilde{x}$(N–1),0)-ն ռիսկավոր փաթեթի, իսկ B = (0,0,…,0,1)-ը ռիսկազերծ արժեթղթի կշռային վեկտորներն են, ապա դրանցից կազմված փաթեթների կշռային $\overline{X}$ = (x(1), …, x(N)) վեկտորի համար կստանանք՝

$$\overline{X}=Ax_1+(1-x_1)B:$$

Այժմ դիտարկենք ռիսկազերծ արժեթղթերից և ռիսկավոր փաթեթից կազմված ներդրման փաթեթների թույլատրելի և արդյունավետ բազմությունների կառուցվածքը:

Ստորև 13-րդ գծապատկերում ցույց է տրված նախորդ բաժնում դիտարկված երեք արժեթղթերից կազմված փաթեթների թույլատրելի բազմությունը, երբ հաշվի են առնվում նաև ռիսկազերծ արժեթղթերը:



Գծ. 13

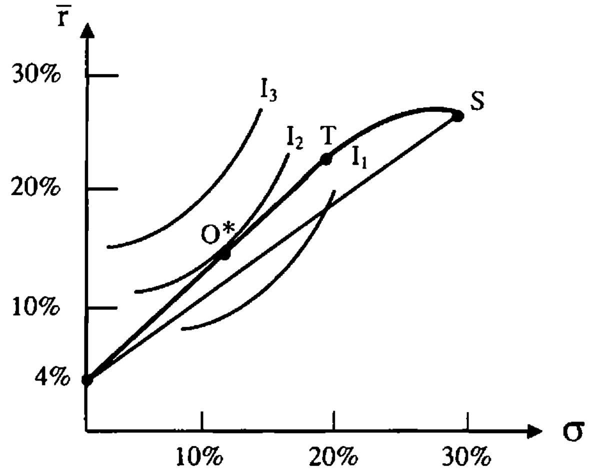
Այս դեպքում թույլատրելի բազմությունը կազմված է ռիսկազերծ արժեթղթերի և ռիսկավոր փաթեթների բոլոր համադրություններից ստացվող փաթեթներից: Թույլատրելի բազմությունում անհրաժեշտ է առանձնացնել նրա երկու գծային սահմանները (տե՛ս. գծ.14): Ներքին գիծը ռիսկազերծ արժեթղթին համապատասխանող ($\bar{r}_2$,0) կետը միացնում է առավելագույն եկամտաբերություն ունեցող ռիսկավոր փաթեթին համապատասխանող S կետին, իսկ վերին գիծը՝ ($\bar{r}_2$,0) կետը միացնում է այդ կետից արդյունավետ բազմությանը տարված շոշափողին:

Շոշափման T կետին համապատասխանում է ռիսկավոր արժեթղթերից կազմված որոշակի արդյունավետ փաթեթ: Այս փաթեթը յուրահատուկ է նրանով, որ նրա և ($\bar{r}_2$,0) կետը միացնող գծից ավելի ձախ և ավելի վերև գտնվող փաթեթներ թույլատրելի բազմության մեջ չկան:

Հետևաբար, ըստ արդյունավետ բազմության սահմանման, ($\bar{r}_2$,0) կետը T-ին միացնող գծի վրա գտնվող փաթեթները, T-կետը S-ին միացնող կորի վրա գտնվող փաթեթների հետ միասին, կկազմեն դիտարկվող խնդրի արդյունավետ բազմությունը: ($\bar{r}_2$,0) կետը T-ին միացնող գծի վրա գտնվող փաթեթները կազմված են T կետին համապատասխանող ռիսկավոր փաթեթից և ռիսկազերծ արժեթղթից, իսկ T կետը S-ին միացնող կորի վրա գտնվող փաթեթները կազմված են միայն ռիսկավոր արժեթղթերից:

Դիտարկվող օրինակում արդյունավետ բազմությունը կառուցվում է հետևյալ կերպ: Սկզբում, ըստ եկամտաբերության աճի, դասակարգվում են ռիսկավոր արժեթղթերը և նախորդ բաժնում քննարկված եղանակով որոշվում է առաջին «անկյունային» C(1) փաթեթը, որին համապատասխանում է առավելագույն եկամտաբերություն ունեցող արժեթղթից կազմված փաթեթը: Այնուհետև կառուցվում է երկրորդ «անկյունային»՝ C(2), փաթեթը, որը կազմված է ամենամեծ եկամտաբերությունն ունեցող առաջին երկու ռիսկավոր արժեթղթերից:

Եթե ($\bar{r}_2$,0) կետից C(1) և C(2) կետերը միացնող կորին կարելի է տանել շոշափող՝ T կետը գտնվում է նշված կետերը միացնող կորի վրա, ապա որոշվում են T կետի կոորդինատները, և ավարտվում է արդյունավետ բազմության կառուցումը: Հակառակ դեպքում կառուցվում է C(3) «անկյունային» փաթեթը:

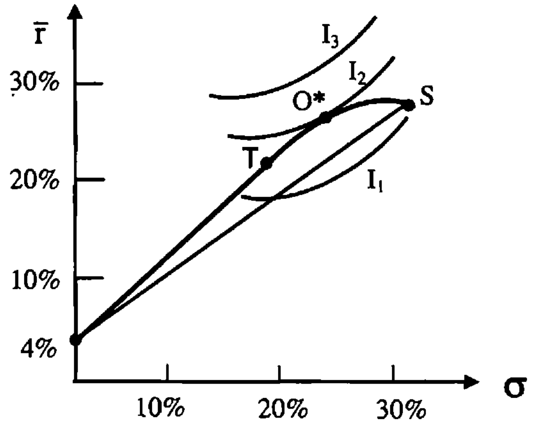


Գծ. 14

Եթե T կետը գտնվում է C(3) և C(2) կետերը միացնող կորի վրա, ապա որոշվում են նրա կոորդինատները, և ավարտվում է արդյունավետ բազմության կառուցումը: «Անկյունային» փաթեթների կառուցումը շարունակվում է այնքան, մինչև որ որոշվի T կետին համապատասխանող փաթեթը: Լավագույն փաթեթի ընտրության համար այս դեպքում անհրաժեշտ է դիտարկել երկու տարբերակ:

Առաջին դեպքում անտարբերության կորի և արդյունավետ բազմության շոշափման O^* կետը գտնվում է ($\bar{r}_2$,0) և T կետերի միջև (տե՛ս գծ. 15): Այս դեպքում լավագույն փաթեթը կազմված է ($\bar{r}_1$,0) ռիսկազերծ արժեթղթերից T կետին համապատասխանող ռիսկավոր փաթեթից:

Երկրորդ տարբերակի դեպքում անտարբերության կորի և արդյունավետ բազմության շոշափման O^* կետը գտնվում է T և S կետերը միացնող կորի վրա: Այս դեպքում լավագույն փաթեթը կազմված է միայն ռիսկավոր արժեթղթերից:



Գծ. 15

Երկու տարբերակների դեպքում լավագույն փաթեթի կշռային վեկտորը որոշվում է նախորդ բաժնում դիտարկված օրինակի նմանությամբ:

Գրականություն

1. Սահակյան Մ.Ա. և ուրիշներ: Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ./Գործույթների հետազոտում.Կառավարման գիտություն/ Մաս 1, Երևան, ԷԿԱԳՄԱՀԲ, 1997.
2. Томас Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. /Пер. с англ./-М.: Дело и сервис, 1999.
3. Эддоус М., Стенсфильд Р. Методы принятия решений /Пер. с англ./-М.: ЮНИТИ,1997.
4. Шарп У., Александр Г., Бэйли Дж. Инвестиции. /Пер. с англ/. - М.:ИНФРА, 1997.
5. Райфа Х. Анализ решений. /Пер. с англ./.-М.: Наука 1977.
6. Winston W.L., Albright S.C. Practical Management Science. Duxbury Press, USA,1997

XI. ՄԱՐԿՈՎԻ ՇՂԹԱՆԵՐ ԵՎ ՄԱՐԿՈՎՅԱՆ ՈՒ ԿԻՍԱՄԱՐԿՈՎՅԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐ

Շատերի համար մնում են դեռևս անբացատրելի,
Թեև ինչ-որ կերպ կարելի է այն մեկնաբանել:

Գրիգոր Նարեկացի,
Մատյան ողբերգության բան Հ.Ը.,
Ե.1979

Մուտք

Մարկովի շղթաները, մարկովի ու կիսամարկովյան գործընթացները հավանականությունների տեսության լավ հետազոտված բաժիններից են: Դրանք մեծապես կիրառվում են գործույթների հետազոտման տեսության մեջ և տնտեսագիտության բազմաթիվ խնդիրներ լուծելիս:

Մարկովի շղթաների, մարկովյան ու կիսամարկովյան գործընթացների վարքն ու յուրահատկությունները հասկանալու համար այս բաժնում կդիտարկենք դրանց կառուցվածքային նկարագիրը:

1. Մարկովի շղթաներ

Պատահական մեծությունների $\{\xi(n)\}$ հաջորդականությունը կազմում է Մարկովի շղթա, եթե $\xi(n)$ մեծության արժեքը ցանկացած n-ի համար կախված է միայն $\xi(n-1)$ պատահական մեծության արժեքից և կախված չէ $\xi(n-2), \xi(n-3), \dots$ արժեքներից:

Մենք կդիտարկենք այն դեպքը, երբ $\xi(n)$-երը ամբողջաթիվ են և արժեքներն ընդունում են $E = (0,1,2,\dots)$ բազմությունից:

Դիտարկենք որևէ համակարգ, որն իր վիճակները փոխում է ժամանակի $t = 0,1,2,\dots$ պահերին և ժամանակի ցանկացած սևեռված պահին կարող է գտնվել E բազմության միայն մեկ վիճակում: Համակարգի վարքը նկարագրվում է Մարկովի շղթայով, եթե.

1. ժամանակի $t=0$ պահին համակարգը գտնվում է որևէ i վիճակում, $i \in E$,

2. ժամանակի $t=1$ պահին համակարգը i վիճակից նոր j վիճակ անցնում է $\overline{p}_{ij}(1) \geq 0$ հավանականությամբ, ընդ որում ցանկացած I վիճակի համար $\sum\limits_{j \in E} \overline{p}_{ij}(1) = 1$,

3. ժամանակի $t=2$ պահին համակարգը j վիճակից որևէ k վիճակ անցնում է $\overline{p}_{jk}(2) \geq 0$ հավանականությամբ և այդպես շարունակ:

Այդպիսով համակարգի վարքի ամբողջական նկարագրման համար պետք է ունենալ.

1) համակարգի հնարավոր վիճակների բազմությունը՝ E= (0,1,2,...),

2) t = 0 պահին վիճակների սկզբնական բաշխման $p^0= (p_i^0 ,i\in E)$ վեկտորը,

3) n-րդ քայլում մի վիճակից մյուսը մեկ քայլով անցումների հավանականությունների P(n) մատրիցը՝

$$P(n) = \| \overline{p}_{ij} (n)\|:$$

Եթե $\xi(n)$-ը՝ n-րդ անցումից հետո (n պահին) շղթայի վիճակն է $\xi(n) = j$, իսկ $\xi(n-1)$-ը շղթայի վիճակն է n–1 պահին, և $\xi(n-1) = i$, ապա շղթայի անցումների հավանականությունները բնորոշվում են մարկովյան հատկությամբ: Դա նշանակում է՝ $\xi(n)$ շղթայի վիճակների ցանկացած $\xi(u_1) = i_1$, $\xi(u_2) = i_2,\ldots,\xi(u_k) = i_k,\xi(n-1) = i$ խմբի համար, որտեղ $u_1<u_2<\ldots<u_k<n-1$, պատահական մեծության պայմանական բաշխումը կախված չէ $\xi(u_1)$, $\xi(u_2)$, …, $\xi(u_k)$-ի արժեքներից՝

$$P\{\xi(n) = j|\xi(u_1) = i_1, \xi(u_2) = i_2,\ldots,\xi(u_k) = i_k,\xi(n-1) = i\} =$$
$$= P\{\xi(n) = j|\xi(n-1) = i\} = \overline{p}_{ij} (n), \quad i,j\in E; \quad n=0,1,2,\ldots :$$

Այստեղ $\overline{p}_{ij} (n)$-ը՝ Մարկովի շղթայի n-րդ քայլում i վիճակից j վիճակ անցման հավանականությունն է: Այսպիսով կարելի է տալ հետևյալ սահմանումը.

Սահմանում 1: Մարկովի շղթաները ընդհատ թռիչքաձև պատահական գործընթացներ են, որոնց անցումային հավանականությունները բնութագրվում են մարկովյան հատկությամբ:

Այժմ կատարենք Մարկովի շղթաների պարզագույն դասակարգումը:

Սահմանում 2: Մարկովի շղթան կոչվում է համասեռ, եթե նրա $\overline{p}_{ij}(n)$ անցումների հավանականությունները կախված չեն n անցման պահից

$$\overline{p}_{ij} (n) = p_{ij}, \quad i,j\in E, \quad n=0,1,2\ldots:$$

Սահմանում 3: Մարկովյան շղթան կոչվում է վերջավոր, եթե նրա E վիճակների բազմությունը վերջավոր է՝ $E = (0,1,2,\ldots,N)$, $N<\infty$:

Վերջավոր, համասեռ Մարկովի շղթայի անցումների հավանականությունները բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$P\{\xi(n) = j|\xi(u_1) = i_1, \xi(u_2) = i_2,\ldots,\xi(u_k) = i_k, \xi(s) = i, \qquad (1.1)$$
$$u_1<u_2<\ldots<u_k<s\} = P\{\xi(n) = j|\xi(s) = i\}= p_{ij}(n-s) :$$

Այսպիսով համասեռ Մարկովի շղթայի $P\{\xi(n) = j|\xi(s) = i\}$ պայմանական անցումային հավանականությունները կախված են միայն n–s տարբերությունից: (1.1) բանաձևում համասեռ շղթայի մարկովյան հատկությունը արտահայտվում է առաջին հավասարությամբ և մեկնաբանվում է հետևյալ կերպ:

Շղթայի վարքը s պահից հետո, $\xi(s)$-ի վիճակի հայտնի արժեքի դեպքում, կախված չէ մինչև s պահը (անցյալում) շղթայի վարքից:

Համասեռ Մարկովի շղթայի n+s քայլում անցումների հավանականությունները բավարարում են Կոլմոգորով-Չեպմենի հավասարմանը՝

$$p_{ij}(n+s)=\sum_{k\in E}p_{ik}(n)p_{kj}(s)\,,\ \ i,j\in E,\ \ s,n\geq 1, \qquad (1.2)$$

որը հանդիսանում է Մարկովի շղթաների հավանականային հատկություններ ի հետազոտման ելակետային առարկան: (1.2) բանաձևը ակնհայտորեն դուրս է բերվում Մարկովի շղթայի համասեռության հատկությունից և լրիվ հավանականությունների բանաձևից: Նմանապես, (1.2) բանաձևը և լրիվ հավանականությունների բանաձևն օգտագործելով Մարկովի շղթայի $\xi(u_1)=j_1$, $\xi(u_2)=j_2,\ldots,\xi(u_k)=j_k$ վիճակների վերջավոր հաջորդականության համատեղ պայմանական բաշխման համար, կարելի է գրել՝

$$P\{\xi(u_1)=j_1,\ \xi(u_2)=j_2,\ldots,\ \xi(u_k)=j_k|\xi(s)=j\}=$$
$$=p_{jj_1}(u_1-s)\,p_{j_1j_2}(u_2-u_1),\ldots,p_{j_{k-1}j_k}(u_k-u_{k-1}),$$

որտեղ՝ $s<u_1<u_2<\ldots<u_k$:

Եթե $\pi_i(n)$-ը՝ Մարկովի շղթայի n-րդ քայլում i վիճակ ընկնելու հավանականությունն է, իսկ p^0-ն՝ շղթայի սկզբնական բաշխումն է՝

$$p^0=\{\,p_i^0\,,\ i\in E\},$$

ապա շղթայի վիճակների անպայման բաշխումը որոշվում է

$$\pi_i(n)=\sum_{j\in E}p_j^0p_{ji}(n)\,,\ i\in E,\ n=1,2,\ldots :$$

$\pi_i(n)$ հավանականությունները կարելի է որոշել նաև հետևյալ անդրադարձ բանաձևից՝

$$\pi_i(n)=\sum_{j\in E}\pi_j(n-1)p_{ji}\,,\ \ i\in E,\ \ n=1,2,\ldots : \qquad (1.3)$$

Բանաձևի հաջորդական կիրառումով $\pi(n)=\{\pi_i(n),\ i\in E\}$ վեկտորի համար կստանանք՝

$$\pi(n)=p^0P(1)P(2),\ldots,P(n),\ \ n=1,2,\ldots,$$

որտեղ $P(n)=\|\,\overline{p}_{ij}\,(n)\|$-ը Մարկովի շղթայի անցումների մատրիցն է n-րդ պահին:

Համասեռ շղթաների դեպքում, երբ $P(n)=P$, $n\geq 1$, $\pi(n)$ վեկտորի համար ստացվում է՝

$$\pi(n)=p^0P^n,\quad n=1,2,\ldots, \qquad (1.4)$$

որտեղ P^n-ը՝ P մատրիցի n-րդ աստիճանն է:

Դիտարկենք Մարկովի շղթաների մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1: Քննարկենք քոլեջի ուսանողի վարքը ուսումնառության չորս տարիների ընթացքում: Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր ուսումնական տարի ուսանողը p հավանականությամբ դուրս է մնում քոլեջից, q հավանականությամբ մնում է նույն կուրսում և r հավանականությամբ փոխադրվում է հաջորդ կուրս: Պարզ է, որ $p+r+q=1$ և $p>0$, $r>0$, $q>0$: Կազմենք ուսանողի վարքը նկարագրող Մարկովի շղթան՝ ներմուծելով հետևյալ վիճակները.

s_1- քուլեջից դուրս է մնացել, s_4- սովորում է երրորդ կուրսում,

s_2- քոլեջն ավարտել է, s_5- սովորում է երկրորդ կուրսում,

s_3- սովորում է չորրորդ կուրսում, s_6- սովորում է առաջին կուրսում:

Շղթայի անցումների հավանականությունների P մատրիցը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{pmatrix}:$$

Եթե շղթայի հնարավոր վիճակների բազմությունը վերջավոր է, ապա շղթան կոչվում է վերջավոր Մարկովի շղթա, հակառակ դեպքում՝ հաշվելի վիճակների բազմությունով Մարկովի շղթա: Եթե $P\{\xi(n+1)=i_1,\xi(n+2)=i_2,\ldots,\xi(n+k)=i_k\}$ հավանականությունները n-ից կախված չեն վիճակների ցանկացած $i_1,i_2,\ldots,i_k$ խմբի և k=0,1,2,…-ի համար, ապա համասեռ Մարկովի շղթան կոչվում է ստացիոնար:

Մարկովի շղթաների ուսումնասիրման ժամանակ կարևոր է իմանալ նրանց վիճակների դասակարգումը: Բերենք Մարկովի շղթաների վիճակների հատկությունների հետ կապված մի քանի սահմանումներ: Վիճակների վերջավոր $i,i_1,\ldots,i_s,j$ խումբը որոշում է i վիճակից j վիճակ s երկարության ուղի, եթե՝ $p_{ii_1},p_{i_1i_2},\ldots,p_{i_sj}>0$: j վիճակը կոչվում է i վիճակից հասանելի, եթե գոյություն ունի j-ից i վիճակ տանող ուղի: Երկու i և j վիճակներ կոչվում են հաղորդվող, եթե j վիճակը հասանելի է i-ից, իսկ i վիճակը j-ից: i վիճակից i վիճակ փակ ուղին կոչվում է i վիճակի ցիկլ: Այդ ուղու երկարությունը կոչվում է ցիկլի երկարություն: Եթե $p_{ii}(n)>0$, ապա գոյություն ունի i վիճակի n երկարության ցիկլ: n թվերի d_i ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը, որի համար $p_{ii}(d_i)>0$, կոչվում է i վիճակի պարբերություն:

Դիցուք՝ E_1-ը՝ որևէ i վիճակի հետ հաղորդակցվող բոլոր վիճակների դասն է: Պարզ է, որ E_1-ի բոլոր վիճակները հաղորդակցվող են: Այսպիսի E_1 բազմությունը կոչվում է հաղորդակցվող վիճակների դաս: Այսպիսով E բազմությունը բաժանվում է հաղորդակցվող վիճակների չհատվող դասերի: Եթե $E_1=E$, ապա Մարկովի շղթան կոչվում է չվերլուծվող: Եթե E_1-ը պարունակում է միայն մեկ վիճակ, ապա այն կոչվում է կլանման վիճակ: Կլանման i վիճակի համար $p_{ii}=1$, $p_{ij}=0$, $i\neq j$, քանի որ այդ վիճակից չի կարելի անցնել որևէ այլ վիճակ: E_1 դասը կոչվում է փակ, եթե նրա ցանկացած $i\in E_1$ վիճակի համար $i\in E_1$ անցումային հավանականությունները մեծ են զրոյից՝ $p_{ij}>0$ միայն $j\in E_1$ վիճակների համար:

Հաղորդակցվող վիճակների փակ դասը կոչվում է էրգոդիկ դաս:

Էրգոդիկ դասում ընդգրկված վիճակները կոչվում են վերադարձելի, իսկ չընդգրկվածները՝ անվերադարձելի: Մարկովյան շղթան ընկնելով էրգոդիկ վիճակների դաս, այնտեղից այլևս դուրս չի գալիս:

Կախված մարկովյան շղթայի վիճակների տեսակից՝ տարբերում են վերադարձելի և անվերադարձելի վիճակների բազմությունով շղթաներ:

Առաջին տեսակի Մարկովի շղթաների վիճակների E բազմությունը կազմված է մեկ կամ մի քանի էրգոդիկ, փոխչհատվող ենթաբազմություններից:

Երկրորդ տեսակի շղթաների դեպքում E բազմությունը բաղկացած է երկու փոխչհատվող՝ E_0 անվերադարձելի վիճակների և E_1 վերադարձելի, էրգոդիկ վիճակների ենթաբազմություններից:

Եթե E_1 բազմությունը բաղկացած է մեկ վիճակից, ապա այդպիսի շղթան կոչվում է կլանմամբ Մարկովի շղթա: Չվերլուծվող Մարկովի շղթան կոչվում է ոչ պարբերական, եթե նրա յուրաքանչյուր վիճակի պարբերությունը հավասար է 1-ի:

Եթե շղթայի յուրաքանչյուր վիճակի պարբերությունը $d>1$, ապա չվերլուծվող Մարկովի շղթան կոչվում է պարբերական՝ d պարբերությամբ: Փակ դասի բոլոր վիճակները ունեն նույն d պարբերությունը, որը կոչվում է դասի պարբերություն: Եթե $d>1$, ապա դասը կոչվում է պարբերական:

Գործույթների հետազոտման խնդիրներում, երբ որպես մաթեմատիկական մոդելներ օգտագործվում են Մարկովի շղթաները, կախված նրանց տեսակից, ուսումնասիրվում են հետևյալ հիմնական հարցադրումները:

Էրգոդիկ Մարկովի շղթաների դեպքում՝

1. Ինչպիսի՞ն է n քայլից հետո j վիճակ ընկնելու հավանականությունը, եթե սկզբնական $t = 0$ պահին շղթան գտնվել է i վիճակում:

2. Ինչի՞ է հավասար շղթայի i վիճակում մնալու միջին ժամանակը և ինչպես է նա կախված շղթայի սկզբնական բաշխումից:

3. Ինչի՞ է հավասար i վիճակից j վիճակ ընկնելու քայլերի նվազագույն քանակի միջինը և այլն:

Կլանմամբ Մարկովի շղթաների դեպքում՝

1. Ինչի՞ է հավասար անվերադարձելի i վիճակից տվյալ էրգոդիկ ենթաբազմություն ընկնելու հավանականությունը:

2. Ինչի՞ է հավասար շղթայի i վիճակում մնալու միջին ժամանակը մինչև անցումը էրգոդիկ բազմություն:

3. Ինչի՞ է հավասար i անվերադարձելի վիճակից մինչև էրգոդիկ բազմություն ընկնելու քայլերի նվազագույն քանակի միջինը և այլն:

Կլանմամբ Մարկովի շղթաների համար ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Վերջավոր վիճակների բազմությունով կլանմամբ Մարկովի շղթաներում n քայլերից հետո, երբ $n \to \infty$, կլանման վիճակ ընկնելու հավանականությունը, անկախ սկզբնական բաշխումից, ձգտում է մեկի:

Դիցուք՝ Մարկովի շղթայի վիճակների E բազմությունը տրոհված է երկու՝ E_0 և E_1 փոխչհատվող ենթաբազմությունների՝ $E= E_0 \cup E_1$, $E_0 \cap E_1= \varnothing$, որտեղ E_0-ն՝ անվերադարձելի վիճակների, իսկ E_1-ը կլանման վիճակների ենթաբազմություններն են: Կլանմամբ Մարկովի շղթաների անցումային P մատրիցը կանոնական ձևով ունի հետևյալ տեսքը.

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}, \text{ որտեղ } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

I-ն կլանման վիճակներին համապատասխանող միավոր մատրից է, 0-ն զրոյական տարրերով մատրից է, R-ը անվերադարձելի վիճակներից կլանման վիճակների անցման p_{ij}, $i\in E_0$, $j\in E_1$ հավանականությունների մատրիցն է, իսկ Q-ն անվերադարձելի վիճակների E_0 բազմությունում p_{ij}, $i,j\in E_0$, անցումների հավանականությունների մատրիցն է:

Թեորեմ: Կլանմամբ Մարկովի ցանկացած շղթայի համար I–Q մատրիցը հետադարձելի է, ընդ որում հետադարձ $(I–Q)^{-1}$ մատրիցը որոշվում է՝

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k :$$

Սահմանում 4: $N=(I–Q)^{-1}$ մատրիցը կոչվում է կլանմամբ Մարկովի շղթայի հիմնարար մատրից:

Հիմնարար N մատրիցի n_{ij} տարրերը $i,j\in E_0$, ցույց են տալիս շղթայի j վիճակ ընկնելու միջին քանակությունը, պայմանով, որ սկզբնական պահին շղթան գտնվել է i վիճակում: N մատրիցի n_{ij} տարրերը կարող են որոշվել նաև հետևյալ հավասարումների համակարգից՝

$$n_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k\in E_0} p_{ik} n_{kj}, \quad i,j\in E_0, \qquad (1.5)$$

որտեղ δ_{ij}-ն՝ Կրոնեկերի հաստատուններն են՝ $\delta_{ij}=1$, եթե i=j, և $\delta_{ij}=0$, եթե $i\neq j$:

Օրինակ 1 (շարունակություն): Ուսանողների վարքը նկարագրող Մարկովի շղթան ունի կլանման երկու վիճակ՝ s_1 և s_2, որոնց համապատասխանում են ուսանողի քոլեջից դուրս մնալը և քոլեջն ավարտելը:

Մեր օրինակում I–Q և N մատրիցները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$I - Q = \begin{pmatrix} p+r & 0 & 0 & 0 \\ -r & p+r & 0 & 0 \\ 0 & -r & p+r & 0 \\ 0 & 0 & -r & p+r \end{pmatrix},$$

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(p+r) & 0 & 0 & 0 \\ r/(p+r)^2 & 1/(p+r) & 0 & 0 \\ r^2/(p+r)^3 & r/(p+r)^2 & 1/(p+r) & 0 \\ r^3/(p+r)^4 & r^2/(p+r)^3 & r/(p+r)^2 & 1/(p+r) \end{pmatrix}:$$

N մատրիցում զրոները ցույց են տալիս բարձր կուրսից ցածր կուրս անցումների անհնարությունը: N մատրիցը հաշվենք p, q, r հավանականությունների հետևյալ թվային արժեքների դեպքում՝ p = 0.2, q = 0.1 և r = 0.7:

$$N=\begin{pmatrix}1.11 & 0 & 0 & 0\\ 0.86 & 1.11 & 0 & 0\\ 0.67 & 0.86 & 0.11 & 0\\ 0.52 & 0.67 & 0.86 & 0.11\end{pmatrix}:$$

Դիցուք՝ $\tau=(\tau_i,\ i\in E_0)$-ն Մարկովի շղթայի անցումների միջին քանակի վեկտորն է մինչև կլանման պահը: τ վեկտորի տարրերը որոշվում են հետևյալ հավասարումների համակարգից՝

$$\tau_j = 1 + \sum_{i\in E}\tau_i p_{ji}\ ,\ j\in E_0, \qquad (1.6)$$

կամ մատրիցների տեսքով՝ $\tau = N\cdot I$:

Մարկովյան շղթայի i անվերադարձ վիճակից j կլանման վիճակ (վերջավոր քայլերի ընթացքում) ընկնելու b_{ij} հավանականությունը հավասար է՝

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\in E_0} p_{ik}b_{kj}\ ,\ i\in E_0,\ j\in E_1: \qquad (1.7)$$

Կամ մատրիցների տեսքով՝ $B = N\cdot R$, որտեղ՝ $B = \|b_{ij}\|$:

Օրինակ 1 (շարունակություն): Եթե նշանակենք $f=r/(p+r)$-ի, ապա շղթայի բնութագրերի համար կստանանք՝

$$N=\frac{1}{(p+r)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ f & 1 & 0 & 0\\ f^2 & f & 1 & 0\\ f^3 & f^2 & f & 1\end{pmatrix},\ \tau=\frac{1}{p}\begin{pmatrix}1-f\\ 1-f^2\\ 1-f^3\\ 1-f^4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1-f & f\\ 1-f^2 & f^2\\ 1-f^3 & f^3\\ 1-f^4 & f^4\end{pmatrix}:$$

Ցանկացած կուրսի ուսանողի համար քոլեջը բարեհաջող ավարտելու հավանականությունը կախված է $f=r/(p+r)$ հարաբերությունից: f-ն ուսանողի հաջորդ կուրս փոխադրվելու հավանականությունն է պայմանով, որ ուսանողը այլևս այդ կուրսում չի սովորի: f պարամետրի աստիճանները ցույց են տալիս, որ ամեն անգամ, երբ ուսանողը թողնում է հերթական կուրսը, նա ոչ թե թողնում է ուսումը, այլ փոխադրվում է հաջորդ կուրս: Յուրաքանչյուր կուրսում սովորելու տևողության վրա սահմանափակումներ չեն դրվում: Եթե բացառենք նույն կուրսում մնալու հնարավորությունը՝ q=0, ապա կստանանք՝ f=r և

$$N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ r & 1 & 0 & 0\\ r^2 & r & 1 & 0\\ r^3 & r^2 & r & 1\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}1\\ 1+r\\ 1+r+r^2\\ 1+r+r^2+r^3\end{pmatrix},$$

իսկ B մատրիցը կմնա անփոփոխ: Դիտարկված թվային արժեքների դեպքում կստանանք՝

$$N=\begin{pmatrix}1.11 & 0 & 0 & 0\\ 0.86 & 1.11 & 0 & 0\\ 0.67 & 0.86 & 1.11 & 0\\ 0.52 & 0.67 & 0.86 & 1.11\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}1.11\\ 1.98\\ 2.65\\ 3.17\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0.22 & 0.78\\ 0.40 & 0.6\\ 0.53 & 0.47\\ 0.63 & 0.37\end{pmatrix}:$$

B մատրիցի առաջին սյանը համապատասխանում են քոլեջից դուրս մնալու հավանականությունները, իսկ երկրորդին՝ հաջողությամբ ավարտելու հավանականությունները: B մատրիցի տարրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ուսանողը առաջին և երկրորդ կուրսերում 0,5-ից ավելի հավանականությամբ կարող է թողնել քոլեջը, իսկ երրորդ և չորրորդ կուրսերում՝ հաջողությամբ ավարտել:

Սահմանում 5: Վերջավոր, ոչ պարբերական Մարկովի շղթան, որի բոլոր վիճակները հաղորդակցվում են և կազմում մեկ փակ դաս կոչվում է կանոնավոր Մարկովի շղթա:

Կանոնավոր վերջավոր Մարկովի շղթայի համար գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty} P^n = A\,,\quad A = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & & \rho_N \\ \rho_1 & \rho_2 & & \rho_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & & \rho_N \end{pmatrix}$$

սահմանը: A-ն՝ N×N չափի հավանականային մատրից է: A մատրիցի տողերը կազմված են միևնույն $\rho=(\rho_i,\ i\in E)$ հավանականային վեկտորից: Այսինքն՝ ρ վեկտորի բոլոր տարրերը ոչ բացասական են և բավարարում են նորմավորման պայմանին՝

$$0\le\rho_1\le 1,\ i\in E,\ \sum_{j\in E}\rho_j = 1:$$

Ընդ որում, ρ վեկտորը հանդիսանում է հետևյալ հավասարումների համակարգի համար միակ լուծումը.

$$\rho_i = \sum_{j\in E}\rho_j p_{ji}\ ,\ i\in E, \qquad (1.8)$$

կամ մատրիցների տեսքով՝ $\rho=\rho P$:

ρ վեկտորը կոչվում է Մարկովի շղթայի սահմանային (ստացիոնար) բաշխման վեկտոր կամ ստացիոնար բաշխում, իսկ նրա ρ_i տարրը ցույց է տալիս շղթայի i, i∈E վիճակում գտնվելու հավանականությունը անվերջ մեծ թվով անցումներից հետո: ρ_i^{-1}-ը հավասար է i սկզբնական վիճակից i վիճակ առաջին անգամ վերադառնալու քայլերի միջին քանակին:

Այդ պատճառով ρ_i հավանականությունները կարելի է մեկնաբանել նաև որպես շղթայի i վիճակ ընկնելու հաճախականություններ:

A մատրիցը բավարարում է հետևյալ հավասարումներին՝ AP=PA, A^mP^n=A, որտեղ m,n=1,2,,..,: Կանոնավոր Մարկովի շղթան կլինի ստացիոնար, եթե ρ վեկտորը վերցնենք որպես սկզբնական բաշխում: Վերջավոր կանոնավոր Մարկովի շղթայի համար գոյություն ունի՝

$$Z=(1+(P-A))^{-1}$$

մատրիցը, որը կոչվում է կանոնավոր շղթայի հիմնարար մատրից:

Դիցուք՝ m_{ij}-ն շղթայի i սկզբնական վիճակից j վիճակ առաջին անգամ ընկնելու անցումների միջին քանակությունն է: Նշանակենք $M=\|m_{ij}\|$:

M մատրիցի m_{ij} տարրերը որոշվում են (1.9) հավասարումների համակարգից՝

$$m_{ij} = \sum_{k\in E} P_{ik} m_{kj} - p_{ij} m_{jj} + 1, \quad m_{ii} = 1/\rho_i, \ i,j \in E: \qquad (1.9)$$

Օրինակ 2: Քննարկենք սոցիոլոգիական՝ մասնագիտությունների շարժունակության (մոբիլության) խնդիրներում Մարկովի շղթաների կիրառման օրինակ: Խնդրի դրվածքը և տվյալները վերցված են [3] գրքից:

Մասնագիտությունների շարժունակության հետազոտման նպատակով անցկացված սոցիոլոգիական հարցումների հիման վրա ըստ վարկանիշի առաջարկվում է մասնագիտությունների հետևյալ դասակարգումը.

1. Մասնագետներ և բարձրագույն վարչական աշխատողներ:
2. Տնօրեններ և կառավարիչներ:
3. Վարիչներ, տեսուչներ և նման կարգի այլ ծառայողներ:
4. Նույնը, բայց ավելի ցածր կարգի ծառայողներ:
5. Ֆիզիկական աշխատանք կատարող և որակավորում չունեցող աշխատողներ և շարքային ծառայողներ:
6. Ֆիզիկական աշխատանք կատարող որոշ որակավորում ունեցող աշխատողներ:
7. Ֆիզիկական աշխատանք կատարող և որակավորում ունեցող աշխատողներ:

Տարբեր դասերն ընդունելով որպես վիճակներ, կառուցենք մասնագիտությունների շարժունակությունը նկարագրող Մարկովի շղթան, որի վիճակների բազմության տարրերն են $\overline{1,7}$-ը: Ըստ վիճակագրական տվյալների, շղթայի անցումային հավանականությունների P մատրիցը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P = \begin{pmatrix} 0.388 & 0.147 & 0.202 & 0.062 & 0.140 & 0.047 & 0.016 \\ 0.107 & 0.267 & 0.227 & 0.120 & 0.207 & 0.053 & 0.020 \\ 0.035 & 0.101 & 0.188 & 0.191 & 0.357 & 0.067 & 0.061 \\ 0.021 & 0.039 & 0.112 & 0.212 & 0.431 & 0.124 & 0.062 \\ 0.009 & 0.024 & 0.075 & 0.123 & 0.473 & 0.171 & 0.125 \\ 0 & 0.013 & 0.041 & 0.088 & 0.391 & 0.312 & 0.155 \\ 0 & 0.008 & 0.036 & 0.083 & 0.364 & 0.235 & 0.274 \end{pmatrix}.$$

Շղթայի ստացիոնար բաշխման ρ վեկտորը հավասար է՝

$$\rho = (0.023; 0.041; 0.088; 0.127; 0.410; 0.182; 0.129):$$

Շղթայի անցումների միջին քանակի M մատրիցը հավասար է՝

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 43.9 & 26.2 & 9.9 & 9.2 & 4.0 & 8.4 & 11.5 \\ 63.1 & 24.2 & 10.1 & 8.5 & 3.5 & 8.1 & 11.1 \\ 70.13 & 30.5 & 11.4 & 8.0 & 2.9 & 7.6 & 10.3 \\ 72.3 & 33.0 & 12.7 & 7.9 & 2.6 & 7.0 & 10.0 \\ 73.7 & 33.9 & 13.5 & 8.7 & 2.4 & 6.5 & 9.3 \\ 74.9 & 34.6 & 14.1 & 9.1 & 2.6 & 5.5 & 8.8 \\ 75.0 & 34.8 & 14.3 & 9.2 & 2.7 & 5.9 & 7.7 \end{pmatrix}:$$

M մատրիցի անկյունագծային տարրերը հավասար են ρ ստացիոնար բաշխման վեկտորի համապատասխան տարրերի հակադարձին: m_{jj} տարրերը ցույց են տալիս համապատասխան j-րդ դասում ընդգրկված մարդկանց մասը: Որքան փոքր է մարդկանց մասը տվյալ դասում, այնքան մեծ է այդ դաս անցումների միջին քանակը: i-րդ դասից j-րդ դաս ընկնելու անցումների միջին քանակը համեմատենք m_{ii}-ի հետ: M մատրիցից երևում է, որ ցանկացած i դասից j դաս ընկնելու անցումների միջին քանակը նվազում է, երբ i դասը մոտենում է (հասարակական վարկանիշի իմաստով) j դասին:

Հետազոտենք միջին դասում ընդգրկված 3,4,5 մասնագիտական խմբերի վարքը բարձրագույն (1 և 2) և ստորին (6 և 7) դասերն ընդունելով որպես կլանման վիճակներ: Նման կլանմամբ Մարկովի շղթայի Q և R մատրիցները հավասար են՝

$$Q=\begin{array}{c} \\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.188 & 0.191 & 0.357\\ 0.112 & 0.212 & 0.431\\ 0.075 & 0.123 & 0.473 \end{pmatrix}\end{array},$$

$$R=\begin{array}{c} \\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 6 & 7 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.035 & 0.101 & 0.067 & 0.061\\ 0.021 & 0.039 & 0.124 & 0.062\\ 0.009 & 0.024 & 0.171 & 0.125 \end{pmatrix}\end{array}:$$

Դիտարկվող կլանմամբ շղթայի հիմնական բնութագրերը հավասար են՝

$$N=\begin{array}{c} \\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1.44 & 0.58 & 1.45\\ 0.36 & 1.60 & 1.55\\ 0.29 & 0.45 & 2.47 \end{pmatrix}\end{array}, \quad \tau=\begin{array}{c} 3\\ 4\\ 5 \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 3.47\\ 3.51\\ 3.21 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{array}{c} \\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 6 & 7 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.08 & 0.20 & 0.42 & 0.30\\ 0.06 & 0.14 & 0.49 & 0.32\\ 0.04 & 0.11 & 0.49 & 0.36 \end{pmatrix}\end{array}:$$

Այստեղ τ վեկտորը ցույց է տալիս շղթայի անցումների միջին քանակը, (3,4,5) բազմության ցանկացած սկզբնական վիճակից մինչև (3,4,5) բազմությունից առաջին անգամ դուրս գալը: B մատրիցը ցույց է տալիս (3,4,5) բազմությունից դուրս գալիս (1,2) կամ (6,7) վիճակները ընկնելու հավանականությունները: Միավորելով (1,2)-ը բարձրագույն (Բ), (3,4,5)-ը միջին (Մ), իսկ (6,7)-ը ստորին (Ս) դասերում, B մատրիցի օգնությամբ կարելի է հետազոտել միջին դասից դուրս գալիս բարձրագույն կամ ստորին դասերն ընկնելու հավանականությունները:

Այդ հավանականությունները հավասար են՝

$$\text{Մ}\ \begin{array}{c} \\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Բ} & \text{Ս} \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72\\ 0.20 & 0.81\\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}\end{array}:$$

Մատրիցի տարրերի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ստորին դասի յուրաքանչյուր վիճակից ստորին դաս անցնելու հավանականությունը ավելի մեծ է, քան բարձրագույն դաս անցնելունը: Որքան ցածր է մասնագիտության վարկանիշը, այնքան փոքր է միջին դասից բարձրագույնն անցնելու հավանականությունը:

Մարկովի շղթանի վարքը առավել պատկերավոր ներկայացնելու համար օգտագործում են նրա անցումները և վիճակները նկարագրող գրաֆը, որի գագաթներին համապատասխանում են շղթայի վիճակները, իսկ ուղղորդված կողերին՝ անցումները:

Յուրաքանչյուր գագաթի մոտ գրվում է նրան համապատասխանող վիճակի համարը (մեծությունը), իսկ կողի մոտ՝ անցումային հավանականության մեծությունը:

2. Մարկովյան գործընթացներ

Այժմ քննարկենք անընդհատ ժամանակով Մարկովի շղթաները՝ մարկովյան գործընթացները:

Դիտարկենք վիճակների վերջավոր կամ թվարկելի E բազմությունով $\{\xi(t),\ t\geq 0\}$ համասեռ մարկովյան գործընթացը, որը նախորդ բաժնում քննարկված Մարկովի շղթայից տարբերվում է նրանով, որ t ժամանակային պարամետրը անընդհատ է փոփոխվում և մի վիճակից մյուսի անցումը հնարավոր է ժամանակի ցանկացած t պահին:

Մարկովի ընդհատ շղթաների նմանությամբ դիտարկենք մի համակարգի վարքը, որի՝ ժամանակի ւ ընթացքում դրսևորած գործնկակերպը նկարագրվում է մարկովյան գործընթացով:

- Ժամանակի սկզբնական t=0 սկզբնական պահին համակարգը գտնվում է վիճակների E բազմության որևէ i վիճակում՝ i∈E:
- i վիճակում համակարգը մնում է $\lambda_i>0$ պարամետրով ցուցչային օրենքով բաշխված θ_0 պատահական ժամանակ:
- t = θ_0 պահին համակարգը (ակնթարթորեն) $p_{ij}\geq 0$ հավանականությամբ անցում է կատարում i վիճակից նոր՝ j վիճակ: Ընդ որում p_{ij} հավանականությունները ցանկացած i∈E-ի համար բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$\sum_{j\in E} p_{ij} = 1 :$$

- j վիճակում համակարգը մնում է $\lambda_j>0$ պարամետրով ցուցչային օրենքով բաշխված θ_1 պատահական ժամանակ և այդպես շարունակ:

Այսպիսով մարկովյան գործընթացի վարքը համարվում է ամբողջությամբ որոշված, եթե տրված են՝

1. սկզբնական $p^0=\{p_i^0, i\in E\}$ բաշխումը, որի օգնությամբ ընտրվում է գործընթացի ելակետային վիճակը $t=0$ պահին։

2. գործընթացի E բազմության վիճակներում մնալու ժամանակների պատահական մեծությունների ցուցչային բաշխման λ_i պարամետրերը։

3. i վիճակից j վիճակի անցման հավանականությունների $P=\|p_{ij}\|$ մատրիցը, կամ միավորելով 2 և 3 կետերը՝ $Q=\Lambda(P-I)$ ակնթարթային մատրիցը, որտեղ $\Lambda=\{\delta_{ij}\lambda_j;\ i,j\in E\}$, $I=\{\delta_{ij};\ i,j\in E\}$ միավոր մատրից է, իսկ δ_{ij}-ն՝ Կրոնեկերի հաստատունները են։

Սահմանում 6։ Մարկովյան գործընթացը ամբողջությամբ որոշվում է վիճակների սկզբնական բաշխման p^0 վեկտորով և Q ակնթարթային մատրիցով։

$p_{ij}(t)$-ով նշանակենք գործընթացի t ժամանակում i վիճակից j վիճակ անցման հավանականությունը, կամ (որ նույնն է) t ժամանակից հետո t+s պահին գործընթացի j վիճակում գտնվելու հավանականությունը, պայմանով, որ սկզբնական s պահին գործընթացը գտնվել է i վիճակում։

$$p_{ij}(t)=P\{\xi(t+s)=j|\xi(s)=i\},\ i,j\in E.$$

Ակնհայտ է, որ $p_{ij}(t)$-ն կախված չէ սկզբնական s պահից։

Գործընթացի $p^0=\{p_i^0, i\in E\}$ սկզբնական բաշխման դեպքում (1.2) բանաձևից կստանանք՝

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s),\ i,j\in E, \tag{2.1}$$

$$p_i(t)=\sum_{j\in E}p_j^0p_{ji}(t),$$

որտեղ $p_i(t)$-ն՝ t պահին գործընթացի i վիճակում գտնվելու հավանականությունն է։

Դիցուք՝ որևէ t_0 պահին գործընթացը հայտնվել է i վիճակում։ Նշանակենք α_i-ով գործընթացի մինչև հաջորդ վիճակ անցնելու պատահական ժամանակը։ α_i-ին i վիճակից դուրս գալու սպասման ժամանակն է։

Մարկովյան գործընթացում α_i, $i\in E$ պատահական մեծությունները ունեն ցուցչային բաշխում՝

$$A_i(t)=P\{\alpha_i>t\}=e^{-\lambda_i t},\ t>0,$$

որտեղ λ_i-ն ոչ բացասական հաստատուն է և կոչվում է i վիճակից ելքի խտություն կամ՝ հաճախություն։

λ_i^{-1}-ը ցույց է տալիս գործընթացի i վիճակում մնալու միջին ժամանակը։

$\lambda_i=0$-ի դեպքում i-ն հանդիսանում է կլանման վիճակ, $\lambda_i=\infty$-ի դեպքում i-ն ակնթարթային վիճակ է, որում գործընթացի մնալու ժամանակը հավասար է զրոյի։

Իսկ $0<\lambda_i<\infty$ դեպքում գործընթացի վիճակի փոփոխման հավանականությունը Δt «փոքր» ժամանակի ընթացքում հավասար է՝

$$\lambda_i \Delta t + 0(\Delta t),$$

որտեղ՝ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} 0(\Delta t)/\Delta t = 0$:

i վիճակում α_i պատահական ժամանակ մնալուց հետո մարկովյան գործընթացը p_{ij} հավանականությամբ անցնում է j վիճակ:

p_{ij} անցումային հավանականությունները որոշում են գործընթացի վարքը նրա անցումների պահերին և նկարագրում գործընթաց ներմուծված Մարկովի շղթան:

Δt տևողությամբ ժամանակահատվածում մարկովյան գործընթացը

$$p_{ij}(\Delta t) = (1 - e^{-\lambda_i \Delta t})p_{ij} = \lambda_{ij}\Delta t + 0(\Delta t)$$

հավանականությամբ կատարում է անցում i վիճակից j վիճակի, որտեղ λ_{ij}-ն i վիճակից j վիճակ անցման հաճախությունն է՝

$$\lambda_{ij} = \lambda_i p_{ij}, \quad i,j \in E, i \neq j,$$

$$\lambda_{ii} = -\lambda_i, \ \lambda_i = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} :$$

(1.2) բանաձևի համաձայն գործընթացի անցումային $p_{ij}(t)$ հավանականությունների համար կարելի է գրել հետևյալ հավասարումները՝

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_k p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) \quad \left(= \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t) \right), \quad i,j \in E:$$

Հաշվի առնելով, որ $\Delta t \to 0$-ի դեպքում

$$1 - p_{ii}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + 0(\Delta t),$$

$$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + 0(\Delta t), \quad i,j \in E$$

$p_{ij}(t)$ հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_k [\lambda_{ik} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}]p_{kj}(t) \, ; \left(= \sum_k p_{ik}(t)[\lambda_{kj} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}] \right):$$

Նույնատիպ հավասարումներ կարելի է կազմել նաև պարամետրի $(-\Delta t)$ բացասական աճի դեպքում: Այդ հավասարումներում անցնելով $\Delta t \to 0$ սահմանի, ապացուցվում է $p'_{ij}(t)$ ածանցյալի գոյությունը:

Անցնելով սահմանի, երբ $\Delta t \to 0$, $p_{ij}(t)$, հավանականությունների համար կստանանք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները՝

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t) \, , \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \qquad (2.2)$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj}, \quad i,j \in E, \qquad (2.3)$$

որտեղ δ_{ij}-ն՝ Կրոնեկերի հաստատուններն են:

(2.2) և (2.3) հավասարումները կոչվում են համապատասխանորեն Կոլմոգորովի ուղիղ և հակադարձ դիֆերենցիալ հավասարումներ: $p_i(t)$ հավանականությունների համար նմանատիպ դատողությունների օգնությամբ կստանանք՝

$$p_j'(t) = \sum_i p_i(t)\lambda_{ij}, \quad j \in E:$$

Էրգոդիկ մարկովյան գործընթացների համար, երբ $t \to \infty$, գոյություն ունեն $p_j(t)$ հավանականությունների սահմանային արժեքները՝

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t), \quad 0 \le p_j \le 1, \quad \sum_j p_j = 1, \; j \in E:$$

Այստեղ p_j սահմանային հավանականությունները կախված չեն գործընթացի սկզբնական բաշխումից, իսկ մարկովյան գործընթացի $\{p_j, j\in E\}$ բազմությունը կոչվում է ստացիոնար բաշխում: p_j հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումների համակարգից.

$$p_i\lambda_i = \sum_{j\ne i} p_j\lambda_{ji}, \quad i \in E, \quad \sum_{i\in E} p_i = 1:$$

Եթե $\xi(t)$ մարկովյան գործընթացի սկզբնական բաշխումը համընկնում է նրա ստացիոնար բաշխման հետ $P\{\xi(0)=i\}=p_i$, $i\in E$, ապա ժամանակի ցանկացած $t>0$ պահի $\xi(t)$ գործընթացի վիճակների բաշխումը կմնա անփոփոխ, ինչը նշանակում է, որ գործընթացը գտնվում է ստացիոնար ռեժիմում:

$\xi(t)$ մարկովյան գործընթացի t ժամանակում անցման $P(t)=\|p_{ij}(t)\|$ մատրիցի տարրերը, հավանականությունները կարող են որոշվել նաև հետևյալ մարկովյան վերականգնման ինտեգրալ հավասարումների համակարգից՝

$$p_{ij}(t) - \sum_{i\ne R}\lambda_{iR}\int_0^t e^{-\lambda_i(t-x)}p_{Rj}(x)dx = \delta_{ij}e^{-\lambda_i t}, \quad i,j\in E: \qquad (2.4)$$

Կոլմոգորովի դիֆերենցիալ հավասարումները կարելի է ստանալ (2.4) հավասարման ըստ t-ի դիֆերենցմամբ:

Այսպիսով, մարկովյան գործընթացը ամբողջությամբ որոշվում է $Q=\|\lambda_{ij}\|$ ակնթարթային մատրիցով կամ գործընթաց ներմուծված Մարկովի շղթայի $P = \|p_{ij}\|$ անցումային հավանականությունների մատրիցի և $\lambda = (\lambda_i, i\in E)$ հաճախությունների վեկտորի միջոցով:

Մարկովյան գործընթացի և նրա ներմուծված Մարկովի շղթայի ստացիոնար p և ρ բաշխումների կապը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$p_i = (\rho_i\eta_i)/\sum_{j\in E}\rho_j\eta_j, \quad i\in E: \qquad (2.5)$$

Այստեղ η_i-ն մարկովյան գործընթացի i վիճակում մնալու միջին ժամանակն է՝

$$\eta_i = 1/\lambda_i, \quad i\in E:$$

(2.5) բանաձևն ունի հետևյալ հավանականային մեկնաբանությունը. ρ_i-ն ցույց է տալիս մարկովյան գործընթացի i վիճակ ընկնելու հաճախությունը, իսկ $\rho_i\eta_i$-ն՝ գործընթացի i վիճակում գտնվելու ստացիոնար միջին ժամանակը: $\sum_j \rho_j\eta_j$-ն ցույց է տալիս գործընթացի կամայական վիճակում գտնվելու ստացիոնար միջին ժամանակը: Հետևաբար p_i-ն կարելի է նաև մեկնաբանել որպես ստացիոնար ռեժիմում մարկովյան գործընթացի i վիճակում գտնվելու ժամանակի տևողության միջին երկարություն:

Գործնական կիրառություններում հարմար է օգտագործել Մարկովի շղթաների հետևյալ կառուցվածքը: Դիցուք՝ մարկովյան գործընթացի յուրաքանչյուր վիճակի համար տրված են λ_{ij} հաճախություններով ցուցչային բաշխմամբ համախմբում անկախ պատահական մեծությունների խումբը՝ α_{ij}, $i,j\in E$, $i\neq j$: Այսինքն՝

$$P\{\alpha_{ij}>t\}=e^{-\lambda_{ij}t}\quad i,j\in E,\ i\neq j:$$

E վերջավոր վիճակների բազմությունով կանոնավոր Մարկովի շղթան տրվում է հետևյալ ստոխաստիկ առնչություններով՝

$$\alpha_i=\min_j \alpha_{ij},\quad i\in E: \qquad (2.6)$$

Պատահական մեծությունների հավասարությունը ենթադրում է դրանց բաշխման ֆունկցիաների հավասար լինելը՝

$$P\{\alpha_{ij}>t\}=P\{\min_j \alpha_{ij}\leq t\}:$$

Մարկովյան գործընթացի վիճակներում մնալու պատահական ժամանակները հավասար են ցուցչային բաշխմամբ α_{ij} անկախ պատահական մեծությունների նվազագույնին, իսկ մեկ վիճակից մյուսին անցումները որոշվում են α_{ij}-երից նվազագույնի արժեքով:

α_{ij} պատահական մեծությունը անվանում են i վիճակից j անցման սպասման ժամանակ:

(2.6) ստոխաստիկ հավասարությունները, որպես մեկնարկային կարող են օգտագործվել մարկովյան գործընթացների հետազոտի մոդելա-վորման ժամանակ:

Մոդելավորումը կատարվում է հետևյալ կերպ: Սկզբում տրվում է գործընթացի սկզբնական i_0 վիճակը: Այնուհետև մոդելավորվում են $\alpha_{i_0 j}$, $j\in E$ ցուցչային բաշխմամբ պատահական մեծությունները և որոշվում է նրանցից նվազագույնը, օրինակ i_1-ը: Այդ դեպքում i_0 վիճակում գործընթացի անցման սպասման ժամանակը հավասար է՝ $\alpha_{i_0 i_1}$-ի, որից հետո մարկովյան գործընթացը կանցնի i_1 վիճակ և այդպես շարունակ: (2.6) ստոխաստիկ հավասարությունները թույլ են տալիս որոշել մարկովյան գործընթացի բոլոր բնութագրերը: Օրինակ, i վիճակում մնալու α_i ժամանակը կունենա λ_i հաճախությամբ ցուցչային բաշխում, որը հավասար է α_{ij} պատահական մեծությունների հաճախությունների գումարին՝

$$\lambda_i=\sum_{j\in E}\lambda_{ij}:$$

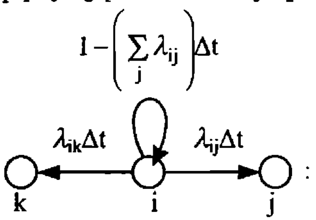
Գործընթացի անցումային հավանականությունները որոշվում են հետևյալ բանաձևից՝

$$p_{ij}=P\{\alpha_{ij}<\min_{r\neq j}\alpha_{ir}\}=\lambda_{ij}/\lambda_i:$$

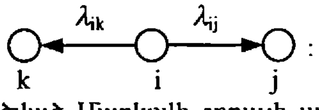
Այսպիսով (2.6) բանաձևը նկարագրում է մարկովյան գործընթացի վարքը որոշող հավանականային պատահույթները: Գործընթացի տրված i վիճակում գործում են վերջավոր թվով անկախ պատահական գործոններ, որոնք կարող են հանգեցնել գործընթացի վիճակի փոփոխության: Գործոններից յուրաքանչյուրը կարող է փոխել գործընթացի վիճակը α_{ij} ցուցչային բաշխմամբ պատահական ժամանակից հետո: Այն գործոնը, որն ունի ազդեցության նվազագույն ժամանակ, կհանգեցնի գործընթացի վիճակի փոփոխության i-ից j, պայմանով, որ

$$\alpha_{ij} = \min_{k \neq r} \alpha_{ik} :$$

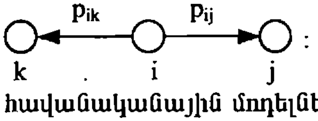
Մարկովյան գործընթացների վարքը պատկերավոր ներկայացնելու համար օգտագործում են անցումային գրաֆները: Կախված մարկովյան գործընթացի ներկայացման ձևից և հետազոտվող ռեժիմից՝ օգտագործում են անցումների հավանականային գրաֆ, հաճախությունների գրաֆը կամ գործընթաց ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումային գրաֆը: Գործընթացի վիճակներին գրաֆում համապատասխանում են գագաթները, իսկ անցման հավանականություններին՝ գրաֆի ուղղորդված կողերը: Օրինակ՝ մարկովյան գործընթացը դիֆերենցիալ տեսքով նկարագրման ժամանակ i գագաթից անցումները ներկայացվում են հետևյալ տեսքով՝



Ստացիոնար ռեժիմի հետազոտման ժամանակ գործընթացի հաճախությունների գրաֆը ունի հետևյալ տեսքը՝



Գործընթաց ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումային գրաֆը ունի հետևյալ տեսքը՝



Բերենք մարկովյան հավանականային մոդելների կառուցման փուլերի ամբողջական ուրվագիծը:

1. Ելնելով հետազոտվող համակարգի աշխատանքի առանձնահատկություններից, նրա առանձին՝ ֆիզիկական հնարավոր և հետազոտման համար անհրաժեշտ իրական վիճակներից սահմանվում է համակարգի վիճակ հասկացությունը և կառուցվում է նրա հնարավոր վիճակների E բազմությունը:

2. Յուրաքանչյուր i, $i\in E$ վիճակի համար որոշվում են այն անկախ գործոնների համախումբը, որոնք հանգեցնում են i վիճակից j, $j\in E$ վիճակ անցմանը և այդ անցման սպասման α_{ij} պատահական ժամանակի մեծությունը: α_{ij}-երի միջոցով որոշվում են $Q=\|\lambda_{ij}\|$ ակնթարթային մատրիցի տարրերը: λ_{ij}-ն i վիճակից j վիճակ անցման սպասման ժամանակի հաճախությունն է,

$$P\{\alpha_{ij}>t\}=e^{-\lambda_{ij}t},$$

իսկ λ_i-ն i վիճակում մնալու ժամանակի հաճախությունն է: Այսպիսով՝

$$\lambda_i=\sum_{i\neq j}\lambda_{ij}=-\lambda_{ii}, \text{ որտեղ՝ } P\{\alpha_{ij}>t\}=e^{-\lambda_i t}:$$

3. Կառուցվում է գործընթացի անցումների գրաֆը և որոշվում են կամայական i վիճակից կամայական j վիճակ անցումների հավանականությունները՝

$$p_{ij}=\lambda_{ij}/\lambda_i, \quad i,j\in E:$$

3. Պուասոնի գործընթաց

Գործույթների հետազոտման տեսության տարբեր բաժիններում՝ հերթերի, հուսալիության, պաշարների տեսության և այլ հավանականային կիրառական ուղղություններում պատահարների հոսքերը նկարագրելիս հաճախ է օգտագործվում Պուասոնի գործընթացը: Դիտարկենք մեկը մյուսին հաջորդող համասեռ պատահարների հաջորդականությունը, որի երկու հաջորդական պատահարների առաջացման պահերի միջև ընկած ժամանակահատվածի α տևողությունը ունի $\lambda>0$ պարամետրով (հաճախությամբ) ցուցչային բաշխում՝

$$P\{\alpha>t\}=e^{-\lambda t}:$$

Դիտարկենք $E=(0,1,2,\ldots)$ վիճակներով համասեռ մարկովյան գործընթացը՝ $\xi(t)$-ն, որը ցույց է տալիս t ժամանակում հանդես եկած պատահարների քանակը:

Օգտվենք վերը բերված մարկովյան մոդելի կառուցման ընթացակարգերից և հետազոտվող պատահարների հաջորդականության համար կառուցենք $\xi(t)$ մարկովյան գործընթացի տարրերը: Առանձնացնենք այն գործոնները, որոնք հանգեցնում են $\xi(t)$ գործընթացի վիճակների փոփոխման:

Գործընթացի ցանկացած i վիճակում այդպիսի գործոն է պատահարի հանդես գալը, որի սպասման ժամանակը, այսինքն՝ անցման սպասման ժամանակը, հավասար է α-ի: Միևնույն ժամանակ, i վիճակում մնալու ժամանակը նույնպես հավասար է α-ի (տես (2.6)): Հետևաբար, i վիճակից i+1 վիճակ անցնելու $\lambda_{i,i+1}$ հաճախությունը հավասար է λ-ի, իսկ անցումի $p_{i,i+1}$ հավանականությունը՝ մեկի: Այսպիսով $\xi(t)$ մարկովյան գործընթացի Q ակնթարթային մատրիցի տարրերը կորոշվեն հետևյալ կերպ՝

$$\lambda_1=\lambda_{ii+1}=\lambda, \lambda_{ii}=-\lambda_i=-\lambda \text{ և } \lambda_{ij}=0, \text{ եթե } j<i \text{ կամ } j>i+1:$$

Եթե $p_i(t)$-ով նշանակենք t ժամանակի ընթացքում i քանակով պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը, ապա $p_0(0)=1$, $p_i(0)=0$, i=1,2,… սկզբնական պայմանների դեպքում նրանց համար (2.2)-ից կարելի է ստանալ հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} p_0'(t)=-\lambda p_0(t) \\ p_i'(t)=-\lambda p_i(t)+\lambda p_{i-1}(t), \quad i=0,1,2,\dots \end{cases} \tag{3.1}$$

Բերված սկզբնական պայմանների դեպքում (3.1)-ից $p_i(t)$, i= 0,1,2,… հավանականությունների համար կստանանք՝

$$p_i(t)=\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}, \quad i=0,1,2,\dots, \ t\ge 0:$$

Վերջինս հանրահայտ Պուասոնի բաշխումն է, այսինքն՝ հետազոտվող պատահույթների հաջորդականությունը (հոսքը) պուասոնյան է:

Գործընթացի Q ակնթարթային մատրիցի տարրերը կարելի է որոշել նաև դիֆերենցիալ եղանակի օգնությամբ: Ըստ $\xi(t)$ գործընթացի վարքի նկարագրի Δt ժամանակի ընթացքում նրա i վիճակից i+1 վիճակ անցման հավանականությունը հավասար է՝

$$p_{ii+1}(\Delta t)=1-e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+0(\Delta t),$$

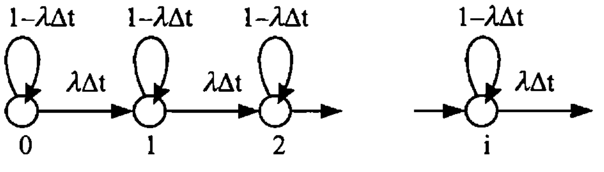
իսկ i վիճակից դուրս չգալու, այսինքն այդ վիճակում մնալու հավանականությունը՝

$$p_{ii}(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+0(\Delta t):$$

i վիճակից մյուս հնարավոր անցումների հավանականությունները Δt փոքր ժամանակի ընթացքում հավասար են $0(\Delta t)$-ի:

Տեղադրելով $p_{ii+1}(\Delta t)$-ի և $p_{ii}(\Delta t)$-ի արժեքները (2.2) բանաձևի մեջ, $\Delta t\to 0$ սահմանային անցումից հետո կստանանք (3.1) դիֆերենցիալ հավասարումները:

$\xi(t)$ գործընթացի անցումների գրաֆը ունի հետևյալ կառուցվածքը՝



4. Բազմացման և կործանման գործընթաց

Բազմացման և կործանման գործընթացը լայն կիրառություն է գտել գործույթների հետազոտման, օրինակ՝ սպասարկման և հուսալիության վերլուծության խնդիրներում: Բերենք գործընթացի սահմանումը և հետազոտենք նրա բնութագրերը:

Սահմանում 7: Բազմացման և կործանման գործընթաց է կոչվում վերջավոր կամ հաշվելի թվով վիճակների $E = (0,1,2,\ldots)$ բազմությունով համասեռ մարկովյան գործընթացը, որի Q ակնթարթային մատրիցի տարրերը հավասար են՝

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i > 0,\ \lambda_{i,i-1} = \mu_i > 0,$$
$$\mu_0 = 0 \text{ և } \lambda_{ij} = 0, \text{ եթե } |i-j|>1:$$

Եթե գործընթացի վիճակների քանակը վերջավոր է $E = (0,1,2,\ldots,N)$, $N < \infty$, ապա $\lambda_N = 0$:

Գործընթացի վիճակների $p_i(t)$ հավանականությունները որոշվում են հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգից՝

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)\,,$$
$$p_i'(t) = \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_i(t) + \mu_{i+1} p_{i+1}(t)\,,\ i = 1,2,\ldots,N-1,$$
$$p_N'(t) = \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) - \mu_N p_N(t)\,, \qquad (4.1)$$

$p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$, $i=\overline{1,N}$ սկզբնական բաշխման դեպքում:

Գործընթացի վիճակների ստացիոնար հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից՝

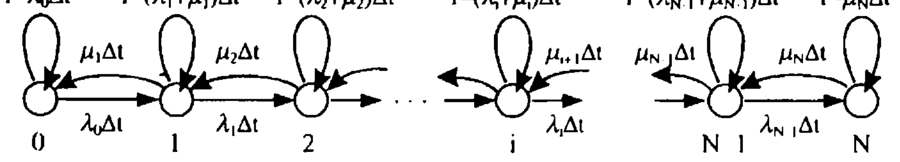
$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1, \\ (\lambda_i + \mu_i) p_i = \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i-1}, \quad i = \overline{1,N-1}, \\ \mu_N p_N = \lambda_{N-1} p_{N-1}\,: \end{cases} \qquad (4.2)$$

Համակարգի լուծումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$p_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} p_0, \quad i = \overline{1,N}\,,$$

$$p_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} \right)^{-1}$$

Ստացիոնար ռեժիմում բազմացման և կործանման գործընթացի անցումային գրաֆը բերված է ստորև:



Անվերջ թվով վիճակների դեպքում հայտնի է, որ ստացիոնար բաշխման գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանների կատարումը.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}<\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i}=\infty:$$

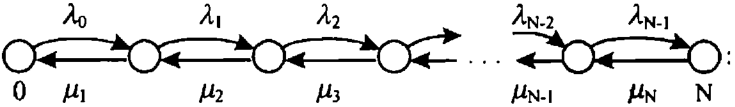
Այդ դեպքում p_i ստացիոնար հավանականությունները ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$p_i=d_i\Big/\sum_{j=0}^{\infty}d_j,\quad d_0=1,$$

որտեղ՝

$$d_i=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_i},\quad i=0,1,2,\ldots:$$

Գործընթացի անցումների հաճախության գրաֆն ունի հետևյալ տեսքը՝



Քննարկենք գործընթացի (4.1) անցումային և (4.2) ստացիոնար ռեժիմների հավասարումների ստացման մի քանի եղանակներ:

Դիֆերենցիալ եղանակի դեպքում քննարկվում են Δt ժամանակահատվածում i սկզբնական վիճակից գործընթացի անցումների հավանականությունները: Ըստ գործընթացի վարքի նկարագրի՝ $p_{ii}(\Delta t)$ և $p_{ij}(\Delta t)$ հավանականությունները հավասար են՝

$$p_{ii}(\Delta t)=e^{-\mu_i\Delta t}e^{-\lambda_i\Delta t}=e^{-(\mu_i+\lambda_i)\Delta t}=1-(\mu_i+\lambda_i)\Delta t+0(\Delta t),$$

$$p_{ii+1}(\Delta t)=(1-e^{-\lambda_i\Delta t})e^{-\mu_i\Delta t}=\lambda_i\Delta t(1-\mu_i\Delta t)=\lambda_i\Delta t+0(\Delta t),$$

$$p_{ii-1}(\Delta t)=(1-e^{-\mu_i\Delta t})e^{-\lambda_i\Delta t}=\mu_i\Delta t(1-\lambda_i\Delta t)=\mu_i\Delta t+0(\Delta t):$$

Ստոխաստիկ հավասարությունների եղանակի դեպքում նախնական են համարվում ցուցչային բաշխում ունեցող α_{ij} պատահական մեծությունները: Պարզության համար ենթադրենք, որ գործընթացը նկարագրում է սահմանափակ հերթով հայտերի սպասարկման համակարգի աշխատանքը: Այս դեպքում գործընթացի i վիճակին համապատասխանում է համակարգում i քանակությամբ հայտեր գտնվելու պատահույթը: α_{ii+1}-ին կհամապատասխանի համակարգի i վիճակում նոր հայտի գալուն սպասելու ժամանակը, իսկ α_{ii-1}-ին՝ համակարգում հայտի սպասարկման ավարտին սպասելու ժամանակը: Գործընթացի i վիճակում մնալու α_i ժամանակը հավասար է՝

$$\alpha_i=\min(\alpha_{i,i+1},\alpha_{i,i-1}),\quad i=\overline{1,N-1},$$

$$\alpha_0=\alpha_{01},\quad \alpha_N=\alpha_{NN-1}:$$

Ըստ (2.6) բանաձևի, գործընթացի i վիճակում մնալու α_i ժամանակը կունենա հետևյալ բաշխումը՝

$$P\{\alpha_i>t\}=e^{-(\lambda_i+\mu_i)t},\quad i=\overline{1,N-1},$$

$$P\{\alpha_0 > t\} = e^{-\lambda_0 t},\ P\{\alpha_N > t\} = e^{-\mu_N t},$$

իսկ գործընթաց ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումային p_{ij} հավանականությունները կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$p_{ii+1} = \lambda_i/(\lambda_i+\mu_i),\ p_{ii-1} = \mu_i/(\mu_i+\lambda_i),\ \ i=\overline{1,N-1},$$

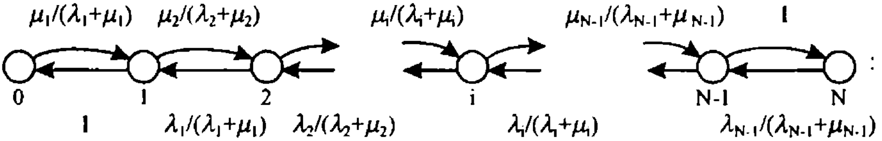
$$p_{01} = 1,\ p_{NN-1} = 1։$$

Գործընթացի ստացիոնար բաշխման (1.19) հավասարումները կազմվում են համախությունների հաշվեկշռի օգնությամբ։ i վիճակից գործընթացի դուրս գալու համախությունը՝ $\lambda_i+\mu_i$։ Դեպի i վիճակ i–1-ից համախությունը հավասար է λ_{i-1}-ի, իսկ i+1 վիճակից դեպի i վիճակ՝ μ_{i+1}-ի։ i-րդ վիճակի համար հաշվեկշռի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$p_i(\lambda_i+\mu_i) = p_{i-1}\lambda_{i-1}+p_{i+1}\mu_{i+1},\ \ i=\overline{1,N-1},$$

$$p_0\lambda_0 = \mu_1 p_1,\quad \mu_N p_N = \lambda_{N-1}p_{N-1}։$$

Գործընթաց ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումների գրաֆը բերված է ստորև՝



Օրինակ 4։ Որպես տնտեսագիտական խնդիրներում հավանականային (մարկովյան) մոդելների և նրանց հետազոտման եղանակների կիրառման օրինակ՝ քննարկենք Լեոնտևի հանրահայտ հաշվեկշռային մոդելը։ Դիտարկենք r ճյուղերից բաղկացած պարզագույն տնտեսական համակարգը, որում յուրաքանչյուր ճյուղ թողարկում է միայն մեկ տեսակի ապրանք։ Տարբեր ճյուղերը համագործակցում են միմյանց հետ այն առումով, որ նրանցից յուրաքանչյուրը որպեսզի կարողանա շարունակել իր արտադրությունը պետք է գնի մյուսների կողմից թողարկվող որոշակի քանակի արտադրանք։ Դիցուք q_{ij} -երը տեխնոլոգիական գործակիցներ են, որոնք ցույց են տալիս j ճյուղի արտադրանքի քանակը, որը պետք է գնվի i ճյուղի կողմից մեկ դրամին համարժեք ապրանք արտադրելու համար։ Q-ով նշանակենք q_{ij} տարրերից բաղկացած r կարգի քառակուսային մատրիցը։ Հեշտ է նկատել, որ Q մատրիցի տարրերը ոչ բացասական են, իսկ ըստ տողերի նրանց գումարը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\sum_{j=1}^{r} q_{ij} \le 1, \quad i=1,2,\ldots,r։ \qquad (4.3)$$

Q մատրիցի տարրերի օգնությամբ կարելի է հետազոտել առանձին ճյուղերի շահութաբերությունը։

Եթե i-րդ սյունակի տարրերի գումարը հավասար է մեկի, ապա նրան համապատասխանող ճյուղն աշխատում է առանց շահույթի, իսկ խիստ անհավասարության դեպքում տվյալ ճյուղը կլինի շահութաբեր: Տնտեսագիտական խնդիրներում (1.20)-ը անվանվում է Q մատրիցի արտադրողականության պայման: Անցնենք ճյուղերում թողարկվող արտադրանքի քննարկմանը: Դիցուք՝ x_i-ն i-րդ ճյուղի արտադրանքի դրամային համարժեքն է, իսկ $X=(x_1,x_2,\ldots,x_r)$-ը այդ համարժեքներից բաղկացած վեկտոր տողն է: Քանի որ i ճյուղը կարիք ունի j ճյուղի x_iq_{ij} քանակության արտադրանքի, ապա XQ-ն անհրաժեշտ ծախսերի վեկտորն է:

Եթե c_i-ն i-րդ ճյուղի վերջնական սպառմանը հատկացվող գումարն է, ապա սպառման $\gamma=(c_1,c_2,\ldots,c_r)$ վեկտորի տարրերը պետք է բավարարեն հետևյալ պայմանին՝

$$\gamma\geq 0\ (c_1\geq 0,\ c_2\geq 0,\ldots,\ c_r\geq 0):$$

Հետևաբար, տնտեսության հավասարակշռության պայմանը, որի դեպքում բավարարվում են ինչպես միջճյուղային, այնպես էլ վերջնական սպառման կարիքները, կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$X = XQ+\gamma: \qquad (4.4)$$

Ծախսեր-թողարկում հաշվեկշռային այս մոդելում պահանջվում է գտնել (4.4) հավասարման r ոչ բացասական լուծումները: Այդ խնդրի լուծման համար կարող ենք օգտագործել Մարկովի շղթաները:

Հաշվեկշռային մոդելին համապատասխանող Մարկովի շղթան կառուցվում է հետևյալ կերպ.

1. Շղթայի վիճակներ են հանդիսանում Լեոնտևի մոդելի r ճյուղերը, ավելացված ևս մեկ՝ կլանման 0 վիճակը, որը կանվանենք բանկ:
2. Անցումային P մատրիցի տարրերը որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$p_{00}=1,\quad p_{0j}=0,\ j>0,$$
$$p_{ij}=q_{ij},\quad i,j>0,$$
$$p_{i0}=1-\sum_j q_{ij},\ i>0:$$

Մարկովյան շղթան կարելի է մեկնաբանել հետևյալ կերպ: Եթե i-րդ ճյուղում ներդրվում է 1 դրամ, ապա նա այդ գումարը օգտագործում է j, j=1,2,…,r ճյուղերի արտադրանքը գնելու համար, իսկ մնացորդն, այսինքն p_{i0}-ն, եթե այն կա, ճյուղի շահույթն է, որը ներդրվում է բանկ:

Այս մոդելում բանկը հանդիսանում է կլանման վիճակ, այսինքն՝ նա միայն ստանում է գումարներ և ոչ մի ներդրում չի կատարում: Այսպիսով բանկ, այսինքն 0 վիճակ, կարող են ընկնել միայն շահույթով աշխատող ճյուղերը, որոնց մոտ $p_{i0}>0$-ից: Որպեսզի համակարգը կարողանա ապահովել ցանկացած պահանջարկ, նա պետք է կազմված լինի որոշակի շահութաբեր և նրանցից կախված ոչ շահութաբեր ճյուղերից: Վերջիններս կարող են բանկ ընկնել միայն շահութաբեր ճյուղերի միջոցով: Բանկի, որպես էրգոդիկ կլանման 0 վիճակի, միակության պայմանը մարկովյան մոդելում ապահովում է N հիմնարար մատրիցի գոյությունը, իսկ տնտեսագիտական խնդրում՝ համակարգի ցանկացած պահանջարկ բավարարելու հատկությունը:

Եթե նշված պայմանը չի բավարարվում և Մարկովի շղթան ունի ուրիշ, 0-ից տարբեր, էրգոդիկ ենթաբազմություններ, ապա համակարգը չի կարող բավարարել ցանկացած պահանջարկ, և նրա N մատրիցը գոյություն չունի: Ընդհանուր դեպքում, երբ պայմանը չի բավարարվում, կատարվում է P մատրիցի վերլուծություն, որի արդյունքում նրանից հեռացվում են ինչպես 0-ից տարբեր էրգոդիկ ենթաբազմությունները, այնպես էլ նրանց հետ կապված անվերադարձելի վիճակները, որոնց տնտեսագիտական մոդելում համապատասխանում են ոչ շահութաբեր ճյուղերը: Նման ձևափոխություններից հետո ստացված նոր Մարկովի շղթան, և նրան համապատասխան տնտեսագիտական մոդելը, բոլոր ճյուղերի համար բավարարում են $p_{i0} > 0$-ից պայմանին:

Լեոնտևի մոդելի ոչ բացասական լուծումները գոյություն ունեն միայն այն ժամանակ, երբ համապատասխան մարկովյան մոդելում բանկը հանդիսանում է միակ կլանման վիճակը:

Դիտարկվող Մարկովի շղթայի համար գոյություն ունի $N = (I - Q)^{-1}$ հիմնարար մատրիցը, որի n_{ij} տարրերը ցույց են տալիս արտադրանքի այն քանակությունը, որ j ճյուղը պետք է արտադրի, որպեսզի i ճյուղը կատարի 1 դրամի պատվեր:

Քանի որ j ճյուղը 1 դրամ արժողության ապրանքի արտադրումից ստանում է p_{j0} շահույթ, ապա i ճյուղում 1 դրամ ներդրումից j ճյուղը կստանա $n_{ij}p_{j0}$ շահույթ: Քանի որ 0-ն՝ բանկը, միակ կլանման վիճակն է, ապա բոլոր շահույթների գումարը հավասար կլինի՝

$$\sum_j n_{ij} p_{j0} = 1 :$$

Այստեղից հետևում է, որ պատվիրատուի կողմից վճարված դրամը որպես շահույթ կուտակվում է շահութաբերությամբ աշխատող ճյուղերում:

Քննարկենք նաև հետևյալ հարցը. եթե i-րդ ճյուղն ստանում է մեկ դրամի պատվեր, ապա դա ինչպիսի գործնական ակտիվություն կառաջացնի տնտեսությունում: Ըստ մոդելի՝ դա կպահանջի j ճյուղի n_{ij} միավոր արտադրանք:

Ընդհանուր արտադրանքի քանակը կլինի՝

$$\tau_i = \sum_j n_{ij}$$

Պահանջարկի γ վեկտորի դեպքում ընդհանուր արտադրանքը կորոշվի $\gamma \cdot \tau$ արտադրյալով:

Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք՝ երեք ճյուղերի համար տեխնոլոգիական գործակիցները տրված են հետևյալ Q մատրիցով՝

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ ապա } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

իսկ $N=(1-Q)^{-1}$ մատրիցի և τ վեկտորի համար կստանանք՝

$$N=\begin{pmatrix}12/5 & 0 & 6/5\\ 6/5 & 6/5 & 0\\ 12/5 & 6/5 & 12/5\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}18/5\\ 12/5\\ 6\end{pmatrix}:$$

Այստեղից հետևում է, որ 2-րդ ճյուղում 1 դրամի պատվերը խթանում է 6 դրամի ապրանքի արտադրություն, որից 6/5-ը՝ I, 6/5-ը՝ II և 0՝ III ճյուղում: Այդ դրամից I ճյուղը կստանա $6/5\cdot1/4=3/10$ շահույթ, II-ը՝ $6/5\cdot1/4=3/10$, իսկ III-ը $0\cdot0=0$ շահույթ: Եթե տրվի $\gamma=(1,3,2)$ պահանջարկ, ապա ճյուղերը կարտադրեն $\gamma N=(54/5,6,6)$ միավոր արտադրանք: Ամբողջ արտադրանքի արժեքը հավասար կլինի $\gamma\tau=22,8$ դրամ:

5. Կիսամարկովյան գործընթացներ

Մարկովյան գործընթացների նմանությամբ դիտարկենք հետևյալ վերջավոր վիճակների բազմությունով համակարգի վարքը.

1. Ժամանակի սկզբնական t=0 պահին համակարգը $\theta(0)=\alpha_i$ պատահական ժամանակի ընթացքում գտնվում է հնարավոր վիճակների $E=(1,2,\ldots)$ բազմությունից որևէ i վիճակում, որից հետո (ակնթարթորեն) անցնում է որևէ j, $j\in E$ վիճակ: Ընդ որում համակարգի մինչև տվյալ j վիճակ անցնելը i վիճակում մնալու ժամանակը α_{ij}-ն՝ $G_{ij}(t)$ բաշխման ֆունկցիայով պատահական մեծություն է:

2. Համակարգի անցումը i վիճակից j վիճակ կատարվում է p_{ij} հավանականությամբ՝

$$p_{ij}\geq 0,\ \sum_{j\in E}p_{ij}=1,\ i,j\in E:$$

3. Եթե j վիճակից $\theta(1)=\alpha_j$ պատահական ժամանակից հետո կատարվում է անցում որևէ k, $k\in E$ վիճակ, ապա j վիճակում համակարգը մնում է $G_{jk}(t)$ բաշխման ֆունկցիայով α_{jk} պատահական ժամանակ:

Այսպիսով կիսամարկովյան համակարգի վարքը նկարագրվում է երկու հաջորդականությունների օգնությամբ. $\{\xi(n),\ n\geq0\}$՝ n-րդ անցումից հետո համակարգի վիճակների և $\{\theta(n),\ n\geq0\}$՝ n և n+1 անցումների միջև ընկած համակարգի վիճակներում մնալու ժամանակներով: $\{\xi(n),\ n\geq0\}$ հաջորդականությունը նկարագրում է P անցումային մատրիցով վերջավոր Մարկովի շղթա, որը կոչվում է կիսամարկովյան գործընթաց (ԿՄԳ) ներմուծված Մարկովի շղթա:

Յանկացած i և j վիճակների համար $Q_{ij}(t)$-ով նշանակենք այն համատեղ հավանականությունը, որ գործընթացի i վիճակում մնալու α_i ժամանակի տևողությունը չի գերազանցում t-ն, և գործընթացը i վիճակից անցնում է կատարում j վիճակ $(i,j\in E)$:

$$Q_{ij}(x) = P\{\xi(n+1)=j,\ \theta(n) \le x \mid \xi(0)=i_0,\ \xi(1)=i_1,\dots,\xi(n)=i,\ \theta(0),\ \theta(1),\dots,\theta(n-1)\}=$$
$$=P\{\xi(n+1) = j,\ \theta(n) \le x \mid \xi(n) = i\}=$$
$$=P\{\xi(n+1)=j \mid \xi(n)=i\}\cdot P\{\theta(n)\le x \mid \xi(n+1)=j,\xi(n)=i\} = p_{ij}G_{ij}(x),\quad i,j\in E,$$

որտեղ՝

$$p_{ij}=P\{\xi(n+1)=j \mid \xi(n)=i\},\ G_{ij}(x)=P\{\theta(n)\le x \mid \xi(n+1)=j,\xi(n)=i\}:$$

Հետևաբար՝

$$Q_{ij}(x) = p_{ij}G_{ij}(x),$$

որտեղ՝

$$p_{ij} = Q_{ij}(\infty),\quad \sum_{j\in E} Q_{ij}(\infty) = \sum_{j\in E} p_{ij} = 1,\quad i,j\in E:$$

$Q_{ij}(t)$ ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$Q_{ij}(x)=0$, եթե $x<0$, $i,j\in E$,

$x\ge 0$-ի դեպքում $Q_{ij}(x)$-երը աջից անընդհատ չնվազող ֆունկցիաներ են,

$$\sum_{j\in E} Q_{ij}(x) \le 1,\ \text{եթե}\ x\ge 0,\ i\in E:$$

$Q_{ij}(t)$ տարրեր ունեցող $Q(t)$ մատրիցը կոչվում է կիսամարկովյան մատրից, կամ ԿՄԳ-ի անցումային մատրից:

$p^0=(p_i^0,\ i\in E)$-ով նշանակենք գործընթացի սկզբնական բաշխումը, իսկ $H_i(t)$-ով՝ i վիճակում մնալու ժամանակի բաշխման ֆունկցիան՝

$$H_i(t) = \sum_{j\in E} Q_{ij}(t),\quad i\in E:$$

ԿՄԳ-ն համարվում է տրված, եթե որոշված են նրա վիճակների E բազմությունը, սկզբնական բաշխման p^0 վեկտորը և $Q(t)$ կիսամարկովյան մատրիցը: ԿՄԳ-ն համարվում է կանոնավոր, եթե վերջավոր ժամանակահատվածում մեկ հավանականությամբ կատարվում են վերջավոր թվով անցումներ:

Դիցուք՝ $p_{ij}(t)$-ն t պահին գործընթացի j վիճակում գտնվելու հավանականությունն է պայմանով, որ t=0 սկզբնական պահին ԿՄԳ-ն գտնվել է i վիճակում՝ $p_{ij}(t)=P\{\xi(t)=j \mid \xi(0)=i\}$: Այս դեպքում լրիվ հավանականությունների բանաձևի օգնությամբ $p_{ij}(t)$-ի համար կստանանք հետևյալ մարկովյան վերականգնման հավասարումները՝

$$p_{ij}(t) = (1-H_i(t))\delta_{ij} + \sum_{r\in E}\int_0^t p_{rj}(t-x)dQ_{ir}(x),\quad i,j\in E, \qquad (5.1)$$

որտեղ δ_{ij}-երը՝ Կրոնեկերի հաստատուններն են:

Բանաձևն ունի պարզ հավանականային մեկնաբանություն և ստացվում է ԿՄԳ-ի առաջին թռիչքի (վիճակի փոփոխության) պահի հետազոտման միջոցով: Հաշվի առնելով ԿՄԳ-ի առաջին թռիչքը, որը տեղի է ունենում α_1 պատահական ժամանակից հետո, լրիվ հավանականությունների բանաձևից $p_{ij}(t)$-ի համար կստանանք՝

$$p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j,\ \alpha_1> t \mid \xi(0) = i\}+ P\{\xi(t) = j,\ \alpha_1\le t \mid \xi(0) = i\},$$

որտեղ առաջին գումարելին հավասար է՝

$$P\{\xi(t) = j,\ \alpha_1> t \mid \xi(0) = i\} = \delta_{ij}(1-H_i(t)):$$

Երկրորդ գումարելին որոշվում է լրիվ հավանականությունների բանաձևից՝ հաշվի առնելով թռիչքի պահին ԿՄԳ-ի համասեռությունը և մարկովյան հատկությունը՝

$$P\{\xi(t)=j,\ \alpha_i \le t|\xi(0)=i\}=$$

$$=\sum_{k\in E}\int_0^t P\{\xi(x)=k, x<\alpha_i<x+dx\,|\,\xi(0)=i\}\cdot P\{\xi(t)=$$

$$=j\,|\,\xi(x)=k\}=\sum_{k\in E}\int_0^t p_{kj}(t-x)dQ_{ik}(x):$$

Առաջին գումարելին ստացվում է հետևյալ դատողությունների օգնությամբ: Սկզբնական $t=0$ պահին գործընթացը գտնվել է i վիճակում, իսկ նրա առաջին թռիչքը տեղի է ունեցել t ժամանակից հետո՝ $\alpha_i>t$: Երկրորդ գումարելին ստացվում է հետևյալ կերպ: Սկզբնական $\xi(0)=i$ վիճակում ԿՄԳ-ն մնացել է $\alpha_i=x\le t$ ժամանակ, որից հետո $dQ_{ik}(x)$ հավանականությամբ $(x, x+dx)$ ժամանակահատվածում անցում է կատարել որևէ k, $k\in E$ վիճակ: $t-x$ ժամանակի ընթացքում ԿՄԳ-ն սկզբնական k վիճակից j վիճակ անցում է կատարում $p_{kj}(t-x)$ հավանականությամբ:

Մարկովյան վերականգնման հավասարումների վերլուծության համար օգտագործում են ըստ t փոփոխականի Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությունը՝

$$\tilde{p}_{ij}(s)=\int_0^\infty e^{-st}p_{ij}(t)dt\,,\ \tilde{Q}_{ij}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dQ_{ij}(t)\,,\ \tilde{H}_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}dH_i(t)\,,$$

որտեղ $s>0$-ն՝ Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխության պարամետրն է:

Անցնելով (5.1)-ում ըստ t փոփոխականի Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությանը կստանանք հետևյալ հանրահաշվական հավասարումների համակարգը՝

$$\tilde{p}_{ij}(s)-\sum_{e\in E}\tilde{Q}_{ie}(s)\tilde{p}_{ej}(s)=\tilde{d}_{ij}(s)\,,\quad i,j\in E, \qquad (5.2)$$

որտեղ՝

$$\tilde{d}_{ij}(s)=\delta_{ij}(1-\tilde{H}_j(s))/s:$$

(5.2) հավասարումները մատրիցների տեսքով կգրվեն՝

$$\tilde{P}(s)-\tilde{Q}(s)\tilde{P}(s)=\tilde{D}(s)\,,$$

որտեղ՝

$$D(s)=\|\tilde{d}_{ij}(s)\|,\quad \tilde{Q}(s)=\|\tilde{Q}_{ij}(s)\|,\quad \tilde{P}(s)=\|\tilde{p}_{ij}(s)\|:$$

Հետևաբար (5.2) հավասարումների լուծումների $\tilde{P}(s)$ մատրիցի համար կստանանք՝

$$\tilde{P}(s)=(1-\tilde{Q}(s))^{-1}\tilde{D}(s):$$

Այստեղ $(1-\tilde{Q}(s))^{-1}$-ը՝ $1-\tilde{Q}(s)$ մատրիցի հետադարձ մատրիցն է:

Ի տարբերություն մարկովյան գործընթացների, $p_{ij}(t)$ անցումային հավանականությունները ԿՄԳ-ն ամբողջությամբ չեն որոշում: Սակայն նրանց հատկությունները կարևոր դեր են խաղում ԿՄԳ-ի էրգոդիկ ռեժիմի հետազոտման ժամանակ:

Եթե ԿՄԳ-ի ներմուծված Մարկովի շղթան էրգոդիկ է և վիճակներում մնալու միջին ժամանակները սահմանափակ են, ապա գործընթացը կոչվում է էրգոդիկ: Նման ԿՄԳ-ների $p_{ij}(t)$ անցման հավանականությունների համար, անկախ սկզբնական բաշխումից, $t\to\infty$ դեպքում գոյություն ունեն հետևյալ սահմանները՝

$$\pi_j=\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\rho_j\eta_j\Big/\sum_{r\in E}\rho_r\eta_r\ ,\ j\in E,$$

որտեղ $\rho=(\rho_i,\ i\in E)$-ն՝ ԿՄԳ-ի ներմուծված Մարկովի շղթայի ստացիոնար բաշխումն է, իսկ η_i-ն գործընթացի i վիճակում մնալու միջին ժամանակն է: Այսինքն՝

$$\eta_i=\int_0^\infty(1-H_i(x))dx\ ,\ \ i\in E:$$

ԿՄԳ-ի j վիճակում գտնվելու π_j ստացիոնար հավանականությունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$\sum_{j\in E}\pi_j=1,\quad 0\le\pi_j\le 1,\ \ j\in E:$$

$\pi=(\pi_j,\ j\in E)$ ստացիոնար բաշխումը կարելի է որոշել նաև հետևյալ հավասարումների համակարգից՝

$$\pi_j=\sum_{i\in E}(\eta_j/\eta_i)\pi_i p_{ij},\quad j\in E,\ \ \sum_{j\in E}\pi_j=1:$$

Դիտարկենք կլանման վիճակներով ԿՄԳ: Դիցուք՝ E_1-ը՝ կլանման, իսկ E_0-ն՝ անցումային վիճակների բազմություններն են՝ $E=E_1\cup E_0$, $E_1\cap E_0=\varnothing$: Նշանակենք $\varphi_i(t)$-ով մինչև կլանման պահը (E_1 բազմությունն ընկնելը) ԿՄԳ-ի E_0 բազմության վիճակներում մնալու ժամանակի բաշխումը, պայմանով, որ t=0 սկզբնական պահին գործընթացը գտնվել է i վիճակում, $i\in E_0$, իսկ τ_i-ով՝ այդ ժամանակի միջին արժեքը: Օգտվելով լրիվ հավանականությունների բանաձևից, $\varphi_i(t)$-երի համար կարելի է գրել հետևյալ մարկովյան վերականգնման հավասարումները՝

$$\varphi_i(t)=\sum_{j\in E_1}Q_{ij}(t)+\sum_{j\in E_0}\int_0^t\varphi_j(t-x)dQ_{ij}(x),\quad i\in E_0: \tag{5.3}$$

(5.3) հավասարումներում անցնելով Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությանը, $\tilde{\varphi}_i(s)$-երի համար կստանանք հետևյալ հանրահաշվական հավասարումների համակարգը՝

$$\tilde{\varphi}_i(s)=\sum_{j\in E_1}\tilde{Q}_{ij}(s)+\sum_{j\in E_0}\tilde{Q}_{ij}(s)\tilde{\varphi}_j(s),\quad i\in E_0, \tag{5.4}$$

որտեղ $\tilde{\varphi}_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi_i(t)dt$:

Հաշվի առնելով, որ՝

$$\tau_i = -\left.\frac{d\tilde{\varphi}_i(s)}{ds}\right|_{s=0}, \quad i\in E_0,$$

(5.4) հավասարումների դիֆերենցումով կստանանք՝

$$\tau_i = \eta_i + \sum_{j\in E_0} \tau_j p_{ij}, \quad i\in E_0: \qquad (5.5)$$

Պետք է նշել, որ գործնական խնդիրներում ԿՄԳ-ների նկարագրման համար օգտագործվում են մի քանի հավանականային կառուցվածքներ: Մարկովյան գործընթացների նմանությամբ դիտարկենք հետևյալ կառուցվածքը: Դիցուք՝ ԿՄԳ-ի յուրաքանչյուր վիճակի համար տրված են α_{ij}՝ i վիճակից j վիճակ անցման սպասման ժամանակները, i,j∈E: α_{ij} պատահական մեծությունները միմյանցից անկախ են, ոչ բացասական և ունեն անընդհատ բաշխման ֆունկցիաներ՝

$$A_{ij}(t) = P\{\alpha_{ij}\le t\} = 1 - e^{\Lambda_{ij}(t)},$$

$$\Lambda_{ij}(t) = -\ln(1 - A_{ij}(t)),$$

որտեղ $\Lambda_{ij}(t)$ ֆունկցիան որոշում է i վիճակից j վիճակ անցման հաճախությունը: Քանի որ՝

$$d\Lambda_{ij}(t) = dA_{ij}(t)/(1 - A_{ij}(t)) = P\{t \le \alpha_{ij} \le t + dt|\alpha_{ij} > t\},$$

ապա $d\Lambda_{ij}(t)$-ն կարելի է մեկնաբանել որպես (t,t+dt) միջակայքում i վիճակից j վիճակ անցման հավանականություն, պայմանով, որ մինչև t պահը անցում տեղի չի ունեցել:

ԿՄԳ-ի i վիճակում մնալու α_i ժամանակը և նրա բաշխման $H_i(t)$ ֆունկցիան որոշվում են հետևյալ կերպ՝

$$\alpha_i = \min_{j\in E}\{\alpha_{ij}\}, \quad H_i(t) = P\{\alpha_i \le t\} = P\{\min_{j\in E}\{\alpha_{ij}\} \le t\} = 1 - e^{-\Lambda_i(t)},$$

որտեղ $\Lambda_i(t)$-ն գործընթացի i վիճակից դուրս գալու հաճախությունն է՝

$$\Lambda_i(t) = \sum_{j\in E, i\ne j} \Lambda_{ij}(t)\}, \quad i\in E:$$

Գործընթացի i վիճակից j վիճակ անցումը կատարվում է այն դեպքում, երբ $\alpha_i = \alpha_{ij}$, i,j∈E:

ԿՄԳ-ի անցումային մատրիցի $Q_{ij}(t)$ տարրերը որոշվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t \prod_{k\ne j}(1 - A_{ik}(x))dA_{ij}(x) = \int_0^t e^{-\Lambda_i(x)} d\Lambda_{ij}(x), \quad i,j\in E:$$

Այս բանաձևից կարելի է որոշել նաև ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումային հավանականությունները՝

$$p_{ij} = Q_{ij}(+\infty) = \int_0^\infty e^{-\Lambda_i(x)} d\Lambda_{ij}(x), \quad i,j\in E,$$

և ԿՄԳ-ի i վիճակում մնալու ժամանակի բաշխման ֆունկցիան՝

$$H_i(t) = P\{\alpha_i \le t\} = 1 - e^{-\Lambda_i(t)}, \quad i\in E:$$

Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքը: Դիցուք՝ բոլոր α_i, $i\in E$ պատահական մեծությունները ունեն λ_{ij} հաճախություններով ցուցչային բաշխում՝

$$A_{ij}(t) = 1 - e^{-\lambda_{ij}t}, \quad i,j\in E,$$

որտեղ λ_{ij}-երը վերջավոր են, $\lambda_{ij}\geq 0$ և ընդ որում ոչ բոլոր λ_{ij}-երն են հավասար զրոյի:

Այդ դեպքում գործընթացի վիճակներում մնալու α_i ժամանակները բաշխված են ցուցչային օրենքով՝

$$H_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \ i\in E,$$

որտեղ λ_i պարամետրերը վերջավոր են և զրոյից տարբեր՝

$$\lambda_i = -\lambda_{ij} = \sum_{i\neq j}\lambda_{ii}, \ 0 < \lambda_I < +\infty, \ i\in E:$$

Այդպիսի ԿՄԳ-ն հանդիսանում է անընդհատ ժամանակով $Q=\|\lambda_{ij}\|$ ակնթարթային մատրիցով Մարկովի շղթա: Այս դեպքում ԿՄԳ-ի անցումային $Q(t)$ մատրիցի տարրերը կորոշվեն հետևյալ բանաձևով՝

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}(1 - e^{-\lambda_i \tau}), \quad i,j\in E:$$

Այստեղ ԿՄԳ ներմուծված Մարկովի շղթայի p_{ij} անցումային հավանականությունները հավասար են՝

$$p_{ij} = \lambda_{ij}/\lambda_i, \quad i,j\in E:$$

Մարկովյան շղթայի i վիճակում մնալու միջին ժամանակը՝ η_i-ն, հավասար է λ_i հաճախության հակադարձ մեծությանը՝

$$\eta_i = 1/\lambda_i:$$

6. Մեծ չափակայնությամբ խնդիրների լուծման եղանակներ

Գործույթների հետազոտման և տնտեսագիտական շատ խնդիրների հետազոտումը կապված է մեծ չափակայնությամբ գծային հավասարումների լուծման հետ: Նշենք, օրինակ, պլանավորման, կառավարման, պահեստավորման խնդիրները և այլն:

Մեծ չափակայնությամբ խնդիրների արմատական լուծումը ներկայումս որոնվում է խոշորացման, ագրեգավորման և մասնատման ճշգրիտ և մոտավոր եղանակների մշակման և կիրառման ոլորտներում: Նշված եղանակները թույլ են տալիս մեծ չափակայնությամբ խնդրի լուծումը կամ հանգեցնել մի շարք փոքր (ցանկալի) չափակայնությամբ խնդիրների լուծման՝ պահպանելով սկզբնական խնդրի մանրամասն նկարագիրը, կամ էլ հանգեցնել խոշորացված, փոքր չափակայնությամբ մեկ խնդրի լուծման, անցնելով սկզբնական խնդրի խոշորացված նկարագրմանը: Անկախ նրանից, թե որ մոտեցումն է կիրագործվում՝ առաջինը, երկրորդը՝ թե դրանց զուգորդությունը, նշված եղանակներում կարևոր ընթացակարգ է սկզբնական խնդրի լուծումների վերականգնումը: Կախված այդ ընթացակարգի արդյունքից՝ տարբերում են ճշգրիտ և մոտավոր խոշորացման, ագրեգավորման և մասնատման եղանակները:

Դասական խոշորացման խնդիր

Դիցուք՝ $A=\|a_{ij}\|$-ն ոչ բացասական տարրերով մատրից է, որի տարրերը որոշակի արտադրանքի միավորի թողարկման համար անհրաժեշտ նյութերի ծախսի գործակիցներն են, $x=(x_1,\ldots,x_N)$-ը նշված որոշակի արտադրանքի լրիվ թողարկման վեկտորն է, իսկ $y=(y_1,\ldots,y_N)$-ը որոշակի արտադրանքի վերջնական թողարկման վեկտորն է: Այս միջճյուղային հաշվեկշռի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$x_i=\sum_{j=1}^{N}x_j a_{ij}+y_i,\quad i\in\{1,2,\ldots,N\},$$

կամ

$$x=Ax+y: \qquad (6.1)$$

Դիցուք՝ N արտադրանքների թողարկումը իրականացվում է M ճյուղերում: Ընդ որում առաջին ճյուղում արտադրվում են 1-ից S_1 արտադրանքները, երկրորդում՝ S_1+1-ից S_2, և այլն, M-րդ ճյուղում՝ $S_{M-1}+1$-ից S_M արտադրանքները:

$\hat{A}=\|\hat{a}_{ij}\|$-ով նշանակենք M×M չափականությամբ (M<N) միջճյուղային հաշվեկշռի ծախսերի գործակիցների մատրիցը, $\hat{X}=(\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_M)$-ով՝ ճյուղերի արտադրանքի լրիվ թողարկման վեկտորը, իսկ $\hat{Y}=(\hat{Y}_1,\ldots,\hat{Y}_M)$-ով՝ ճյուղերի արտադրանքի վերջնական թողարկման վեկտորը:

Ըստ դասական ագրեգավորման տեսության՝

$$\hat{X}=Tx: \qquad (6.2)$$

Այստեղ $T=\|t_{ij}\|$-ն ագրեգավորման կամ խոշորացման մատրիցն է, որի t_{ij} տարրը հավասար է 1-ի, եթե j արտադրանքը թողարկվում է i ճյուղում, և $t_{ij}=0$՝ հակառակ դեպքում: T մատրիցն ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$T=\begin{pmatrix} \overbrace{1\ \ 1\ \cdots\ 1}^{N_1} & \overbrace{0\ \ 0\ \cdots\ 0}^{N_2} & \overbrace{\ }^{\cdots} & \overbrace{0\ \ 0\ \cdots\ 0}^{N_M} \\ 0\ \ 0\ \quad\ 0 & 1\ \ 1\ \quad\ 1 & & 0\ \ 0\ \quad\ 0 \\ \vdots\ \ \vdots\ \quad\ \vdots & \vdots\ \ \vdots\ \quad\ \vdots & & \vdots\ \ \vdots\ \quad\ \vdots \\ 0\ \ 0\ \quad\ 0 & 0\ \ 0\ \quad\ 0 & & 1\ \ 1\ \quad\ 1 \end{pmatrix}: \qquad (6.3)$$

Այստեղ պարզության համար ենթադրվում է, որ բոլոր արտադրանքները համարակալված են ըստ իրենց զուգորդման կարգի: Այսինքն՝ եթե i-րդ ճյուղում արտադրված են $N_i=S_i-S_{i-1}$ թվով արտադրանքներ, ապա դրանք համարակալված են $S_{i-1}+1$-ից մինչև S_i:

Պարզ է, որ՝

$$\sum_{i=1}^{M} N_i = N:$$

Ներմուծենք խոշորացման կշռային C մատրիցը՝

$$C=\begin{pmatrix} \alpha^0_{1,1} & \cdots & \alpha^0_{1,S_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha^0_{2,S_1+1} & \cdots & \alpha^0_{2,S_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha^0_{M,S_{M-1}+1} & \cdots & \alpha^0_{M,S_M} \end{pmatrix}, \qquad (6.4)$$

որի α^0_{ij} տարրերը ցույց են տալիս i արտադրանքի տեսակարար կշիռը j ճյուղի թողարկած ամբողջ արտադրանքում: Ապա ագրեգավորված՝ միջճյուղային հաշվեկշռի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\hat{X} = \hat{A}\hat{X} + \hat{Y},$$

որտեղ՝

$$\hat{A} = TAC^T, \quad \hat{Y} = Ty:$$

Այստեղ C^T-ն ստացվում է C մատրիցի վերադասավորումից:

Եթե α^0_{ij}-երը որոշվում են սկզբնական միջարտադրանքային հաշվեկշռի հավասարման լուծումների օգնությամբ՝

$$\alpha^0_{ij} = x_i \Big/ \sum_{i\in N_j} x_i, \quad i\in N_j, \quad j\in\{1,2,\dots,M\}, \qquad (6.5)$$

ապա դժվար չէ համոզվել, որ դրանք ապահովում են (6.1) հավասարման ճշգրիտ ագրեգավորման (խոշորացման) պայմանը՝

$$\hat{X}_i = \sum_{j=S_{i-1}+1}^{S_i} x_j, \quad i\in\{1,2,\dots,M\}:$$

Այսպիսով դասական ագրեգավորման խնդրում α^0_{ij} գործակիցների որոշման համար անհրաժեշտ է ունենալ (6.1) հավասարման լուծումները:

Ագրեգավորման և խոշորացման եղանակները տարբերվում են C մատրիցի տարրերի որոշման եղանակներով: Քննարկենք գծային հանրահաշվական հավասարումների ճշգրիտ և մոտավոր խոշորացման եղանակները, որոնք լայն կիրառում են գտել նաև պատահական գործընթացների հետազոտման խնդիրներում:

Ճշգրիտ խոշորացման եղանակ

Սկզբում դիտարկենք համասեռ գծային հավասարումների ճշգրիտ խոշորացման խնդիրը: Դիցուք՝ տրված է՝

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j p_{ji}, \quad i\in\{1,2,\dots,N\} \qquad (6.6)$$

գծային հավասարումների համակարգը, որտեղ $P=\|p_{ij}\|$-ն՝ ոչ բացասական տարրերով հավանականային մատրից է՝

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1, \quad 0 \le p_{ij} \le 1, \quad i,j \in \{1,2,\ldots,N\},$$

իսկ $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$-ն ոչ բացասական վեկտոր է՝

$$0 \le \alpha_i \le 1, \quad i \in \{1,2,\ldots,N\}, \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_i = 1: \qquad (6.7)$$

Դիցուք՝ N փոփոխականները բաժանված են երկու խմբի: Ենթադրենք, որ առաջին խմբում ընդգրկված են 1-ից N_1 փոփոխականները, իսկ երկրորդում՝ N_1+1-ից N:

.Խոշորացված հավասարումների համակարգի կառուցման համար որոշվում են խոշորացման C և C^- մատրիցները, որոնք տվյալ դեպքում ունեն հետևյալ կառուցվածքը.

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \cdots & \alpha_{N_1}^{(1)} & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha_{N_1+1}^{(2)} & \cdots & \alpha_N^{(2)} \end{pmatrix}, \quad C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}}\right\} N_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} N-N_1 \end{matrix} \qquad (6.8)$$

Այստեղ C^- մատրիցը C-ի կիսահակադարձ մատրիցն է և $C^- = T^T$:

$\alpha^{(1)}$ և $\alpha^{(2)}$ վեկտորների տարրերը բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$0 \le \alpha_i^{(1)} \le 1, \quad i \in \{1,2,\ldots,N_1\}, \quad \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(1)} = 1,$$

$$0 \le \alpha_i^{(2)} \le 1, \quad i \in \{N_1+1, N_1+2,\ldots,N\}, \quad \sum_{i=N_1+1}^{N} \alpha_i^{(2)} = 1:$$

Կապերի P մատրիցը ներկայացնենք ըստ բլոկների՝

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}:$$

Այստեղ P_{11}-ը՝ $N_1 \times N_1$ չափականությամբ մատրից է, որի տարրերը ցույց են տալիս փոփոխականների կապը առաջին խմբում: P_{12}-ը $N_1 \times (N-N_1)$ չափականությամբ մատրից է, որի տարրերը ցույց են տալիս առաջին խմբի փոփոխականների կապը երկրորդ խմբի փոփոխականների հետ: P_{12}-ը՝ $(N-N_1) \times N_1$ և P_{22}-ը՝ $(N-N_1) \times (N-N_1)$ մեկնաբանվում են համապատասխանորեն:

$\alpha^{(1)}$ և $\alpha^{(2)}$ վեկտորները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(P_{11} + P_{12}(1-P_{22})^{-1}P_{21}), \quad \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^{(1)} = 1, \qquad (6.9)$$

$$\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(P_{22} + P_{21}(1-P_{11})^{-1}P_{12}), \quad \sum_{i=N_1+1}^{N} \alpha_i^{(2)} = 1: \qquad (6.10)$$

Խոշորացված հավասարումների համակարգն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{P}, \ \sum_{1}^{2} \hat{\alpha}_i = 1, \qquad (6.11)$$

որտեղ՝

$$\hat{\alpha} = \alpha C^{-} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2), \ \hat{P} = CPC^{-}:$$

Սկզբնական համակարգի α լուծումների, C մատրիցի $\alpha^{(i)}$, i=1,2 տարրերի և խոշորացված համակարգի $\hat{\alpha}_i$, i=1,2 լուծումների միջև գոյություն ունեն հետևյալ առնչությունները.

$$\hat{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i, \ \hat{\alpha}_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N} \alpha_i, \qquad (6.12)$$

$$\alpha_i^{(j)} = \alpha_i / \hat{\alpha}_j, \ j=1,2, \qquad (6.13)$$

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_j \alpha_i^{(j)}, \ i \in \{1,2,\ldots,N_1\}, \text{ եթե } j=1 \text{ և}$$

$$i \in \{N_1+1, N_1+2, \ldots, N\}, \text{ եթե } j=2: \qquad (6.14)$$

Այստեղ (6.12)-ը ցույց է տալիս սկզբնական և խոշորացված հավասարումների լուծումների կապը, (6.13)-ը որոշում է խոշորացման C մատրիցի տարրերը և ապահովում է ճշգրիտ խոշորացման պայմանը, իսկ (6.14)-ը թույլ է տալիս վերականգնել սկզբնական համակարգի լուծումները, եթե հայտնի են խոշորացված համակարգի լուծումները և խոշորացման մատրիցը: Պետք է նշել, որ խոշորացման ընթացակարգն ունի փոխանցականության հատկություն, այսինքն՝ արդեն խոշորացված համակարգը նորից կարող է ենթարկվել խոշորացման:

Այժմ դիտարկենք անհամասեռ գծային հավասարումների խոշորացման խնդիրը: Դիցուք՝ տրված է՝

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} x_j a_{ji} + y_i, \quad i \in \{1,2,\ldots,N\} \qquad (6.15)$$

հավասարումների համակարգը, որտեղ A= $\|a_{ij}\|$-ն ոչ բացասական տարրերով մատրից է, $0 \le a_{ij} \le 1$, $i,j \in \{1,2,\ldots,N\}$, $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \le 1$, իսկ $Y=(y_1,\ldots,y_N)$-ը՝ ոչ բացասական տարրերով վեկտոր է:

Համակարգի խոշորացման համար կառուցենք համասեռ հավասարումների հետևյալ օժանդակ համակարգը.

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j p_{ji}, \quad 0 \le \alpha_i \le 1, \ i \in \{1,2,\ldots,N\}, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1: \qquad (6.16)$$

Այստեղ՝ P=$\|p_{ij}\|$-ն հավանականային մատրից է, որի տարրերը որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$p_{ij} = a_{ij} + r_j t_i, \ r_j = y_j \Big/ \sum_{i=1}^{N} y_i, \ t_i = 1 - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}, \ i,j \in \{1,2,\ldots,N\}:$$

(6.15) և (6.16) համակարգերի լուծումները միմյանց հետ կապված են՝

$$x_i = b\alpha_i,\quad i\in\{1,2,\ldots,N\},\ b=\sum_{i=1}^{N} y_i \Big/ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i t_i \qquad (6.17)$$

հավասարումներով:

Անհամասեռ հավասարման խոշորացման համար օգտվենք համասեռ հավասարումների համար բերված ալգորիթմից:

Դիցուք՝ (6.15) հավասարումների փոփոխականները խոշորացվում են երկու խմբերով $\{1,2,\ldots,N_1\}$ և $\{N_1+1,\ldots,N\}$: Ապա ըստ (6.14)-ի և (6.17)-ի դրանց լուծումների համար կստանանք՝

$x_j = b\alpha_j = b\hat{\alpha}_i\alpha_j^{(i)} = \hat{x}_i x_j^{(i)}$, $j\in\{1,2,\ldots,N\}$, եթե $i=1$ և $j\in\{N_1+1,N_1+2,\ldots,N\}$, եթե $i=2$:

$$\hat{x}_1 = b\hat{\alpha}_1 = \sum_{i=1}^{N_1} b\alpha_i = \sum_{i=1}^{N_1} x_i\,,\qquad \hat{x}_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N} x_i\,, \qquad (6.18)$$

որտեղ

$$x_j^{(i)} = \alpha_j^{(i)} = \alpha_j/\hat{\alpha}_i = b\alpha_j/b\hat{\alpha}_i = x_j/\hat{x}_i :$$

Այսպիսով, (6.15) համակարգի խոշորացումը համարժեք է օժանդակ (6.16) համակարգի խոշորացմանը, ընդ որում դրանց խոշորացման C և C^- մատրիցները համընկնում են: Եթե օժանդակ համակարգից որոշվել են C և C^- մատրիցները, ապա (6.15)-ի խոշորացված համակարգը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\hat{X} = \hat{X}\hat{A} + \hat{Y} :$$

Այստեղ՝

$$\hat{X} = XC^-,\ \hat{Y} = YC^-,\ \hat{A} = CAC^- :$$

Մոտավոր խոշորացման եղանակ

Պետք է նշել, որ մոտավոր խոշորացման եղանակները լայն կիրառություն են գտել բարդ համակարգերի ուսումնասիրման և գործույթների հետազոտման խնդիրներում: Ներկայումս օգտագործվում են մոտավոր խոշորացման բազմազան եղանակներ, որոնք տարբերվում են կիրառվող մաթեմատիկական մոտեցումներով և իրենց ընթացակարգերի գործնական մեկնաբանություններով: Այս բաժնում կդիտարկենք Կորոլյուկի առաջարկած եղանակը, որն առանձնանում է իր պարզ կառուցվածքով ու արդյունքների մաթեմատիկական հիմնավորությամբ:

Եղանակի հիմքում ընկած է այն ենթադրությունը, որ իրական բարդ համակարգի վարքը կարելի է նկարագրել որոշակի իմաստով նրան մոտիկ այսպես կոչված հիմնային, ավելի պարզ համակարգի օգնությամբ: Երկու համակարգերի վարքերի մոտիկությունը գնահատվում է նրանց կապերի (անցումային) մատրիցների տարբերության միջոցով: Ընդունվում է, որ այդ տարբերու-թյունն ունի նախօրոք սահմանված ε փոքր պարամետրի կարգ: Դա թույլ է տալիս, հետազոտելով հիմնային, համակարգի բնութագրերը, գնահատել սկզբնական (իրական) համակարգի բնութագրերը:

Դիցուք՝ հետազոտվում է (6.6) համասեռ հավասարումների համակարգը, որի անցումային P մատրիցը թույլ է տալիս հետևյալ տրոհումը.

$$P = P_0 - \varepsilon B:$$

Այստեղ P_0-ն բլոկներով անկյունագծային հավանականային մատրից է, որը բնութագրում է հիմնային համասեռ համակարգը: Այս մատրիցը տալիս է սկզբնական համակարգի տրոհումը ըստ փոփոխականների խմբերի: Եթե համակարգը տրոհվում է M խմբերի, ապա P_0-ն ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} & 0 & & 0 \\ 0 & P_{02} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & P_{0M} \end{pmatrix};$$

B մատրիցը ցույց է տալիս սկզբնական համակարգի շեղումը հիմնայինից: Նրա տարրերը ունեն ε փոքր պարամետրի կարգ և բավարարում են հետևյալ հավասարությանը՝

$$\sum_j b_{ij} = 0, \quad i \in \{1,2,\ldots,N\}:$$

α_i^0-ով և $1_{(i)}$-ով նշանակենք P_{0i} ենթամատրիցի ձախ ու աջ սեփական վեկտորները՝

$$\alpha_i^0 = \alpha_i^0 P_{0i}, \quad \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} \alpha_{ij}^0 = 1, \quad 0 \le \alpha_{ij}^0 \le 1, \; j \in \{N_{i-1}+1,\ldots,N_i\}, \qquad (6.19)$$

$$1_{(i)} = P_{0i} 1_{(i)}, \quad i \in \{1,2,\ldots,M\}:$$

Այստեղ $1_{(i)}$ վեկտորի բոլոր տարրերը հավասար են 1-ի: Խոշորացման C_0 և C_0^- մատրիցները կառուցվում են հետևյալ կերպ.

$$C_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha_2^0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_M^0 \end{pmatrix}, \quad C_0^- = \begin{pmatrix} 1_{(1)} & 0 & & 0 \\ 0 & 1_{(2)} & & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1_{(M)} \end{pmatrix}: \qquad (6.20)$$

Մոտավոր եղանակով կառուցված խոշորացված համակարգի $\hat{\alpha}$ լուծումները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից՝

$$\hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{M} \hat{\alpha}_j \hat{p}_{ji}, \quad 0 \le \hat{\alpha}_i \le 1, \quad i \in \{1,2,\ldots,M\}, \quad \sum_{1}^{M} \hat{\alpha}_i = 1: \qquad (6.21)$$

Այստեղ $\hat{P}$-ն՝ խոշորացված համակարգի կապերի մատրիցն է՝

$$\hat{P} = C_0 P C_0^-:$$

Սկզբնական համակարգի լուծումները վերականգնվում են հետևյալ բանաձևով.

$$\alpha \cong \hat{\alpha} C_0 + 0(\varepsilon): \qquad (6.22)$$

Պետք է նշել, որ մոտավոր եղանակը, չնայած ճշգրիտի հետ ալգորիթմական մեծ ընդհանրությանը ունի սկզբունքային տարբերություն P մատրիցի տրոհման ընթացակարգում: Եթե ճշգրիտ եղանակի դեպքում կարող են խմբավորվել հավասարման ցանկացած փոփոխականները, ապա մոտավորի դեպքում խմբավորվում են միայն այն փոփոխականները, որոնք բավարարում են խմբից դուրս գալու հավանականության $O(\varepsilon)$ կարգի փոքրության պայմանին: Այսինքն՝ մոտավոր եղանակի դեպքում պահանջվում է, որ B մատրիցի տարրերն ունենան $O(\varepsilon)$ կարգ: Մյուս կողմից՝ մոտավոր եղանակի դեպքում հնարավոր է այնպիսի հիմնային համակարգ ընտրել, որը կարող է ապահովել ինչպես խնդրի լուծման մեծ ճշտությունը, այնպես էլ P_0 մատրիցի անհրաժեշտ հատկությունները ու համակարգի հետազոտման արդյունավետությունը:

Քննարկենք բերված եղանակների առանձնահատկությունները: Առաջին հերթին նշենք ինչպես ամբողջ ալգորիթմի, այնպես էլ նրա առանձին ընթացակարգերի կառուցվածքը, որը թույլ է տալիս օգտագործվող մատրիցների և լուծումների ստոխաստիկ բնույթի շնորհիվ վերահսկել և մեկնաբանել հետազոտվող խնդրի ինչպես միջանկյալ, այնպես էլ վերջնական արդյունքները: Վերլուծական և օպտիմացման շատ խնդիրներում խոշորացման եղանակներն արժեքավոր են ոչ միայն հաշվողական տեսանկյունից, այլև իմաստային ու մեթոդական: Եթե ճշգրիտ խոշորացման եղանակների հաշվողական բարդությունն ունի նույն կարգը, ինչ որ Գաուսի բլոկներով արտաքսման եղանակը, ապա մոտավոր խոշորացման եղանակի արդյունավետությունը պայմանավորված է ε փոքր պարամետրի և հիմնային համակարգի հաջող ընտրությամբ:

Օրինակ (շարունակություն): Դիտարկենք Լեոնտևի մոդելի խոշորացման խնդիրը:

Դիցուք՝ միավորվում են առաջին երկու ճյուղերը: Բերված անհամասեռ հավասարումների խոշորացման ալգորիթմի համաձայն կառուցենք բաց մոդելին համարժեք փակ հավանականային (մարկովյան) մոդելը, որի անցումային P մատրիցի տարրերը կորոշվեն հետևյալ բանաձևով՝

$$p_{ij} = q_{ij}+r_j t_i,\ \text{որտեղ}\ r_j = \gamma_j \Big/ \sum_{i=1}^{3}\gamma_i,\quad t_i = 1-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ :$$

Կարելի է ստուգել, որ P մատրիցը հավանականային է՝ նրա յուրաքանչյուր $i=1,2,3$ տող բավարարում է

$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1$$

պայմանին:

Քննարկվող օրինակում P մատրիցի համար կստանանք՝

$$P = \begin{pmatrix} 13/24 & 3/24 & 8/24 \\ 1/24 & 15/24 & 8/24 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}:$$

Մարկովյան շղթայի ստացիոնար բաշխման ρ վեկտորը որոշվում է հետևյալ հավասարումների համակարգից՝

$$\rho = \rho P, \quad \sum_{1}^{3} \rho_i = 1:$$

Որտեղից, ρ վեկտորի համար ստանում ենք

$$\rho = (9/20,\ 3/20,\ 8/20):$$

Բաց մոդելի լուծումները որոշվում են

$$X_i = X\rho_i, \quad i = \overline{1,3} \tag{6.23}$$

բանաձևի օգնությամբ, որտեղ X= 40: Հետևաբար՝

$$X_1 = 18,\ X_2 = 6,\ X_3 = 16:$$

Խոշորացման մատրիցի որոշման նպատակով 1 և 2 վիճակների համար կառուցենք անցումային P_1 մատրիցը՝

$$P_1 = \begin{pmatrix} 13/24 & 3/24 \\ 9/24 & 15/24 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 8/24 \\ 8/24 \end{pmatrix}(\tfrac{1}{2}0) = \begin{pmatrix} 21/24 & 3/24 \\ 9/24 & 15/24 \end{pmatrix}:$$

P_1 մատրիցի ձախ անշարժ $\tilde{\alpha}$ վեկտորի տարրերն են՝

$$\tilde{\alpha} = (3/4,\ 1/4):$$

Հետևաբար խոշորացման C և C^- մատրիցները կունենան հետևյալ տեսքը.

$$C = \begin{pmatrix} 3/4, & 1/4, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից կորոշվեն խոշորացված անցումային $\hat{P}$ մատրիցը և նրա $\hat{\alpha}$ վեկտորը՝

$$\hat{P} = CPC^-, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha} = (3/5,\ 2/5):$$

Խոշորացված հաշվեկշռային մոդելի լուծումները կլինեն՝

$$\hat{X} = XC^- = (24,16):$$

(6.18) բանաձևն օգտագործելով $\hat{X}$ վեկտորի տարրերի համար, կստանանք՝

$$\hat{X}_i = X\hat{\alpha}_i, \quad i = \overline{1,2}, \quad \hat{X}_1 = 40\cdot 3/5 = 24, \quad \hat{X}_2 = 40\cdot 2/5 = 16:$$

Խոշորացված պահանջմունքի վեկտորը հավասար է

$$\hat{\gamma} = \gamma C^- = (4,2):$$

Իսկ ամբողջ արտադրանքի արժեքը կլինի՝

$$\hat{X}_1 + \hat{X}_2 = 40:$$

Այժմ կառուցենք խոշորացված հաշվեկշռային մոդելը, որը որոշվում է $\hat{Q}$ խոշորացված տեխնոլոգիական գործակիցների մատրիցով, $\hat{X}$ խոշորացված վեկտորով և $\hat{\gamma}$ խոշորացված պահանջմունքի վեկտորով՝

$$\hat{Q} = CQC^{\cdot},\ \hat{X} = XC^{\cdot},\ \hat{\gamma} = \gamma C^{\cdot},$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ \hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2),\ \hat{\gamma} = (4{,}2)^{\cdot},$$

$$\hat{X} = (\hat{X}\hat{Q}) + \gamma :$$

Որտեղից խոշորացված մոդելի լուծումների համար կստանանք՝

$$\hat{X}_1 = 24,\ \hat{X}_2 = 16:$$

Այսպիսով երկու տարբեր եղանակներով կարելի է կառուցել և հետազոտել խոշորացված հաշվեկշռային մոդելը:

Օրինակ (շարունակություն): Դիտարկենք շարժունակության խնդրում շղթայի խոշորացման հարցը: Պետք է նշել, որ ինչպես մի շարք կիրառություններում, այս դեպքում ևս խոշորացման ընթացակարգը և նրա օգնությամբ ստացված արդյունքները հետազոտվող համակարգի մասին տալիս են որակապես նոր տեղեկատվություն: Դիցուք՝ ըստ դասերի միավորվում են հետևյալ վիճակները. առաջին դասում, որը պայմանականորեն կանվանենք բարձրագույն դաս, 1 և 2 վիճակները, երկրորդ՝ միջին դասում՝ 3, 4 և 5 վիճակները, իսկ ստորին դասում՝ 6 և 7 վիճակները:

Խոշորացման C և $C^{\cdot}$ մատրիցները այս խնդրում ունեն հետևյալ տեսքը.

$$C = \begin{pmatrix} 0.359 & 0.641 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.141 & 0.203 & 0.656 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.585 & 0.415 \end{pmatrix},\ C^{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Խոշորացված խնդրի անցումային $\hat{P}$ մատրիցը հավասար է՝

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.432 & 0.5 & 0.068 \\ 0.053 & 0.699 & 0.248 \\ 0.011 & 0.504 & 0.485 \end{pmatrix},$$

իսկ խոշորացված շղթայի ստացիոնար բաշխումը՝

$$\hat{\alpha} = (0.064;\ 0.625;\ 0.311):$$

$\hat{P}$ մատրիցի հետազոտումը տարվում է երկու ուղղությամբ: Առաջին՝ դիտարկվում է պետության ամբողջ բնակչությունը և կանխատեսվում է որոշակի ժամանակի ընթացքում, օրինակ՝ մեկ կամ մի քանի սերունդների համար նրա բաշխումը ըստ դասերի: Այս դեպքում $\hat{P}$-ն անվանում են «կոլեկտիվ գործընթացի» անցումային մատրից: Երկրորդ՝ դիտարկվում է առանձին ընտանիքի պատմությունը: Այս դեպքում $\hat{P}$-ն կոչվում է «անհատական գործընթացի» անցումային մատրից:

Առաջին ուղղությամբ $\hat{P}$ մատրիցի հետազոտումը ցույց է տալիս, որ բարձրագույն դասի ընտանիքների զավակների 43.2%-ը մնում է նույն դասում, 50%-ը անցնում է միջին դաս, իսկ 6.8%-ը՝ ստորին դաս: Միջին դասից 5.3%-ն է անցնում բարձրագույն դաս, 69.9%-ը մնում է նույն՝ միջին դասում, իսկ 24.8%-ը անցնում է ստորին դաս: Հետաքրքիր են անցումները ստորին դասից: Այստեղ 1.1%-ը անցնում է բարձրագույն, 50.4%-ը միջին, իսկ 48.5%-ը մնում է սեփական դասում: Բարձրագույն դասից ստորին դաս անցումների քանակը 6 անգամ մեծ է, քան ստորինից բարձրագույն անցումները: Միջին դասից առավել, մոտ 5 անգամ, մեծ է ստորին դաս անցնելու հավանականությունը, քան բարձրագույն դաս:

«Անհատական գործընթացում» $\hat{P}$ մատրիցի տարրերի հետազոտումը ցույց է տալիս, թե ինչպիսի հավանականությամբ զավակը կընտրի հոր մասնագիտությունը և կմնա համապատասխան դասում: Օրինակ, եթե ընտանիքը պատկանում է բարձրագույն դասին, ապա զավակի նույն դասում մնալու հավանականությունը հավասար է 0.432-ի, միջին դաս անցնելունը՝ 0.5, իսկ ստորին դաս անցնելունը՝ 0.068: Այդպիսով բարձրագույն դասի ընտանիքների զավակների համար գրեթե 7 անգամ մեծ է միջին դասում հայտնվելու հավանականությունը, քան ստորինում: Իսկ ստորին դասի ընտանիքների զավակների համար գրեթե 46 անգամ քիչ է ստորին դասից անմիջապես բարձրագույն, քան միջին դաս անցնելու հավանականությունը:

Տեսնենք, թե բնակչությունը մեկ սերունդ հետո ինչպիսի դասային կառուցվածք կունենա, եթե ելակետային պահին նա ունի հետևյալ կառուցվածքը՝ 10% - ստորին դաս, 70% - միջին և 20% -բարձրագույն դաս: n սերունդներից հետո բնակչության դասային կառուցվածքը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով.

$$\pi(n) = \pi_0 P^n:$$

Քննարկվող դեպքում $\pi(1)$ վեկտորի համար կստանանք՝

$$(\pi_1(1),\pi_2(1),\pi_3(1)) = (0.2;0.7;0.1)\begin{pmatrix}0.432 & 0.5 & 0.068\\ 0.053 & 0.699 & 0.248\\ 0.011 & 0.504 & 0.485\end{pmatrix}=$$

$$=(0.125;0.638;0.237):$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ $\hat{P}$ մատրիցը անփոփոխ է բոլոր սերունդների համար: $\pi(1)$ վեկտորի տարրերի վերլուծումը ցույց է տալիս, որ մեկ սերունդ անց բարձրագույն դասը բնակչության մեջ 20%-ի փոխարեն կազմում է ընդամենը 12.5%, իսկ ստորին դասը 10%-ից 23.7%-ի է հասնում: հարաբերականորեն կայուն (63.8% 70%-ի փոխարեն) միջին դասի պայմաններում:

Եթե բնակչության նախնական դասային հարաբերակցությունը (կառուցվածքը) համընկնում է շղթայի $\hat{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ստացիոնար բաշխման հետ՝ $\hat{\alpha}=(0.064;\ 0.652;\ 0.311)$, ապա, ինչպես հետևում է շղթայի էրգոդիկությունից, հաջորդ սերունդների համար բնակչության դասային կառուցվածքը կմնա անփոփոխ: Քննարկվող դեպքում π_0=(0.2; 0.7; 0.1) սկզբնական բաշխման տակայությամբ մեկ սերունդ հետո ստանում ենք՝ $\pi(1)$=(0.125; 0.638; 0.237): Այսինքն՝ բնակչության դասային կառուցվածքում հիմնական փոփոխությունները՝ տեղաշարժերը, նկատվում են ստորին և բարձրագույն դասերի միջև: Հաշվարկների օգնությամբ դժվար չէ համոզվել, որ միայն 5-րդ սերնդի օրոք է հաստատվում բնակչության կայուն դասային կառուցվածքը: Այս դեպքում $\pi(5)$-ը $\hat{\alpha}$ -ից շեղված է չնչին մեծությամբ:

Գրականություն

1. Королюк В.С. Стохастические модели систем.-Киев: Наукова думка, 1989
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения ./ Пер. с англ./ Т 2. -М.: Мир, 1984
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова./ Пер. с англ./ -М.: Наука, 1970
4. Athanasios Papoulis. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. -Nev York: Mc Graw -Hill, Inc., 1991.
5. Սահակյան Մ.Ա. և ուրիշներ. Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ /Գործույթների հետազոտում. Կառավարման գիտություն / Մաս 1,ԵՊԱԳՄԱՀԲ, Երևան, 1997

XII. ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՐԿՈՎՅԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐ

Հիմքը զգում եմ, բայց չեմ ավարտում:

Գրիգոր Նարեկացի
Մատյան ողբերգության բան Հ.Ա,Բ,
Ե. 1979

Մուտք

Եկամուտներով պատահական գործընթացները լայն կիրառում են գտել սոցիալական, տնտեսական և տեխնիկական համակարգերի կառավարման ու պլանավորման վերաբերյալ որոշումների կայացման խնդիրներում:

Գործույթների հետազոտման խնդիրներում դիտարկվում են վերջավոր և անվերջ պլանավորման ժամանակով, եկամուտների վերագնահատմամբ և առանց վերագնահատման, կլանման վիճակներով կառավարվող պատահական գործընթացների օպտիմացման խնդիրներ:

Այս բաժնում կքննարկվեն անվերջ պլանավորման ժամանակով կառավարվող Մարկովի շղթաները և կիսամարկովյան գործընթացները:

1. Եկամուտներով Մարկովի շղթաներ և կիսամարկովյան գործընթացներ

1.1 Եկամուտներով Մարկովի շղթաներ

Դիցուք՝ տրված է վերջավոր վիճակների բազմությունով համասեռ, էրգոդիկ Մարկովի շղթա $\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(n),\ldots$, որը, ինչպես գիտենք, որոշվում է (E,p^0,P) եռյակով: Այստեղ $E=\{1,2,\ldots,N\}$-ը՝ վիճակների բազմությունն է, $p^0=(p_1^0, p_2^0,\ldots,p_N^0)$-ն՝ շղթայի սկզբնական բաշխումը, իսկ $P = \|p_{ij}\|$-ն՝ մեկ քայլում անցումների հավանականությունների մատրիցը:

Դիտարկենք Մարկովի շղթաներում եկամուտների կուտակման հետևյալ կառուցվածքը: Եթե ժամանակի n պահին Մարկովի շղթան գտնվում է i վիճակում՝ $\xi(n) = i$, $i\in E$, ապա ստացվում է $r(\xi(n))=r_i$ եկամուտ: Ենթադրվում է, որ շղթայի բոլոր վիճակներում r_i եկամուտները վերջավոր են:

$$y(n) = \sum_{s=0}^{n} r(\xi(s)),\ n = 0,1,2,\ldots$$

գումարների հաջորդականությունը կոչվում է Մարկովի շղթայի վրա կուտակման գործընթաց: $y(n)$-ը հավասար է շղթայի n անցումներից հետո կուտակված գումարային եկամուտին: Գործնականում եկամուտներով Մարկովի շղթաներում հետազոտվում է $y(n)$-ի միջին արժեքը, այսինքն՝ n անցումներից հետո կուտակված գումարային միջին՝ $v_i(n)$ եկամուտը i սկզբնական վիճակի դեպքում:

$v_i(n)$-ի համար եկամուտների հաշվեկշռի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$v_i(n) = r_i + \sum_{j=1}^{N} v_j(n-1)p_{ij}\ , \quad i \in E,\ n = 1,2,3,\ldots : \qquad (1.1)$$

Այն ստացվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք՝ շղթան գտնվում է i վիճակում: Այդ վիճակից n անցումների (քայլերի) ընթացքում սպասվող գումարային միջին եկամուտը՝ $v_i(n)$-ը, հավասար է i վիճակում անմիջապես (մեկ քայլից) սպասվող միջին r_i եկամտի և մնացած n–1 անցումներից սպասվող

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1)$$

գումարային միջին եկամտի գումարին:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները. $r = (r_1, r_2, \ldots, r_N)$-ը մեկ քայլում անմիջական սպասվող եկամուտների վեկտորն է, $v(n) = (v_1(n), v_2(n), \ldots, v_N(n))$-ը n քայլերում սպասվող գումարային միջին եկամուտների վեկտորն է:

Այսպիսով (1.1) հավասարումը վեկտորական տեսքով կլինի՝

$$v(n) = r + Pv(n-1),\ \ n = 1,2,\ldots: \qquad (1.2)$$

Հայտնի է [տե՛ս. 1], որ վերջավոր, էրգոդիկ Մարկովի շղթաներում, երբ $n \to \infty$, $v_i(n)$-ը ունի հետևյալ վերլուծությունը.

$$v_i(n) = ng + v_i + 0(1),\ \ n \to \infty,\ i \in E: \qquad (1.3)$$

Այստեղ v_i-երը կշռային գործակիցներն են, որոնց մեծությունը հավասար է $v_i(n)$-ի ասիմպտոտի և օրդինատների առանցքի հատմամբ ստացված հատվածին: g-ն ամիջական (մեկ քայլում) սպասվող գումարային միջին եկամուտն է՝

$$g = \sum_{i \in E} \rho_i r_i\ , \qquad (1.4)$$

որտեղ ρ_i-երը՝ Մարկովի շղթայի ստացիոնար հավանականություններն են՝

$$\rho_i = \sum_{j \in E} \rho_j p_{ji},\ \ \sum_{j \in E} \rho_j = 1,\ i \in E\ : \qquad (1.5)$$

Ինչպես երևում է (1.3)-ից, $n \to \infty$ դեպքում, $v_i(n)$-երը անսահմանափակ աճում են: Այդ պատճառով առանց եկամուտների վերագնահատման էրգոդիկ Մարկովի շղթաների օպտիմացման խնդիրներում որպես նպատակային ֆունկցիա օգտագործվում է g գործակիցը՝ անմիջական ստացվող գումարային միջին եկամուտը:

Տեղադրելով (1.3)-ից $v_i(n)$-ի արժեքը (1.1)-ի մեջ և խմբավորելով փոփոխականները g գործակցի համար կունենանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$g + v_i = r_i + \pi_i = \sum_{j \in E} \pi_j q_{ji}\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,N\ : \qquad (1.6)$$

Քանի որ (1.6) N հավասարումների համակարգը պարունակում է N+1 անհայտներ՝ $g, v_1, v_2, \ldots, v_N$, ապա g-ի որոշման համար ընդունվում է, որ v_i կշռային գործակիցներից մեկը, սովորաբար v_N-ը, հավասար է 0-ի: (1.6) հավասարումների համակարգը մենք կօգտագործենք կառավարվող Մարկովի շղթաների օպտիմացման գծային ծրագրման խնդրի լուծման ժամանակ՝ Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմի ընթացակարգերում (տե՛ս. [2,6]):

Քննարկենք կլանման վիճակով, Մարկովի շղթաները: Դիցուք՝ 1 վիճակը շղթայի կլանման վիճակն է, իսկ P^1-ն՝ կլանմամբ Մարկովի շղթայի մեկ քայլում անցումների հավանականությունների մատրիցն է: P^1 մատրիցի գոնե մեկ, օրինակ՝ i-րդ, տողի համար ճշմարիտ է հետևյալ պայմանը.

$$\sum_{j=2}^{N} p_{ij} < 1 : \qquad (1.7)$$

Այստեղից հետևում է, որ Մարկովի շղթան $p_{i1}>0$ հավանականությամբ i վիճակից մեկ քայլում կարող է ընկնել 1՝ կլանման վիճակ: Հայտնի է, որ $n\to\infty$ դեպքում կլանմամբ Մարկովի շղթան ցանկացած i, i=2,3,…,N վիճակից վերջավոր քայլերի ընթացքում 1 հավանականությամբ ընկնում է կլանման վիճակ:

Դիցուք՝ տրված են՝ $r'=(r_2, r_3, \ldots, r_N)$ մեկ քայլում սպասվող միջին եկամուտների վեկտորը, $p^{01} = (p_2^0, p_3^0, \ldots, p_N^0)$ շղթայի սկզբնական բաշխումը և շղթայի P անցումների մատրիցը: Բնականաբար, ենթադրվում է, որ

$$\sum_{j=2}^{N} p_j^0 = 1 \text{ և } p_1^0 = 0 :$$

Հակառակ դեպքում հնարավոր է հենց 0 պահին դրական հավանականությամբ ընկնել կլանման վիճակ: i սկզբնական վիճակից մինչև կլանման վիճակ ընկնելը n քայլերից սպասվող $v_i(n)$ գումարային միջին եկամուտները կարելի է որոշել հետևյալ հավասարումների համակարգից.

$$v_i(n) = r_i + \sum_{j=2}^{N} p_{ij} v_j(n-1), \quad i=2,3,\ldots,N, \ n=1,2,3\ldots : \qquad (1.8)$$

Հայտնի է, որ կլանմամբ Մարկովի շղթաներում մեծ n-երի դեպքում ($n\to\infty$) սպասվող գումարային միջին եկամուտները՝ $v_i(n)$-երը սահմանափակ են: Հետևաբար, $i=\overline{2,N}$ և $n\to\infty$ դեպքում չնվազող $\{v_i(n)\}$ հաջորդականության համար գոյություն ունի սահման՝

$$v_i = \lim_{n\to\infty} v_i(n), \quad i = 2,3,\ldots,N:$$

Այստեղ v_i-ն սկզբնական i վիճակից մինչև կլանման վիճակ (1 վիճակ) ընկնելն սպասվող գումարային միջին եկամուտն է: Անցնելով (1.8)-ում սահմանի, երբ $n\to\infty$, v_i-երի համար կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$v_i = r_i + \sum_{j=2}^{N} p_{ij} v_j, \quad i=2,3,\ldots,N: \qquad (1.9)$$

Դիցուք՝ $v'=(v_2,v_3,\ldots,v_N)$-ը՝ մինչև կլանման վիճակ ընկնելը սպասվող գումարային միջին եկամուտների վեկտորն է: Այս դեպքում (1.9) հավասարումների համակարգը վեկտորական տեսքով կգրվի՝

$$v' = r' + P'v':$$

Հետևաբար, (1.9) համակարգի լուծումների՝ v' վեկտորի համար կստանանք՝

$$v' = (I-P')^{-1}r' = M\cdot r':$$

Այստեղ M-ը կլանմամբ Մարկովի շղթայի հիմնարար մատրիցն է,

$$M = (1-P')^{-1}:$$

Այժմ քննարկենք եկամուտների վերազնահատմամբ Մարկովի շղթաները:

Դիցուք՝ β-ն՝ եկամուտների վերազնահատման գործակիցն է, որտեղ՝ $0<\beta<1$: β-ն ցույց է տալիս, որ Մարկովի շղթայում ստացված եկամտի յուրաքանչյուր միավոր n անցումներից հետո կունենա β^n արժեք: β գործակիցը կարելի է մեկնաբանել մի քանի եղանակով: Օրինակ, β-ն կարելի է դիտարկել որպես մեկ քայլում միավոր եկամուտ բերող կապիտալի մեծություն: Այս դեպքում β-ն կարելի է որոշել $\beta=1/(1+R^*)$ բանաձևով, որտեղ R^*-ը շահութաբերության մեծությունն է: Ոչ զրոյական շահութաբերության դեպքում, երբ $R\neq0$ կստանանք $0<\beta<1$:

Գործույթների հետազոտման շատ խնդիրներում β-ն մեկնաբանվում է նաև որպես եկամուտների կուտակման գործընթացի շարունակման հավանականություն: Այս դեպքում $(1-\beta)$-ն հավասար է մեկ քայլում գործընթացի դադարեցման (խզման) հավանականությանը: Նշված մեկնաբանությունները բացահայտում են վերազնահատված եկամուտներով և կլանման վիճակով գործընթացների ընդհանրությունը: Երկու խնդիրներին էլ յուրահատուկ են հետևյալ առանձնահատկությունները.

- Որպես նպատակային ֆունկցիա օգտագործվում է գումարային միջին եկամուտների վեկտորը:
- Գումարային միջին եկամուտները սահմանափակ են:

Եթե $v_i(n,\beta)$-ով նշանակենք i սկզբնական վիճակից շղթայի n անցումներից հետո սպասվող գումարային միջին վերազնահատված եկամուտը, ապա, (1.1)-ի նմանությամբ, $v_i(n,\beta)$-ի համար կարելի է գրել եկամուտների հաշվեկշռի անդրադարձ հավասարումը՝

$$v_i(n,\beta) = r_i + \beta\sum_{j\in E} p_{ij}v_j(n-1,\beta),\quad i\in E,\quad n=1,2,3,\ldots: \qquad (1.10)$$

Հայտնի է, որ n-ի մեծ արժեքների դեպքում գումարային միջին վերազնահատված եկամուտները սահմանափակ են: Հետևաբար, $v_i(n,\beta)$-ի համար (1.10)-ից, երբ $n\to\infty$, կստանանք՝

$$v_i(\beta) = \lim_{n\to\infty} v_i(n,\beta),\quad i\in E,$$

$$v_i(\beta) = r_i + \beta\sum_{j=1}^{N} p_{ij}v_j(\beta),\quad i\in E: \qquad (1.11)$$

Այստեղ $v_i(\beta)$-ով նշանակված է i սկզբնական վիճակի դեպքում սպասվող գումարային միջին վերագնահատված եկամուտը:

Նշանակենք $v(\beta) = (v_1(\beta), v_2(\beta), \ldots, v_N(\beta))$-ով գումարային միջին վերագնահատված եկամուտների վեկտորը: Հետևաբար, (1.11) համակարգը վեկտորական տեսքով կգրվի՝

$$v(\beta) = r + \beta P v(\beta),$$

որտեղից հետևում է՝

$$v(\beta) = (I - \beta P)^{-1} r :$$

Այստեղ βP-ն՝ մի մատրից է, որն ստացվում է P-ից նրա բոլոր տարրերը β գործակցով բազմապատկելով:

Հեշտ է նկատել, βP անցումային մատրիցի և կլանմամբ Մարկովի շղթայի P′ անցումային մատրիցի ընդհանրությունը: Իսկապես, քանի որ $0 < \beta < 1$, ապա վերագնահատմամբ Մարկովի շղթայի անցումային մատրիցի ցանկացած տողի համար ճշմարիտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sum_{j \in E} p_{ij} \beta < 1, \ i \in E:$$

Հետևաբար կարելի է ասել, որ β եկամուտների վերագնահատման գործակցով և P մեկ քայլում անցումների մատրիցով վերագնահատմամբ Մարկովի շղթային համապատասխանում է βP անցումային մատրիցով կլանմամբ Մարկովի շղթա: Այս դեպքում Մարկովի շղթայի յուրաքանչյուր i վիճակում կլանման հավանականությունը հավասար է $(1-\beta)$-ի:

1.2 Եկամուտներով կիսամարկովյան գործընթացներ

Դիցուք՝ տրված են $\zeta(t)$ կիսամարկովյան գործընթացի (ԿՄԳ-ի) բոլոր տարրերը՝ վիճակների $E=\{1,2,\ldots,N\}$ բազմությունը, կիսամարկովյան $Q(t) = \|Q_{ij}(t)\|$ մատրիցը և սկզբնական բաշխման $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_N^0)$ վեկտորը:

Ինչպես հայտնի է, Q(t) մատրիցի տարրերը բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$Q_{ij}(0) = 0, \quad i,j \in E, \quad \sum_{j \in E} Q_{ij}(\infty) = \sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \qquad i \in E,$$

որտեղ $p_{ij} = Q_{ij}(\infty)$-ին՝ ԿԳՄ ներմուծված Մարկովի շղթայի մեկ քայլում i վիճակից j վիճակ անցման հավանականությունն է: Նշանակենք՝

$$H_i(t) = \sum_j Q_{ij}(t) \text{ -ով}, \ i \in E$$

ԿԳՄ-ի i վիճակում մնալու ժամանակի բաշխման ֆունկցիան, իսկ նրա միջին արժեքը՝

$$\eta_i = \int_0^\infty (1 - H_i(t)) dt \text{ -ով}, \ i \in E:$$

Դիտարկենք ԿՄԳ-ներում եկամուտների կուտակման հետևյալ կառուցվածքը: Դիցուք՝ ԿՄԳ-ն գտնվում է i վիճակում: Այդ վիճակում մնալու ժամանակի մեկ միավորի համար ստացվում է r_i եկամուտ: t ժամանակի ընթացքում ստացված եկամուտները կարելի է նկարագրել $\alpha(t)$ կուտակման գործընթացի օգնությամբ՝

$$\alpha(t) = \int_0^t r(\zeta(u))du,$$

որտեղ՝ $r(\zeta(u))=r_i$, եթե ժամանակի u պահին ԿՄԳ-ն գտնվում է i վիճակում: Նշենք, որ $\alpha(t)$-ն ամեն մի t-ի համար պատահական մեծություն է:

Մենք կհետազոտենք $\alpha(t)$-ի միջին արժեքը, այսինքն՝ t ժամանակի ընթացքում կուտակված գումարային միջին եկամուտը:

$v_i(t)$-ով նշանակենք $\alpha(t)$-ի միջին արժեքը, այսինքն՝ t ժամանակի ընթացքում կուտակված գումարային միջին եկամուտը, պայմանով, որ t = 0 սկզբնական պահին ԿՄԳ-ն գտնվել է i, $i\in E$ վիճակում: $v_i(t)$-ի համար կարելի է գրել հետևյալ վերականգնման հավասարումները.

$$v_i(t) = (1-H_i(t))t\cdot r_i + \sum_{j\in E}\int_0^t (r_i x + v_j(t-x))dQ_{ij}(x),\ i\in E: \qquad (1.12)$$

Հավասարումները ստացվում են ԿՄԳ-ի առաջին թռիչքի պահի հետազոտմամբ և հետևյալ դատողությունների միջոցով:

Առաջին գումարելին ստացվում է, եթե գործընթացի առաջին թռիչքը տեղի ունենա ժամանակի t պահից հետո, այսինքն՝ գործընթացը մինչև ժամանակի t պահը սկզբնական i վիճակում մնա $1-H_i(t)$ հավանականությամբ: Այդ ժամանակահատվածում ստացված միջին եկամուտը հավասար է $t\cdot r_i$-ի: Երկրորդ գումարելին ստացվում է ԿՄԳ-ի համասեռության և մարկովյան հատկությունների ու լրիվ հավանականությունների բանաձևի օգնությամբ:

Դիցուք՝ ԿՄԳ-ի առաջին թռիչքը տեղի է ունեցել x (x<t) պահին, և գործընթացը i վիճակից $dQ_{ij}(x)$ հավանականությամբ անցել է j վիճակ: Գումարային միջին եկամուտը այս դեպքում հավասար է $r_i x$-ի և j սկզբնական վիճակից t–x ժամանակահատվածում կուտակված գումարային $v_j(t-x)$ միջին եկամուտների գումարին: Պարզ ձևափոխություններից հետո (1.12) հավասարումը կարելի է բերել հետևյալ տեսքի.

$$v_i(t) = \sum_{j\in E}\int_0^t v_j(t-x)dQ_{ij}(x) + r_i\cdot\int_0^t (1-H_i(x))dx,\ i\in E: \qquad (1.13)$$

Վերականգնման հավասարումների լուծումների ստացման համար օգտագործվում է Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությունը:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\tilde{v}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st}dv_i(t),\quad g_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dQ_{ij}(t),\quad \tilde{h}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st}dH_i(t),$$

$$\tilde{\rho}_i(s) = \frac{r_i}{s}(1-\tilde{h}_i(s)),\quad \tilde{g}(s) = \left\|\tilde{g}_{ij}(s)\right\|,\ i,j\in E$$

$$\tilde{v}(s)=\begin{pmatrix}\tilde{v}_1(s)\\ \vdots\\ \tilde{v}_N(s)\end{pmatrix},\quad \tilde{\rho}(s)=\begin{pmatrix}\tilde{\rho}_1(s)\\ \vdots\\ \tilde{\rho}_N(s)\end{pmatrix}:$$

Անցնելով (1.13) հավասարումներում ըստ t փոփոխականի Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությանը կստանանք հետևյալ հավասարումները.

$$\tilde{v}_i(s)=\tilde{\rho}_i(s)+\sum_{j\in E}\tilde{v}_j(s)\tilde{g}_{ij}(s),\quad i\in E, \tag{1.14}$$

որը վեկտորական տեսքով կգրվի՝

$$\tilde{v}(s)=\tilde{\rho}(s)+\tilde{v}(s)\tilde{g}(s):$$

Այստեղից որոշում ենք հավասարումների համակարգի լուծումները՝

$$\tilde{v}(s)=(1-\tilde{g}(s))^{-1}\tilde{\rho}(s)=(I+\tilde{M}(s)\tilde{\rho}(s)),$$

որտեղ $\tilde{M}(s)$ -ը՝ վերականգնման մատրիցն է՝

$$\tilde{M}(s)=(I-\tilde{g}(s))^{-1}-I:$$

Հայտնի է, որ վիճակների վերջավոր բազմությունով էրգոդիկ ԿՄԳ-ների համար, $s\to 0$-ի դեպքում $\tilde{v}_i(s)$ -երը թույլ են տալիս հետևյալ վերլուծությունը.

$$\tilde{v}_i(s)=\frac{g}{s}+v_i+0(1),\quad i\in E:$$

Հայտնի է, որ այս հավասարումից, երբ $t\to\infty$ $v_i(t)$-ի համար կարելի է ստանալ հետևյալ վերլուծությունը.

$$v_i(t)=tg+v_i+0(1),\ i\in E: \tag{1.15}$$

Այստեղ v_i -երը՝ կշռային գործակիցներ են, g-ն՝ միավոր ժամանակում սպասվող ստացիոնար միջին եկամուտն է՝

$$g=\sum_{i\in E}\rho_i\eta_i r_i\Big/\sum_{j\in E}\rho_j\eta_j, \tag{1.16}$$

որտեղ $\{\rho_i, i\in E\}$-ն ներմուծված Մարկովի շղթայի ստացիոնար բաշխումն է՝

$$\rho_i=\sum_{j\in E}\rho_j p_{ij},\ i\in E,\ \sum_{i\in E}\rho_i=1:$$

Դիցուք՝ π_i-ն ԿԳՄ-ի i վիճակում գտնվելու ստացիոնար հավանականությունն է: g գործակցի համար (1.15) բանաձևից կստանանք՝

$$g=\sum_{i\in E}r_i\pi_i,\ \pi_i=\frac{\rho_i\eta_i}{\sum_{j\in E}\rho_j\eta_j},\quad i\in E:$$

Օպտիմացման խնդիրներում g գործակցի որոշման համար օգտագործվում է նաև հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\eta_i g+v_i=r_i\eta_i+\sum_{j\in E}p_{ij}v_j,\quad i\in E: \tag{1.17}$$

Քանի որ, (1.17) N հավասարումների համակարգը պարունակում է N+1 անհայտներ՝ $g, v_1, v_2,\dots,v_N$, ապա g-ի որոշման համար ընդունվում է, որ կշռային գործակիցներից մեկը, օրինակ v_N-ը, հավասար է զրոյի:

Դիտարկենք կլանման վիճակներով եկամուտներով ԿՄԳ-ները: Այս գործընթացներում հետազոտվում են մինչև կլանման պահը կուտակված գումարային միջին եկամուտները:

Դիցուք՝ E={1,2,...,N} վիճակների բազմությունով ԿՄԳ-ում 1 վիճակը միակ կլանման վիճակն է: $v_i(t)$-ով նշանակենք մինչև կլանման վիճակ անցնելը t ժամանակում կուտակված գումարային միջին եկամուտը, պայմանով, որ t=0 սկզբնական պահին ԿՄԳ-ն գտնվել է i, i∈{2,3,...,N} վիճակում: $v_i(t)$-ի համար (1.12) հավասարումների նմանությամբ կստանանք՝

$$v_i(t)=\sum_{j=2}^{N}\int_0^t v_j(t-x)dQ_{ij}(x)+r_i\int_0^t(1-H_i(x))dx\,,\quad i=2,3,\ldots N: \qquad (1.18)$$

Քանի որ, դիտարկվող ԿՄԳ-ներում վերջավոր ժամանակում մեկ հավանականությամբ կլանման 1 վիճակը հասանելի է ցանկացած i վիճակից i∈{2,3,...,N},ապա t→∞ դեպքում $v_i(t)$-երի համար գոյություն ունեն՝

$$v_i=\lim_{t\to\infty}v_i(t),\quad i=2,3,\ldots,N$$

սահմանները: Հետևաբար, (1.18)-ում անցնելով սահմանի, երբ t→∞, կստանանք՝

$$v_i=r_i\eta_i+\sum_{j=2}^{N}v_jp_{ij},\quad i=2,3,\ldots,N: \qquad (1.19)$$

Կատարելով հետևյալ նշանակումները՝

$$v'=\begin{pmatrix}v_2\\v_3\\\vdots\\v_N\end{pmatrix},\ r'=\begin{pmatrix}r_2\eta_2\\r_3\eta_3\\\vdots\\r_N\eta_N\end{pmatrix},$$

(1.19) հավասարումների համակարգը կարելի է գրել վեկտորական տեսքով՝

$$v'=r'+P'v', \qquad (1.20)$$

որտեղ P'-ն՝ կլանմամբ ԿՄԳ-ի ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումային մատրիցն է, իսկ r_i'-ը i վիճակում ստացվող միջին եկամուտն է: Համեմատելով (1.9)-ը և (1.20)-ը, դժվար չէ համոզվել, որ կլանման վիճակներով Մարկովի շղթաները և ԿՄԳ-ները նկարագրվում են նույն հիմնարար հավասարումներով:

1.3 Եկամուտների վերագնահատմամբ ԿՄԳ-ներ

Այսպիսի ԿՄԳ-ներում ընդունվում է, որ եկամուտների վերագնահատումը իրականացվում է ցուցչային օրենքով, որի պարամետրը հավասար է α-ի: Դա նշանակում է, որ եթե ժամանակի որևէ պահին ստացվում է միավոր եկամուտ, ապա t ժամանակից հետո այդ եկամուտը կարժենա $e^{-\alpha t}$ միավոր: β գործակցի նմանությամբ α մեծությունը կարելի է մեկնաբանել նաև որպես գործընթացի խզման (կլանման) հաճախություն, այսինքն՝ dt տևողությամբ փոքր ժամանակահատվածում գործընթացի խզման (դադարեցման) հավանականությունը հավասար կլինի αdt-ի:

Եկամուտների վերագնահատմամբ ԿՄԳ-ներում սովորաբար հետազոտվում է վերագնահատված գումարային միջին եկամուտը:

Դիցուք՝ $v_i(t)$-ն՝ t ժամանակի ընթացքում ստացված գումարային միջին եկամուտն է, պայ-մանով, որ սկզբնական t=0 պահին գործընթացը գտնվել է i վիճակում, իսկ $\tilde{v}_i(\alpha)$-ն α դրույքով վերագնահատված գումարային միջին եկամուտն է, պայմանով, որ սկզբնական t=0 պահին գործընթացը գտնվել է i վիճակում:

Ինչպես արդեն նշվել է, վերագնահատման α դրույքը կարելի է դիտել որպես եկամուտների կուտակման գործընթացի խզման հաճախություն:

Նշանակենք՝

$$\tilde{v}_i(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dv_i(t),\ i \in E:$$

Այստեղ $\tilde{v}_i(\alpha)$-ն կարելի է մեկնաբանել որպես i սկզբնական վիճակից մինչև գործընթացի խզման պահը կուտակված գումարային միջին եկամուտ:

Տեղադրելով (1.15) հավասարումներում s=α-ի, կստանանք՝

$$\tilde{v}_i(\alpha) = \frac{r_i}{\alpha}(1 - \tilde{h}_i(\alpha)) + \sum_{j\in E} \tilde{g}_{ij}(\alpha)\tilde{v}_j(\alpha), \quad i \in E: \qquad (1.22)$$

Այստեղ $\tilde{g}_{ij}(\alpha)$-ն և $\tilde{h}_i(\alpha)$-ն համապատասխանորեն $Q_{ij}(t)$ և $H_i(t)$ ֆունկցիաների Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխություններն են s=α կետում: Ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

$$\tilde{h}_i(\alpha) = \sum_{j\in E} \tilde{g}_{ij}(\alpha) = \sum_{j\in E} \int_0^\infty e^{-\alpha x} dQ_{ij}(x), \quad i \in E:$$

Վեկտորական տեսքով (1.22) հավասարումը կգրվի՝

$$\tilde{v}(\alpha) = \tilde{\rho}(\alpha) + \tilde{g}(\alpha)\tilde{v}(\alpha), \qquad (1.23)$$

որտեղից՝

$$\tilde{v}(\alpha) = (I - \tilde{g}(\alpha))^{-1}\tilde{\rho}(\alpha) = (I + \tilde{M}(\alpha))^{-1}\tilde{\rho}(\alpha): \qquad (1.24)$$

Սա եկամուտների վերագնահատումով ԿՄԳ-ների հիմնարար հավասարումն է գրված Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխության տեսքով:

Այսպիսով, ինչպես կլանմամբ ԿՄԳ-ներում, եկամուտների վերագնահատմամբ գործընթացներում ևս կուտակված գումարային միջին եկամուտները վերջավոր են և որոշվում են գծային հավասարումների համակարգից:

Նշենք, որ (1.22) հավասարումներում անցնելով սահմանի, երբ $\alpha \to 0$, էրգոդիկ ԿՄԳ-ներից կարելի է ստանալ մեզ արդեն հայտնի $\tilde{v}_i(\alpha)$-ի ասիմպտոտական վերլուծության բանաձևը՝

$$\tilde{v}_i(\alpha) = \frac{g}{\alpha} + v_i + 0(1), \quad i \in E: \qquad (1.25)$$

Այստեղ g-ն միավոր ժամանակում ստացվող ստացիոնար միջին եկամուտն է:

Եկամուտներով գործընթացներում դիտարկվում են եկամուտների ձևավորման տարբեր կառուցվածքներ: Օրինակ՝ Մարկովի շղթաներում եկամուտները կարող են ստացվել ինչպես որևէ վիճակում գտնվելու համար, այնպես էլ այդ վիճակից որևէ այլ վիճակ անցնելու համար: Այս դեպքում ցանկացած i վիճակի հետ կապված լրիվ գումարային եկամուտը հավասար է՝

$$r_i^* = r_i + \sum_{j\in E} p_{ij} r_{ij}\ ,\quad i\in E:$$

ԿՄԳ-ներում դիտարկվում է նաև եկամուտների մեկ ուրիշ, ավելի ընդհանուր կառուցվածք: Եթե գործընթացը գտնվում է i վիճակում, և նրա հաջորդ վիճակը j-ն է, ապա ստացվում է մի եկամուտ, որի մեծությունը որոշվում է տրված $R_{ij}(t|\tau)$ ֆունկցիայով: Այստեղ τ-ն i վիճակում մնալու պատահական ժամանակն է, իսկ t-ն i վիճակ ընկնելու պահից անցած ժամանակն է, որտեղ $0 \le t \le \tau$:

Եթե $R_{ij}(t|\tau)$ ֆունկցիան բավարարում է $R_{ij}(0|\tau)=0$, $R_{ij}(\tau|\tau)=R_{ij}(\tau)$ պայմաններին, ապա i վիճակում ստացված վերագնահատված միջին եկամուտը կլինի՝

$$\tilde{\rho}_i(\alpha) = \sum_{j\in E} \int_0^\infty \int_0^\tau e^{-\alpha x} dR_{ij}(x\,|\,\tau) dQ_{ij}(\tau)\ ,\qquad i\in E:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $R_{ij}(x|\tau) = xr_i$, կստանանք եկամուտների մինչ այդ դիտարկված կառուցվածքը:

2. Կառավարվող Մարկովի շղթաներ

2.1 Դիտարկենք վերջավոր քանակով վիճակների $E=\{1,2,\dots,N\}$ բազմությունով $\xi(0),\xi(1),\dots,\xi(n),\dots$, կառավարվող Մարկովի շղթան (ԿՄՇ), որտեղ $\xi(n)$-ը շղթայի վիճակն է ժամանակի n պահին: Շղթայի յուրաքանչյուր i վիճակում թույլատրելի որոշումների (այլընտրանքների) քանակը վերջավոր է և տրվում է $K_i=\{1,2,\dots,k_i\}$, $i\in E$ բազմությունով:

Քննարկենք ԿՄՇ-ի վարքը: Դիցուք՝ ԿՄՇ-ն ժամանակի n պահին գտնվում է i վիճակում և ընդունվել է R որոշումը, ապա անկախ $\xi(0),\xi(1),\dots,\xi(n-1)$-ից և մինչև n պահը ընդունված որոշումներից՝

1. ստացվում է r_i^R եկամուտ,

2. շղթան i վիճակից p_{ij}^R, $i,j\in E$ հավանականությամբ անցնում է j վիճակ՝

$$\sum_{j\in E} p_{ij}^R = 1,\ \ 0 \le p_{ij}^R\ ,\quad i,j\in E,\ \ R\in K_i,\ \ i\in E:$$

Ենթադրվում է, որ r_i^R եկամուտները բոլոր $i\in E$ և $R\in K_i$-երի համար սահմանափակ են: Այսպիսով, Մարկովի շղթաների կառավարման խնդիրը նրա անցումների պահերին բոլոր վիճակներում որոշումների ընդունման խնդիր է:

Կառուցենք K_i, $i=\overline{1,N}$ բազմությունների ուղիղ (դեկարտյան) արտադրյալը՝ $F=K_1\times K_2\times\ldots\times K_N$: F-ը կոչվում է վարվելակերպերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը՝ վարվելակերպեր:

Դիցուք՝ f_n-ը ժամանակի n պահին ընդունված վարվելակերպն է՝ $f_n=(f_n(1),f_n(2),\ldots,f_n(N))$, $f_n\in F$, որի $f_n(i)$ տարրը ցույց է տալիս n պահին i վիճակում ընդունված որոշումը:

Սահմանում 1: Վարվելակերպը կոչվում է ստացիոնար, եթե նրա տարրերը կախված չեն շղթայի անցումների թվից:

Հետագայում ստացիոնար վարվելակերպը կնշանակենք $f=(f(1), f(2), \ldots,f(N))$ վեկտորով, որի $f(i)$ տարրը անկախ է անցումների n թվից և ցույց է տալիս շղթայի i վիճակում ընդունված $f(i)\in K_i$ որոշումը, $f\in F$:

Այսպիսով ստացիոնար վարվելակերպ ունեցող ԿՄՇ-ները որոշվում են. վիճակների E բազմությունով, թույլատրելի վարվելակերպերի F բազմությունով, $p^0=(p_1^0,p_2^0,\ldots,p_N^0)$՝ սկզբնական բաշխման վեկտորով, $r^f=(r_1^f,r_2^f,\ldots,r_N^f)$՝ f վարվելակերպի դեպքում, եկամուտների վեկտորով և P^f՝ f վարվելակերպի դեպքում մեկ քայլում անցումների հավանականությունների մատրիցով:

Հետագայում կդիտարկենք ստացիոնար վարվելակերպ ունեցող կառավարվող Մարկովի շղթաների վարքը:

Քննարկենք եկամուտների վերագնահատմամբ ԿՄՇ-ներ: Դիցուք՝ $V_\beta(f)$-ը f վարվելակերպի դեպքում վերագնահատված գումարային միջին եկամուտների վեկտորն է:

Սահմանում 2: f^* վարվելակերպը կոչվում է β լավագույն, եթե β-ի սևեռյալ արժեքի դեպքում բոլոր $f\in F$ վարվելակերպերի համար ճշմարիտ է

$$V_\beta(f^*)\geq V_\beta(f)$$

պայմանը:

Թեորեմ 1: Եկամուտների վերագնահատմամբ ԿՄՇ-ների համար գոյություն ունի β լավագույն ստացիոնար վարվելակերպ:

Լավագույն ստացիոնար վարվելակերպերի որոշման համար կարելի է օգտագործել գծային և դինամիկ ծրագրման եղանակները, Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը: Դինամիկ ծրագրման օգնությամբ խնդրի լուծումը բերված է առաջին հատորում: Այդ պատճառով այստեղ կքննարկենք Հովարդի ալգորիթմը և գծային ծրագրման խնդիրը:

Հովարդի ալգորիթմը բաղկացած է երկու ընթացակարգից:

1. Կշիռների որոշման ընթացակարգ

Կամայական թույլատրելի $f\in F$ վարվելակերպի համար $v_1,v_2,\ldots,v_N$ անհայտների նկատմամբ, լուծվում է

$$v_i=r_i^k+\beta\sum_{j\in E}p_{ij}^k v_j,\quad i\in E$$

հավասարումների համակարգը, որտեղ $k=f(i)$:

2. Որոշումների լավացման ընթացակարգ

Յուրաքանչյուր $i\in E$ վիճակի համար $G(i,f)$-ով նշանակենք այն R-երի, $R\in K_i$ բազմությունը, որոնց համար $v_1,v_2,\ldots,v_N$-ի առաջին ընթացակարգում որոշված արժեքների դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ պայմանը.

$$r_i^R+\beta\sum_{j\in E}p_{ij}^R v_j>v_i,\ i\in E:$$

Եթե բոլոր i, $i\in E$ վիճակների համար $G(i,f)$ բազմությունները դատարկ են, ապա f-ը՝ β լավագույն վարվելակերպ է:

Դիցուք՝ գոյություն ունի գոնե մեկ $i\in E$ վիճակ, որի համար $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ չէ: Նման վիճակների բազմությունը նշանակենք E_+-ով: Լավացված՝ α վարվելակերպը կառուցվում է հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր $i\in E_+$ վիճակի համար $\alpha(i)$-ն՝ $G(i,f)$ բազմության կամայական տարրն է, իսկ $i\notin E_+$-ի դեպքում ընդունում ենք $\alpha(i)=f(i)$: α վարվելակերպի ձևավորումից հետո կատարվում է անցում մեկ ընթացակարգին:

Քննարկվող խնդրում β գործակցի միջոցով ապահովվում է գումարային միջին եկամուտների սահմանափակ լինելը: β-ի արժեքի փոփոխությունը հանգեցնում է խնդրի լավագույն լուծումների փոփոխության: Սահմանային դեպքում, երբ $\beta\to1$, $V_\beta(n)$-ից ստանում ենք առանց վերագնահատման գումարային միջին $V(n)$ եկամուտների վեկտորը՝

$$V(n)=\lim_{\beta\to1}V_\beta(n):$$

Ինչպես հետևում է (1.3)-ից էրգոդիկ Մարկովի շղթաներում $V(n)$-ը՝ գումարային միջին եկամուտների վեկտորը, $n\to\infty$ դեպքում անսահմանափակ աճում է: Այդ պատճառով առանց եկամուտների վերագնահատման ԿՄԾ-ներում որպես օպտիմացման չափանիշ (նպատակային ֆունկցիա) օգտագործվում է միավոր ժամանակում ստացված միջին եկամուտը՝ g^f-ը:

Սահմանում 3: f^* վարվելակերպը կոչվում է լավագույն, եթե F բազմության ցանկացած f տարրի համար ճշմարիտ է

$$V^{f^*}(n)\geq V^f(n)$$

պայմանը:

Թեորեմ 2: Առանց եկամուտների վերագնահատման ԿՄԾ-ների համար գոյություն ունի լավագույն f^* ստացիոնար վարվելակերպ:

Լավագույն ստացիոնար վարվելակերպի որոշման համար գծային ծրագրման խնդիրն ունի հետևյալ տեսքը

$$\left(g^f=\sum_{i\in E}x_i^f r_i^f\right)\to\max$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում.

$$x_i^f=\sum_{j\in E}x_j^f p_{ji}^f,\quad i\in E,$$

$$\sum_{i\in E}x_i^f=1,\ x_i^f\geq0,\ i\in E:$$

Այստեղ $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1$-ը Մարկովի շղթայի f վարվելակերպի դեպքում i վիճակում գտնվելու հավանականությունն է:

Այս խնդրի լուծման Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը հետևյալն է:

1. Կշիռների որոշման ընթացակարգ

Որևէ սկզբնական $f \in F$ վարվելակերպի համար $g, v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$ անհայտների նկատմամբ ընդունելով, որ $v_N=0$, լուծվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$g + v_i = r_i^R + \sum_{j=1}^{N-1} v_i p_{ij}^R, \ i=1,2,\ldots,N:$$

2. Որոշումների լավացման ընթացակարգ

Օգտագործելով g-ի և v_i-երի $i=1,2,\ldots,N$ որոշված արժեքները, յուրաքանչյուր $i \in E$ վիճակի համար ընտրվում է $G(i,f)$ բազմության այնպիսի R տարր, $R \in K_i$, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$g + v_i < r_i^R + \sum_{j=1}^{N-1} v_i p_{ij}^R, \ \ i=1,2,\ldots,N:$$

Եթե $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ է բոլոր վիճակների համար, ապա f-ը լավագույն վարվելակերպն է: Եթե գոնե մեկ վիճակի համար $G(i,f)$-ը դատարկ չէ, ապա լավացված α վարվելակերպը որոշվում է հետևյալ կերպ. $\alpha(i) \in G(i,f)$, եթե $G(i,f)$-ը դատարկ չէ, և $\alpha(i)=f(i)$, եթե $G(i,f)$-ը դատարկ է: Դրանից հետո անցում է կատարվում 1 ընթացակարգին α սկզբնական վարվելակերպով:

Քանի որ դիտարկվող օպտիմացման խնդրում վարվելակերպերի F բազմությունը վերջավոր է, ապա Հովարդի ալգորիթմով վերջավոր թվով իտերացիաների ընթացքում որոշվում է f^* լավագույն ստացիոնար վարվելակերպը:

Թեորեմ 3: Եթե որևէ $f' \in F$ վարվելակերպի համար ճշմարիտ է

$$r^{f'} + P^{f'}V(f) > r^f + P^f V(f)$$

անհավասարությունը, որտեղ $g(f)$-ը f ստացիոնար վարվելակերպի դեպքում մեկ անցման ժամանակ ստացվող միջին եկամուտն է, ապա $g(f') > g(f)$:

Իսկապես, դիցուք՝ γ-ն $\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(N)$ տարրերով վեկտոր է, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությունից.

$$\gamma = r^{f'} + P^{f'}V(f) - r^f - P^f V(f):$$

3-րդ թեորեմից հետևում է, որ γ վեկտորը բավարարում է $\gamma>0$ պայմանին: $\gamma>0$ անհավասարությունը նշանակում է, որ γ վեկտորի բոլոր բաղադրիչները մեծ են 0-ից: Երկու՝ f և f′ վարվելակերպերի համար ճիշտ են հետևյալ հավասարումները.

$$g(f')I + V(f') = r^{f'} + P^{f'}V(f'), \qquad (2.2)$$

$$g(f)I + V(f) = r^f + P^f V(f): \qquad (2.3)$$

(Տե՛ս. Հովարդի ալգորիթմի 1 ընթացակարգում), որտեղ I-ն՝ մեկերից բաղկացած վեկտոր սյունակ է:

Առաջին՝ (2.2) հավասարումից հանելով երկրորդը՝ (2.3)-ը, և կատարելով հետևյալ նշանակումները.

$$\Delta g = g(f')- g(f),$$
$$\Delta V = V(f')-V(f),$$

կստանանք՝

$$(\Delta g)\, I+\Delta V = \gamma+P^{f}\Delta V: \qquad (2.4)$$

Հավասարման երկու կողմերը ձախ կողմից բազմապատկելով ԿՄՇ-ի ստացիոնար բաշխման $\rho(f)$ վեկտորով կստանանք՝

$$\Delta g = \rho(f)(\Delta g)I = \rho(f)\gamma, \qquad (2.5)$$

քանի որ ըստ $\rho(f)$ վեկտորի սահմանման՝

$$\rho(f) = \rho(f)P^{f}, \quad \sum_{i\in E}\rho_i(f) = 1:$$

Եթե երկու ընթացակարգում որևէ i վիճակի համար G(i,f) բազմությունից ի հայտ են գալիս մեկից ավելի թույլատրելի որոշումներ, ապա լավացնող վարվելակերպն ընտրվում է հետևյալ պայմանից.

$$[r_i^R + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^R v_j] \to \max:$$

Սկզբնական f վարվելակերպն ընտրվում է $r_i^R \to \max$ պայմանից:

2.2 Կլանման վիճակներով ԿՄՇ-ների օպտիմացման խնդիր

Պարզության համար ընդունենք, որ 1 վիճակը շղթայի միակ կլանման վիճակն է: Այս դեպքում բոլոր $f\in F$ վարվելակերպերի և որևէ i վիճակի համար ճշմարիտ է հետևյալ պայմանը.

$$\sum_{j=2}^{N} p_{ij}^R < 1, \quad i = \overline{2,N}:$$

Հետևաբար, դիտարկվող ԿՄՇ-ն որևէ i վիճակից $p_{i1}^R > 0$ հավանականությամբ բոլոր վարվելակերպերի դեպքում կարող է ընկնել կլանման 1 վիճակ: Ինչպես եկամուտների վերագնահատմամբ խնդրում, այս դեպքում ևս գումարային միջին եկամուտները սահմանափակ են, և որպես նպատակային ֆունկցիա օգտագործվում է շղթայի մինչև կլանման վիճակ անցնելը գումարային միջին եկամուտների $v'=(v_2,\ldots,v_N)$ վեկտորը:

Թեորեմ 4: Կլանման վիճակներով ԿՄՇ-ների համար գոյություն ունի f^* լավագույն ստացիոնար վարվելակերպ:

Լավագույն f^* վարվելակերպի որոշման համար գծային ծրագրման խնդրի նպատակային ֆունկցիան է՝

$$\sum_{f(i)\in K_i} \sum_{i=2}^{N} r_i^f x_i^f \to \max$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում.

$$\sum_{f(j)\in K_j} x_j^f - \sum_{i=2}^{N} \sum_{f(i)\in K_i} p_{ij}^f x_i^f = p_j^0, \quad j=2,3,\ldots,N,$$

$$x_i^f \geq 0 \quad i=2,3,\ldots,N,\ f(i)\in K_i, \qquad (2.6)$$

որտեղ $p^0 = (p_1^0,\ldots,p_N^0)$ -ն շղթայի սկզբնական բաշխումն է:

Լավագույն f^* վարվելակերպի որոշման Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը ունի հետևյալ տեսքը:

1. Կշիռների որոշման ընթացակարգ

Կամայական $f\in F$ վարվելակերպի համար $v_2,v_3,\ldots,v_N$ անհայտների նկատմամբ, վերցնելով $R=f(i)$, լուծվում է հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$v_i = r_i^R + \sum_{j=2}^{N} p_{ij}^R v_j, \quad i=2,3,\ldots,N:$$

2. Որոշումների լավացման ընթացակարգ

Օգտագործելով մեկ ընթացակարգում v_i-երի որոշված արժեքները, յուրաքանչյուր $i=2,3,\ldots,N$ վիճակի համար բոլոր $R\in K_i$ դեպքում գտնվում է $G(i,f)$ բազմության այնպիսի տարր, որի համար ճշմարիտ է հետևյալ պայմանը.

$$v_i < r_i^R + \sum_{j=2}^{N} P_{ij}^R v_j, \quad i=2,3,\ldots,N:$$

Եթե $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ է, ապա f վարվելակերպը լավագույնն է: Եթե որևէ i վիճակի համար $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ չէ, ապա լավացված α վարվելակերպը կառուցվում է հետևյալ կերպ. $\alpha(i)\in G(i,f)$՝ եթե $G(i,f)$-ը դատարկ չէ, և $\alpha(i)=f(i)$՝ եթե $G(i,f)$-ը դատարկ է: Այնուհետև կատարվում է անցում առաջին ընթացակարգին α սկզբնական վարվելակերպով:

Օրինակ 1: Դիցուք՝ կենտրոնական բանկը արտարժույթի ներարկումների օգնությամբ աշխատում է պահպանել դրամի փոխարժեքը նախօրոք որոշված տիրույթում:

Դրա համար փոխարժեքի փոփոխման ամբողջ տիրույթը բաժանվում է $K+1$ չհատվող վերջավոր թվով մասերի (վիճակների)՝ $E=\{0,1,\ldots,K\}$, որտեղ 0 վիճակին համապատասխանում է դրամի փոխարժեքի նվազագույն արժեքը, իսկ K-ին՝ սահմանային (առավելագույն) արժեքը: Դրամի փոխարժեքի չափումները կատարվում են ժամանակի հավասար հատվածներից հետո $t=0,1,2,\ldots$ պահերին՝ օրինակ՝ օրը մեկ անգամ: Չափումների արդյունքում որոշվում է փոխարժեքի վիճակը՝ ξ_t-ն: Ժամանակի ընթացքում փոխարժեքների ξ_t, $t=0,1,2,\ldots$ հաջորդականությունը նկարագրվում է $P\{\xi_{t+1}=j|\xi_t=i\}=p_{ij}$, $i,j\in E$ ստացիոնար անցումների հավանականություններով Մարկովի շղթայով.

$$\sum_{j\in E} p_{ij} = 1, \quad p_{ij}\geq 0, \quad i,j\in E:$$

Ժամանակի յուրաքանչյուր $t=0,1,2,\ldots$ պահի չափումների արդյունքով կենտրոնական բանկը դրամի փոխարժեքի կայունացման համար ընդունում է ներարկումներ կատարելու որոշում: D_{is}-ով նշանակենք դրամի փոխարժեքի i

վիճակից s վիճակ բերելու որոշման հավանականությունը, պայմանով, որ չափման պահին փոխարժեքը գտնվել է i վիճակում: D_{is} որոշումների հավանականությունները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$\sum_{s\in E} D_{is} = 1, \quad D_{is}\geq 0, \quad i,s\in E: \qquad (2.7)$$

Հաշվի առնելով D_{is} հավանականությունները դրամի փոխարժեքի վարքը ժամանակի ընթացքում կնկարագրվի q_{ij} ստացիոնար անցումային հավանականություններով էրգոդիկ կառավարվող Մարկովի շղթայով.

$$q_{ij} = \sum_{s\in E} p_{is} D_{sj}, \quad i,j\in E:$$

Կառավարվող Մարկովի շղթայի ստացիոնար π_i, $i\in E$ հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումների համակարգից.

$$\pi_i = \sum_{j\in E} \pi_j q_{ji}, \quad i\in E, \quad \sum_{i\in E} \pi_i = 1:$$

Շղթայի յուրաքանչյուր վիճակում (դրամի փոխարժեքի համար) Կենտրոնական բանկը կարող է որոշում ընդունել՝

1. դրամի փոխարժեքը թողնել դիտարկված i վիճակում,
2. արտարժույթի ներարկման օգնությամբ դրամի փոխարժեքը i վիճակից բերել s վիճակ:

Երկրորդ որոշման իրականացումը պահանջում է որոշակի r_i^R ծախսեր՝

$$r_i^R = \begin{cases} A_1, i=\overline{0,K-1}, R=\overline{0,K-1}, & \text{եթե ընդունվել է R որոշումը՝ կատարել արտարժույթի կանխարգելիչ ներարկում,} \\ A_2, i=K, R=\overline{0,K-1}, & \text{եթե ընդունվել է R որոշումը՝ կատարել արտարժույթի արտակարգ ներարկում :} \end{cases}$$

Այստեղ A_1-ը արտարժույթի միջին քանակն է, որը ծախսվում է կանխարգելիչ ներարկման համար, իսկ A_2-ը՝ արտարժույթի միջին քանակը, երբ դրամի արժեզրկման մակարդակը բարձր է սահմանային արժեքից:

Կենտրոնական բանկի կողմից ընդունված որոշումները մեկնաբանվում են հետևյալ կերպ. $i=\overline{0,K-1}$ վիճակներում կանխարգելիչ A_1 մեծության ներարկումների շնորհիվ դրամի փոխարժեքը պահվում է թույլատրելի տիրույթում; i=K վիճակում կատարվում է A_2, $A_2>A_1$ մեծության արտար-ժույթի արտակարգ ներարկում՝ դրամի փոխարժեքը սահմանային մեծու-թյունից թույլատրելի տիրույթ բերելու համար:

Դրամի փոխարժեքի կարգավորմանն ուղղված միջին տեսակարար g ծախսերը որոշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$g = A_2 \sum_{R=0}^{K} \pi_K D_{KR} + A_1 \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{R=0}^{K-1} \pi_i D_{iR} :$$

Կառավարման նպատակը կենտրոնական բանկի կողմից այնպիսի D_{iR} որոշումների ընտրությունն է, որոնք ապահովեն g ծախսերի նվազագույն մեծությունը: D_{is} որոշումները պետք է բավարարեն նաև (2.7) պայմաններին:

Կատարելով հետևյալ նշանակումները՝

$$x_{iR}=\pi_i D_{iR},\ \rho=A_1/A_2,$$

համապատասխան գծային ծրագրման խնդիրը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

$$(g/A_1)=\sum_{R=0}^{K}x_{KR}+\rho\sum_{i=0}^{K-1}\sum_{R=0}^{K-1}x_{iR}\to\min,$$

$$\sum_{R=0}^{K}x_{jR}-\sum_{i=0}^{K}\sum_{R=0}^{K}x_{iR}p_{Rj}=0,\qquad j=\overline{0,K},$$

$$\sum_{i=0}^{K}\sum_{R=0}^{K}x_{iR}=1:$$

Գծային ծրագրման խնդրի x_{iR} լուծումներից D_{iR} տարրերը որոշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$D_{iR}=x_{iR}\Big/\sum_{j=0}^{K}x_{jR}=1,\quad R,i=\overline{0,K}:$$

$D=\|D_{iR}\|$ որոշումների մատրիցի տարրերը հավասար են 1-ի կամ 0-ի: Եթե $D_{ii}=1$, ապա i վիճակում կենտրոնական բանկը ոչ մի ներարկում չի կատարում: Եթե $D_{i1}=1$, ապա i վիճակում անհրաժեշտ է արտարժույթի ներարկում կատարել:

$D_{is}=1$, $i\neq s$ տարրերը կազմում են արտարժույթի լավագույն ներարկման տիրույթը, իսկ այդ տիրույթում ամենափոքր համարն ունեցող վիճակին համապատասխանում է լավագույն ներարկման I^* մակարդակը:

Դիցուք՝ փոխարժեքի փոփոխման ամբողջ տիրույթը բաժանված է 7 մասի: Իսկ արտարժույթի փոխանակման դրույքի փոփոխման վիճակագրությունից $P=\|p_{ij}\|$ մատրիցը հավասար է՝

$$\|p_{ij}\|=\begin{pmatrix}0,3&0,2&0,2&0,12&0,1&0,05&0,03\\0,1&0,3&0,2&0,13&0,12&0,08&0,07\\0,08&0,1&0,3&0,2&0,12&0,1&0,1\\0,05&0,1&0,1&0,3&0,2&0,15&0,1\\0,05&0,1&0,1&0,15&0,3&0,2&0,1\\0,02&0,08&0,1&0,1&0,2&0,3&0,2\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}:$$

Ապա օպտիմացման խնդրի նպատակային ֆունկցիան է՝

$$\sum_{i=0}^{6}x_{6i}+\rho\sum_{i=0}^{5}\sum_{s=0}^{5}x_{is}\to\min$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում.

$$\sum_{s=0}^{6}x_{js}-\sum_{i=0}^{6}\sum_{s=0}^{6}x_{is}q_{sj}=0,\ j=\overline{0,6},\quad \sum_{i=0}^{6}\sum_{s=0}^{6}x_{is}=1,\quad x_{is}\geq 0,\ \ i,s\in\overline{0,6}:$$

Խնդրի լուծման արդյունքում որոշվել են $\|D_{ij}\|$ մատրիցի տարրերը, որոնք տրված ρ գործակցի արժեքի դեպքում մինիմացնում են ներարկվող արտարժույթի ծավալները: Եթե $\rho = 0{,}09$, ապա խնդրի լուծման արդյունքում ստացվում է հետևյալ $\|D_{ij}\|$ մատրիցը.

$$\|D_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Մատրիցի յուրաքանչյուր տող պարունակում է մեկ ոչ զրոյական տարր, որի արժեքը հավասար է 1-ի: Միավոր տարրերի մի մասը գտնվում է գլխավոր անկյունագծում, մնացածները՝ առաջին սյունում: Մեկերի առաջին սյունակում գտնվելը ցույց է տալիս արտարժույթի փոխանակման դրույքի մինչև նվազագույն արժեք իջեցնելու պարտադիր անհրաժեշտությունը, իսկ գլխավոր անկյունագծի վրա՝ փոխանակման դրույքի փոփոխման անհրաժեշտություն չկա: ρ պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում լավագույն կանխարգելիչ ներարկումների վիճակները հետևյալներն են.

$0 \le \rho \le 0{,}01$	0,05–0,08	0,09	0,1–0,2	$0{,}04 \le \rho \le 1$:
1	2	3	5	6

3. Կառավարվող կիսամարկովյան գործընթացներ

3.1 Դիտարկենք վիճակների վերջավոր $E=\{1,2,\ldots,N\}$ բազմությունով կառավարվող կիսամարկովյան գործընթացը (ԿԿՄԳ-ն): Գործընթացի յուրաքանչյուր $i \in E$ վիճակին համապատասխանում է թույլատրելի որոշումների (այլընտրանքների) $K_i=\{1,2,\ldots,k_i\}$ վերջավոր բազմություն:

ԿԿՄԳ-ի վարքը նկարագրվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք՝ ԿԿՄԳ-ն գտնվում է $i \in E$ վիճակում և կայացվել է $R \in K_i$ որոշումը: Ընդունում ենք, որ՝

1. i վիճակում միավոր ժամանակ մնալու համար ստացվում է r_i^R եկամուտ.

2. անկախ նախորդ վիճակներում կայացված որոշումներից և գործընթացի նախապատմությունից, նրա հետագա վարքը որոշվում է $Q_{ij}^R(t)$՝ i վիճակից j վիճակ t ժամանակի ընթացքում մեկ քայլում անցման հավանականություններով, $i,j \in E$:

Ենթադրվում է, որ r_i^R -երը, $R \in K_i$, $i \in E$ սահմանափակ մեծություններ են:

F-ով նշանակենք ԿԿՄԳ-ի թույլատրելի վարվելակերպերի բազմությունը՝

$$F=K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_N:$$

Այստեղ $\times$-ը դեկարտյան արտադրյալի նշանն է:

Սահմանում 4: $f \in F$ վարվելակերպը կոչվում է ստացիոնար, եթե յուրաքանչյուր վիճակում ընդունված այլընտրանքը ամբողջությամբ որոշվում է տվյալ վիճակով և կախված չէ ո՛չ այդ վիճակ ընկնելու պահից, ո՛չ էլ գործընթացի նախապատմությունից, այսինքն՝ գործընթացի նախորդ վիճակներից, նրանցում մնալու ժամանակներից և ընդունված այլընտրանքներից:

Ստացիոնար վարվելակերպը նկարագրվում է $f=(f(1),f(2),\dots,f(N))$ վեկտորով, որի $f(i)$ տարրին համապատասխանում է գործընթացի i վիճակում կայացված որոշումը՝

$$f(i) \in K_i, \quad i \in E:$$

Գործնականում քննարկվում են ԿԿՄԳ-երի օպտիմացման խնդրի տարբեր դրվածքներ: Օպտիմացման ամեն մի խնդրում օգտագործվում են համապատասխան նպատակային ֆունկցիա և լավագույն ստացիոնար վարվելակերպի որոնման եղանակ:

Ինչպես արդեն նշվել է, եկամուտների վերագնահատումով և կլանման վիճակներով ԿՄԳ-ներում գումարային միջին եկամուտները սահմանափակ են, իսկ առանց եկամուտների վերագնահատման, էրգոդիկ ԿՄԳ-ներում՝ անվերջ: Այս պատճառով առաջին տեսակի ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդիրներում որպես նպատակային ֆունկցիա օգտագործվում է գումարային միջին եկամուտը, իսկ երկրորդի դեպքում՝ միավոր ժամանակում ստացվող միջին եկամուտը:

3.2 Եկամուտի վերագնահատմամբ ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդիր

Դիցուք՝ $\tilde{v}(\alpha,f)$-ը՝ α վերագնահատման գործակցի և f վարվելակերպի դեպքում գումարային միջին եկամուտների վեկտորն է՝

$$\tilde{v}(\alpha,f)=(\tilde{v}_1(\alpha,f),\tilde{v}_2(\alpha,f),\dots,\tilde{v}_N(\alpha,f)),\ f \in F:$$

Սահմանում 5: $f^* \in F$ վարվելակերպը կոչվում է α լավագույն ($\alpha > 0$), եթե

$$\tilde{v}(\alpha,f^*) \geq \tilde{v}(\alpha,f)$$

ցանկացած $f \in F$ վարվելակերպի համար:

Թեորեմ 5: Եկամուտների վերագնահատմամբ ԿԿՄԳ-ի համար գոյություն ունի ստացիոնար α լավագույն վարվելակերպ:

α լավագույն վարվելակերպի որոշման համար օգտագործվում են գծային ծրագրման եղանակը, Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը և դրանց տարբեր վերափոխումները: Դիտարկվող ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման համար ձևակերպենք համապատասխան գծային ծրագրման խնդիրը: Պարզության համար դիտարկենք խառը ստացիոնար վարվելակերպերը:

Դիցուք՝ d_i^R-ը՝ $i \in E$, $R \in K_i$ գործընթացի i վիճակում R որոշման ընդունման հավանականությունն է: Պարզ է, որ՝

$$\sum_{R \in K_i} d_i^R = 1,\quad d_i^R \geq 0,\quad i \in E,\quad R \in K_i:$$

Կամայական ստացիոնար f վարվելակերպի համար $\tilde{v}(\alpha, f)$ վեկտորը որոշվում է հետևյալ հիմնարար հավասարումից.

$$\tilde{v}(\alpha, f) = (I - \tilde{q}(\alpha))^{-1}\tilde{\rho}(\alpha): \tag{3.1}$$

$p^0 = (p_1^0, \ldots, p_N^0)$ սկզբնական բաշխման դեպքում գումարային վերագնահատված միջին եկամտի համար կստանանք՝

$$p^0 \cdot \tilde{v}(\alpha, f) = p^0 \cdot (I - \tilde{q}(\alpha))^{-1} \cdot \tilde{\rho}(\alpha) = \sum_{i,j\in E} p_i^0 \cdot \tilde{\mu}_{ij}(\alpha)\tilde{\rho}_j(\alpha):$$

Այստեղ՝ $$(I - \tilde{q}(\alpha))^{-1} = \| \tilde{\mu}_{ij}(\alpha) \|:$$

$\{d_i^R,\ i\in E,\ R\in K_i\}$ բաշխումն օգտագործելով կամայական f ստացիոնար վարվելակերպի համար, կստանանք հետևյալ հավասարությունը.

$$p^0 \cdot \tilde{v}(\alpha, f) = \sum_{i,j\in E} \sum_{R\in K_i} p_i^0 \tilde{\mu}_{ij}(\alpha)\tilde{\rho}_j^R(\alpha) d_j^R, \tag{3.2}$$

որտեղ՝

$$\tilde{\rho}_i^R(\alpha) = \frac{r_i^R}{\alpha}(1 - \tilde{h}_i^R(\alpha)),\quad \tilde{h}_i^R(\alpha) = \sum_{j\in E} \tilde{q}_{ij}^R(\alpha),\ i\in E:$$

Նշենք, որ $\tilde{\mu}_{ij}(\alpha)$ մեծությունները կախված են d_i^R հավանականություններից և f վարվելակերպից: Ներմուծելով նոր փոփոխականներ՝

$$x_j^R = \sum_{i\in E} p_i^0 \tilde{\mu}_{ij}(\alpha) d_i^R \ge 0,\quad j\in E,$$

$p^0 \cdot \tilde{v}(\alpha, f)$ -ի համար կստանանք՝

$$p^0 \cdot \tilde{v}(\alpha, f) = \sum_{j\in E} \sum_{R\in K_j} \tilde{\rho}_j^R(\alpha) x_j^R:$$

Գումարային միջին վերագնահատված եկամուտները մաքսիմացնող α լավագույն ստացիոնար վարվելակերպի որոշման գծային ծրագրման խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$\sum_{j\in E} \sum_{R\in K_j} \tilde{\rho}_j^R(\alpha) x_j^R \to \max$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում.

$$\sum_{R\in K_j} x_j^R - \sum_{i\in E} \sum_{R\in K_i} \tilde{q}_{ij}^R(\alpha) x_i^R = p_j^0,\ j\in E,$$

$$x_j^R \ge 0,\ j\in E,\ R\in K_j:$$

Եթե բոլոր p_i^0-ները դրական են, ապա գոյություն ունի գծային ծրագրման խնդրի չխառնված հենքային լուծում՝ x_i^R-ը հավասար է 0-ի կամ 1-ի: Եթե $x_i^R = 1$, ապա f^* լավագույն ստացիոնար վարվելակերպում $f^*(i) = R$-ի:

Դիտարկված ԿԿՄԳ-ում լավագույն վարվելակերպի որոշման համար օգտագործենք նաև Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը, որը բաղկացած է հետևյալ երկու ընթացակարգերից.

1. Կշիռների որոշման ընթացակարգ

Կամայական ստացիոնար $f \in F$ սկզբնական վարվելակերպի և α գործակցի տրված արժեքի համար $v_1, v_2, \ldots, v_N$ անհայտների նկատմամբ լուծվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$v_i = \tilde{\rho}_i^R(\alpha) + \sum_{j \in E} \tilde{q}_{ij}^R(\alpha) v_j, \quad i \in E,$$

որտեղ R-ը համապատասխանում է ընտրված f վարվելակերպին՝ $R = f(i)$, այսինքն՝ f վեկտորի i-րդ տարրին:

2. Որոշումների լավացման ընթացակարգ

Օգտագործելով $v_1, v_2, \ldots, v_N$-երի որոշված արժեքները, յուրաքանչյուր i, $i \in E$ վիճակի համար գտնում ենք $G(i,f)$ բազմության այնպիսի R տարր, որի համար ճշմարիտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$\tilde{\rho}_i^R(\alpha) + \sum_{j \in E} \tilde{q}_{ij}^R(\alpha) v_j > v_i:$$

Եթե $G(i,f)$ բազմությունը բոլոր i-երի, $i \in E$ համար դատարկ է, ապա f վարվելակերպը համարվում է α լավագույն: Եթե գոյություն ունի գոնե մեկ $i \in E$ վիճակ, որի համար $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ չէ, իսկ E_+-ը բոլոր այդպիսի վիճակների բազմությունն է, ապա լավացված γ վարվելակերպը ձևավորվում է հետևյալ կերպ. $\gamma(i) \in G(i,f)$, երբ $i \in E_+$, և $\gamma(i) = f(i)$, երբ $i \notin E_+$: Այնուհետև γ-ն ընդունելով որպես սկզբնական վարվելակերպ, անցնում ենք մեկ ընթացակարգին:

Սովորաբար սկզբնական f վարվելակերպն ընտրվում է $\tilde{\rho}_i^R(\alpha)$, $i \in E$ գործակիցների մաքսիմացման պայմանից:

Քանի որ ԿԿՄԳ-ի վարվելակերպերի F բազմությունը վերջավոր է, ապա ալգորիթմը վերջավոր թվով քայլերից հետո որոշում է խնդրի α լավագույն լուծումները: Եթե ալգորիթմի երկու ընթացակարգում մի քանի վարվելակերպեր են բավարարում օպտիմացման պայմանին՝

$$\tilde{v}(\alpha, f^*) = \max_f [\tilde{\rho}^f(\alpha) - \tilde{q}^f(\alpha) \cdot \tilde{v}(\alpha, f)],$$

ապա նրանք բոլորն էլ α լավագույն են:

3.3 Առանց եկամուտի վերագնահատման ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդիր

Ինչպես արդեն նշվել է, այս դեպքում որպես նպատակային ֆունկցիա օգտագործվում է միավոր ժամանակում ստացվող միջին ստացիոնար եկամուտը՝ g-ն: $v(t,f)$-ով նշանակենք f վարվելակերպի դեպքում t ժամանակի ընթացքում ստացված գումարային միջին եկամուտների վեկտորը՝

$v(t,f)=(v_1(t,f),\ldots,v_N(t,f))$: Տրված սկզբնական $p^0=(p_1^0,\ldots,p_N^0)$ բաշխման դեպքում դիտարկենք հետևյալ սահմանը՝

$$g(f)=\lim_{t\to\infty}\frac{p^0\cdot v(t,f)}{t},$$

որտեղ $g(f)$-ը՝ f վարվելակերպի դեպքում միավոր ժամանակում ստացվող միջին եկամուտն է: $g(f)$-ը հավասար է՝

$$g(f)=\sum_{j\in E}\rho_j(f)\eta_j^R r_j^R\Big/\sum_{j\in E}\rho_j(f)\eta_j^R,\quad R=f(i)\in K_i,\quad i\in E,\quad f\in F,\qquad(3.3)$$

որտեղ $\rho(f)=(\rho_1(f),\ldots,\rho_N(f))$-ը՝ f վարվելակերպի դեպքում ԿԿՄԳ ներմուծված Մարկովի շղթայի ստացիոնար բաշխումն է, իսկ η_j^R-ը և r_j^R-ը համապատասխանորեն f վարվելակերպի դեպքում ԿԿՄԳ-ի j-վիճակում մնալու միջին ժամանակը և այդ վիճակում միավոր ժամանակում ստացվող եկամուտն են: $\rho(f)$ վեկտորի տարրերը որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգից.

$$\rho_i(f)=\sum_{j\in E}\rho_j(f)p_{ji}(f),\quad i\in E,$$

$$\sum_{j\in E}\rho_j(f)=1,\ \rho_j(f)\ge 0,\quad j\in E:\qquad(3.4)$$

Սահմանում 6: f^* վարվելակերպը կոչվում է լավագույն, եթե F բազմության ցանկացած f տարրի համար ճշմարիտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$v(t,f^*)\ge v(t,f):$$

Թեորեմ 6: Առանց եկամուտների վերագնահատման, էրգոդիկ ԿԿՄԳ-ի համար գոյություն ունի լավագույն ստացիոնար վարվելակերպ:

$g(f)$-ը մաքսիմացնող ստացիոնար վարվելակերպի որոշման խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$\sum_{j\in E}x_j^R\eta_j^R r_j^R\Big/\sum_{j\in E}x_j^R\eta_j^R\to\max\qquad(3.5)$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում՝

$$x_i^R-\sum_{j\in E}x_j^R p_{ji}^R=0,\quad i\in E,$$

$$\sum_{i\in E}x_i^R=1,\quad x_i^R\ge 0,\quad i\in E,\quad R\in K_i:$$

(3.5)-ը այսպես կոչված կոտորակագծային ծրագրման խնդիրն է, որը փոփոխականների փոխարինմամբ կարելի է հանգեցնել գծային ծրագրման խնդրի: Կոտորակագծային ծրագրման խնդրում կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$Y_i^R=\frac{\eta_i^R x_i^R}{\sum_{j\in E}\eta_j^R x_j^R},\quad Y_i^R\ge 0,\quad i\in E,$$

$$\sum_{j\in E} Y_j^R = 1 :$$

Այստեղից՝ գծային ծրագրման խնդիրը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

$$\sum_{i\in E} r_i^R Y_i^R \to \max ,$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում.

$$\frac{Y_i^R}{\eta_i^R} - \sum_{j\in E} \frac{Y_j^R}{\eta_j^R} P_{ji}^R = 0, \quad i\in E, \qquad (3.6)$$

$$Y_j^R \ge 0, \quad \sum_{j\in E} Y_j^R = 1, \quad R\in K_j, \quad j\in E:$$

Քննարկենք լավագույն ստացիոնար վարվելակերպերի որոշման Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը:

1. Կշիռների որոշման ընթացակարգ

Որևէ $f\in F$ սկզբնական ստացիոնար վարվելակերպի համար ընդունելով $v_N=0$ $g, v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$ անհայտների նկատմամբ լուծվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\eta_i^R g + v_i = \eta_i^R r_i^R + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^R v_j, \quad R=f(i)\in K_i, \quad i=1,2,\ldots,N:$$

2. Որոշումների լավացման ընթացակարգ

Օգտագործելով v_i-երի և g-ի որոշված արժեքները յուրաքանչյուր i, $i\in E$ վիճակի համար, գտնվում է $G(i,f)$ բազմության այնպիսի m տարր, որը բավարարում է

$$g < r_i^m + (\eta_i^m)^{-1}[\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m v_j - v_i]$$

անհավասարությանը: Եթե բոլոր վիճակների համար $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ է, ապա f վարվելակերպը լավագույնն է, իսկ g-ն միավոր ժամանակում ստացվող միջին եկամտի առավելագույն արժեքն է:

Եթե որևէ i, $i\in E$ վիճակի համար $G(i,f)$-ը դատարկ չէ, իսկ E_+-ը այդպիսի i վիճակների բազմությունն է, ապա կառուցվում է լավացված φ վարվելակերպը՝ $\varphi(i)\in G(i,f)$, երբ $i\in E_+$ և $\varphi(i)=f(i)$, երբ $G(i,f)$-ը դատարկ է, $i\notin E_+$: Այնուհետև անցում է կատարվում մեկ ընթացակարգին φ լավացված սկզբնական վարվելակերպով:

Հովարդի ալգորիթմից լավագույն ստացիոնար վարվելակերպը գտնվում է վերջավոր թվով քայլերից հետո: Եթե գոյություն ունեն օպտիմացման պայմանին բավարարող մի քանի վարվելակերպեր՝

$$\eta_i^R g + v_i = \max_R[\eta_i^R r_i^R + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^R v_j], \quad i\in E,$$

ապա նրանցից յուրաքանչյուրը լավագույնն է և բերում է միավոր ժամանակում ստացվող նույն միջին եկամուտը:

3.4 Կլանմամբ ԿԿՄԳ-ներ

Ինչպես արդեն նշվել է այդպիսի ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդիրը նման է եկամուտների վերագնահատմամբ ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդրին: Երկու խնդիրներում էլ գումարային միջին եկամուտները վերջավոր են և դրանց օպտիմացման համար օգտագործվում են նույնատիպ նպատակային ֆունկցիաներ:

Պարզության համար ենթադրենք, որ ցանկացած f վարվելակերպի, $f\in F$ դեպքում 1 վիճակը ԿԿՄԳ-ի միակ կլանման վիճակն է: Գործընթացի կլանման վիճակը հասանելի է նրա ցանկացած վիճակից ցանկացած $f\in F$ վարվելակերպի դեպքում: $p^0=(p_2^0,\ldots,p_N^0)$ սկզբնական բաշխման դեպքում մինչև կլանման պահը ստացված գումարային միջին եկամուտը հավասար է՝

$$p^0v'=r'+p_0'v',$$

որտեղ P′-ը՝ ԿՄԳ ներմուծված Մարկովի շղթայի անցումնային մատրիցն է: Այստեղ՝

$$r'=(r_2\eta_2,\ldots,r_N\eta_N),\quad v'=(v_2,\ldots,v_N):$$

Թեորեմ 7: Կլանման վիճակներով ԿԿՄԳ-ում գոյություն ունի լավագույն ստացիոնար վարվելակերպ:

Դիտարկվող ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման նպատակն է գտնել p^0v'-ը մաքսիմացնող f^* ստացիոնար վարվելակերպը:

Եկամուտների վերագնահատմամբ խնդրի նմանությամբ դիտարկենք կլանմամբ ԿԿՄԳ-ի գծային ծրագրման խնդիրը՝

$$\sum_{j=2}^{N}\sum_{R\in K_j}\eta_j^R r_j^R x_j^R \to \max \tag{3.7}$$

հետևյալ սահմանափակումների դեպքում՝

$$\sum_{R\in K_j}x_j^R-\sum_{i=2}^{N}\sum_{R\in K_i}p_{ij}^R x_i^R=p_j^0,\ x_j^R\ge 0,\ R\in K_j,\ j=2,3,\ldots,N:$$

Նշենք, որ այս խնդրում ևս լավագույն վարվելակերպի որոշման համար կարող է օգտագործվել Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը:

1. Կշիռների որոշման ընթացակարգ

Կամայական $f\in F$ սկզբնական վարվելակերպի համար $v_2,v_3,\ldots,v_N$ անհայտների նկատմամբ լուծվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$v_i=r_i^R\eta_i^R+\sum_{j=2}^{N}p_{ij}^R v_j,\quad i\in\{2,3,\ldots,N\}:$$

2. Որոշումների լավացման ընթացակարգ

Օգտագործելով v_i-երի որոշված արժեքները յուրաքանչյուր i, $i\in\{2,3,\ldots,N\}$ վիճակի համար գտնվում է G(i,f) բազմության այնպիսի m տարր, որի համար ճշմարիտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$r_i^m\eta_i^m+\sum_{j=2}^{N}p_{ij}^m v_j>v_i:$$

Եթե $G(i,f)$ բազմությունը բոլոր i-երի համար, $i\in\{2,3,\ldots,N\}$ դատարկ է, ապա f վարվելակերպը լավագույնն է: Եթե գոնե մեկ վիճակի համար $G(i,f)$ բազմությունը դատարկ չէ, իսկ E_+-ը բոլոր նման վիճակների բազմությունն է, ապա լավագույն γ վարվելակերպը կառուցվում է հետևյալ կերպ. $\gamma(i)\in G(i,f)$, երբ $i\in E_+$ և $\gamma(i)\in f(i)$, երբ $i\notin E_+$: Այնուհետև ընդունելով γ-ն որպես սկզբնական վարվելակերպ, անցնում ենք մեկ ընթացակարգին:

Սկզբնական f վարվելակերպի վեկտորի i-րդ տարրը ընտրվում է

$$\max_{R\in K_i}[r_i^R\eta_i^R],\quad i\in\{2,3,\ldots,N\}$$

պայմանից:

Ալգորիթմը վերջավոր թվով քայլերից հետո որոշում է մինչև կլանման պահին ստացվող գումարային միջին եկամուտները մաքսիմացնող լավագույն f^* ստացիոնար վարվելակերպը:

Պլանավորման անվերջ ժամանակով ԿԿՄԳ-ների և ԿՄԾ-ների օպտիմացման խնդիրներում հիմնականում օգտագործվում են գծային ծրագրման եղանակը, Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը և վերջինիս տարբեր փոխակերպումները: Գործնական խնդիրների լուծման համար առավել նախընտրելի են իտերացիոն ալգորիթմները: Սակայն իտերացիոն ալգորիթմները թերություններից զերծ չեն: Նրանց հիմնական թերությունները պայմանավորված են մեծ չափայնության գծային հավասարումների լուծման անհրաժեշտությամբ:

Նշված ալգորիթմների արդյունավետությունը կարելի է զգալիորեն բարձրացնել օգտագործելով ագրեգավորումը, խոշորացման կամ մասնատման եղանակներն ու ալգորիթմները:

4. Կառավարվող Մարկովի շղթաների և ԿՄԳ-ների խոշորացումը

Գծային ծրագրման, իտերացիոն ալգորիթմների ու դրանց տարբեր վերափոխությունների միջոցով լավագույն կառավարման վարվելակերպի որոշման բարդությունը հիմնականում պայմանավորվում է օպտիմացման խնդրի մեծ չափայնությամբ: Օրինակ՝ գծային ծրագրման խնդրում հենքային լուծումների որոշման ժամանակ, իսկ Հովարդի ալգորիթմում՝ կշիռների որոշման ընթացակարգում, պահանջվում է լուծել կապերի P մատրիցով N չափայնության գծային հավասարումների համակարգը:

Կառավարվող Մարկովի շղթաների և ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդիրների չափի փոքրացման համար կիրառենք մեզ հայտնի խոշորացման ճշգրիտ և մոտավոր եղանակները:

4.1 Կառավարվող Մարկովի շղթաների խոշորացում

Դիցուք՝ տրված են՝ ԿՄԾ-ի վիճակների E բազմությունը, F վարվելակերպերի բազմությունը, P^f անցումային մատրիցը և r^f մեկ քայլում սպասվող միջին եկամտի վեկտորը: Պահանջվում է կառուցել խոշորացված ԿՄԾ-ի բաղադրիչները՝

$$\hat{E}=\{1,2,...,k\},\ \hat{F},\ \hat{P}^f \text{ և } \hat{r}^f \text{-ը:}$$

Խոշորացված ԿՄԾ-ի կառուցման համար $E=\{1,\ldots,N\}$ բազմությունը տրոհվում է K չհատվող ենթաբազմությունների՝

$$E_i=\{N_{i-1}+1,\ldots,N_i\},\ i=\overline{1,K},\ E_i\cap E_j=\varnothing,\ i\neq j,\ \bigcup_{1}^{K}E_i=E:$$

Եթե K_i-ն շղթայի i վիճակում թույլատրելի որոշումների բազմությունն է, իսկ $F=K_1\times K_2\times\ldots\times K_N$-ը՝ թույլատրելի վարվելակերպերի բազմությունը, ապա խոշորացված ԿՄԾ-ի համար կստանանք՝

$$\hat{F}=\hat{K}_1\times\hat{K}_2\times\ldots\times\hat{K}_K,$$

որտեղ

$$\hat{K}_i=K_{N_{i-1}+1}\times K_{N_{i-1}+2}\times\ldots\times K_{N_i},\ i=\overline{1,K},\ E_i=\{N_{i-1}+1,\ldots,N_i\}:$$

Բերված առնչություններից հետևում է, որ սկզբնական և խոշորացված ԿՄԾ-ների կառավարման վարվելակերպերի քանակները հավասար են, և սկզբնական շղթայի յուրաքանչյուր f վարվելակերպին միարժեքորեն համապատասխանում է խոշորացված շղթայի $\hat{f}$ վարվելակերպ:

Մասնավորապես, եթե $E=(1,2,3)$, $K_1=(1,2)$, $K_2=(1,2,3)$, $K_3=1$ և $\hat{E}=(1,2)$, որտեղ 1 վիճակին համապատասխանում է $E_1=(1,2)$, իսկ 2-ին՝ $E_2=(3)$, ապա $\hat{K}_1=K_1\times K_2=(1,2)\times(1,2,3)=((1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3))$, $\hat{K}_2=K_3$: Վարվելակերպերի թիվը սկզբնական և խոշորացված շղթաներում հավասար է 6-ի: Ընդ որում խոշորացված շղթայի $\hat{f}=(1;1)$ վարվելակերպին համապատասխանում է սկզբնական շղթայի $f=(1;1;1)$ վարվելակերպը, $\hat{f}=(2;1)$-ին՝ $f(1;2;1)$-ն և այլն: Հաշվի առնելով $\hat{f}$-ի և f-ի միարժեք համապատասխանությունը, հետագայում ցուցիչներում կօգտագործենք միայն f-ը:

Անցնենք խոշորացված ԿՄԾ-ի անցումային $\hat{P}^f$ մատրիցի և մեկ քայլում միջին եկամուտների $\hat{r}^f$ վեկտորի որոշմանը: Դիցուք՝ f վարվելակերպի դեպքում մեզ հայտնի խոշորացման ճշգրիտ ալգորիթմով որոշված են խոշորացման C^f և C^{f-} մատրիցները՝

$$C^f=\begin{pmatrix}\tilde{\rho}^f_{(1)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tilde{\rho}^f_{(2)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\rho}^f_{(K)}\end{pmatrix};\quad C^{f-}=\begin{pmatrix}1_{(1)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1_{(2)} & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1_{(K)}\end{pmatrix},$$

հետևաբար՝

$$\hat{P}^f = C^f P^f C^{f-},\ \hat{r}^f = C^f r^f:$$

Խոշորացված շղթայի մեկ քայլում ստացիոնար միջին եկամուտը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\hat{g}^f = \sum_{i \in \hat{E}} \hat{\rho}_i^f \hat{r}_i^f : \qquad (4.1)$$

Թեորեմ 8: Սկզբնական և խոշորացված, ԿՄԾ-ների մեկ քայլում ստացված ստացիոնար միջին եկամուտները բոլոր $f \in F$ վարվելակերպերի համար հավասար են՝

$$g^f = \hat{g}^f :$$

Ապացույց: Ելնելով մեկ քայլում ստացվող ստացիոնար միջին եկամտի մեծության (4.1) բանաձևից և սկզբնական ու խոշորացված ԿՄԾ-ների վարվելակերպերի միարժեք համապատասխանությունից, որևէ f վարվելակերպի համար կստանանք՝

$$g^f = \sum_{i \in E} r_i^f \rho_i^f = \sum_{j=1}^{K} \sum_{i \in E_j} \hat{\rho}_j^f \tilde{\rho}_{ij}^f r_i^f = \sum_{j=1}^{K} \hat{\rho}_j^f \sum_{i \in E_j} \tilde{\rho}_{ij}^f r_i^f = \sum_{j=1}^{K} \hat{\rho}_j^f \hat{r}_j^f = \hat{g}^f,\ f \in F:$$

Թեորեմ 9: Եթե $f^* \in F$-ը խոշորացված ԿՄԾ-ի լավագույն ստացիոնար վարվելակերպն է, ապա նա լավագույնն է նաև սկզբնական ԿՄԾ-ի համար:

Ապացույց: Դիցուք՝ f^* վարվելակերպը խոշորացված խնդրի լավագույն լուծումն է: Հետևաբար, ցանկացած f, $f \in F$ վարվելակերպի համար՝

$$\Delta\hat{g} = \hat{g}^{f^*} - \hat{g}^f > 0 :$$

Համաձայն 8-րդ թեորեմի՝

$$g^{f^*} = \hat{g}^{f^*} \text{ և } g^f = \hat{g}^f :$$

Հետևաբար՝

$$\Delta g = g^{f^*} - g^f,\ \Delta g = \Delta\hat{g} > 0 :$$

8-րդ և 9-րդ թեորեմները թույլ են տալիս սկզբնական մեծ չափայնությամբ օպտիմացման խնդիրը փոխարինել ավելի փոքր (ցանկալի) չափայնությամբ խոշորացված ԿՄԾ-ի օպտիմացման խնդրով:

Քանի որ ճշգրիտ ալգորիթմը խոշորացման C մատրիցի տարրերի որոշման ընթացակարգում պահանջում է հակադարձ մատրիցների հաշվարկում, ապա խնդրի մեծ չափայնության դեպքում դա կարող է հանգեցնել հաշվողական զգալի բարդությունների: Ուստի ավելի նպատակահարմար է օգտագործել խոշորացման մոտավոր ալգորիթմը, որը հակադարձ մատրիցների հաշվարկման ընթացակարգեր չունի:

Դիցուք՝ սկզբնական ԿՄԾ-ի անցումային P^f մատրիցի համար ճշմարիտ է ըստ ε փոքր պարամետրի վերլուծությունը՝

$$P^f = P_0^f - \varepsilon B^f: \qquad (4.2)$$

Այստեղ P_0^f-ն հիմնային շղթայի բլոկներով անկյունագծային անցումային մատրիցն է, իսկ B^f մատրիցը ցույց է տալիս f վարվելակերպի դեպքում հիմնային շղթայի շեղումը սկզբնականից:

P_0^f մատրիցը E բազմությունը տրոհում է K չհատվող E_i, $i=\overline{1,K}$ ենթաբազմությունների: P_0^f մատրիցն ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$P_0^f = \begin{pmatrix} P_{01}^f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{02}^f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & P_{0K}^f \end{pmatrix},$$

որտեղ P_{0i}^f-երը հավանականային մատրիցներ են:

Եթե ρ_ε^f-ը և $\tilde{\rho}_{0(i)}^f$-ն համապատասխանորեն սկզբնական և i-րդ հիմնային շղթաների ստացիոնար բաշխումներն են, իսկ $1_{(i)}$-ը P_{0i}^f մատրիցի աջ սեփական վեկտորն է, ապա C_0^f և C_0^{f-} խոշորացման մատրիցները կորոշվեն հետևյալ կերպ.

$$C_0^f = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{0(1)}^f & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\rho}_{0(2)}^f \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots \tilde{\rho}_{0(K)}^f \end{pmatrix}, \quad C_0^{f-} = \begin{pmatrix} 1_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{(2)} \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots 1_{(K)} \end{pmatrix},$$

որտեղ՝

$$\tilde{\rho}_{0(i)}^f (I - P_{0i}^f) = 0, \quad i = \overline{1,K}, \quad \sum_{j\in E_i} \tilde{\rho}_{0(ij)}^f = 1,$$

$$(I - P_{0i}^f) 1_{(i)} = 0, \quad i \in \overline{1,K}, \ f \in F:$$

Խոշորացված ԿՄԸ-ի համար $\hat{P}^f$ անցումային մատրիցը և $\hat{r}^f$ եկամուտների վեկտորը որոշվում են հետևյալ բանաձևերից.

$$\hat{P}^f = C_0^f P^f C_0^{f-}, \quad \hat{r}^f = C_0^f r^f, \tag{4.3}$$

իսկ շղթայի ստացիոնար բաշխումը՝

$$\hat{\rho}_0^f (I - \hat{P}^f) = 0, \quad \sum_{i\in\hat{E}} \hat{\rho}_{0i}^f = 1, \quad f \in F$$

հավասարություններով: Սկզբնական շղթայի ρ_ε^f ստացիոնար բաշխման համար ճշմարիտ է հետևյալ վերլուծությունը.

$$\rho^f = \hat{\rho}_0^f C_0^f + 0(\varepsilon): \tag{4.4}$$

Նշանակենք $g_{(\varepsilon)}^f$-ով սկզբնական ԿՄԸ-ի f վարվելակերպերի դեպքում մեկ քայլում ստացվող միջին եկամուտը:

Թեորեմ 10: Եթե սկզբնական ԿՄԾ-ի անցումային P^f_ε մատրիցը թույլ է տալիս ըստ ε փոքր պարամետրի (4.2) վերլուծությունը, ապա $g^f_{(\varepsilon)}$-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով.

$$g^f_{(\varepsilon)} = \hat{g}^f_0 + 0(\varepsilon),\ f\in F, \qquad (4.5)$$

որտեղ $\hat{g}^f_0$-ն՝ խոշորացված շղթայի մեկ քայլում ստացված միջին եկամուտն է՝

$$\hat{g}^f_0 = \hat{\rho}^f_0 \hat{r}^f = \hat{\rho}^f_0 C^f_0 r^f :$$

Թեորեմ 11: Եթե սկզբնական շղթայի անցումային P^f_ε մատրիցը ցանկացած $f\in F$ վարվելակերպի դեպքում ըստ ε փոքր պարամետրի թույլ է տալիս (4.2) վերլուծումն, և r^f վեկտորի տարրերը վերջավոր են, ապա ցանկացած ստացիոնար f^* վարվելակերպ, որը լավագույնն է խոշորացված շղթայի համար, $0(\varepsilon)$ ճշտությամբ լավագույնը կլինի նաև սկզբնական շղթայի համար:

10-րդ և 11-րդ թեորեմները թույլ են տալիս մեծ չափայնությամբ սկզբնական խնդիրը փոխարինել փոքր (ցանկալի) չափայնությամբ խոշորացված նույնատիպ խնդրով:

Նշենք մոտավոր խոշորացման ալգորիթմի մի քանի առանձնահատկություն: Քանի որ B^f մատրիցի ընտրության ժամանակ թույլատրվում է որոշակի ազատություն, ապա ε փոքր պարամետրը կարելի է բացահայտորեն չառանձնացնել. միայն բավական է ապահովել B^f մատրիցի տարրերի $O(\varepsilon)$ կարգը:

Խոշորացված ԿՄԾ-ն պարունակում է $O(\varepsilon)$ ճշգրտությամբ g^f-ի օպտիմացման համար անհրաժեշտ ողջ տեղեկատվությունը: Դա թույլ է տալիս, օգտագործելով համապատասխան թեորեմները, $O(\varepsilon)$ ճշգրտությամբ գտնել սկզբնական մեծ չափայնությամբ խնդրի լավագույն լուծումները:

Բերված ալգորիթմների կիրառմամբ օպտիմացման խնդիրներում չեն օգտագործում լուծումների վերականգնման ընթացակարգեր և մասնակի լուծումների բազմամակարդակ գնահատականներ, ինչը լավագույն ստացիոնար վարվելակերպի որոշման խնդիրներում հանգեցնում է հաշվողական գործողությունների ծավալի զգալի տնտեսման:

Ճշգրիտ և մոտավոր խոշորացման ալգորիթմները կարող են կիրառվել նաև վերազնահատված եկամուտներով և կլանմամբ ԿՄԾ-ների օպտիմացման խնդիրներում: Այս դեպքում արդեն օգտագործվում են անհամասեռ հավասարումների խոշորացման ալգորիթմները:

4.2 ԿԿՄԳ-ների խոշորացման խնդիր

Խոշորացված ԿԿՄԳ-ի կառուցման համար կենթադրենք, որ տրված է սկզբնական ԿԿՄԳ-ի վիճակների E բազմության տրոհումը K չհատվող $E_1, E_2, \ldots, E_K$ ենթաբազմությունների: Խոշորացված գործընթացի վիճակների $\hat{E}$ բազմության տարրերը որոշվում են E_i ենթաբազմությունների խոշորացմամբ (միավորմամբ) մեկ i, վիճակում, $\hat{E}=\{1,2,\ldots,K\}$: Խոշորացված գործընթացի վարվելակերպերի $\hat{F}$ բազմությունը կորոշենք ԿՄՇ-ների համար վերը բերված եղանակով: Խոշորացված գործընթացի $\hat{r}^f$ եկամուտների վեկտորի և $\hat{P}^f$ անցումային մատրիցի համար օգտագործվում են խոշորացման նույն C^f և C^{f-} մատրիցները, որոնց տարրերը որոշվել են վերը: Խոշորացված ԿԿՄԳ-ների համար վիճակներում մնալու միջին ժամանակների $\hat{\eta}^f$ վեկտորը որոշվում է

$$\hat{\eta}^f = C^f\eta^f$$

առնչությունից:

Այսպիսով, եթե տրված են սկզբնական ԿԿՄԳ-ի տարրերը՝

$$F,\ r^f,\ P^f,\ \eta^f,\ E\text{-ն}$$

և վիճակների E բազմության տրոհումը առանձին չհատվող ենթաբազմությունների, ապա ճշգրիտ խոշորացման եղանակի օգնությամբ կառուցվում են C^f և C^{f-} խոշորացման մատրիցները, և որոշվում խոշորացված ԿԿՄԳ-ի տարրերը՝

$$\hat{r}^f,\ \hat{P}^f,\ \hat{\eta}^f,\ \hat{E} \text{ և } \hat{F}\text{-ը:}$$

Քննարկենք ԿԿՄԳ-ների օպտիմացման խնդիրներում խոշորացման եղանակների օգտագործման հարցը: Դիցուք՝ դիտարկվում է առանց եկամուտների վերագնահատման ԿԿՄԳ-երի օպտիմացման խնդիրը: Ինչպես գիտենք, այս խնդրում որպես նպատակային ֆունկցիա օգտագործվում է միավոր ժամանակում ստացված միջին եկամուտը՝ g^f-ը:

Թեորեմ 12: Ցանկացած $f\in F$ վարվելակերպի համար սկզբնական և խոշորացված ԿԿՄԳ-ների միավոր ժամանակում ստացված ստացիոնար միջին եկամուտները միմյանց հավասար են՝

$$\hat{g}^f = g^f:$$

Թեորեմ 13: Եթե $f^*\in F$-ը՝ խոշորացված ԿԿՄԳ-ի լավագույն ստացիոնար վարվելակերպն է, ապա նա լավագույնն է նաև սկզբնական ԿԿՄԳ-ի համար:

Այս թեորեմների ապացուցումը կատարվում է ԿՄՇ-ների համար դիտարկվածի նմանությամբ: Այստեղ հաշվի է առնվում, որ միավոր ժամանակում ստացվող ստացիոնար միջին եկամուտը կարելի է որոշել

$$g = \sum_{i\in E}\pi_i r_i$$

բանաձևով, որտեղ π_i-ն՝ ԿՄԳ-ի ստացիոնար բաշխումն է:

Բերված թեորեմները թույլ են տալիս մեծ չափայնությամբ ԿԿՄԳ-ի օպտիմացման խնդիրը փոխարինել ավելի փոքր (ցանկալի) չափայնությամբ խոշորացված խնդրով:

Խոշորացված խնդրի լուծման համար կարող են օգտագործվել ինչպես գծային ծրագրման եղանակը, այնպես էլ Հովարդի իտերացիոն ալգորիթմը:

Եթե ԿԿՄԳ-ի P^f անցումային մատրիցը կարելի է վերլուծել ըստ ε փոքր պարամետրի՝

$$P^f = P_0^f - B^f, \tag{4.6}$$

և η^f ու r^f վեկտորների տարրերը ցանկացած $f \in F$ վարվելակերպի դեպքում սահմանափակ են, ապա միավոր ժամանակում ստացված ստացիոնար միջին եկամուտը՝ g^f-ը, ևս կարելի է վերլուծել ըստ ε փոքր պարամետրի:

Թեորեմ 14: Միավոր ժամանակում ստացված ստացիոնար միջին եկամուտի՝ g^f-ի համար ցանկացած $f \in F$ վարվելակերպի դեպքում ճշմարիտ է

$$g_\varepsilon^f = g_0^f + 0(\varepsilon) \tag{4.7}$$

վերլուծությունը, որտեղ՝

$$g_0^f = \hat{g}^f + 0(\varepsilon): \tag{4.8}$$

Թեորեմ 15: Եթե ցանկացած $f \in F$ ստացիոնար վարվելակերպի համար P^f անցումային մատրիցը թույլ է տալիս ըստ ε փոքր պարամետրի (4.6) վերլուծությունը, η^f և r^f վեկտորների տարրերը սահմանափակ են, ապա խոշորացված ԿԿՄԳ-ի լավագույն ստացիոնար վարվելակերպը լավագույնն է նաև սկզբնական ԿԿՄԳ-ի համար:

Գրականություն

1. Р. Ховард. Динамическое програмирование и марковские процессы. -М.: Наука, 1963.
2. И. Майн, В. Осаки. Марковские процессы принятия решений. -М.: Наука, 1977.
3. Бетсекас Д.,Шрив. С. Стохастическое оптимальное управление. -М.: Наука,1985
4. Байхелт Ф.,Франкин П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. -М.: Радио и связь,1988
5. Daniel P. Heyman, Matthew J. Sobel. Stochastic Models in Operations Research.Vol. 2. Stochastic Optimization. - Nev York: Mc Graw-Hill, Inc., 1988.
6. Ronald A. Howard. Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1,2. -New-York: John Wiley & Sons,Inc.,1978.
7. Wayne L.Winston, S. Christian Albright Management Science. - Duxburi Press, 1997.
8. Սահակյան Մ.Ա. և ուրիշներ. Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ. Գործույթների հետազոտում. Կառավարման գիտություն / Մաս 1/, ԷԿԱԳՄԱՀԲ, Երևան, 1997.

XIII. ՀԵՐԹԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Սովորում եմ միշտ, սակայն ճշմարիտ
Գիտության հասու չեմ դառնում երբեք:
Գրիգոր Նարեկացի,
Մատյան ողբերգության բան Հ,Ա,Բ,
Ե.1979

Մուտք

Գործնականում հերթերի հանդիպում ենք ամենուրեք՝ հանրախանութում կամ շուկայում գնումներ կատարելիս, օդանավակայանում կամ երկաթուղու կայարանում՝ ճանապարհ գնալիս, պոլիկլինիկայում կամ հիվանդանոցում՝ բուժվելիս, թատրոնում և նույնիսկ բուհում քննություն հանձնելիս: Որքան էլ հիմնավորված, իսկ հաճախ նաև պարզապես լինի մեր վրդովմունքը հերթից՝ որպես երևույթի գոյությունից, նրա կանոնակարգից և կառուցվածքից. այնուամենայնիվ, պետք է հավաստել այն փաստը, որ հերթը սպասարկում է բնության կարևորագույն օրենքներից մեկը՝ սահմանափակ թողունակության կամ միջոցների սակավության պատճառով առանձին հոսքերի կամ մեկ հոսքի տարրերի մրցակցությունը հանգեցնում է հերթագոյացման: Անկախ մրցակցող հոսքերի կամ դրանց մասը կազմող տարրերի և մրցակցության առարկա հանդիսացող միջոցների կոնկրետ բովանդակությունից՝ հերթագոյացման գործընթացների ուսումնասիրությամբ է զբաղվում է հերթերի տեսությունը:

Ինչպիսի՞ օրենքներով են կարգավորվում հերթերը, ինչպիսի՞ ցուցանիշներով են բնութագրվում, ինչի՞ կարող են հանգեցնել հերթ կազմող տարրերի կամ դրանց սպասարկման միջոցների այս կամ այն վարքը և կառուցվածքը: Նման օրինակ և շատ ուրիշ հարցերի ուսումնասիրմամբ է զբաղվում հերթերի տեսությունը: Հերթերի հետազոտման խնդիրները առավել են բարդանում, երբ հոսքը և դրա սպասարկման միջոցների բնութագրերը անկանոն, անկանխատեսելի, հավանականային են:

1. Հերթերի տեսության տարրերը

1.1 Սպասարկման համակարգ

Հավանականային հոսքերով հերթերի ուսումնասիրման համար օգտագործվում են հատուկ մաթեմատիկական մոդելներ, որոնք հաճախ անվանվում են սպասարկման համակարգեր: Սպասարկման համակարգի ամբողջական նկարագրման համար անհրաժեշտ է որոշել նրա հետևյալ երեք բաղադրիչները՝

- Մուտքի հոսքը նկարագրող հավանականային գործընթացը:

- Հոսքի տարրերին սպասարկող միջոցների բնութագրերը, կառուցվածքը, տեղակայումը և տեղաբաշխումը:
- Հերթի տարրերի սպասարկման օրինաչափությունը:

Հերթերի տեսության մեջ մուտքի հոսքի տարրերը կոչվում են հայտեր, սպասարկման միջոցները՝ սպասարկման սարքեր, սպասարկման կարգը՝ սպասարկման կանոն: Սպասարկման համակարգերի տարրերի տարբեր օրինակներ բերված են աղյուսակում 1-ում:

Աղյուսակ 1

Պահանջարկի տեսակը	Սպասարկման էությունը	Սարքերը
Հեռախոսային զանգ	Խոսակցություն	Հեռախոսագիծ
Բեռնատար մեքենա	Մաքսազննում	Մաքսային աշխատող
Բեռնատար մեքենա	Բեռնաթափում	Բանվորներ
Ավտոմեքենա	Վերանորոգում	Սպասարկման բրիգադ
Հաճախորդ	Գնում	Վաճառող
Հաճախորդ	Բուժում	Բժիշկ
Հրդեհ	Հրդեհի մարում	Հրշեջ մեքենա
Ավտոմեքենաների հոսք	Խաչմերուկ	Ոստիկան

Սպասարկման համակարգերում մուտքի հոսքը հաճախ նկարագրում են երկու հաջորդական հայտերի գալու պահերի միջև ընկած ժամանակահատվածի A(t) բաշխման ֆունկցիայի օգնությամբ՝ A(t)=P{երկու հաջորդական հայտերի միջև ընկած ժամանակը ≤ t}:

Հերթերի տեսության մեջ՝ որպես կանոն, ենթադրվում է, որ մուտքի հոսքի երկու հաջորդական հայտերի միջև ընկած ժամանակահատվածները միմյանցից անկախ, միևնույն բաշխումն ունեցող պատահական մեծություններ են: Դիտարկվում են համասեռ, օրդինար, առանց հետազդեցության և ստացիոնար հոսքեր: Այդ դեպքում A(t) բաշխման ֆունկցիան միարժեքորեն որոշում է հոսքը: Համասեռ հոսքում առանձին տարրերը միմյանցից տարբերվում են միայն իրենց հանդես գալու պահով: Հոսքը կոչվում է օրդինար, եթե Δt փոքր ժամանակի ընթացքում մեկից ավելի հայտերի գալու հավանականությունը ավելի բարձր կարգի փոքր մեծություն է քան Δt-ն: Ստացիոնար հոսքում τ ժամանակի ընթացքում այս կամ այն թվով հայտերի գալու հավանականությունը կախված է միայն այդ ժամանակի տևողությունից և կախված չէ ժամանակային առանցքի վրա τ-ի գտնվելու տեղից: Հոսքերի կարևորագույն հատկություններից է հետազդեցության բացակայությունը, ըստ որի, երկու՝ τ_1 և τ_2 փոխչհատվող ժամանակահատվածներից մեկում հանդես եկած հայտերի թիվը կախված չէ մյուսում եկած հայտերի թվից՝ անկախ τ_1-ի և τ_2-ի ժամանակային առանցքի վրա ունեցած տեղից: Միաժամանակ օրդինարությամբ և հետազդեցության բացակայությամբ օժտված միակ հոսքը Պուասոնի հոսքն է: Պուասոնի ստացիոնար հոսքում երկու հարևան հայտերի գալու պահերի միջև ընկած ժամանակի տևողությունը ունի λ պարամետրով ցուցչային բաշխում՝ $A(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t>0$, $\lambda>0$, որտեղ λ-ն կոչվում է հոսքի հաճախությունն և ցույց է տալիս միավոր ժամանակում եկած հայտերի միջին քանակը:

Սպասարկման համակարգերում երկրորդ կարևորագույն բաղադրիչը հայտերի սպասարկման համար անհրաժեշտ ժամանակի տևողությունն է, որը պատահական մեծություն է $B(t)=P\{$հայտի սպասարկման ժամանակի տևողությունը $\leq t\}$ բաշխման ֆունկցիայով:

Սպասարկման համակարգի կառուցվածքի նկարագրման համար որոշվում են հետևյալ մեծությունները. հերթի կամ հերթերի տարողությունը համակարգում, որտեղ կուտակվում են սպասարկման սպասող հայտերը, և սպասարկող սարքերի թիվը: Սովորաբար հերթի տարողությունը նշանակում են K տառով՝ $K\in N$, իսկ համակարգում սպասարկող սարքերի քանակը՝ m տառով՝ $m\in N$, որտեղ N-ը բնական թվերի բազմությունն է՝ $N=\{0,1,2,\ldots\}$: Եթե $m > 1$, ապա յուրաքանչյուր սարքի համար տրվում է հայտերի սպասարկման ժամանակի $B(t)$ բաշխման ֆունկցիան: Եթե համակարգում մուտքի հոսքերի քանակը մեծ է մեկից, ապա նրանցից յուրաքանչյուրի համար տրվում է $A(t)$ բաշխման ֆունկցիան և K մեծությունը:

Սպասարկման համակարգի կարևորագույն կառուցվածքային բնութագրերից է հերթից եկող հայտերի սպասարկման կարգը: Սպասարկման կարգի օրինակ կարող են ծառայել. առաջինն եկավ, առաջինն սպասարկվեց, կամ՝ վերջինը եկավ, առաջինն սպասարկվեց կարգերը, հերթից եկող հայտերի պատահական սպասարկումը և այլն:

Սպասարկման համակարգերում հաճախ դիտարկվում են հոսքերի այնպիսի խմբավորումներ, որոնց միջև հաստատված են սպասարկման սարքերն զբաղեցնելու առաջնություններ: Օրինակ՝ բացարձակ, հարաբերական, դինամիկ և այլ առաջնությամբ հայտերի սպասարկում: Նման համակարգերը անվանում են առաջնություններով սպասարկման համակարգեր:

Սպասարկման համակարգերում դիտարկվում են հայտերի վարքի նաև այլ դեպքեր՝ հայտերի գերակայության, հերթից հերթ կամ մի սպասարկման սարքից մեկ այլ սարք անցման, հերթից կամ սպասարկման սարքից ոչ լրիվ սպասարկված հայտի հեռացում, «խաբեբայություններ» հերթում և այլ հետաքրքիր դեպքեր, որոնք մայրկանց խորք չեն առօրյայում:

Սպասարկման համակարգերի տիպերի տարբերակման համար օգտագործվում են Կենդալի առաջարկած չորս դիրքեր պարունակող հետևյալ պարզ հապավումները՝ A|B|m|K, որտեղ A-ն և B-ն ցույց են տալիս համակարգի մուտքի հոսքի $A(t)$ և հայտերի սպասարկման ժամանակի $B(t)$ բաշխման ֆունկցիաների տիպերը, m-ը՝ համակարգում սպասարկման սարքերի քանակն է, իսկ K-ն՝ համակարգում հայտերի սպասման տեղերի քանակը:

A-ի և B-ի տիպերի համար օգտագործվում են հետևյալ նշանները.

M - ցուցչային բաշխում (Markovian);

E_r - r կարգի էռլանգի բաշխում (Erlangian);

H_r - r կարգի հիպերէքսպոնենցիալ բաշխում (Hyperexponential);

D - հաստատուն մեծություն (Deterministic);

G - կամայական բաշխում (General):

Մասնավոր դեպքում, եթե այս նշանները գտնվում են A-ի տեղում, ապա դրանց համապատասխան բաշխման խտությունը $a(t)=dA(t)/dt$-ն կունենա հետևյալ տեսքը՝

M՝ $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$,

E_r՝ $a(t) = \dfrac{r\lambda(r\lambda t)^{r-1}}{(r-1!)}e^{-r\lambda t}$,

H_r՝ $a(t) = \sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}$ ($\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i = 1,\ 0\le\alpha_i\le 1$),

D՝ $a(t) = \delta(t-\dfrac{1}{\lambda})$,

G՝ a(t)-ն կամայական է:

Այսպես, Պուասոնի մուտքի հոսքով և ցուցչային բաշխմամբ սպասարկման ժամանակով, m նույնատիպ սպասարկման սարքերով և անվերջ հերթով դասական սպասարկման համակարգը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝

M|M|m|∞ կամ M|M|m:

Սպասարկման համակարգերի վարքի նկարագրման համար, կախված մուտքի հոսքի և հայտերի սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիաների տեսակից օգտագործվում են տարբեր պատահական գործընթացներ, ըստ որոնց հերթերի տեսությունը պայմանականորեն բաժանում են երկու մասի՝ մարկովյան և ոչ մարկովյան: Հերթերի մարկովյան տեսու-թյունն ընդգրկում է մարկովյան գործընթացներով նկարագրվող սպասարկ-ման համակարգերը, որոնք հաճախ կոչվում են նաև մարկովյան համակար-գեր: Այս համակարգերում A(t) և B(t) բաշխման ֆունկցիաները ցուցչային են: Հերթերի ոչ մարկովյան տեսությունը ուսումնասիրում է սպասարկման նաև այնպիսի համակարգերը, որոնցում հոսքերից առնվազն մեկը կամ հայտերի սպասարկման ժամանակն ունեն ցուցչայինից տարբեր բաշխում:

Մարկովյան սպասարկման համակարգերի ուսումնասիրմանը նվիրված այս բաժինը հիմնված է Կոլմոգորով-Չեպմենի հավասարումների վրա: Մասնավորապես, մարկովյան համակարգերի ուսումնասիրման համար օգտագործվում են բազմացման և կործանման գործընթացները, որոնց հիմնական բնութագրերը և հատկությունները դիտարկված են X բաժնում:

1.2 Հերթերի բնութագրերը և պահպանման օրենքները

Հերթերի տեսությունը գործույթների հետազոտման կարևորագույն բաժիններից է, որն ուսումնասիրում է հոսքային համակարգերի գործառույթի օրենքները. դրանց հատկությունները ու բնութագրերը: Հերթերի տեսության հիմքում ընկած են մի շարք հիմնարար օրենքներ՝ պահպանման օրենքները:

Այս օրենքները հաստատում են հերթերի տարբեր բնութագրերի անփոփոխականությունը հայտերի մուտքի հոսքի և սպասարկման ժամանակի բաշխման օրենքից, հերթում հայտերի սպասարկման կարգից և այլն:

Հերթերի տեսության խնդիրների և վերլուծության եղանակների ուսումնասիրումը տեղին է սկսել հերթերի տեսության հիմնական խնդիրների, հիմնարար բնութագրերի և պահպանման օրենքների քննարկումով:

Հերթերի տեսության խնդիրները պայմանականորեն բաժանում են երկու խմբի՝ վերլուծության և օպտիմացման խնդիրներ:

Առաջին խմբի խնդիրներում հետազոտում են հերթերի գործառույթի բնութագրերը՝ կախված նրանց տարբեր պարամետրերից, կառուցվածքից, հայտերի սպասարկման կարգից և այլն: Այս խմբի կարևոր խնդիրներից են նաև հերթերի ստացիոնար ռեժիմների գոյության պայմանների հետազոտումը՝ կախված հերթի բեռնվածության գործակցից, նրա բնութագրերի գնահատումը և այլն:

Երկրորդ տիպի խնդիրները՝ օպտիմացման խնդիրները, բաժանում են երկու ենթախմբի՝ հերթերի նախագծման և լավագույն կառավարման խնդիրների: Առաջին ենթախմբի խնդիրներում ըստ տրված նպատակային ֆունկցիայի կատարվում է հերթի պարամետրերի, կառուցվածքի, սպասարկման սարքերի թվի, դրանց տեղակայման ընտրություն և այլն: Երկրորդ ենթախմբի խնդիրներում՝ կախված հերթի վիճակից, ըստ տրված նպատակային ֆունկցիայի, կատարվում է հայտերի սպասարկման կարգի և հերթի պարամետրերի կառավարում: Առաջին ենթախմբի խնդիրները նպատակային ֆունկցիայի վերլուծական հայտնի տեսքի դեպքում սովորաբար բերվում են ոչ գծային ծրագրման խնդիրների տեսքի, որոնց հետազոտման եղանակները և տարբեր կիրառությունները քննարկված են առաջին հատորում: Իսկ երկրորդ խմբի խնդիրներում՝ կառավարվող մարկովյան և կիսամար-կովյան գործընթացներում լավագույն վարվելակերպի որոշման խնդիրների, որոնց հետազոտման եղանակները և տարբեր կիրառությունները քննարկ-ված են սույն հատորի XII բաժնում:

Հերթերի օպտիմացման խնդիրներում որպես նպատակային ֆունկցիա սովորաբար օգտագործում են հերթի գործառույթի հետ կապված միջին կորուստները, կամ եկամուտները:

Անցնենք հերթերի տեսության որոշ պահպանման օրենքների քննարկմանը: Հերթերի հետազոտման շատ եղանակների հիմքում ընկած է մի հիմնարար օրենք՝ հոսքի պահպանման օրենքը, ըստ որի ցանկացած սպասարկման համակարգում հայտերի թվի աճի հաճախությունը հավասար է նրա մուտքի և ելքի հոսքերի հաճախությունների տարբերությանը:

Այդ օրենքը թույլ է տալիս, անկախ հետազոտվող սպասարկման համակարգի բարդությունից, նրա բնութագրերի համար կազմել համապատասխան հավասարումների համակարգ:

Քննարկենք G|G|1 տեսակի մեկ սպասարկման սարքով հերթի հիմնական բնութագրերը և պահպանման օրենքները:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$\bar{t}$-ն սպասարկման համակարգ եկող երկու հաջորդական հայտերի միջև ընկած ժամանակի միջին արժեքն է,

λ =1/t-ն սպասարկման համակարգի մուտքում հայտերի հոսքի հաճախությունն է,

$\bar{x}$-ը սպասարկման սարքում մեկ հայտի սպասարկման ժամանակի միջին արժեքն է,

μ=1/x-ը սպասարկման համակարգում հայտի սպասարկման հաճախությունն է:

Քննարկենք հերթերի հետևյալ բնութագրերը՝

ρ - սպասարկման համակարգի բեռնվածության գործակիցը,

$\bar{N}$ - սպասարկման համակարգում հայտերի միջին թիվը,

$\bar{N}_q$ - հերթում հայտերի միջին թիվը,

T - հայտի սպասարկման համակարգում մնալու ժամանակի միջին արժեքը,

W - հերթում հայտի սպասելու ժամանակի միջին արժեքը:

Քննարկենք ρ բեռնվածության գործակիցը, որը կարևոր դեր է խաղում հերթի ստացիոնար ռեժիմների ուսումնասիրման խնդիրներում: ρ գործակիցը կարելի է որոշել և մեկնաբանել տարբեր եղանակներով: Ստորև կքննարկենք դրանցից մի քանիսը:

Դիցուք՝ R-ը սպասարկման համակարգից պահանջվող հայտերի սպասարկման արագությունն է, իսկ C-ն համակարգի թողունակությունն է՝ հայտերի սպասարկման առավելագույն արագությունը: Բեռնվածության ρ գործակիցը որոշվում է հետևյալ հարաբերությամբ՝

$$\rho = R / C:$$

Պարզ է, որ R<C պայմանի դեպքում համակարգում կձևավորվի վերջավոր հերթ և համակարգ եկող բոլոր հայտերը կսպասարկվեն: C<R-ի պայմանի դեպքում՝ թողունակության անբավարարության պատճառով, համակարգը կմտնվի գերբեռնվածության վիճակի, իսկ հերթում հայտերի թիվը արագորեն և աղետալիորեն կաճի: R<C (այսինքն՝ ρ<1) անհավասարությունը հանդիսանում է դիտարկվող համակարգի ստացիոնար ռեժիմի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը: Համակարգի ստացիոնար ռեժիմի դեպքում գոյություն ունեն նրա վարքը բնութագրող բոլոր պատահական մեծությունների սահմանային բաշխումները: Ստացիոնար ռեժիմի գոյության դեպքում համակարգ եկող բոլոր հայտերը զրոից մեծ հավանականությամբ սպասարկվում են վերջավոր ժամանակում: Երբեմն, օրինակ D|D|1 տեսակի սպասարկման համակարգում, ρ=1 սահմանային արժեքը նույնպես ընդգրկվում է հերթի ստացիոնարության տիրույթում:

ρ բեռնվածության գործակիցը որոշվում է նաև որպես սպասարկման համակարգի մուտքի հոսքի λ հաճախության և հայտի սպասարկման $\bar{x}$

միջին ժամանակի արտադրյալ՝

$$\rho = \lambda \bar{x}:$$

Եթե համակարգում հայտերի սպասարկումը կատարվում է m սարքերի միջոցով, այսինքն՝ դիտարկվում է G|G|m տեսակի համակարգը, ապա ρ-ի բեռնվածության գործակիցը որոշվում է՝ $\rho = \lambda \bar{x} / m$ բանաձևով:

Հերթերի տեսության կիրառություններում սպասարկման համակարգի մուտքում աշխատանքի հաճախությունը երբեմն անվանում են բեռնվածության հաճախություն և չափում են էռլանգներով: G|G|1 տեսակի համակարգում բեռնվածության հաճախությունը հավասար է համակարգի ρ բեռնվածության գործակցին, իսկ G|G|m տեսակի համակարգում՝ $m\rho$ -ի:

Իսկապես, քանի որ, միավոր ժամանակում սպասարկման համակարգում ստացվում են միջին թվով λ հայտեր, որոնցից յուրաքանչյուրը պահանջում է միջինը $\bar{x}$ միավոր սպասարկման ժամանակ (սպասարկման սարքի աշխատանքը), ապա համակարգի մուտքում աշխատանքի (բեռնվածության) հաճախությունը հավասար կլինի $\lambda \bar{x}$-ի, այսինքն՝ համակարգի բեռնվածության գործակցին:

ρ բեռնվածության գործակիցը կարելի է մեկնաբանել նաև որպես ստացիոնար ռեժիմում համակարգի սպասարկող սարքի զբաղվածության ժամանակի մաս կամ զբաղվածության հավանականություն:

Դիցուք՝ P_q-ն ստացիոնար ռեժիմում համակարգի սպասարկող սարքի զբաղվածության հավանականությունն է, իսկ $P_0 = 1 - P_q$-ի՝ պարապուրդի հավանականությունն է: Հնարավորին չափ մեծ τ ժամանակի ընթացքում համակարգի սպասարկման սարքը զբաղված կլինի τP_q ժամանակ: τ ժամանակի ընթացքում համակարգում սպասարկված հայտերի թիվը հավասար կլինի մոտ $\tau P_q / \bar{x}$ -ի, իսկ համակարգում ստացված հայտերի թիվը՝ մոտ $\tau\lambda$-ի: Հոսքի պահպանման օրենքի համաձայն, համակարգի ստացիոնար ռեժիմում τ ժամանակի հնարավորին չափ մեծ արժեքի դեպքում համակարգում ստացված և սպասարկված հայտերի քանակները միմյանց հավասար են և, հետևաբար, ճշմարիտ է

$$\tau\lambda \equiv \tau P_q / \bar{x}$$

հավասարությունը, որտեղից՝ $\tau \to \infty$-ի դեպքում, ստանում ենք՝

$$\lambda \bar{x} = P_q:$$

Այսպիսով՝ G|G|1 տեսակի համակարգի համար ճշմարիտ է՝

$$\rho = 1 - P_0 = P_q:$$

Այժմ քննարկենք ստացիոնար հերթերի ևս մի կարևոր օրենք, որը կապ է հաստատում սպասարկման համակարգում հայտերի միջին թվի, մուտքային հոսքի հաճախության և հայտերի համակարգում մնալու միջին ժամանակի միջև՝ Լիթլի բանաձևը:

Դիցուք՝ $\alpha(t)$-ն $(0,t)$ ժամանակի ընթացքում համակարգում ստացված հայտերի թիվն է, իսկ $\gamma(t)$-ն՝ $(0,t)$ ժամանակի ընթացքում համակարգում բոլոր հայտերի մնալու գումարային ժամանակն է: (0,t) ժամանակի ընթացքում հայտերի ստացվելու λ_t հաճախությունը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով՝

$$\lambda_t = \alpha(t)/t:$$

T_t-ով նշանակենք (0,t) ժամանակի ընթացքում համակարգ եկած բոլոր հայտերով միջինացված մեկ հայտի համակարգում գտնվելու ժամանակը: T_t-ն կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով՝

$$T_t = \gamma(t)/\alpha(t):$$

Եթե $\overline{N}_t$-ն (0,t) ժամանակի ընթացքում համակարգում ստացված հայտերի միջին թիվն է, ապա այն կարելի է որոշել՝

$$N_t = \gamma(t)/t$$

բանաձևով, որտեղից՝ $\overline{N}_t$-ի համար, կստանանք՝

$$\overline{N}_t = \lambda_t T_t:$$

Եթե հերթը գտնվում է ստացիոնար ռեժիմում և գոյություն ունեն հետևյալ սահմանները՝

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\lambda_t,\ \ T = \lim_{t\to\infty}T_t$$

ապա համակարգում հայտերի միջին թվի համար կստանանք՝

$$\overline{N} = \lim_{t\to\infty}\overline{N}_t$$

Այսպիսով ստացիոնար ռեժիմում. երբ ճշմարիտ է $0\le\rho<1$ պայմանը, համակարգում հայտերի միջին $\overline{N}$ թիվը հավասար է համակարգում հայտերի ստացվելու λ հաճախության և համակարգում հայտի մնալու միջին T ժամանակի արտադրյալին՝ λT:

Սա հերթերի տեսությունից հայտնի Լիթլի բանաձևն է՝

$$\overline{N} = \lambda T:$$

Այս բանաձևը ճշմարիտ է սպասարկման բոլոր համակարգերի համար, անկախ հայտերի մուտքի հոսքի A(t) և դրանց սպասարկման ժամանակի B(t) բաշխման ֆունկցիաների տեսքից, հերթում գտնվող հայտերի սպասարկման կարգից կամ սարքերի թվից և այլն: Սա հերթերի տեսության պահպանման օրենքներից մեկն է:

Քանի որ, $T=\overline{x}+W$, որտեղ W-ն հերթում հայտերի մնալու (սպասելու) միջին ժամանակն է, ապա $\overline{N}$-ի համար Լիթլի բանաձևից կստանանք՝

$$\overline{N} = \lambda T = \lambda(\overline{x}+W) = \overline{N}_u + \overline{N}_q:$$

Այստեղ $\overline{N}_q=\lambda W$-ի՝ հերթում գտնվող (սպասող) հայտերի միջին թիվն է, իսկ $\overline{N}_u=\lambda\overline{x}$-ի սպասարկման սարքում գտնվող (սպասարկվող) հայտերի միջին թիվն է: Բանաձևից հետևում է, որ համակարգի ρ-ի բեռնվածության գործակիցը հավասար է սպասարկման սարքում հայտերի միջին թվին՝

$\rho=N_u$, իսկ G|G|∞ տեսակի համակարգի դեպքում՝ հայտերի սպասարկմամբ զբաղված սարքերի միջին թվին:

Այժմ քննարկենք հայտերի առաջնություններով սպասարկման համակարգերում գործող պահպանման օրենքները: Կդիտարկենք հայտերի առաջնություններով սպասարկման այնպիսի համակարգեր, որոնցում ոչ մի աշխատանք (նոր սպասարկման հայտ) չի ստեղծվում և չի կորչում: Համակարգում աշխատանքի կորստին կարող է համապատասխանել, օրինակ, համակարգից հայտի հեռանալը նախքան նրա սպասարկման ավարտը, իսկ աշխատանքի ստեղծմանը կարող է համապատասխանել հերթի առկայության դեպքում նրա սպասարկող սարքի (իսկ G|G|m տեսակի համակարգի դեպքում՝ որևէ սարքի) պարապուրդը: Նման՝ կուտակված աշխատանքը պահպանող համակարգերը կոչվում են «պահպանական»: Այսպիսի համակարգերում պահպանման օրենքները հենվում են t պահին համակարգում կուտակված անավարտ աշխատանքի՝ U(t)-ի, հայտերի սպասարկման կարգից անկախ լինելու հատկության վրա:

U(t)-ն կարելի է որոշել նաև որպես t պահին համակարգում գտնվող բոլոր հայտերի սպասարկման գումարային ժամանակ կամ t պահին համակարգում ստացվող հայտի սպասման հնարավոր (վիրտուալ) ժամանակ: U(t)-ի սահմանումից հետևում է, որ U(t)>0 պայմանի դեպքում 1 արագությամբ (անկյունային գործակցով) նվազող ոչ բացասական ֆունկցիա է, իսկ համակարգում հայտերի ստացվելու պահերին նա ունի այդ հայտերի սպասարկման ժամանակի արժեքին հավասար ուղղահայաց թռիչքներ: Այստեղից պարզ է, որ U(t)>0-ի դեպքում համակարգն զբաղված է հայտերի սպասարկմամբ, իսկ U(t)=0-ի դեպքում ազատ է հայտերից:

Դիտարկենք k թվով հայտերի հոսքերով M|G|1 տեսակի, առաջնություններով սպասարկման համակարգը: Դիցուք՝ համակարգում հայտերի հոսքերը համարակալված են i=1,2,...,k թվերով: Կընդունենք, որ մեծ համար ունեցող հայտերի հոսքին համապատասխանում է ավելի բարձր առաջնության կարգ, այսինքն՝ i համարի հոսքին պատկանող հայտերը ունեն ավելի բարձր սպասարկման առաջնություն քան 1,2,...,i-1 համարներին պատկանողները:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

λ_i i-րդ առաջնության հայտերի հոսքի հաճախությունը, i=1,2,...k;

$\overline{x}_i$, $\overline{x}_i^{(2)}$ i-րդ առաջնության հոսքի հայտերի սպասարկման ժամանակի առաջին և երկրորդ կարգի մոմենտները;

ρ_i i-րդ առաջնության հոսքի հայտերով համակարգի բեռնվածության գործակիցը՝

$$\rho_i = \lambda_i \overline{x}_i ;$$

λ համակարգի մուտքում հայտերի գումարային հոսքի հաճախությունը՝

$$\lambda = \sum \lambda_i ;$$

ρ համակարգի բեռնվածության գործակիցը՝

$$\rho = \sum\rho_i = \sum \lambda_i \overline{x}_i \; ;$$

$\overline{x}$ համակարգում հայտերի սպասարկման միջին ժամանակը՝

$$\overline{x} = \sum \lambda_i / \lambda_i \overline{x}_i \; ;$$

W_i հերթում i-րդ առաջնության հայտերի մնալու միջին ժամանակը:

Ըստ պահպանման օրենքի՝ ցանկացած M|G|1 տիպի պահպանական համակարգի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i W_i = \begin{cases} \dfrac{\rho W_0}{(1-\rho)}, & \text{եթե } \rho < 1, \\ \infty, & \text{եթե } \rho \geq 1, \end{cases}$$

որտեղ՝

$$W_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i \overline{x}_i^{(2)}}{2} :$$

Այսինքն՝ քննարկվող համակարգի համար $\sum\rho_i W_i$ գումարը, անկախ համակարգում օգտագործվող առաջնությունների բաշխությունից, միշտ մնում է հաստատուն:

Պահպանման օրենքից հետևում է, որ որևէ առաջնության հայտերի հերթում մնալու միջին ժամանակի՝ W_i-ի արժեքի փոքրացման նպատակով նրանց սպասարկման կարգի ձևափոխման ցանկացած փորձ կհանգեցնի որոշակի հոսքերի հայտերի W_j-երի $j \neq i$ արժեքների մեծացման: Այսինքն՝ որևէ առաջնության հայտերի հերթում սպասելու միջին ժամանակի փոքրացումը անպայման կհանգեցնի հերթում որոշակի առաջնությունների հայտերի սպասելու ժամանակների մեծացման:

Եթե բոլոր i-երի համար $\overline{x} = \overline{x}_i$, ապա պահպանման օրենքից կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i W_i = \frac{\lambda W_0}{(1-\rho)}, \; i=1,2,\ldots,k :$$

Սակայն Լիթլի բանաձևից հայտնի է, որ $\lambda_i W_i = \overline{N}_{qi}$, որտեղից ցանկացած պահպանողական սպասարկման կարգի դեպքում կստանանք՝

$$\overline{N}_q = \sum_{i=1}^{k} \overline{N}_{qi} = \frac{\lambda W_0}{(1-\rho)} = \text{const} :$$

Եթե W-ն հերթում հայտերի մնալու միջին ժամանակն է, ապա՝

$$W = \overline{N}_q / \lambda = W_0/(1-\rho) = \text{const}:$$

Այսպիսով $\overline{x} = \overline{x}_i$ -ի պայմանի դեպքում հերթում հայտերի միջին թիվը և հերթում սպասելու միջին ժամանակը կախված չեն հայտերի սպասարկման կարգից: Նշենք, որ $\overline{x} = \overline{x}_i$ պայմանի դեպքում համակարգում հայտերի թվի բաշխումը նույնպես կախված չէ հայտերի սպասարկման կարգից:

Պահպանման օրենքներն օգտագործվում են ինչպես հերթերի քնութագրերի վերլուծության, այնպես էլ դրանց օպտիմացման և կառավարման խնդիրների լուծման համար: Դիտարկենք հերթում հայտերի առաջնություններով սպասարկման կարգի լավագույն տարբերակի ընտրության խնդիրը:

Օրինակ 1: Դիտարկենք մաքսային ծառայության հաճախորդների սպասարկման լավագույն կարգի ընտրության խնդիրը:

Դիցուք՝ ներմուծվող կամ արտահանվող բեռների ձևակերպման համար հաճախորդները դիմում են մաքսային ծառայությանը: Հաճախորդների սպասարկման ընթացքում մաքսատունը ապահովում է նրանց բեռների պահեստավորման և մշակման համար անհրաժեշտ պայմաններ ու տարածքներ: Դիցուք՝ ժամանակի յուրաքանչյուր պահին մաքսատունը կարող է կատարել նիայն մեկ հաճախորդի հայտի սպասարկում՝ բեռների մշակում և ձևակերպում:

Կախված ներմուծվող կամ արտահանվող բեռների տեսակից և նշանակությունից՝ սննդամթերք, տնտեսական ապրանք, վառելանյութ և այլն հաճախորդների հայտերը բաժանվում են k թվով խմբերի: Օրինակ՝ տնտեսական ապրանքները կարելի է ընդգրկել մի խմբում, վառելանյութը մյուս խմբում, իսկ սննդամթերքը երրորդում և այլն: Որքան բարձր է խմբի համարը, այնքան առաջնային է այդ խմբի մեջ ընդգրկված բեռների մշակման և ձևակերպման հայտերի սպասարկումը:

Դիտարկենք տարբեր խմբերի հայտերի սպասարկման հարաբերական առաջնություններով կարգը: Եթե i համարի խմբի բեռների սպասարկման հայտն ստացվելու պահին մաքսատունն զբաղված է հաճախորդների հայտերի սպասարկմամբ, ապա հայտը հերթի է դրվում՝ սպասելով մինչև մաքսատունը ազատվի i+1, i+2,…,k համարների խմբերի և i խմբի ավելի վաղ եկած հաճախորդների հայտերից: Եթե հաճախորդի գալու պահին մաքսատունը ազատ է, ապա անմիջապես սկսվում է նրա հայտի սպասարկումը՝ բեռների մշակումը և ձևակերպումը:

Հաճախորդի հայտի սպասարկման ավարտից հետո նրա բեռները հանվում են մաքսատան պահեստներից և տարածքներից:

Դիցուք՝ մաքսատանը i համարի խմբի բեռների սպասարկման հայտերի հոսքն ունի λ_i հաճախության պուասոնյան բաշխում, իսկ մաքսատանը նրանց սպասարկման ժամանակը՝ $\overline{x}_i$ միջին արժեքով $B_i(t)$ բաշխման ֆունկցիա: i համարի խմբի բեռների մաքսատան հերթում միավոր ժամանակ, օրինակ՝ մեկ ժամ կամ մեկ օր, սպասելու դեպքում հաճախորդների վնասները՝ կորուստները, կազմում են C_i միավոր: Կորուստները կարող են պայմանավորված լինել բեռների պահեստավորման ծախսերով, նրանց փչացմամբ, փոխադրամիջոցների պարապուրդի ծախսերով, պայմանագրային ժամկետների խախտմամբ և այլն:

Քննարկենք մաքսատան հերթում հաճախորդների սպասումով պայմանավորված գումարային միջին կորուստները մինիմացնող բեռների տարբեր խմբերի միջև հարաբերական առաջնությունների լավագույն կարգի նշանակման խնդիրը:

Դիտարկվող խնդրում մաքսատան աշխատանքը կարելի է ներկայացնել k թվով հարաբերական առաջնություններով հայտերի սպասարկման M|G|1 տեսակի համակարգի օգնությամբ: Մաքսատան աշխատանքը կքննարկենք ստացիոնար ռեժիմում, երբ ճշմարիտ է հետևյալ պայմանը.

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{x}_i<1:$$

Ստացիոնար ռեժիմում մաքսատան աշխատանքի դեպքում հաճախորդների միավոր ժամանակում գումարային C միջին կորուստները կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով.

$$C=\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i\rho_i W_i}{\overline{x}_i},$$

որտեղ՝ $\rho_i=\lambda_i\overline{x}_i$-ն մաքսատան i խմբի հայտերով պայմանավորված բեռնվածության գործակիցն է, իսկ W_i-ն մաքսատան հերթում i խմբի հայտերի սպասման միջին ժամանակն է:

Կատարելով հետևյալ նշանակումները՝ $f_i=C_i/\overline{x}_i$, $g_i=\rho_i W_i$ գումարային C միջին կորուստների մինիմացման խնդիրը կարելի է ձևակերպել որպես $\Sigma f_i g_i$ գումարի մինիմացման խնդիր: Քանի որ դիտարկվող համակարգը «պահպանական» է, ապա առաջնություններով համակարգերի պահպանման օրենքի համաձայն (տես բաժնում) հայտերի տարբեր խմբերի միջև հարաբերական առաջնությունների ցանկացած վերաբաշխման դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ պայմանը՝

$$\Sigma f_i g_i=\text{const}:$$

Միավոր ժամանակում գումարային C միջին կորուստների նվազագույն արժեքն ապահովող առաջնությունների վերաբաշխման կարգը որոշվում է՝ $f_1<f_2<\ldots<f_k$ պայմանից: Այսինքն՝ որպեսզի գումարային C միջին կորուստները լինեն նվազագույնը, անհրաժեշտ է հայտերի խմբերի միջև առաջնությունները բաշխել ըստ f_i մեծությունների արժեքների աճի՝ որքան մեծ է f_i-ի արժեքը, այնքան առաջնային է նրան համապատասխանող հայտերի խմբի սպասարկման կարգը:

Դիտարկենք հետևյալ թվային օրինակը: Դիցուք՝ մաքսատանը դիմող հաճախորդների հայտերը բաժանված են երեք խմբերի: Առաջին խմբում ընդգրկված են սննդամթերքի բեռները, երկրորդում՝ վառելանյութինը, իսկ երրորդում՝ տնտեսական և արդյունաբերական ապրանքներինը:

Դիցուք՝ համապատասխան խմբերի հայտերն ունեն հետևյալ պարամետրերը՝

$$\lambda_1=0.1,\ \lambda_2=0.1,\ \lambda_3=0.2,\ \overline{x}_1=1,\ \overline{x}_2=1,\ \overline{x}_3=3,\ C_1=22,\ C_2=10,\ C_3=15:$$

Գումարային C կորուստները մինիմացնող հայտերի սպասարկման առաջնությունների նշանակման կարգը կարելի է որոշել հետևյալ հարաբերությունների օգնությամբ՝

$$C_1/\overline{x}_1=22/2>C_2/\overline{x}_2=10/1>C_3/\overline{x}_3=15/3:$$

Այսպիսով՝ սպասարկման առավելագույն առաջնություն պետք է ունենան առաջին խմբի հայտերը՝ սննդամթերքի բեռները: Այսինքն՝ այս խմբի նոր համարը, որը համապատասխանում է առաջնությունների նշանակման լավագույն կարգին, կլինի 3-ը: Երկրորդը կլինեն վառելանյութինը, որոնց նոր համարը կլինի 2-ը, և, վերջապես, երրորդը կլինեն տնտեսական և արդյունաբերական ապրանքների բեռները, որոնց նոր համարը կդառնա 1-ը: Առաջնությունների նման նշանակման դեպքում գումարային C միջին կորուստների նվազագույն արժեքը հավասար է 54.498-ի: Առաջնությունների ցանկացած այլ նշանակման դեպքում գումարային C միջին կորուստների արժեքը կլինի ավելի մեծ: Օրինակ, առաջնությունների հետևյալ նշանակման կարգի դեպքում, երբ առավելագույն առաջնություն ունեն տնտեսական և արդյունաբերական ապրանքների բեռները, որոնց նոր համարն է 3-ը, երկրորդը կլինեն վառելանյութերը, որոնց նոր համարն է 2-ը, և, վերջապես, երրորդը կլինեն սննդամթերքի բեռները, որոնց նոր համարն է 1-ը՝ գումարային C միջին կորուստների արժեքը հավասար կլինի 149.5-ի:

Այժմ քննարկենք հաճախորդների հայտերի խմբերի միջև սպասարկման բացարձակ առաջնությունների դեպքում գումարային C միջին կորուստների արժեքը մինիմացնող առաջնությունների նշանակման կարգը: Եթե մաքսատան հաճախորդների սպասարկումը կատարվում է հայտերի ընդհատված սպասարկումը շարունակելու տարբերակով բացարձակ առաջնություններով և մաքսատանը i համարի խմբի հայտերի սպասարկման ժամանակը ունի μ_i, i=1,2,...,k հաճախությամբ ցուցչային բաշխում, ապա միավոր ժամանակում գումարային C միջին կորուստների արժեքը մինիմացնող բացարձակ առաջնությունների նշանակման լավագույն կարգը համընկնում է հարաբերական առաջնությունների դեպքում վերը քննարկված կարգի հետ:

1.3. Սահմանափակ հերթ՝ M|M|1|K:

Դիտարկենք մարկովյան սպասարկման համակարգի վարքը, որը բաղկացած է մեկ սպասարկման սարքից և ունի հերթում հայտերի կուտակման սահմանափակ քանակությամբ տեղեր:

Կենթադրենք, որ համակարգի մուտքում հայտերի հոսքը ունի Պուասոնի բաշխում λ_i պարամետրով (հաճախությամբ), եթե համակարգում հայտերի քանակը հավասար է i-ի: Հայտերի սպասարկման ժամանակը ունի ցուցչային բաշխում μ_i պարամետրով (հաճախությամբ), եթե համակարգում հայտերի քանակը հավասար է i-ի: Համակարգում հայտերի սպասարկումը իրականացվում է հետևյալ կերպ: Եթե հայտի գալու պահին համակարգում ուրիշ հայտեր չկան, և սպասարկող սարքը ազատ է, ապա անմիջապես սկսվում է հայտի սպասարկումը: Եթե սպասարկող սարքը զբաղված է, և հերթում կան i թվով հայտեր՝ i<K, ապա նոր հայտը հերթ է կանգնում և համակարգում մնում է մինչև իր սպասարկման ավարտը: Հերթի առավելագույն հնարավոր երկարությունը սահմանափակ է և հավասար է K-ի: Եթե հայտի գալու պահին համակարգում կան K+1 հայտեր (մեկը սպասարկվում է,

իսկ K հայտեր գտնվում են հերթում), ապա եկած հայտը մերժվում է:

Ժամանակի սկզբնական ($t=0$) պահին համակարգը հայտերից ազատ է:

Հերթից հայտերի սպասարկումը իրականացվում է այսպես կոչված արդարացի հերթի սկզբունքով՝ այսինքն՝ ով շուտ է հերթի կանգնել, նա ավելի շուտ կսպասարկվի: Պետք է նշել, որ համակարգերում հերթից հայտերի ընտրության կարգը չի ազդում համակարգի որոշ կարևոր բնութագրերի վրա: Օրինակ՝ համակարգի հաջորդական սպասարկումից ազատ միջակայքերի երկարությունները կամ հերթում գտնվող հայտերի քանակը կախված չեն հայտերի հերթից ընտրության կարգից: Մարկովյան համակարգերի մի շարք այլ բնութագրերի անկախությունը հայտերի հերթից ընտրության կարգից պայմանավորված է հայտերի սպասարկման ժամանակի և դրանց մուտքի հոսքի ցուցչային բաշխման հատկություններով:

Դիտարկվող համակարգի վարքը կարելի է նկարագրել համասեռ մարկով-յան գործընթացով: Գործընթացի վիճակ ասելով կհասկանանք տվյալ t պահին համակարգում եղած հայտերի քանակը: Գործընթացի հնարավոր վիճակների E բազմությունը վերջավոր է և բաղկացած է 0,1,2,...K+1 տարրերից:

Ինչպես նշվել է XI բաժնում, համակարգի վարքը նկարագրող մարկովյան գործընթացի հետազոտումը հանգում է համապատասխան Q հանձնությունների մատրիցի տարրերի որոշմանը և Կոլմոգորով-Չեպմենի հավասարումների լուծմանը: Վերջիններս նկարագրում են համակարգի անցումային ռեժիմը՝ կախված t ժամանակից, իսկ $t\to\infty$ դեպքում համակարգի ասիմպտոտային վարքը՝ մասնավորապես ստացիոնար ռեժիմը:

XI բաժնում քննարկված են մարկովյան գործընթացի և նրա մասնավոր դեպք հանդիսացող բազմացման ու կործանման գործընթացի համար Q մատրիցի տարրերի որոշման երկու եղանակներ՝ գործընթացի անցումային հավանականությունների և տարբեր վիճակներում անցման սպասման ժա-մանակների ստոխաստիկ առնչությունների եղանակները:

Դիտարկվող համակարգի վարքը նկարագրվում է վիճակների վերջավոր $E=\{0,1,\ldots,K+1\}$ բազմությունով բազմացման ու կործանման գործընթացով:

Այժմ անցնենք Q մատրիցի տարրերի որոշմանը երկու եղանակների օգնությամբ: Դիտարկենք Δt «փոքր» ժամանակի ընթացքում համակարգի վիճակի հնարավոր փոփոխությունների հավանականությունները:

Դիցուք՝ $\pi_i(t)$-ն՝ ժամանակի t պահին համակարգում i քանակի հայտերի գտնվելու հավանականությունն է: Դիտարկենք համակարգում հայտերի քանակի հնարավոր փոփոխությունները $(t,t+\Delta t)$ ժամանակահատվածում: Ժամանակի $t+\Delta t$ պահին համակարգը կգտնվի i վիճակում, եթե կատարվել է հետևյալ անհամատեղելի փոխբացառող երեք պայմաններից որևէ մեկը՝

1. Ժամանակի t պահին համակարգում հայտերի քանակը հավասար է i-ի, և $(t,t+\Delta t)$ ժամանակահատվածում վիճակի փոփոխություն չի կատարվել.

2. Ժամանակի t պահին համակարգում հայտերի քանակը հավասար է $(i-1)$-ի, և $(t,t+\Delta t)$ ժամանակահատվածում եկել է նոր հայտ.

3. Ժամանակի t պահին համակարգում հայտերի քանակը հավասար է $(i+1)$-ի, և $(t,t+\Delta t)$ ժամանակահատվածում սպասարկվել է մեկ հայտ:

Առաջին պատահույթի (պայմանի) հավանականությունը հավասար է t պահին համակարգի i վիճակում գտնվելու $\pi_i(t)$ հավանականության և Δt ժամանակահատվածում i վիճակից i վիճակ անցման $p_{i,i}(\Delta t)$ հավանականության արտադրյալին:

Երկրորդ պատահույթի հավանականությունը հավասար է t պահին համակարգի i–1 վիճակում գտնվելու $\pi_{i-1}(t)$ հավանականության և Δt ժամանակահատվածում i–1-ից i վիճակ անցման $p_{i-1,i}(\Delta t)$ հավանականության արտադրյալին:

Երրորդ պատահույթի հավանականությունը հավասար է t պահին համակարգի i+1 վիճակում գտնվելու $\pi_{i+1}(t)$ հավանականության և Δt ժամանակահատվածում i+1-ից i վիճակ անցման $p_{i+1,i}(\Delta t)$ հավանականության արտադրյալին:

Գործընթացի ցանկացած ուրիշ վիճակներից i վիճակ, կամ նշված երեք դեպքերում միջանկյալ վիճակներ ընկնելով անցումների հավանականությունները Δt ժամանակի ընթացքում ունեն $0(\Delta t)$ անվերջ փոքր մեծության կարգ:

Այսպիսով $\pi_i(t+\Delta t)$ հավանականությունների համար լրիվ հավանականությունների բանաձևից կստանանք՝

$$\pi_i(t+\Delta t) = \pi_i(t)p_{i,i}(\Delta t)+\pi_{i-1}(t)p_{i-1,i}(\Delta t)+\pi_{i+1}(t)p_{i+1,i}(\Delta t)+0(\Delta), \quad 1\le i\le K:$$

i=0-ի և i=K+1-ի դեպքերում համապատասխան հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\pi_0(t+\Delta t) = \pi_0(t)p_{0,0}(\Delta t)+\pi_1(t)p_{1,0}(\Delta t)+0(\Delta t),$$

$$\pi_{K+1}(t+\Delta t) = \pi_{K+1}(t)p_{K+1,K+1}(\Delta t)+\pi_K(t)p_{K,K+1}(\Delta t)+0(\Delta t): \qquad (1.1)$$

Նշենք նաև, որ $\pi_i(t)$ հավանականությունները t-ի ցանկացած արժեքի համար պետք է բավարարեն նորմավորման հետևյալ պայմանին՝

$$\sum_{i=0}^{K+1}\pi_i(t) = 1: \qquad (1.2)$$

Օգտվելով ցուցչային բաշխման հետազդեցության բացակայության հատկությունից և լրիվ հավանականությունների բանաձևից, $p_{ij}(\Delta t)$ անցումային հավանականությունների համար կստանանք՝

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = e^{-\mu_i\Delta t}(1-e^{-\lambda_i\Delta t}) = (1-\mu_i\Delta t)\lambda_i\Delta t+0(\Delta t) = \lambda_i\Delta t+0(\Delta t),\ i\ge 0,$$

$$p_{i+1,i}(\Delta t) = e^{-\lambda_{i+1}\Delta t}(1-e^{-\mu_{i+1}\Delta t}) = (1-\lambda_{i+1}\Delta t)\mu_{i+1}\Delta t+0(\Delta t) = \mu_{i+1}\Delta t+0(\Delta t),\ i\ge 0,$$

$$p_{ii}(\Delta t) = e^{-\mu_i\Delta t}\cdot e^{-\lambda_i\Delta t} = e^{-(\mu_i+\lambda_i)\Delta t} = 1-(\mu_i+\lambda_i)\Delta t+0(\Delta t),\ i\ge 1:$$

$p_{ij}(\Delta t)$ հավանականությունների արժեքները տեղադրելով (1.1) հավասարումների մեջ, փոփոխականների խմբավորումից և $(\pm\Delta t\to 0)$ սահմանային անցումից հետո ապացուցվում է $\pi_i'(t)$ ածանցյալի գոյությունը:

Այստեղից $\pi_i(t)$ հավանականությունների համար ստացվում է դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$d\pi_i(t)/dt = -(\lambda_i+\mu_i)\pi_i(t) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\pi_{i+1}(t),\ 1\le i\le K,$$

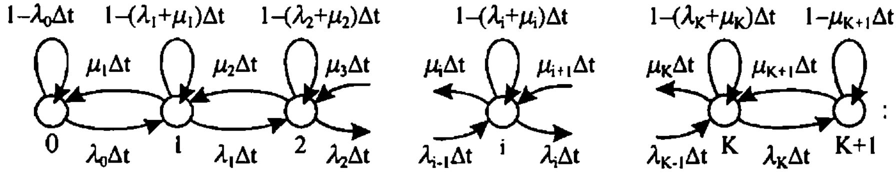
$$d\pi_0(t)/dt = -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t),$$

$$d\pi_{K+1}(t)/dt = -\mu_{K+1}\pi_{K+1}(t) + \lambda_K\pi_K(t): \qquad (1.3)$$

Քանի որ t=0 պահին համակարգը ազատ է հայտերից, ապա $\pi_i(t)$ բաշխումը բավարարում է նաև հետևյալ պայմաններին.

$$\pi_0(0) = 1,\ \pi_i(0) = 0,\ 1\le i\le K+1,$$

Համակարգի վարքը նկարագրող մարկովյան գործընթացի անցումների հավանականային գրաֆը բերված է ստորև՝



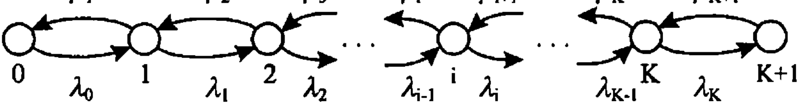
:

Իսկ գործընթացի հաճախության Q մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{K-1} & -(\lambda_{K-1}+\mu_{K-1}) & \lambda_{K-1} \\ 0 & & 0 & 0 & \mu_{K+1} & -\mu_{K+1} \end{pmatrix}:$$

Q մատրիցի տարրերի և $\pi_i(t)$ հավանականությունների որոշման համար նաև կարելի է օգտվել գործընթացի անցումների հաճախությունների գրաֆից և գործընթացի յուրաքանչյուր վիճակում հայտերի հոսքի հաճախությունների հաշվեկշռից:

Գործընթացի անցումային՝ հաճախությունների գրաֆը հետևյալն է.



Ըստ հաճախությունների հաշվեկշռի գործընթացի՝ որևէ i· վիճակից դուրս գալու և այդ վիճակ ընկնելու հաճախությունների տարբերությունը պետք է հավասար լինի այդ վիճակում հավանականությունների հաճախության փոփոխությանը: Քննարկվող դեպքում i+1 և i–1 վիճակներից դեպի i վիճակ հաճախությունները, համապատասխանորեն հավասար են $\mu_{i+1}\pi_{i+1}(t)$-ի և $\lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t)$-ի: i վիճակից դուրս գալու հաճախությունը հավասար է

$(\lambda_i+\mu_i)\pi_i(t)$-ի, իսկ i վիճակում հավանականությունների փոփոխությունը հավասար է $d\pi_i(t)/dt$-ի (հիշենք պատահական մեծության բաշխման խտության հավանականային մեկնաբանումը): Այսպիսով, ըստ հաճախությունների՝ հաշվեկշռի i վիճակի համար կստանանք՝

$$d\pi_i(t)/dt = \pi_{i-1}(t)\lambda_{i-1}-\pi_i(t)(\mu_i+\lambda_i)+ \pi_{i+1}(t)\mu_{i+1},\ i\geq 1: \qquad (1.4)$$

0 և K+1 վիճակների համար կարելի է գրել հետևյալ հավասարումները՝

$$d\pi_0(t)/dt = \pi_1(t)\mu_1-\lambda_0\pi_0(t),$$

$$d\pi_{K+1}(t)/dt = \lambda_K\pi_K(t)-\mu_{K+1}\pi_{K+1}(t):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ (1.4) հավասարումների համակարգը ճշտորեն համընկնում է (1.3)-ի հետ: Այսպիսով՝ հավասարումները կազմելու համար բավական է որոշել Q մատրիցի տարրերը և կիրառել Կոլմոգորով-Չեպմենի ուղիղ կամ հակադարձ հավասարումները: Q մատրիցի տարրերի որոշման մեկ այլ՝ կառուցվածքային եղանակ, որը հիմնված է ստոխաստիկ հավասարությունների և գործընթաց ներմուծված մարկովյան շղթայի վրա, դիտարկված է X բաժնում:

(1.3) հավասարումների լուծումների որոշումը և հետազոտումը նույնիսկ պարզագույն սպասարկման համակարգերի համար կապված է հաշվողական մեծ բարդությունների հետ: Այդ իսկ պատճառով գործնականում դիտարկվում է համակարգերի ստացիոնար ռեժիմը: Գտնենք մեր համակարգի համար i վիճակում գտնվելու π_i ստացիոնար հավանականությունը: Եթե համակարգի համար գոյություն ունի ստացիոնար ռեժիմ, ապա $d\pi_i(t)/dt=0$ և $\pi_i = \lim_{t\to\infty}\pi_i(t)$: Այստեղից π_j, $0\leq j\leq K+1$ հավանականությունների համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$(\lambda_i+\mu_i)\pi_i = \lambda_{i-1}\pi_{i-1}+\mu_{i+1}\pi_{i+1},\ 1\leq i\leq K,$$

$$\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1,$$

$$\mu_{K+1}\pi_{K+1} = \lambda_K\pi_K: \qquad (1.5)$$

(1.5) հավասարումներն արտացոլում են ստացիոնար ռեժիմում գործընթացի i վիճակ մտնող և դուրս եկող հոսքերի հաճախությունների հավասար լինելը: (1.5) հավասարումները կազմելու համար բավական է հաճախությունների գրաֆում առանձնացնել որևէ i գագաթ և հաշվել դեպի i գագաթ եկող (i-1 և i+1 վիճակներից) և i գագաթից դուրս եկող (i-1 և i+1 վիճակները) հոսքերի հաճախությունները, որտեղ հաշվեկշռի հավասարության պայմանից կստանանք (1.5) համակարգի հավասարումները: Համակարգը պետք է լրացնել π_i, $0\leq i\leq K+1$, հավանականությունների նորմավորման պայմանով՝

$$\sum_{i=0}^{K+1}\pi_i = 1. \qquad (1.6)$$

(1.5) հավասարումների համակարգի լուծումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\pi_i = \pi_0\prod_{j=0}^{i-1}(\lambda_j/\mu_{j+1}),\ 0\leq i\leq K+1, \qquad (1.7)$$

որտեղ π_0-ն որոշվում է (1.6) պայմանից՝

$$\pi_0 = 1/(1+\sum_{i=1}^{K+1i-1}\prod_{j=0}(\lambda_j/\mu_{j+1})):$$

(1.7)-ը մարկովյան համակարգերի տեսության հիմնական հավասարումն է, որից որպես մասնավոր դեպքեր ստացվում են մարկովյան շատ համակարգերի լուծումները: Այդ լուծումները գտնելու համար պարտադիր չէ կազմել հաշվեկշռի հավասարումները. բավական է համոզվել, որ համակարգի վարքը նկարագրվում է բազմացման ու կործանման գործընթացով և որոշել նրա հաճախությունների Q մատրիցը:

Այժմ քննարկենք (1.4) հավասարումների ստացիոնար լուծումների գոյության հարցը: Դիտարկվող դեպքում, քանի որ համակարգի վարքը նկարագրող մարկովյան գործընթացը էրգոդիկ է, ապա $t\to\infty$ դեպքում գործընթացը միշտ ունի ստացիոնար (կայուն) π_i լուծումներ: Եթե $K=\infty$ (K-ն ձգտեցնում են $+\infty$-ն), ապա ստացիոնար լուծումների գոյության համար անհրաժեշտ է, $\pi_0>0$-ից: Ստացիոնար լուծումների գոյությունը հետազոտելու համար կազմենք հետևյալ գումարները.

$$S_1=\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}(\lambda_i/\mu_{j+1}),\ S_2=\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}(\mu_i/\lambda_{i+1}):$$

Դիտարկվող բազմացման ու կործանման գործընթացի բոլոր վիճակները էրգոդիկ կլինեն միայն այն դեպքում, երբ

$$S_1<\infty \text{ և } S_2=\infty: \tag{1.8}$$

Նշենք, որ միայն էրգոդիկության (1.8) պայմանի բավարարման դեպքում գոյություն ունեն (1.4) հավասարումների կայունացված π_i լուծումները: Էրգոդիկության պայմանը բավարարվում է միայն այն դեպքում, երբ սկսած որևէ i վիճակից $\{\lambda_i/\mu_{i+1}\}$ հաջորդականության բոլոր անդամները փոքր են մեկից, այսինքն՝ երբ գոյություն ունեն այնպիսի i_0 և $c<1$-ից, որ բոլոր $i\geq i_0$-երի համար ճշմարիտ է $\lambda_i/\mu_{i+1}< c < 1$ անհավասարությունը:

Հերթերի տեսության շատ մոդելներում նշված էրգոդիկության պայմանը բավարարվում է, ինչը թույլ է տալիս օգտագործել բազմացման ու կործանման գործընթացի π_i հավանականությունների համար ստացված ընդհանուր լուծումները:

Այժմ անցնենք դասական սպասարկման համակարգերի ստացիոնար բնութագրերի հետազոտմանը:

1.4 Անսահմանափակ հերթ՝ M|M|1:

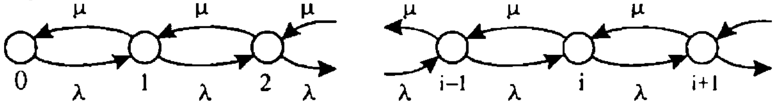
Համակարգում հայտերի մուտքի հոսքն ունի Պուասոնի, իսկ նրանց սպասարկման ժամանակը՝ ցուցչային բաշխում, համապատասխանորեն λ և μ պարամետրերով: Համակարգի վարքը կարելի է նկարագրել բազմացման ու կործանման գործընթացով, որի անցումների λ_{ij} հաճախությունները հավասար են՝

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda, \quad i=0,1,2,\dots,$$
$$\mu_{i+1,i} = \mu, \quad i=0,1,2,\dots :$$

Համակարգում հայտերի քանակը սահմանափակ չէ, իսկ դրանց սպասարկումը կատարվում է արդարացի հերթի սկզբունքով:

Համակարգի վարքը նկարագրող բազմացման ու կործանման գործընթացի E վիճակների բազմությունը բաղկացած է հետևյալ տարրերից՝ E={0,1,2,…,n,…}, որտեղ n-ը համակարգում հայտերի քանակն է:

Գործընթացի անցումների՝ հաճախությունների գրաֆն ունի հետևյալ տեսքը՝



Եթե բավարարվում են էրգոդիկության (1.8) պայմանները՝

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda/\mu)^i < \infty, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda/\mu)^{-i} = \infty,$$

ապա համակարգը ունի ստացիոնար ռեժիմ, որի π_i լուծումները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{j=0}^{i-1} \lambda/\mu = \pi_0 (\lambda/\mu)^i, \quad i \geq 0, \qquad \pi_0 = 1/(1+\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda/\mu)^i) : \qquad (1.9)$$

Հեշտ է նկատել, որ համակարգի էրգոդիկության պայմանները բավարարվում են միայն և միայն $\lambda/\mu<1$-ից դեպքում:

π_0 հավանականության համար S_1-ի զուգամիտման պայմանից կստանանք՝ $\pi_0=1-(\lambda/\mu)=1-\rho$, որտեղ $\rho=\lambda/\mu$-ն համակարգի զբաղվածության (բեռնվածության) գործակիցն է:

π_i ստացիոնար հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i, \quad i=0,1,2,\dots \qquad (1.10)$$

Այսպիսով, կայուն ռեժիմի դեպքում համակարգում i հայտերի գտնվելու հավանականությունը կախված է միայն λ-ի և μ-ի հարաբերությունից՝ համակարգի բեռնվածության ρ գործակցից:

Համակարգի բնութագրերի որոշումը: Համակարգում հայտերի $\overline{N}$ միջին քանակի համար մաթեմատիկական սպասելիի բանաձևից ունենք՝

$$\overline{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = (1-\rho)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right) = \rho/(1-\rho) :$$

Լիթլի բանաձևը կիրառելով համակարգում հայտի մնալու $\bar{t}$ միջին ժամանակի համար, կստանանք՝

$$\bar{t} = \overline{N}/\lambda, \quad \bar{t} = \rho/(1-\rho)\lambda = 1/[\mu(1-\rho)]:$$

Համակարգի կարևոր բնութագրերից է նաև համակարգում i-ից ոչ քիչ հայտերի գտնվելու հավանականությունը՝

$$p_i = \sum_{j\ge i}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=i}^{\infty} \rho^j (1-\rho) = \rho^i,\ i=0,1,\ldots:$$

Հերթում հայտերի միջին քանակը՝ $\overline{N}_q$-ն, որոշվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք՝ v-ն հերթում հայտերի պատահական քանակն է: Ակնհայտ է, որ v=0-ի, եթե համակարգում հայտեր չկան և v=n−1-ի, n=1,2,..., եթե համակարգում կա n հայտ (n−1-ը՝ հերթում և մեկը՝ սպասարկման սարքում): Հերթում n հայտերի գտնվելու հավանականությունը, երբ n>0-ից, հավասար է π_{n+1}-ի, իսկ n=0-ի դեպքում՝ $(\pi_0+\pi_1)$-ի: Հետևաբար, հերթում հայտերի $\overline{N}_q$ միջին քանակը հավասար է

$$\overline{N}_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \overline{N} - \rho = \rho^2/(1-\rho):$$

Ստորին q ինդեքսը queue (հերթ) բառի սկզբնատառն է:

Հայտի հերթում չսպասելու (զրոյական սպասման) հավանականությունը հավասար է π_0-ի, $\pi_0=1-\rho$, իսկ միավոր ժամանակում համակարգով անցած հայտերի միջին թիվը հավասար է $\lambda=(1-\pi_0)\mu$-ի: Դա այսպես կոչված համակարգի ծախսի հավասարումն է: Այն թույլ է տալիս հեշտությամբ որոշել π_0-ի արժեքը:

1.5 Սահմանափակ հերթով սպասարկման համակարգը

Դիցուք՝ համակարգում հայտերի քանակը սահմանափակ է և հավասար է K-ի: Դա նշանակում է, որ համակարգում առավելագույնը կարող են գտնվել K+1 հայտեր՝ K հատ հերթում, իսկ մեկը սպասարկման սարքում: Եթե որևէ հայտի գալու պահին համակարգում հերթի երկարությունը հավասար է K-ի, ապա այդ հայտը մերժվում է և չի սպասարկվում:

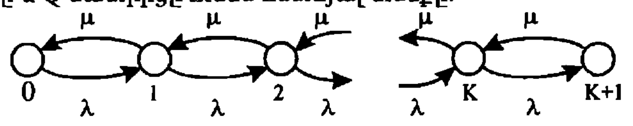
Պայմանավորվենք, որ համակարգի հայտերի մուտքի հոսքի և սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիաները ցուցչային են՝ λ և μ պարամետրերով:

Համակարգի վարքը կարելի է նկարագրել վիճակների վերջավոր E={0,1,...K+1} բազմությունով բազմացման ու կործանման գործընթացով, որի անցումների հաճախությունները հավասար են՝

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & \text{եթե } i < K+1, \\ 0, & \text{եթե } i \ge K+1, \end{cases}$$

$$\mu_i = \mu,\ i=1,2,\ldots,K+1:$$

Քանի որ E բազմությունը վերջավոր է, ապա համակարգը միշտ էրգոդիկ է և ունի ստացիոնար բաշխում: Գործընթացի անցման հաճախություններ գրաֆը և Q մատրիցը ունեն հետևյալ տեսքը.



$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}:$$

Օգտվելով (1.7) բանաձևերից, համակարգի ստացիոնար հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{j=0}^{i-1} (\lambda/\mu), \quad i \le K+1, \quad \pi_i=0, \quad i>K+1,$$

կամ

$$\pi_i = \pi_0 (\lambda/\mu)^i, \quad i \le K+1, \quad \pi_i=0, \quad i>K+1:$$

Այստեղ π_0-ն որոշվում է $\sum_{i=0}^{K+1} \pi_i = 1$ նորմավորման պայմանից և հավասար է՝

$$\pi_0 = \left[1+\sum_{i=0}^{K+1}(\lambda/\mu)^i\right]^{-1} = \left[1+\frac{\lambda/\mu(1-(\lambda/\mu)^{K+1})}{1-\lambda/\mu}\right]^{-1}$$

Որտեղից՝ գործընթացի ստացիոնար հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\pi_0 = (1-\rho)/(1-\rho)^{K+2}, \qquad \rho = \lambda/\mu,$$

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i/(1-\rho^{K+2}), \quad 0 \le i \le K+1, \quad \pi_i=0, \quad i>K+1:$$

Համակարգում հայտերի միջին $\overline{N}$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{K+1} i\pi_i,$$

իսկ հերթի միջին $\overline{N}_q$ երկարությունը՝

$$\overline{N}_q = \sum_{i=1}^{K+1} (i-1)\pi_i :$$

Հայտերի համակարգում $\bar{t}$ և հերթում $\bar{t}_q$ մնալու ժամանակների միջին արժեքները որոշվում են Լիթլի բանաձևի օգնությամբ, ըստ որի՝

$$\bar{t}_q = \overline{N}_q/\lambda, \quad \bar{t} = \overline{N}/\lambda :$$

Այսպիսով դասական սպասարկման համակարգի հիմնական ստացիոնար բնութագրերի հետազոտումն ավարտվում է: Անցնենք սպասարկման համակարգերի գործնական կիրառությունների քննարկմանը ավտոտեխսպասարկման ծառայության օրինակով:

2. Ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկության մոդել

2.1 Սպասարկման համակարգի նկարագրություն

Որպես սպասարկման համակարգի տիպային օրինակ, որի ծառայություններին հետ առօրյա կյանքում բավականին հաճախ ենք առնչվում, դիտարկենք ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկությունը, որը սպասարկում է որոշակի տարածքի բնակիչների ավտոմեքենաները: Շուկայական մրցակցության պայմաններում նման ձեռնարկության արդյունավետության ապահովումը պահանջում է հետազոտել ինչպես հաճախորդների պահանջները, նախասիրությունները և վարքը, այնպես էլ ձեռնարկության աշխատանքի կազմակերպման և կառավարման տարբեր եղանակները, նրա առանձին ծառայությունների կազմը և հաճախորդների սպասարկման կարգը:

Ձեռնարկության աշխատանքի կազմակերպման ձևերի և հաճախորդների սպասարկման կարգի հետազոտման և ընտրության ժամանակ պետք է հաշվի առնել, որ հաճախորդների և ձեռնարկության նպատակները և չափանիշները կարող են հակադրվել միմյանց:

Օրինակ՝ եթե հաճախորդներին հետաքրքրում է արագ, որակյալ, էժան և առանց հապաղումների սպասարկումը, ապա ձեռնարկությունը շահագրգռված է ապահովել իր ունեցած միջոցների առավելագույն բեռնվածությունը և եկամտաբերությունը: Վերջիններս պայմանավորված են այնպիսի գործոններով, ինչպիսիք են ձեռնարկության ծառայությունների և սպասարկող բրիգադների քանակը, նրանց տեխնիկական զինվածությունը, աշխատողների մասնագիտական որակավորումը, սպասարկման ամբողջականությունը, ծառայությունների և բրիգադների թողունակությունը և այլն:

Ձեռնարկության աշխատանքի կազմակերպման տարբեր եղանակների գնահատման համար կարող են օգտագործվել հերթերի տեսության տարբեր մոդելներ, որտեղ ձեռնարկությունը դիտարկվում է որպես մեկ ընդհանրացված սպասարկման համակարգ կամ միմյանց հետ փոխկապակցված տարբեր սպասարկման համակարգերի ցանց:

Դիտարկենք ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկությունը, որպես սպասարկման համակարգ: Ձեռնարկության մուտքի հոսքը ձևավորվում է հաճախորդների հայտերով: Հաճախորդների սպասարկման հայտերը կա-րելի է դիտել որպես միմյանցից անկախ առաջացող երևույթներ, որոնց հանդես գալու պահերի միջև ընկած ժամանակը նկարագրվում է որոշակի բաշխման օրենքով: Հաշվարկների համար բավարար ճշտությամբ ենթադրենք, որ ձեռնարկության մուտքում հայտերի հոսքը ունի Պուասոնի բաշխում, իսկ երկու հաջորդական հայտերի գալու պահերի միջև ընկած ժամանակը՝ ցուցչային բաշխում: Դիտարկենք հաճախորդների վարքի երեք տարբերակներ, որոնք պայմանականորեն կանվանենք՝

ա) Համբերատար հաճախորդ;
բ) Անհամբեր հաճախորդ;
գ) Հաշվենկատ հաճախորդ:

Առաջին դեպքում հաճախորդները դիմելով ձեռնարկություն՝ նրա ծառայությունների և բրիգադների զբաղվածության դեպքում պատրաստ են համբերատար սպասելու մինչև իրենց հայտի կատարման ավարտը:

Երկրորդ դեպքում հաճախորդները գալով ձեռնարկություն, կախված այդ պահին ձևավորված հերթի երկարությունից, ծառայությունների և բրիգադների զբաղվածությունից, կարող են հրաժարվել հերթում սպասելուց կամ սպասարկումից:

Երրորդ դեպքում հաճախորդները կարող են հեռանալ հերթից, եթե նրանց սպասարկման սպասելու ժամանակը գերազանցում է որոշակի տրված մեծությունը:

Այժմ դիտարկենք ձեռնարկությունում հաճախորդների հայտերի սպասարկման կազմակերպման մի քանի հնարավոր տարբերակներ:

1. Հաճախորդներին սպասարկում են m նույնատիպ աշխատակազմերը՝ բրիգադները, որոնք կազմված են ամբողջական սպասարկման համար անհրաժեշտ տեխնիկական միջոցներով և արհեստավարժ մասնագետներով: Բրիգադներն աշխատում են միմյանցից անկախ, իսկ նրանց կողմից հաճախորդի ամբողջական սպասարկման ժամանակը, ներառյալ անսարքությունների որոշումը և նորոգումը, ունի ցուցչային բաշխում:

2. Ձեռնարկության աշխատանքային բրիգադները կազմված են ըստ որոշակի մասնագիտությունների, և հաճախորդը ամբողջական սպասարկում ստանալու համար պետք է անցնի մի քանի բրիգադներով՝ ծառայությունների ցանցով:

Այս դեպքում ևս ընդունենք, որ տարբեր ծառայություններում ու բրիգադներում հաճախորդի սպասարկման ժամանակն ունի ցուցչային բաշխում:

Այժմ քննարկենք ձեռնարկությունում հաճախորդների հերթի կազմակերպումը և հերթից նրանց սպասարկման կարգը: Նշենք, որ ձեռնարկությունում հերթագոյացումը, մի կողմից, թույլ է տալիս բարձրացնել նրա ծառայությունների բեռնվածությունը և ամբողջ ձեռնարկության թողունակությունը, իսկ մյուս կողմից, լրացուցիչ ծախսեր է պահանջում տարածքների վարձակալման և հերթի կազմակերպման համար:

Դիտարկենք հաճախորդների հերթի կազմակերպման հետևյալ տարբերակները:

1. Հաճախորդներին սպասարկում են m բրիգադներ, հերթում սպասելու տեղերը բացակայում են: Եթե բոլոր բրիգադները զբաղված են, ապա նոր եկած հաճախորդների հայտերը մերժվում են:

2. Հաճախորդներին սպասարկում են m բրիգադներ, հերթերի առավելագույն երկարությունը ձեռնարկությունում սահմանափակված է $K \geq 0$, $K \in N$ հաստատունով: Եթե հերթերից մեկում կան K հաճախորդներ, և այդ հերթ է

գալիս K+1-րդը, ապա նրա հայտը մերժվում է: Հաճախորդը այս դեպքում կարող է կամ փորձել որոշակի ժամանակից հետո նորից դիմել այս ձեռնարկությանը կամ մերժումից հետո դիմել մեկ ուրիշ ձեռնարկության:

3. Հաճախորդներին սպասարկում են m բրիգադներ, իսկ նրանց հերթերի երկարությունները սահմանափակված չեն: Համբերատար հաճախորդը կարող է ձեռնարկությունում սպասել մինչև իր սպասարկման ավարտը:

4. Հաճախորդների սպասարկումը ձեռնարկությունում սկսվում է անմիջապես, նրանց գալու պահին՝ որքան հաճախորդ, այնքան սպասարկող բրիգադ տարբերակով:

Ձեռնարկությունը իր մշտական հաճախորդների կամ, համապատասխան պայմանագրի դեպքում, որևէ ֆիրմայի արտադրած կամ վաճառած ավտոմեքենաների գնորդների համար կարող է իրականացնել ինչպես երաշխիքային սպասարկում, այնպես էլ պատահական ընթացիկ հաճախորդների սպասարկում: Առաջին դեպքում՝ երաշխիքային սպասարկման սպասող հաճախորդների թիվը սահմանափակ է և ժամանակի ընթացքում քիչ է փոփոխվում:

Երկրորդ դեպքում ձեռնարկության հաճախորդների հոսքը ձևավորվում է ինչպես նրա սպասարկման տարածքում բնակվող ավտոտերերի, այնպես էլ տարանցիկ հաճախորդների կողմից:

Վերջապես, նկարագրենք ձեռնարկությունում հաճախորդների հերթից սպասարկման կարգը: Չնայած հնարավոր սպասարկման կարգի բազմազանությանը, հետագայում կդիտարկենք հաճախորդների սպասարկման «արդարացի» հերթի տարբերակը, երբ հաճախորդների սպասարկումն իրականացվում է ըստ նրանց հերթի:

Այժմ անցնենք ձեռնարկության գործելակերպը նկարագրող սպասարկման համակարգերի քննարկմանը: Պարզության համար սպասարկման համակարգերը կնշանակենք հերթերի տեսությունում ընդունված հապավումներով:

3. M|M|m|K տիպի սպասարկման համակարգ

Դիտարկենք m նույնատիպ սպասարկման բրիգադներից բաղկացած ձեռնարկության մոդելը: Ենթադրենք, որ հաճախորդների հոսքը ձեռնարկություն ունի λ հաճախությամբ (պարամետրով) Պուասոնի բաշխում: Յուրաքանչյուր բրիգադում հաճախորդի սպասարկման ժամանակն ունի μ պարամետրով ցուցչային բաշխում: Եթե հաճախորդի գալու պահին ձեռնարկությունում ազատ է գոնե մեկ բրիգադ, ապա նրա հայտը անմիջապես ընդունվում է սպասարկման, և նա ձեռնարկությունում մնում է մինչև իր ամբողջական սպասարկման ավարտը (այսինքն՝ դիտարկվում է համբերատար հաճախորդների տարբերակը): Եթե հաճախորդի գալու պահին բոլոր բրիգադներն զբաղված են, բայց հերթում կան ազատ տեղեր, ապա հաճախորդը հերթ է կանգնում և համբերատար սպասում մինչև իր սպասարկման ավարտը:

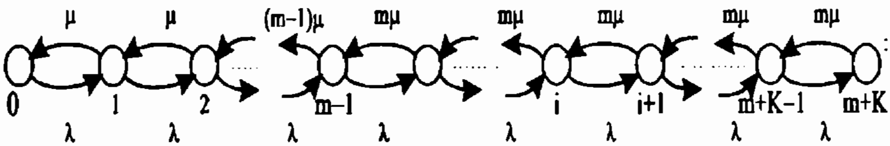
Հաճախորդների սպասարկումը ծեռնարկությունում իրականացվում է ըստ նրանց ունեցած հերթի՝ ով եկել է առաջինը նա էլ սպասարկվում է առաջինը: Յուրաքանչյուր հաճախորդ սպասարկվում է միայն մեկ բրիգադի կողմից: Յուրաքանչյուր բրիգադ միաժամանակ ունակ է սպասարկելու միայն մեկ հաճախորդի: Ձեռնարկությունում հաճախորդների հերթի երկարությունը սահմանափակված է $K \geq 0$, $K \in N$ հաստատունով: Եթե հաճախորդի գալու պահին հերթում բոլոր K տեղերը զբաղված են, ապա նրա հայտը մերժվում է:

Սպասարկման համակարգի բնութագրերի հետազոտման համար կառուցենք նրա վարքը նկարագրող բազմացման ու կործանման գործընթացը: Որպես գործընթացի վիճակներ՝ դիտարկենք համակարգում (այսինքն՝ հերթում և սպասարկող սարքերի մոտ) գտնվող հաճախորդների թիվը: Հետազոտվող գործընթացի վիճակների թիվը վերջավոր է, իսկ վիճակների E բազմություն ունի հետևյալ տեսքը. $E=\{0,1,2,\ldots,m+K\}$: Գործընթացի Q հաճախությունների մատրիցի տարրերը որոշվում են հետևյալ հավասարություններով.

$$\lambda_i = \lambda, \quad i=\overline{0, m+K},$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & \text{եթե } i \leq m, \\ m\mu, & \text{եթե } i \geq m : \end{cases}$$

Քանի որ գործընթացի վիճակների E բազմությունը վերջավոր է, ապա համա-կարգի համար գոյություն ունի ստացիոնար ռեժիմ: Գործընթացի անցումների գրաֆը բերված է գծագրում:



Գործընթացի π_i ստացիոնար հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$\begin{gathered} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1, \\ (\lambda+i\mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1}, \quad i\leq m-1, \\ (\lambda+m\mu)\pi_m = \lambda\pi_{m-1}+m\mu\pi_{m+1}, \\ (\lambda+m\mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1}+m\mu\pi_{i+1}, \quad m\leq i\leq m+K-1, \\ m\mu\pi_{m+k} = \lambda\pi_{m+k-1} \end{gathered} \tag{3.1}$$

և բավարարում են նորմավորման պայմանին՝

$$\sum_{i=0}^{m+k} \pi_i = 1 :$$

Հավասարումների լուծումները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\pi_i = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\pi_0,\quad i=\overline{0,m},$$

$$\pi_{m+i} = (\lambda/m\mu)^i\pi_m,\quad i=\overline{0,K}\ :$$

Գործընթացի π_i ստացիոնար հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$\begin{aligned}
&\lambda\pi_0 = \mu\pi_1,\\
&(\lambda+i\mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1},\quad i\le m-1,\\
&(\lambda+m\mu)\pi_m = \lambda\pi_{m-1}+m\mu\pi_{m+1},\\
&(\lambda+m\mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1}+m\mu\pi_{i+1},\quad m\le i\le m+K-1,\\
&m\mu\pi_{m+k} = \lambda\pi_{m+k-1}
\end{aligned}\tag{3.1}$$

և բավարարում են նորմավորման պայմանին՝

$$\sum_{i=0}^{m+k}\pi_i = 1\ :$$

Հավասարումների լուծումները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\pi_i = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\pi_0,\quad i=\overline{0,m},$$

$$\pi_{m+i} = (\lambda/m\mu)^i\pi_m,\quad i=\overline{0,K}\ :$$

Այստեղ π_0-ն՝ համակարգի պարապուրդի հավանականությունն է և որոշվում է նորմավորման պայմանից: Ներմուծելով հետևյալ նշանակումները՝

$$\alpha=\lambda/\mu,\quad P(i,\alpha)=\alpha^i/i!,\quad i=\overline{0,K},$$

$$R(j,\alpha)=\sum_{i=0}^{j}\alpha^i/i! = \sum_{i=0}^{j}P(i,\alpha),\quad x=\lambda/m\mu,$$

π_i հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\pi_i = P(i,\alpha)\pi_0,\quad i=\overline{0,m},$$

$$\pi_{m+i} = x^iP(m,\alpha)\pi_0,\quad i=\overline{0,K},$$

$$\pi_0 = 1\Bigg/\left(\sum_{i=0}^{m-1}\alpha^i\frac{1}{i!}+\sum_{i=0}^{K}x^i\frac{\alpha^m}{m!}\right) = 1/R(m,\alpha)+P(m,\alpha)x\frac{1-x^K}{1-x}:$$

Քանի որ գործընթացը ստացիոնար լուծումներ ունի x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, ապա հետագայում կդիտարկենք երկու դեպք՝ $x\neq1$ և $x=1$: Նշված դեպքերում π_0-ի համար կստանանք՝

$$\pi_0 = \begin{cases} 1/R(m,\alpha)+P(m,\alpha)x\dfrac{1-x^K}{1-x}, & \text{երբ } x\neq1,\\ 1/R(m,m)+KP(m,m), & \text{երբ } x=1\end{cases}:$$

Անցնենք սպասարկման համակարգի բնութագրերի հետազոտմանը:

Հաճախորդի սպասարկման P_s (service) հավանականությունը հավասար է հաճախորդի գալու պահին գոնե մեկ ազատ բրիգադ կամ հերթում գոնե մեկ ազատ տեղ լինելու հավանականությանը՝

$$P_s = \sum_{i=0}^{m+K-1} \pi_i = 1 - \pi_{m+K} = 1 - x^K \pi_m : \qquad (3.2)$$

Համակարգում հաճախորդների սպասարկմամբ զբաղված բրիգադների միջին քանակը հավասար է՝

$$\overline{R} = \sum_{i=0}^{m} i\pi_i + m\sum_{i=0}^{m} \pi_{m+i} = P_s \cdot (\lambda/\mu),$$

որտեղից, հաշվի առնելով (3.2)-ը, $\overline{R}$ -ի համար կստանանք՝

$$\overline{R} = \alpha(1 - x^K \pi_m):$$

Հետևաբար, մեկ բրիգադի զբաղվածության π_b (buzy) հավանականությունը հավասար կլինի՝

$$\pi_b = \overline{R}/m = \alpha/m(1 - x^K \pi_m):$$

Ձեռնարկության լրիվ բեռնվածության հավանականությունը հավասար է նրա բոլոր բրիգադների զբաղվածության հավանականությանը՝

$$\pi_b = \sum_{i=0}^{K} \pi_{m+i} = \frac{1 - x^{K+1}}{1 - x} \pi_m :$$

Հերթում հաճախորդների $\overline{N}_q$ միջին քանակը հավասար է՝

$$\overline{N}_q = \sum_{i=1}^{K} i\pi_{m+i} = \begin{cases} \pi_m x \dfrac{1 - x^K[K(1-x)+1]}{(1-x)^2}, & \text{եթե } x \neq 1, \\ \pi_m \dfrac{K(K+1)}{2}, & \text{եթե } x = 1 : \end{cases}$$

Հաճախորդների հերթում մնալու միջին $\bar{t}_q$ ժամանակը որոշվում է Լիթլի բանաձևից և հավասար է՝

$$\bar{t}_q = \overline{N}_q/\lambda :$$

Իսկ ձեռնարկությունում (սպասարկման համակարգում) հաճախորդների մնալու $\bar{t}$ միջին ժամանակը որոշվում է հետևյալ բանաձևից՝

$$\bar{t} = (\overline{N}_q + \overline{R})/\lambda = \overline{N}/\lambda,$$

որտեղ $\overline{N}$ -ը սպասարկման համակարգում հաճախորդների միջին քանակն է:

Դիտարկված սպասարկման համակարգի օգնությամբ կարելի է հետազոտել ձեռնարկության նաև անհամբեր հաճախորդների բնութագրերը: Այդ դեպքում հաճախորդների վարքը կարելի է նկարագրել հետևյալ կերպ. եթե հաճախորդը իր գալու պահին ձեռնարկությունում գտնում է գոնե մեկ ազատ բրիգադ կամ հերթում գոնե մեկ ազատ տեղ, ապա նա մնում է ձեռնարկությունում և սպասում իր սպասարկմանը: Եթե ձեռնարկությունում հերթի երկարությունը հավասար է K-ի, ապա հաճախորդը հեռանում է ձեռնարկությունից կամ դիմում է ուրիշ ձեռնարկության:

Դիտարկված համակարգի օգնությամբ կարելի է հետազոտել նաև առանց հերթի (K= 0) և անվերջ սպասման տեղերով ու համբերատար հաճախորդներով (K= ∞) ձեռնարկությունների բնութագրերը:

Նշված դեպքերի համար π_i ստացիոնար հավանականությունները համապատասխանորեն հավասար են՝

$$\pi_i = \left(\alpha^i \frac{1}{i!}\right) \Big/ \left(\sum_{j=0}^{m} \alpha^j \frac{1}{j!}\right) = P(i,\alpha)/R(m,\alpha)\,,\ i=\overline{0,m}\,,\ K=0, \qquad (3.3)$$

$$\pi_i = \begin{cases} \left(\alpha^i \frac{1}{i!}\right) \Big/ \left(\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha^j \frac{1}{j!} + \frac{\alpha^m x}{m!(1-x)}\right) = P(i,\alpha) \Big/ \left(R(m,\alpha) + P(m,\alpha)\frac{x}{1-x}\right), & i = 0,\ldots m,\ K=\infty, \\ \pi_m x^{i-m} = P(m,\alpha)x^{i-m} \Big/ \left(R(m,\alpha) + P(m,\alpha)\frac{x}{1-x}\right), & i = m, m+1,\ K=\infty: \end{cases}$$

(3.3) բանաձևը կոչվում է Էռլանգի կորուստների բանաձև և թույլ է տալիս i = m-ի դեպքում հաշվել համակարգում հաճախորդների հայտերի մերժման (կորստի) հավանականությունը: Նշված դեպքերի համար բնութագրերը կարելի է հաշվել M|M|m|K տիպի համակարգի համար ստացված բանաձևերի օգնությամբ:

4. M|M|m|K տիպի և հերթում մնալու սահմանափակ ժամանակով ձեռնարկության մոդելը

Դիցուք՝ նախորդ բաժնում դիտարկված ձեռնարկությունը սպասարկում է «անհամբեր» հաճախորդների, որոնք, եթե հերթում մնալու նրանց ժամանակը գերազանցում է որևէ τ պատահական մեծությանը, թողնում են հերթը և հեռանում:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ τ-ն ունի ν պարամետրով ցուցչային բաշխում, այսինքն՝ ν-ն հաճախորդների կողմից հերթը լքելու հաճախությունն է: Ձեռնարկությունում հաճախորդների սպասարկումն իրականացվում է m նույնատիպ բրիգադների կողմից: Հերթում հաճախորդների քանակը սահմանափակ է և հավասար է K-ի: Հաճախորդների հոսքը ունի Պուասոնի բաշխում, իսկ նրանց սպասարկման ժամանակն՝ ունի համապատասխանորեն λ և μ պարամետրերով ցուցչային բաշխում:

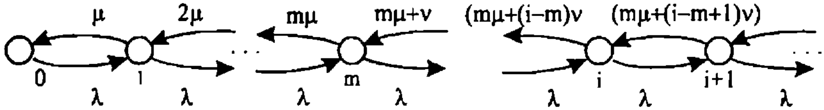
Եթե հաճախորդը իր գալու պահին ձեռնարկությունում գտնում է գոնե մեկ ազատ բրիգադ, ապա նա անմիջապես ընդունվում է սպասարկման: Եթե բոլոր m բրիգադները զբաղեցված են, բայց հերթում կա գոնե մեկ ազատ տեղ, ապա հաճախորդը հերթագրվում է: Եթե հաճախորդի գալու պահին ձեռնարկությունում հերթի երկարությունը հավասար է K-ի, ապա նրա հայտը մերժվում է:

Նախորդ մոդելի նմանությամբ այս սպասարկման համակարգի վարքը և կարելի է նկարագրել վիճակների E վերջավոր բազմությունով՝ E={0,1,…,K+m} բազմացման ու կործանման գործընթացի օգնությամբ, որի անցումային Q մատրիցի տարրերը որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$\lambda_i = \lambda, \quad i = \overline{0, m+K},$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & \text{եթե } i = \overline{0, m}, \\ m\mu + i\nu, & \text{եթե } i = \overline{0, K}: \end{cases}$$

Գործընթացի անցումների գրաֆը բերված է ստորև:



Քանի որ գործընթացի վիճակների E={0,1,…,m+K} բազմությունը վերջավոր է, ապա համակարգի համար գոյություն ունի ստացիոնար ռեժիմ: Հաշվենք գործընթացի π_i ստացիոնար հավանականությունները, որոնց համապա-տասխան հավասարումների համակարգն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\lambda\pi_0 = \pi_1\mu,$$

$$(\lambda+i\mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1}, \; i=\overline{0, m-1},$$

$$(\lambda+m\mu)\pi_m=\lambda\pi_{m-1}+(m\mu+\nu)\pi_{m+1},$$

$$(\lambda+m\mu+i\nu)\pi_{m+i} = \lambda\pi_{m+i-1}+(m\mu+(i+1)\nu)\pi_{m+i+1}, \; i = \overline{0, K-1},$$

$$(m\mu+k\nu)\pi_{m+k} = \lambda\pi_{m+k-1}:$$

Համակարգի լուծումները կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանա-ձևերով.

$$\pi_i = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\pi_0, \quad i = \overline{0, m},$$

$$\pi_{m+i} = \frac{\lambda^i \pi_m}{\nu^i \prod_{j=1}^{i}(m\mu + j\nu)}, \quad i = \overline{0, K}: \tag{4.1}$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\alpha = \lambda/\mu, \; \gamma = \lambda/\nu, \; \delta = m\mu/\nu:$$

π_0 հավանականությունը որոշվում է նորմավորման պայմանից՝

$$\sum_{i=0}^{m+K}\pi_i = 1,$$

որտեղից՝

$$\pi_0 = 1\bigg/\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^m}{m!}\sum_{i=1}^{K}\left(\gamma^i\bigg/\prod_{j=1}^{i}(\delta+j)\right)\right) =$$

$$= 1\bigg/\left(R(m,\alpha) + P(m,\alpha)\sum_{i=1}^{K}\left(\gamma^i\bigg/\prod_{j=1}^{i}(\delta+i)\right)\right):$$

π_0-ի արժեքը տեղադրելով (4.1)-ի մեջ, π_i-երի համար կստանանք՝

$$\pi_i = P(i,\alpha)\bigg/\left(R(m,\alpha) + P(m,\alpha)\sum_{i=1}^{K}\left(\gamma^i\bigg/\prod_{j=1}^{i}(\delta+i)\right)\right),\quad i=\overline{0,m},$$

$$\pi_{m+i} = \frac{P(i,\alpha)\left(\gamma^i\bigg/\prod_{j=1}^{i}(\delta+i)\right)}{\left(R(m,\alpha) + P(m,\alpha)\sum_{i=1}^{K}\left(\gamma^i\bigg/\prod_{j=1}^{i}(\delta+i)\right)\right)},\quad i=\overline{0,K}:$$

Դիցուք՝ δ-ն ոչ բացասական ամբողջ թիվ է, ապա՝

$$\frac{\gamma^i}{\prod_{j=1}^{i}(\delta+j)} = \frac{\gamma^i\delta!}{(\delta+i)!} = \frac{P(\delta+i,j)}{P(\delta,\gamma)},$$

որտեղից՝

$$\sum_{i=1}^{K}\frac{\gamma^i}{\prod_{j=1}^{i}(\delta+j)} = \frac{R(K+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}:$$

Անցնենք ծառնարկության բնութագրերի հետազոտմանը: Ջեռնարկության զբաղված բրիգադների միջին $\overline{R}$ քանակը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\overline{R} = \sum_{i=0}^{m} i\pi_i + m\sum_{i=0}^{K}\pi_{m+i} = \frac{(\alpha R(m,\alpha)+mP(m,\alpha))(R(K+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma))/P(\delta,\gamma)}{(R(m,\alpha)+P(m,\alpha))(R(K+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma))/P(\delta,\gamma)}:$$

Հաճախորդների սպասարկման P_s հավանականությունը հավասար է՝

$$P_s = \mu\overline{R}/\lambda:$$

Հերթում հաճախորդների միջին $\overline{N}_q$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{N}_q = \sum_{i=0}^{K} i\pi_{m+i} = \frac{P(m,\alpha)(R(K+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma))/P(\delta,\gamma))}{(R(m,\alpha)+P(m,\alpha))(R(K+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma))/P(\delta,\gamma)}:$$

Մեկ բրիգադի զբաղվածության π_b հավանականությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\pi_b = \overline{R}/m:$$

Ձեռնարկության լրիվ բեռնվածության հավանականությունը հավասար է՝

$$\pi_b = \sum_{i=0}^{K} \pi_{m+i} = \pi_m / P(\delta,\gamma)[R(K+\delta,\gamma) - R(\delta-1,\gamma)]:$$

Հաճախորդների հերթում մնալու միջին $\bar{t}_q$ ժամանակը հավասար է՝

$$\bar{t}_q = \bar{N}_q / \lambda :$$

Իսկ ծեռնարկությունում մնալու միջին ժամանակը, ըստ Լիթլի բանաձևի, հավասար է՝

$$\bar{t} = \left(\bar{N}_q + R\right) / \lambda = \bar{N} / \lambda ,$$

որտեղ $\bar{N}$ -ը՝ ձեռնարկությունում հաճախորդների միջին քանակն է:

Ձեռնարկությունում հերթի առկայության հավանականությունը հավասար է՝

$$P_{neq} = \pi_m(R(K+\delta,\gamma) - R(\delta,\gamma))/P(\delta,\gamma),$$

իսկ հերթի գոյության միջին ժամանակը՝

$$\bar{t}_{qe} = \frac{1}{\lambda}\frac{R(K+\delta,\gamma) - R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)},$$

որտեղ neq և qe կրճատումները են հետևյալ բառերի՝ non-empty queue և queue existence համապատասխանաբար:

Մեկ բրիգադի զբաղվածության միջին ժամանակը հավասար է՝

$$\bar{t}_b = \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_m}{\lambda}\left[\frac{R(K+\delta,\gamma) - R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}\right]^2$$

Դժվար չէ համոզվել, որ դիտարկված սպասարկման համակարգը ν=0-ի դեպքում համընկնում է նախորդ բաժնում քննարկված համակարգի հետ: Ինչպես և նախորդ բաժնում, կարելի է հետազոտել ձեռնարկության բնութագրերը m-ի, k-ի, և ν-ի տարբեր արժեքների դեպքում:

5. M|M|m տիպի և անհամբեր հաճախորդներով սպասարկման համակարգ

Դիցուք՝ ձեռնարկությունը բաղկացած է նույնատիպ սպասարկման m բրիգադներից և ունի հաճախորդների սպասման համար անսահմանափակ թվով սպասման տեղեր՝ հերթ: Ձեռնարկության մուտքում հաճախորդների հոսքը Պուասոնի է՝ λ պարամետրով, իսկ նրանց սպասարկման ժամանակը ցուցչային է՝ μ պարամետրով: Եթե հաճախորդի գալու պահին ձեռնարկությունում կա գոնե մեկ ազատ բրիգադ, ապա անմիջապես սկսվում է հաճախորդի սպասարկումը: Եթե բոլոր բրիգադները զբաղված են, և հերթի երկարությունը հավասար է i-ի, ապա հաճախորդը p_i հավանականությամբ հերթ է կանգնում, իսկ 1 p_i հավանականությամբ հեռանում է ձեռնարկությունից:

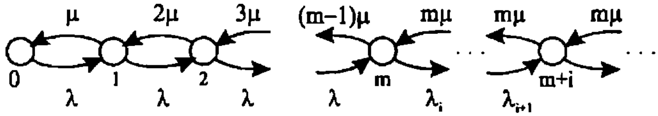
Ձեռնարկության բնութագրերը հետազոտելու համար նրա վարքը կարելի է նկարագրել վիճակների E բազմությունով՝ E={0,1,2,...,} բազմացման ու կործանման գործընթացով, որի Q մատրիցի տարրերը որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$\lambda_i=\lambda,\ i=\overline{0,m},$$

$$\lambda_i=\lambda p_i,\ i=m+1,\ m+2,\ldots,$$

$$\mu_i=\begin{cases} i\mu, & \text{եթե } i\le m, \\ m\mu, & \text{եթե } i\ge m : \end{cases}$$

Գործընթացի անցումային գրաֆը բերված է ստորև:



π_i ստացիոնար հավանականությունները որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգից.

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1,$$

$$(\lambda+i\mu)\pi_i=\lambda\pi_{i-1}+i\mu\pi_{i+1},\quad i=\overline{1,m-1},$$

$$(\lambda+m\mu)\pi_m=\lambda\pi_{m-1}+m\mu\pi_{m+1},$$

$$(\lambda_i+m\mu)\pi_{m+i}=\lambda_{n-1}\,\pi_{m+i-1}+m\mu\pi_{m+i+1},\quad i=1,2,3\ldots :$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները $\alpha=\lambda/\mu$, $\chi=\lambda/m\mu$:: Բերված հավասարումներից π_i հավանականությունների համար այնուհետև կստանանք՝

$$\pi_i=\frac{\alpha^i}{i!}\pi_0,\quad i=\overline{0,m}:$$

π_0 հավանականությունը որոշվում է նորմավորման պայմանից՝

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1,$$

$$\pi_0=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha^i/i!+\left(\alpha^m/m!\sum\limits_{i=1}^{\infty}\chi^i\prod\limits_{j=0}^{i-1}p_j\right)}: \qquad (5.1)$$

Գործընթացի ստացիոնար ռեժիմի գոյության պայմանը ակնհայտ է. անհրաժեշտ է, որ $\pi_0>0$-ից, այսինքն՝ (5.1) բանաձևում հայտարարի շարքը զուգամիտի: Եթե ներմուծենք հետևյալ նշանակումները՝

$$R(m,\alpha)=\sum_{i=0}^{m}\alpha^i/i!,\quad p(m,\alpha)=\alpha^m/m!,$$

$$\varphi=\sum_{i=0}^{\infty}\chi^i\prod_{j=0}^{i-1}p_j,\quad \varphi_i=\prod_{j=0}^{i-1}p_j,$$

ապա π_i հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\pi_i = P(\alpha,i)\frac{1}{R(m,\alpha)+R(m,\alpha)\varphi}, \quad i=\overline{0,m},$$

$$\pi_{m+i} = \pi_m \varphi_i \chi^i, \quad i=1,2,3,\ldots :$$

Անցնենք համակարգի բնութագրերի հետազոտմանը: Ձեռնարկություն փաստացի մուտք գործած հաճախորդների հաճախությունը հավասար է՝

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i\pi_i :$$

Հերթում հաճախորդների $\overline{N}_q$ միջին քանակը որոշվում է հետևյալ բանաձևից.

$$\overline{N}_q = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_{m+i} = \pi_m \sum_{i=0}^{\infty} i\chi^i\varphi_i :$$

Հաճախորդների հերթում մնալու միջին ժամանակը հավասար է՝

$$\overline{t}_q = \overline{N}_q/\lambda :$$

Զբաղված բրիգադների միջին $\overline{R}$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{m} i\pi_i = \pi_0\alpha R(m-1,\alpha):$$

Ձեռնարկությունում հաճախորդների միջին $\overline{N}$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{N} = \overline{N}_q + \overline{R},$$

իսկ հաճախորդների ձեռնարկությունում մնալու միջին $\overline{t}$ ժամանակը հավասար է՝

$$\overline{t} = \overline{N}/\lambda :$$

Եթե $p_i=1/(i+1)$-ի, ապա π_i հավանականությունների համար (5.1)-ից կստանանք՝

$$\pi_i = (\alpha_i/i!)\pi_0, \quad i=\overline{0,m};$$

$$\pi_{m+i} = \pi_m\chi^i/i!, \quad i=0,1,\ldots$$

$$\pi_0 = \frac{1}{R(m,\alpha)+P(m,\alpha)e^{\chi}} :$$

Եթե $p_i=\theta^i$, որտեղ $0<\theta\le 1$, ապա՝

$$\pi_i = \frac{\alpha^i}{i!}\pi_0, \quad i=\overline{0,m};$$

$$\pi_{m+i} = \pi_m\chi^i\theta^{\frac{i(i-1)}{2}}, \quad i=0,1,2,\ldots$$

$$\pi_0 = \frac{1}{R(m,\alpha)+P(m,\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\chi^{i+1}\theta^{\frac{i(i-1)}{2}}} :$$

Բերենք մի քանի հետաքրքիր առնչություններ կապված՝ p_i գործակիցների տեսքի և π_{m+i} հավանականությունների բաշխման օրենքների հետ: Եթե $p_i=(N-i)/[N(i+1)]$-ի, որտեղ N=const, ապա π_{m+i}-ն ունի երկանդամ բաշխում: $p_i=(N+i)/[N(i+1)]$-ի դեպքում՝ բացասական երկանդամ բաշխում, իսկ $p_i= e^{-i/a}$-ի դեպքում, որտեղ a = const, նորմալ բաշխում:

6. M|M|m տիպի և N հաճախորդներով փակ սպասարկման համակարգ

Դիտարկենք ձեռնարկության աշխատանքն այն դեպքում, երբ նա կատարում է սահմանափակ N թվով հաճախորդների երաշխիքային սպասարկում: Այս դեպքում կենթադրենք, որ յուրաքանչյուր հաճախորդ ձեռնարկությանը դիմելու անհրաժեշտությունն է ունենում λ պարամետրով ցուցչային բաշխում ունեցող ժամանակահատվածներում: Եթե հաշվի առնենք, որ հաճախորդների ձեռնարկությանը դիմելու պատճառը ավտոմեքենայի անսարքություններն են, ապա, ինչպես հայտնի է հուսալիության տեսությունից, մուտքի հոսքի ցուցչային բաշխման ենթադրությունը բավականին հիմնավորված է:

Դիցուք՝ ձեռնարկությունում հաճախորդների սպասարկումն իրականացվում է m նույնատիպ բրիգադների կողմից: Պարզության համար ենթադրենք, որ բոլոր հաճախորդներն էլ համբերատար են և, գալով ձեռնարկություն, այնտեղ (հերթում և սպասարկող բրիգադների մոտ) մնում են մինչև իրենց սպասարկման ավարտը: Հաճախորդի սպասարկման ժամանակը մեկ բրիգադում ունի μ պարամետրով ցուցչային բաշխում:

Ձեռնարկության աշխատանքը կարելի է նկարագրել վերջավոր թվով վիճակների E բազմությունով բազմացման ու կործանման գործընթացով: Որպես գործընթացի վիճակ համարենք ձեռնարկությունում հաճախորդների քանակը: Դժվար չէ համոզվել, որ E բազմության տարրերը հավասար են 0,1,2,…,N:

Դիտարկվող սպասարկման համակարգը կոչվում է փակ սպասարկման համակարգ: Եթե ձեռնարկությունում գտնվում են n հաճախորդներ, ապա նոր հաճախորդների գալու հաճախությունը կախված է n-ից և հավասար է՝

$$\lambda_n = \lambda(N-n)\text{-ի:}$$

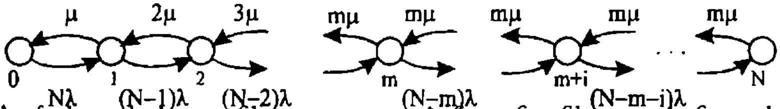
Համակարգի վարքը նկարագրող բազմացման ու կործանման գործընթացի Q մատրիցի տարրերը որոշվում են հետևյալ հավասարություններով.

$$\lambda_i = \lambda(N-i), \quad i=\overline{0,N},$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & \text{եթե } i \le m, \\ m\mu, & \text{եթե } i \ge m: \end{cases}$$

Հետագայում պարզության համար կենթադրենք, որ N>m-ից, այսինքն՝ համակարգում կարող է հերթ առաջանալ:

Գործընթացի անցումների գրաֆը բերված է ստորև:



Համակարգի վարքը նկարագրող գործընթացն ունի ստացիոնար ռեժիմ, և նրա π_i ստացիոնար հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$N\lambda\pi_0 = \mu\pi_1,$$

$$(\lambda(N-i)+i\mu)\pi_i = \lambda(N-i+1)\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1}, \quad i=\overline{0,m-1},$$

$$(\lambda(N-i)+m\mu)\pi_i = \lambda(N-i+1)\pi_{i-1}+m\mu\pi_{i+1}, \quad i=\overline{m,N-1},$$

$$m\mu\pi_N = \lambda\pi_{N-1}:$$

Հավասարումների լուծումները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\pi_i = \frac{N(N-1)\ldots(N-i+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0 = \frac{N!}{i!(N-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0, \quad i\le m,$$

$$\pi_i = \frac{N!}{(N-i)!m!m^{i-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\pi_0, \quad m\le i\le N:$$

Ներմուծելով հետևյալ նշանակումները.

$$\alpha = \lambda/\mu, \quad C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!},$$

π_i հավանականությունների համար կստանանք՝

$$\pi_i = C_N^i\alpha^i\pi_0, \quad i\le m,$$

$$\pi_i = C_N^i\frac{i!}{\delta m!m^{i-m}}\alpha^i\pi_0, \quad m\le i\le N:$$

Այստեղ π_0-ն որոշվում է նորմավորման պայմանից՝

$$\sum_{i=0}^{N}\pi_i = 1, \quad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1}C_N^i\alpha^i + \sum_{i=m}^{N}C_N^i\, i!\alpha^i/(m!m^{i-m})}:$$

Այժմ անցնենք ձեռնարկության բնութագրերի հետազոտմանը: Ձեռնարկության զբաղված բրիգադների միջին քանակը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{m}i\pi_i + m\sum_{i=m+1}^{N}\pi_i:$$

Ձեռնարկության հաճախորդների միջին $\overline{N}$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{N}i\pi_i:$$

Հերթում հաճախորդների միջին $\overline{N}_q$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{N}_q = \sum_{i=1}^{N-m} i\pi_{m+i} :$$

Հաճախորդների հերթում սպասելու միջին $\bar{t}_q$ ժամանակը հավասար է՝

$$\bar{t}_q = \overline{N}_q/\lambda\overline{R} = \overline{N}/\lambda(N-\overline{N}) - 1/\mu ,$$

իսկ ծառնարկությունում նրանց մնալու $\bar{t}$ միջին ժամանակը հավասար է՝

$$\bar{t} = \overline{N}/\lambda\overline{R} = \overline{N}/\lambda(N-\overline{N}) :$$

Ձեռնարկությունում հաճախորդների զրոյական սպասման հավանականությունը հավասար է՝

$$P_{nw} = \sum_{i=0}^{m-1} \pi_i = \sum_{i=0}^{m-1} C_N^i \alpha_i :$$

$\lambda' = (N-\overline{N})\lambda$ -ն հավասարությունը ցույց է տալիս համակարգի կայուն ռեժիմում հաճախորդների հոսքի միջին հաճախությունը և կոչվում է համակարգի ծախսի հավասարում:

Ձեռնարկության աշխատանքի արդյունավետության չափանիշ են հանդիսանում նաև հետևյալ գործակիցները՝ բրիգադների բեռնվածության գործակիցը՝

$$\rho = \lambda'/m\mu = (N-\overline{N})\lambda/m\mu = (N-\overline{N})\alpha/m ,$$

հերթում հաճախորդների սպասման գործակիցը՝

$$R_1 = \overline{N}_q/N ,$$

բրիգադների պարապուրդի գործակիցը՝

$$R_2 = (m-\overline{R})/m :$$

7. M|M|m|K տիպի սահմանափակ հերթով և N հաճախորդներով փակ սպասարկման համակարգ

Այս համակարգում, ի տարբերություն նախորդ բաժնում դիտարկվածի, հերթում հաճախորդների առավելագույն թիվը սահմանափակ է և հավասար է K-ի: Երբ ձեռնարկություն հաճախորդները գալու պահին տեսնում են, որ հերթում բոլոր տեղերը զբաղեցված են, ապա նրանց հայտերը մերժվում են: Մերժված հաճախորդները նոր հայտ կարող են ներկայացնել միայն որոշակի ժամանակից հետո, որն ունի λ պարամետրով ցուցչային բաշխում:

Ձեռնարկության հաճախորդների քանակը սահմանափակ է և հավասար է N-ի: Յուրաքանչյուր հաճախորդ ձեռնարկությանը դիմում է իր նախորդ սպասարկման ավարտի պահից λ պարամետրով ցուցչային բաշխում ունեցող ժամանակահատվածից հետո: Ձեռնարկությունում հաճախորդների սպա-սարկումն իրականացվում է $m\ (m < N)$ նույնատիպ բրիգադների միջոցով:

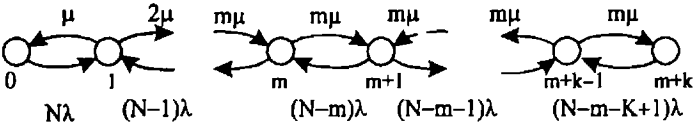
Դիտարկենք ըստ գրաված հերթի հաճախորդների սպասարկման կարգը: Հաճախորդների սպասարկման ժամանակն ունի μ պարամետրով ցուցչային բաշխում:

Ձեռնարկության վարքը կարելի է նկարագրել վերջավոր վիճակների $E=\{0,1,\dots,K+m\}$ բազմությունն ունեցող բազմացման ու կործանման գործընթացով, որի անցումների Q մատրիցի տարրերը որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$\lambda_i = \lambda(N-i), \quad i=\overline{0, m+K},$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & \text{եթե } i \le m, \\ m\mu, & \text{եթե } i \ge m : \end{cases}$$

Գործընթացի անցումների գրաֆը բերված է ստորև:



Գործընթացն ունի ստացիոնար ռեժիմ, որի π_i հավանականություն-ները որոշվում են հետևյալ հավասարումների համակարգից.

$$N\lambda\pi_0 = \mu\pi_1,$$

$$((N-i)\lambda+i\mu)\pi_i = (N-i+1)\lambda\pi_{i-1}+(i+1)\mu\pi_{i+1},\ i\le m,$$

$$((N-m)\lambda+m\mu)\pi_m = (N-m+1)\lambda\pi_{m-1}+m\mu\pi_{m+1},$$

$$((N-i)\lambda+m\mu)\pi_i = (N+1-i)\lambda\pi_{i-1}+m\mu\pi_{i+1},\quad m\le i\le m+K-1,$$

$$((N-m-K)\lambda+m\mu)\pi_{m+k} = (N-m-K+1)\lambda\pi_{m+k-1}:$$

Հավասարումների համակարգի π_i լուծումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\pi_i = \frac{N(N-1)\dots(N-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 = C_N^i\alpha^i\pi_0,\quad i\le m,$$

$$\pi_i = C_N^i\frac{i!}{m!m^{i-m}}\alpha^i\pi_0,\quad m\le i\le m+K,$$

որտեղ $\alpha = \lambda/\mu$, իսկ π_0-ն որոշվում է նորմավորման պայմանից՝

$$\sum_{i=0}^{m+K}\pi_i = 1,$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{m-1} C_N^i\alpha^i + \sum\limits_{i=m}^{m+K}\left(C_N^i i!\alpha^i/(m!m^{i-m})\right)}:$$

Անցնենք ձեռնարկության բնութագրերի որոշմանը:

Հաճախորդների մերժման P_r (reject) հավանականությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$P_r = \pi_{m+K} = C_N^{m+K}\frac{(m+K)!}{m!m^K}\alpha^{m+K}\pi_0 :$$

Հերթում հաճախորդների միջին $\overline{N}_q$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{N}_q = \sum_{i=1}^{K} i\pi_{m+i}\sum_{i=1}^{K} C_N^{m+i}\frac{(m+i)!}{m!m^i}\alpha^{i+m}\pi_0,$$

իսկ ձեռնարկությունում հաճախորդների միջին $\overline{N}$ քանակը՝

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{m+N} i\pi_i = \pi_0\left(\sum_{i=1}^{m} iC_N^i\alpha^i + \sum_{i=1}^{K}(i+m)C_N^i\frac{(m+i)!}{m!m^i}\alpha^{i+m}\right):$$

Ձեռնարկությունում զբաղված բրիգադների միջին $\overline{R}$ քանակը հավասար է՝

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{m} i\pi_i + m\sum_{i=1}^{K}\pi_{m+i} = \sum_{i=0}^{m} iC_N^i\alpha^i\pi_0 + m\sum_{i=1}^{K} C_N^{m+i}\frac{(m+i)!}{m!m^i}\alpha^{i+m},$$

իսկ պարապուրդի մեջ գտնվող բրիգադների միջին $\overline{n}$ քանակը՝

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{m}(m-i)\pi_i = m - \overline{R} :$$

Հերթում հաճախորդների սպասելու $\overline{t}_q$ միջին ժամանակը հավասար է՝

$$\overline{t}_q = \overline{N}_q/\lambda(N-\overline{N}):$$

Ձեռնարկությունում հաճախորդների մնալու $\overline{t}$ միջին ժամանակը հավասար է՝

$$\overline{t} = \overline{N}/\lambda(N-\overline{N}):$$

Ձեռնարկության ծախսի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\lambda' = (N-\overline{N})\lambda :$$

Հաճախորդների պարապուրդի R_1 և բրիգադների պարապուրդի R_2 գործակիցները համապատասխանորեն հավասար են՝

$$R_1 = \overline{N}_q/N, \quad R_2 = \overline{n}/m :$$

8. Մարկովյան սպասարկման ցանցեր

Առօրյա կյանքից կարելի է բերել բազմաթիվ օրինակներ, երբ հաճախորդների, գնորդների, հիվանդների և այլ հայտերի սպասարկումը իրականացվում է միմյանց հետ փոխկապակցված տարբեր սպասարկման համակարգերի միջոցով: Հիշենք՝ գնորդների սպասարկումը հանրախանութում, երբ գնումներ և վճարումներ կատարելիս նրանք սպասարկվում են հանրախանութի տարբեր բաժիններում և դրամարկղերում; հիվանդների սպասարումը պոլիկլինիկայում կամ հիվանդանոցում, որտեղ հիվանդության ախտորոշման և բուժման համար նրանք անցնում են տարբեր լաբորատորիաներով, հաճախորդների սպասարկումը ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկությունում, երբ ավտոմեքենայի անսարքությունների որոշման և վերականգնման համար անհրաժեշտ է անցնել ձեռնարկության տարբեր ծառայություններով ու բրիգադներով, և այլն:

Միմյանց հետ փոխկապակցված սպասարկման համակարգերի բազմությունը կոչվում է սպասարկման ցանց: Սպասարկման ցանցերը բնութագրվում են իրենց կառուցվածքով, ցանցում ընդգրկված սպասարկման համակարգերի և սպասարկվող հայտերի թվով ու տեսակներով, սպասարկման համակարգերում հայտերի սպասարկման կարգով, հայտերի մուտքի հոսքի և դրանց սպասարկման ժամանակի բաշխման օրենքով և այլն:

Սպասարկման ցանցի կարևոր կառուցվածքային տարրերից են նրա հանգույցները, որոնց համապատասխանում են ցանցում ընդգրկված սպասարկման համակարգերը:

Ցանցի կառուցվածքը, նրա հանգույցների միջև եղած կապերը նկարագրվում են ուղղորդված գրաֆի օգնությամբ: Գրաֆի գագաթներին համապատասխանում են ցանցի հանգույցները, իսկ ուղղված կողերին՝ հայտերի հոսքերը ցանցի մի հանգույցից դեպի մյուսը: Կախված ցանցում գտնվող հայտերի R թվից՝ տարբերվում են բաց և փակ սպասարկման ցանցեր: Բաց ցանցում հայտերի R թիվը պատահական մեծություն է, իսկ փակ ցանցում հաստատուն մեծություն է՝ $R<\infty$:

Եթե ցանցում սպասարկվող բոլոր հայտերը նույնատիպ են, ապա նման ցանցը կոչվում է համասեռ: Ցանցում հայտերի տեղաշարժերը, այսինքն՝ ցանցի մի հանգույցից մյուսը անցումները, նկարագրվում են անցումների կամ երթուղային P հավանականային մատրիցով՝ $P=\|p_{ij}\|$: Անցումների P մատրիցի p_{ij} տարրերը ցույց են տալիս ցանցի i հանգույցում հայտերի սպասարկումից հետո նրանց j հանգույց անցնելու հավանականությունը:

Դիտարկենք M, $0<M<+\infty$ հանգույցներից բաղկացած բաց համասեռ սպասարկման ցանցը: Նման ցանց հայտերը գալիս են որևէ արտաքին աղբյուրից՝ 0 հանգույցից: Արտաքին աղբյուրից ցանցի i հանգույց հայտը կարող է ընկնել p_{0i} հավանականությամբ՝

$$\sum_{i=1}^{M} p_{0i} = 1:$$

Այստեղ ընդունվում է, որ $p_{00}=0$: i-րդ հանգույցում սպասարկվելուց հետո հայտը p_{i0} հավանականությամբ կարող է լքել ցանցը՝ ընկնել 0 հանգույց:

Երթուղային P մատրիցի տարրերը բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$0\le p_{ij}\le 1,\quad \sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1,\quad i,j\in\{0,1,2,\dots,M\}:$$

Այսպիսով, ցանցի P երթուղային մատրիցը հավանականային մատրից է: Սպասարկման ցանցերի հետազոտման խնդիրներում P մատրիցը դիտարկվում է որպես ցանցում հայտերի տեղաշարժերը նկարագրող էրգոդիկ, չվերլուծվող մարկովյան շղթայի անցումային մատրից:

Բաց ցանցում հայտերի մուտքի հոսքը որոշվում է $z_R = t_R - t_{R-1}$ պատահական մեծությունների համատեղ բաշխմամբ, որտեղ t_R-երը հայտերի գալու պատահական պահերն են, $R \geq 1$, $t_0 = 0$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$: Եթե z_R պատահական մեծությունները համախմբում անկախ են և բոլոր $R \geq 1$-երի համար ճշմարիտ է $A_R(t)=P\{z_R \leq t\}$, $A_1(t)=A_2(t)=\ldots=A(t)$ պայմանը, ապա ցանցի մուտքի հոսքը ամբողջությամբ որոշվում է $A(t)$ բաշխման ֆունկցիայով:

Եթե փակ սպասարկման ցանցի բոլոր հանգույցներում հայտերի սպասարկման ժամանակները ունեն ցուցչային բաշխում, իսկ բաց ցանցի դեպքում նաև մուտքի հոսքն ունի Պուասոնի բաշխում, ապա նման ցանցերը կոչվում են մարկովյան կամ ցուցչային: Եթե ցանցի որևէ i-րդ հանգույցում հայտերի սպասարկման ժամանակի բաշխման $B_i(t)$, ֆունկցիան, $i=1,2,\ldots,m_i$ կամ ցանցի մուտքի հոսքն ունի ցուցչայինից տարբեր բաշխում, ապա նման ցանցերը կոչվում են ոչ մարկովյան: Հետագայում մենք կքննարկենք միայն համասեռ, մարկովյան փակ և բաց սպասարկման ցանցերը, որոնց համար

$$A(t)=1-e^{-\lambda t}, \quad B_i(t)=1-e^{-\mu_i t}:$$

Այստեղ λ-ն՝ արտաքին աղբյուրից հայտերի հոսքի հաճախությունն է, իսկ μ_i-ն՝ ցանցի i-րդ հանգույցում հայտերի սպասարկման հաճախությունը:

Որոշենք ստացիոնար ռեժիմում բաց ցանցում շրջապտույտ կատարող հայտերի հոսքերի հաճախությունները: Դիցուք՝ λ_i-ն ստացիոնար ռեժիմում ցանցի i-րդ հանգույցի մուտքում հայտերի հոսքի գումարային հաճախությունն է: Հայտերի հոսքի հաշվեկշռի պայմանից հետևում է, որ i-րդ հանգույցից հայտերի ելքի հոսքի գումարային հաճախությունը նույնպես պետք է հավասար լինի λ_i-ին: Քանի որ j-րդ հանգույցից i-րդ հանգույց հայտերի հոսքի հաճախությունը հավասար է $\lambda_j p_{ji}$-ի, ապա կայունացված ռեժիմում ցանցի հանգույցների համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարումները.

$$\lambda_i = \lambda_0 p_{0i} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_j p_{ji}, \quad i=0,1,2,\ldots,M, \tag{8.1}$$

որտեղ λ_0-ն արտաքին աղբյուրից՝ 0 հանգույցից հայտերի հոսքի գումարային հաճախությունն է:

λ_0-ի արժեքի հայտնի լինելու դեպքում (8.1)-ից կարելի է միարժեքորեն որոշել λ_i-երի $i=1,2,\ldots,M$ արժեքները: Նշենք, որ բաց ցանցերում՝ $\lambda_0 \neq 0$, իսկ փակ ցանցերում $\lambda_0=0$: Վերջին դեպքում ցանցում հայտերի R քանակը հաստատուն մեծություն է և տրվում է ցանցի հետազոտման սկզբնական պայմաններում:

Փակ ցանցում λ_i հաճախությունները որոշվում են հետևյալ համասեռ հավասարումների համակարգից.

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j p_{ji}, \quad i=1,2,\ldots,M: \qquad (8.2)$$

Ինչպես գիտենք, նման հավասարումների համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ: Այսինքն՝ եթե հայտնի է (8.2)-ի որևէ $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)$ լուծում, ապա ցանկացած $\beta>0$-ի համար $\beta\lambda=(\beta\lambda_1,\ldots,\beta\lambda_M)$-ը՝ նույնպես կլինի (8.2) հավասարումների համակարգի լուծում:

Փակ ցանցերում λ_i-երի միարժեք որոշման համար հետագայում կընդունենք, որ դրանք բավարարում են հետևյալ նորմավորման պայմանին՝

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1:$$

Այս դեպքում λ_i-երը կարելի է մեկնաբանել որպես սպասարկման ցանցի երթուղային P մատրիցի վրա կառուցված մարկովյան շղթայի ստացիոնար հավանականություններ: λ_i-երի նման մեկնաբանումը թույլ է տալիս զգալիորեն պարզեցնել փակ ցանցերի հետազոտումը: Բաց ցանցում λ_i հաճախականությունները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$\lambda_i = \alpha_i\lambda_0, \quad i=0,1,2,\ldots,M,$$

որտեղ α_i-երը կոչվում են փոխանցման գործակիցներ և որոշվում են (8.1) հավասարումների համակարգից: Փակ ցանցում λ_i-երը կարելի է ներկայացնել որևէ, օրինակ առաջին, հանգույցի հաճախության օգնությամբ՝

$$\lambda_i = \alpha_i\lambda_1, \quad i=1,2,\ldots,M:$$

Բաց ցանցում α_i գործակիցները ցույց են տալիս հայտի ցանց գալու պահից մինչև ցանցից նրա հեռանալու պահը, այսինքն՝ ցանցում մնալու ընթացքում i հանգույց նրա ընկնելու միջին քանակը, իսկ փակ ցանցում՝ α_i ցույց է տալիս որևէ հանգույց երկու հաջորդական հաճախումների միջև ընկած ժամանակի ընթացքում հայտի i հանգույց ընկնելու միջին քանակը:

Կենթադրենք, որ ցանցի i-րդ հանգույցում հայտերի սպասարկումն իրականացվում է m_i նույնատիպ սպասարկման սարքերի միջոցով: i-րդ հանգույցի մեկ սպասարկման սարքում հայտերի սպասարկման ժամանակն ունի μ_i պարամետրով ցուցչային բաշխում:

Բաց սպասարկման ցանցի ստացիոնար ռեժիմում գտնվելու համար անհրաժեշտ է, որ նրա բոլոր հանգույցների սպասարկման համակարգերը բավարարեն չհագեցածության պայմանին՝

$$\lambda_i/\mu_i<1 \ (\lambda_i<\mu_i), \quad i=1,2,\ldots,M: \qquad (8.3)$$

Քանի որ $\lambda_i=\alpha_i\lambda_0$, ապա բաց ցանցի ստացիոնար ռեժիմի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարելի է ներկայացնել հետևյալ անհավասարությամբ.

$$\lambda_0 < \min_{i=1,M}(\mu_i/\alpha_i):$$

Փակ ցանցերում μ_i պարամետրերի ցանկացած վերջավոր արժեքների դեպքում գոյություն ունի ստացիոնար ռեժիմ: Այս դեպքում որևէ հանգույցում (8.3) պայմանի խախտումը հանգեցնում է տվյալ հանգույցում հայտերի գերկուտակման: Փակ ցանցում նման հանգույցները կոչվում են ցանցի նեղ տեղեր և որոշվում են հետևյալ պայմանից.

$$\min_{i=1,M}\left[(\lambda_i/\mu_i)=\rho_i\right]=\rho_{max},$$

որտեղ ρ_{max}-ն կոչվում է ցանցի հագեցման գործակից:

Այժմ անցնենք սպասարկման ցանցերի բնութագրերի որոշմանը: Դիտարկենք λ պարամետրով Պուասոնի բաշխմամբ մուտքի հոսքով, M հանգույցներով, համասեռ, մարկովյան բաց սպասարկման ցանցը: Հայ-տերի սպասարկումը ցանցի i-րդ հանգույցում իրականացվում է μ_i պարամետրով m_i նույնատիպ սպասարկման սարքերով: Ցանցի հանգույցներում հայտերն սպասարկվում են արդարացի հերթի կարգով: Իսկ ցանցում դրանց տեղաշարժերը նկարագրվում են P երթուղային մատրիցով: Ցանցի վարքի նկարագրման համար դիտարկենք հետևյալ M չափսի մարկովյան գործընթացը՝

$$N(t)=\{n_1(t),n_2(t),\ldots,n_M(t)\},\quad 0\le n_i(t),\ i=1,2,\ldots,M,\ \ t\ge 0,$$

որտեղ $n_i(t)$-ն՝ ժամանակի t պահին ցանցի i-րդ հանգույցում (հերթում և սպասարկման սարքերում) գտնվող հայտերի գումարային թիվն է:

Նշանակենք $P(\bar{n},t)=P\{n_1(t)=n_1,\ldots,n_M(t)=n_M,t\}$-ով ժամանակի t պահին ցանցի $\bar{n}=\{n_1,n_2,\ldots,n_M\}$ վիճակում գտնվելու հավանականությունը: Եթե ցանցի հանգույցները բավարարում են չհագեցվածության (8.3) պայմանին, ապա բաց ցանցի համար գոյություն ունի ստացիոնար ռեժիմ: $P(\bar{n})=P(n_1,n_2,\ldots,n_M)$-ով նշանակենք ստացիոնար ռեժիմում ցանցի $\bar{n}$ վիճակում գտնվելու հավանականությունը՝

$$P(\bar{n})=\lim_{t\to\infty}P(\bar{n},t):$$

Օգտվելով հայտերի հոսքի հաշվեկշռից $P(\bar{n})$-երի համար կարելի է գրել հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$P(\bar{n})\left(\lambda_0+\sum_{i=1}\delta(n_i)\gamma_i(n_i)\mu_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}\sum_{j=1}\delta(n_j-1)\gamma_i(n_i+1)\mu_i p_{ij}P(n_1,n_2,\ldots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_{i-1},n_i+1,n_{i+1},\ldots,n_M)+$$

$$+\sum_{i=1}\delta(n_i-1)\lambda_0 p_{i0}P(n_1,n_2,\ldots,n_i+1,n_{i+1},\ldots,n_M)+$$

$$+\sum_{i=1}\gamma_i(n_i+1)\mu_i p_{i0}P(n_1,n_2,\ldots,n_i+1,n_{i+1},\ldots,n_M),\qquad(8.4)$$

որտեղ $\delta(K)=\begin{cases}1, & \text{եթե } K=1,2,\ldots,\\ 0, & \text{եթե } K\le 0,\end{cases}$ $\quad\gamma_i(n_i)=\begin{cases}n, & \text{եթե } n\le m_i,\\ m_i, & \text{եթե } n\ge m_i:\end{cases}$

$\delta(K)$ ֆունկցիան ցույց է տալիս, որ դատարկ հանգույցում հայտերի սպասարկման հաճախությունը հավասար է զրոյի: $\gamma_i(n)$ մեծությունը ցույց է տալիս i-րդ հանգույցում միաժամանակ սպասարկվող հայտերի քանակը, երբ հանգույցում կան n_i հայտեր:

(8.4) հավասարման ձախ մասը հավասար է $\vec{n}$ վիճակից դուրս եկող հայտերի հոսքի գումարային հաճախությանը, իսկ աջ մասը՝ ցանցի մյուս վիճակներից դեպի $\vec{n}$ վիճակ հոսքի գումարային հաճախությանը:

Նշանակենք $P_i(n)$-ով ցանցի առանձնացված i-րդ հանգույցի սպասարկման համակարգում n հայտերի գտնվելու ստացիոնար հավանականությունը: Այժմ ցանցի ստացիոնար $P(\vec{n})$ բաշխումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$P(\vec{n}) = P_1(n_1)\times P_2(n_2)\times \ldots \times P_M(n_M): \qquad (8.5)$$

(8.5) բանաձևը ներկայացնում է ցանցերի տեսության մեջ հայտնի Ջեքսոնի թեորեմը, ըստ որի բաց ցանցի ստացիոնար բաշխումը հավասար է նրա առանձնացված հանգույցների սպասարկման համակարգերի ստացիոնար բաշխումների արտադրյալին:

Ներմուծենք $\beta_i(n)$ ֆունկցիաները՝

$$\beta_i(n) = \begin{cases} n!, & \text{եթե } n \le m_i, \\ m_i!, & \text{եթե } n \ge m_i : \end{cases}$$

Այժմ (8.4) հավասարումների համակարգից ցանցի $P(\vec{n})$ ստացիոնար բաշխման համար կստանանք՝

$$P(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{M} \frac{(\lambda_0 \alpha_i)^{n_i}}{\mu_i^{n_i} \beta_i(n_i)} G_M^{-1}, \qquad (8.6)$$

որտեղ G_M-ը նորմավորման հաստատուն է՝

$$G_M = \sum_{i=1}^{M} \sum_{n_i=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{M} \frac{(\lambda_0 \alpha_i)^{n_i}}{\mu_i^{n_i} \beta_i(n_i)} : \qquad (8.7)$$

α_i-փոխանցման գործակիցները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$\alpha_i = p_{0i} + \sum_{j=1} \alpha_j p_{ji}, \quad i=1,2,\ldots,M:$$

Իսկ $P_i(n)$ հավանականությունները որոշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$P_i(n) = P_i(0) \frac{\lambda_0^{n_i} \alpha_i^{n_i}}{\mu_i^{n_i} \beta_i(n)}, \quad i=1,2,\ldots,M:$$

Այստեղ $P_i(0)$-ն՝ ցանցի i-րդ հանգույցում հայտերի բացակայության (այսինքն՝ հանգույցի պարապուրդի) հավանականությունն է:

Այժմ դիտարկենք փակ սպասարկման ցանցերը: Ինչպես արդեն նշվել է, նման ցանցերում հայտերի ընդհանուր քանակը հաստատուն է, օրինակ՝ հավասար է R-ի: Նման ցանցի վարքը նկարագրող $N(t)=(n_1(t),n_2(t),\ldots,n_M(t))$ մարկովյան գործընթացի համար միշտ գոյություն ունի ստացիոնար ռեժիմ, որի $P(\vec{n})$ հավանականությունները որոշվում են հետևյալ հավասարումներից.

$$P(\vec{n})\sum_{i=1}\delta(n_i)\gamma_i(n_i)\mu_i =$$

$$=\sum_{j=1}\sum_{i=1}\delta(n_j-1)\gamma_i(n_i+1)\mu_i p_{ij}P(n_1,n_2,\ldots,n_j-1,n_{j+1},\ldots,n_{i-1},n_i+1,\ldots,n_M): \quad (8.8)$$

Փակ ցանցի վարքը նկարագրող մարկովյան գործընթացի վիճակների $\vec{n}$ վեկտորի տարրերը բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = R,$$

իսկ նրա տարբեր վիճակների քանակը հավասար է R հայտերի M հանգույցներում տեղաբաշխման տարբերակների քանակին՝ C_{M-1}^{M+R-1}-ի: (8.8) հավասարման լուծումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$P(\vec{n}) = \frac{1}{G_M(R)}\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{\alpha_i}{u_i}\right)^{n_i}\frac{1}{\beta_i(n_i)}: \quad (8.9)$$

Այստեղ $G_M(R)$-ը նորմավորման հաստատունն է և որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$G_M(R) = \sum_{\sum_{i=1}^{M} n_i = R}\prod_{i=1}^{M}\left(\frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^{n_i}\frac{1}{\beta_i(n_i)}: \quad (8.10)$$

Նշենք, որ գումարումը կատարվում է

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = R$$

պայմանին բավարարող $\vec{n}$ վեկտորի տարրերի բոլոր հնարավոր արժեքների համար:

Փակ ցանցի համար α_i գործակիցները որոշվում են հետևյալ հավասարումների համակարգից.

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{M}\alpha_j p_{ji}, \quad \sum_{i=1}^{M}\alpha_i = 1, \quad i=\overline{1,M}:$$

Դիտարկենք սպասարկման ցանցերի, հիմնական ստացիոնար բնութագրերը: Փակ ցանցերի համար i-րդ հանգույցից հայտերի ելքի հոսքի $\lambda_i(R)$ հաճախությունը՝ հանգույցի թողունակությունը, հավասար է տվյալ հանգույցում միավոր ժամանակում սպասարկված հայտերի միջին քանակին՝

$$\lambda_i(R) = \sum_{n=1}^{R}P_i(n,R)\mu_i = \alpha_i\, G_M(R-1)/G_M(R), \quad (8.11)$$

որտեղ $P_i(n,R)$-ը ցանցի i-րդ հանգույցում հայտերի քանակի սահմանային բաշխումն է՝

$$P_i(n,R) = x_i^n\,[G_M(R-n) - x_i G_M(R-n-1)]/G_M(R), \quad x_i=\alpha_i/\mu_i:$$

Եթե $\overline{R}_i$ -ը i-րդ հանգույցում զբաղված սպասարկման սարքերի միջին քանակն է. ապա՝

$$\overline{R}_i = \lambda_i(R)/\mu_i,$$

$$\overline{R}_i/\overline{R}_j = \alpha_i\mu_j/\alpha_j\mu_i: \qquad (8.12)$$

Այստեղից հանգույցների թողունակության $\lambda_i(R)$ գործակիցների համար կարելի է ստանալ՝

$$\lambda_i(R)/\lambda_j(R) = \alpha_i/\alpha_j:$$

Ցանցի i-րդ հանգույցում հայտերի միջին քանակը հավասար է՝

$$\overline{N}_i(R) = \sum_{n=1}^{R} x_i^n \left(G_M(R-n)/G_M(R)\right), \quad i=1,2,\ldots,M: \qquad (8.13)$$

Ըստ Լիթլի բանաձևի, i-րդ հանգույցում հայտերի մնալու միջին $\bar{t}_i(R)$ ժամանակը հավասար է հանգույցում հայտերի միջին քանակի և նրա մուտքի հոսքի համախության հարաբերությանը՝

$$\bar{t}_i(R) = \overline{N}_i(R)/\lambda_i(R), \quad i = \overline{1,M}: \qquad (8.14)$$

Եթե $V_j(R)$-ը հայտի i-րդ հանգույցից դուրս գալու պահից մինչև այդ հանգույց առաջին անգամ վերադառնալու պահն ընկած ժամանակի տևողության միջին արժեքն է, ապա նրա համար կստանանք՝

$$V_j(R) = \sum_{i=1}^{M} (\alpha_i/\alpha_j)\bar{t}_i(R), \quad j=1,2,\ldots,N, \qquad (8.15)$$

որտեղից՝

$$V_j(R)/V_i(R) = \alpha_i/\alpha_j:$$

Այստեղ α_i/α_j հարաբերությունը ցույց է տալիս հայտերի i-րդ հանգույց երկու հաջորդական անցումների ընթացքում j հանգույց ընկնելու միջին քանակը:

Բաց ցանցերի մի քանի բնութագրերի համար բերենք բանաձևերը:

Դիցուք՝ $\overline{N}$ -ը՝ ցանցում, իսկ $\overline{N}_i$ -ն՝ i-րդ հանգույցում հայտերի միջին քանակներն են: Այս դեպքում $\overline{N}$ -ը և $\overline{N}_i$ -ն որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\overline{N}_i = \rho_i/(1-\rho_i), \qquad (8.16)$$

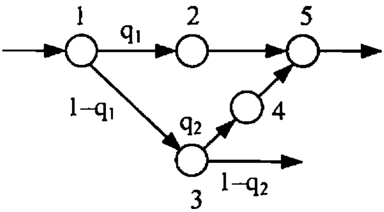
$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{M} \overline{N}_i = \sum_{i=1}^{M} \rho_i/(1-\rho_i): \qquad (8.17)$$

Ըստ Լիթլի բանաձևի՝ $\overline{N} = \lambda_0 \bar{t}$, որտեղ $\bar{t}$ -ն հայտերի ցանցում մնալու միջին ժամանակն է: Բաց ցանցում $\bar{t}$ -ն որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\bar{t} = 1\Big/\left(\lambda_0 \sum_{i=1}^{M} \rho_i/(1-\rho_i)\right): \qquad (8.18)$$

Օրինակ 2: Դիտարկենք ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկության աշխատանքը, որի ծառայությունները կազմված են ըստ որոշակի մասնագիտությունների տիրապետող մասնագետներով: Ձեռնարկության հաճախորդները ամբողջական սպասարկում ստանալու համար անցնում են մի ծառայությունների ցանցով: Կախված հաճախորդների ավտոմեքենաների անսարքությունների տեսակից՝ ձեռնարկությունում կատարվում է դրանց ընթացիկ կամ հիմնական նորոգում:

Ձեռնարկության ծառայությունների կառուցվածքը և հաճախորդների սպասարկման փուլերը բերված են գրաֆում:



Ձեռնարկությանը դիմած յուրաքանչյուր հաճախորդի ավտոմեքենայի համար սկզբում կատարվում է անսարքությունների պարզում (1-ին հանգույց), որի արդյունքներով որոշվում է նորոգման համար անհրաժեշտ աշխատանքների ցանկը: Դիցուք՝ 1 հանգույցում q_1 հավանականությամբ ընդունվում է ավտոմեքենայի ընթացիկ նորոգում, իսկ $1-q_1$ հավանականությամբ՝ հիմնական նորոգում կատարելու որոշում: Գրաֆում ընթացիկ վերանորոգմանը համապատասխանում է 2 հանգույցը, իսկ հիմնական նորոգմանը՝ 3-րդ և 4-րդ հանգույցները: Ավտոմեքենաների հիմնական նորոգման աշխատանքները իրականացվում են երկու փուլով: Առաջին փուլում (3-րդ հանգույց) կատարվում է ավտոմեքենաների վիճակի գնահատում, որի արդյունքներով դրանք q_2 հավանականությամբ կարող են ճանաչվել հիմնական նորոգման համար պիտանի (4-րդ հանգույց), իսկ $1-q_2$ հավանականությամբ՝ ոչ պիտանի: Վերջին դեպքում հաճախորդները (3-րդ հանգույցից) հեռանում են ձեռնարկությունից:

Ընթացիկ և հիմնական նորոգումների ավարտից հետո, այսինքն՝ 2-րդ և 4-րդ հանգույցներում սպասարկվելուց հետո, կատարվում են ավտոմեքենաների տեխնիկական վիճակի վերջնական ստուգում և համապատասխան փաստաթղթերի ձևակերպում (5-րդ հանգույց), որից հետո հաճախորդները հեռանում են ձեռնարկությունից:

Ընդունենք, որ հաճախորդների հոսքը նկարագրվում է Պուասոնի բաշխումով λ հաճախությամբ: Ձեռնարկության տարբեր ծառայություններում հաճախորդների սպասարկումն իրականացվում է m_i, $i=\overline{1,5}$ թվով նույնատիպ բրիգադներով: i-րդ հանգույցում հաճախորդների սպասարկման ժամանակն ունի ցուցչային բաշխում μ_i հաճախությամբ: Ձեռնարկության ծառայություններում հաճախորդների հերթերը սահմանափակ չեն: Գալով ձեռնարկություն հաճախորդները համբերատար սպասում են մինչև իրենց ամբողջական սպասարկման ավարտը: Հաճախորդների սպասարկումը իրականացվում է արդարացի հերթի սկզբունքով:

Ձեռնարկության աշխատանքի նկարագրման համար օգտվենք բաց մարկովյան սպասարկման ցանցի մոդելից: Այս դեպքում ցանցը բաղկացած է 5 հանգույցից: Ձեռնարկությունում հաճախորդների տեղաշարժը նկարագրող P երթուղային մատրիցն ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & q_1 & 1-q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ձեռնարկության բնութագրերը որոշենք նրա պարամետրերի հետևյալ պայմանական արժեքների դեպքում. $q_1=0{,}8$; $q_2=0{,}6$; $\mu_1=1{,}5$; $\mu_2=2$; $\mu_3=0{,}7$; $\mu_4=0{,}15$; $\mu_5=1{,}5$; $m_1=2$; $m_2=2$; $m_3=1$; $m_4=3$; $m_5=2$; $\lambda=2{,}5$:

Սկզբում որոշենք ցանցի հանգույցների հոսքերի հաճախությունները՝ $\lambda_1=\lambda=2{,}5$; $\lambda_2=\lambda_1 q_1=2$; $\lambda_3=\lambda_1(1-q_1)=0{,}5$; $\lambda_4=\lambda_3 q_2=0{,}3$; $\lambda_5=\lambda_2+\lambda_4=2{,}3$:

Դժվար չէ համոզվել, որ ցանցի բոլոր հանգույցների համար բավարարվում են ստացիոնար ռեժիմի գոյության պայմանները՝

$$\lambda_i/m_i\mu_i<1,\ i=\overline{1,5}:$$

Հետևաբար կարելի է հետազոտել ցանցի ստացիոնար բնութագրերը: Դրա համար որոշում ենք՝ i հանգույցի բրիգադների զբաղվածության ρ_i գործակիցը, հաճախորդների միջին թիվը՝ $\overline{N}_i$, հերթում հաճախորդների միջին թիվը՝ $\overline{N}_{qi}$, հանգույցում հաճախորդների մնալու և հերթում սպասելու միջին ժամանակը: Ձեռնարկության բնութագրերը բերված են 2-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 2

i հանգույցի համարը	ρ_i	$\overline{N}_{qi}$	$\overline{N}_i$	$\overline{t}_i$	$\overline{t}_{ui}$
1.	0,83	4,57	6,24	2,50	1,83
2.	0,50	1,10	2,10	1,05	0,55
3.	0,71	1,79	2,50	5,00	3,58
4.	0,67	0,38	2,38	7,93	1,23
5.	0,77	2,19	3,73	1,62	0,95

Ձեռնարկությունում հաճախորդների միջին $\overline{N}$ թիվը հավասար է՝

$$\overline{N}=\sum_{i=1}^{5}N_i=6{,}24+2{,}1+2{,}5+2{,}38+3{,}73=16{,}95:$$

Ձեռնարկությունում ավտոմեքենաների նորոգման միջին t_p ժամանակը հավասար է ցանցում այն հաճախորդների մնալու միջին ժամանակին, որոնք ցանցից հեռանում են 5-րդ հանգույցից:

Նման հաճախորդների մասը ձեռնարկություն եկած հաճախորդների ընդհանուր թվից հավասար է՝

$$Q = q_1+(1-q_1)q_2 = 0,8 + 0,2\times0,6 = 0,92:$$

Հետևաբար՝

$$\bar{t}_p = \bar{t}_1 + (q_1(\bar{t}_2 + \bar{t}_5) + (1-q_1)(\bar{t}_3 + q_2(\bar{t}_4 + \bar{t}_5)))/Q =$$

$$= 2,05 + (0,8(1,05+1,62) + 0,2(5,0 + 0,6(7,93+1,62)))/0,92 = 7,16:$$

9. Հերթերի ոչ մարկովյան տեսության հիմնական արդյունքների ընտրանի

Գործնական խնդիրների լուծման ժամանակ A(t) և B(t) բաշխման ֆունկցիաները հաճախ ունեն ցուցչայինից տարբեր բաշխում: Դա պայմանավորում է հերթերի հետազոտման ավելի ընդհանուր եղանակների և միջանկյալ տեսության կիրառման անհրաժեշտությունը: Առանց կանգ առնելու այդ եղանակների և դրանց կիրառման առանձնահատկությունների վրա, որոնք բավականին ամբողջական և խորը շարադրված են հերթերի տեսությանը նվիրված գրականության մեջ, բերենք G|G|m, M|G|m, և G|M|m տիպի սպասարկման համակարգերի հիմնական բնութագրերի համար ստացված մի շարք արդյունքներ:

G|G|m տիպի համակարգերի համար կարևորագույն պարամետր է ρ զբաղվածության գործակիցը՝

$$\rho = \lambda\bar{x}/m ,$$

որը ցույց է տալիս համակարգում զբաղված սպասարկման սարքերի միջին քանակը: Այստեղ λ-ն մուտքի հոսքի հաճախությունն է, $\bar{x}$-ն՝ հայտի սպասարկման միջին ժամանակը, իսկ m-ը՝ համակարգում սպասարկող սարքերի թիվը: Այսպիսի սպասարկման համակարգի կայունության համար անհրաժեշտ է՝ $0 \le\rho <1$ պայմանի բավարարումը:

Համակարգում հայտերի մնալու միջին T ժամանակը հավասար է հերթում դրանց մնալու միջին W ժամանակի և հայտի $\bar{x}$ սպասարկման միջին ժամանակի գումարին՝ $T = \bar{x} +W$:

Լիթլի բանաձևի համաձայն, համակարգում հայտերի միջին $\overline{N}$ քանակը և հերթում հայտերի միջին $\overline{N}_q$ քանակը համապատասխանորեն հավասար են՝

$$\overline{N} = \lambda T,\ \overline{N}_q = \lambda W.$$

G|G|m տիպի համակարգերի համար $\overline{N} = \overline{N}_q + m\rho$

Մեծ բեռնվածության դեպքում (երբ $\rho\to1$), W-ի հաշվարկի համար հարմար է օգտագործել հետևյալ մոտավոր բանաձևը.

$$W \cong \frac{(m^2\sigma_a^2 + \sigma_b^2)\lambda}{2m^2(1-\rho)}$$

որտեղ σ_{u}^{2} և σ_{h}^{2}-ը հայտերի մուտքի հոսքի և դրանց սպասարկման ժամանակի ցրումներն են:

M|G|1, տիպի համակարգում հայտերի միջին $\overline{\text{N}}$ քանակը և հերթում հայտերի սպասման միջին W ժամանակը որոշվում են Պոլյաչեկ-Խինչինի բանաձևով՝

$$\overline{\text{N}} = \rho + (\lambda^2\overline{\text{x}}^2)/(2(1-\rho)),$$

$$\text{W} = (\lambda\overline{\text{x}}^2)/(2(1-\rho)):$$

Սպասարկման այսպիսի համակարգի զբաղվածության ժամանակի միջին արժեքը $\overline{\text{g}}$ և $\sigma_{\overline{\text{g}}}^{2}$ միջին քառակուսային ցրումը հավասար են՝

$$\overline{\text{g}} = \overline{\text{x}}/(1-\rho)\,,\quad \sigma_{\overline{\text{g}}}^{2} = \left(\sigma_{\text{b}}^{2} + \rho(\overline{\text{x}})^2\right)/(1-\rho)^3\ :$$

Այսպիսի համակարգի զբաղվածության պարբերությունում սպասարկված հայտերի միջին $\overline{\text{n}}$ քանակը և $\sigma_{\overline{\text{n}}}^{2}$ ցրումը որոշվում են հետևյալ բանաձևերից.

$$\overline{\text{n}} = 1/(1-\rho)\,,\quad \sigma_{\overline{\text{n}}}^{2} = \left(\rho(1-\rho) + \lambda^2(\overline{\text{x}})^2\right)/(1-\rho)^3\ :$$

λ_r, $\overline{\text{x}}_r$, r =1,2,...,R պարամետրերով R առաջնություններով հայտերի հոսքով M|G|1 տեսակի համակարգերում կուտակված չավարտված աշխատանքը պահպանող ցանկացած սպասարկման կարգի դեպքում ճշմարիտ է պահպանման օրենքը՝

$$\sum_{r=1}^{R}\rho_r \text{W}_r = \begin{cases}\rho\text{W}_0/(1-\rho), & \text{եթե } \rho < 1,\\ \infty, & \text{եթե } \rho \geq 1,\end{cases}$$

որտեղ՝

$$\text{W}_0 = \sum_{i=1}^{R}\lambda_i\overline{\text{x}}_i^2/2\,,\quad \rho = \sum_{i=1}^{R}\rho_i\ :$$

Դիտարկենք բացարձակ առաջնություններով սպասարկման համակարգերը: Այս համակարգերում եթե հայտի սպասարկման ժամանակ գալիս է առավել առաջնային հայտ, ապա սարքում գտնվող հայտի սպասարկումն ընդհատվում է և անմիջապես սկսվում է նոր եկած հայտի սպասարկումը: Կախված համակարգում սպասարկումն ընդհատված հայտերի հետագա վարքից՝ տարբերում են մի քանի դեպքեր.

1.1. Առավել առաջնային հայտերից համակարգի ազատվելուց հետո սպասարկման սարքն անմիջապես անցնում է ընդհատված հայտերի սպասարկման շարունակմանը ըստ նրանց առաջնության և ընդհատված տեղից:

1.2. Բարձր առաջնություն ունեցող հայտերով սպասարկումն ընդհատված ցածր առաջնություն ունեցող հայտերը թողնում են համակարգը՝ կորչում են:

1.3. Գերառաջնային հայտերից համակարգի ազատվելուց հետո ընդհատված հայտերի սպասարկումը վերսկսվում է առանց հաշվի առնելու ընդհատումից առաջ դրանց սպասարկման վրա ծախսված ժամանակը (մակարդակը):

2. Հարաբերական առաջնությամբ սպասարկման համակարգում, եթե սկսվել է որևէ առաջնային հայտի սպասարկումը, ապա այն շարունակվում է մինչև սպասարկման ավարտը՝ անկախ համակարգ եկած առավել առաջնային հայտերի քանակից: Այսինքն՝ այս դեպքում հայտերի առաջնությունը հաշվի է առնվում միայն որևէ հայտի սպասարկումն ավարտվելու պահին, նոր հայտի՝ սպասարկման սարք վերցնելու ժամանակ: Նման համակարգում հայտերի սպասարկման ընդհատումներ չկան:

1.1 տիպի համակարգերում i առաջնության հայտերի հերթում և համակարգում մնալու միջին ժամանակները հաշվարկվում են հետևյալ բանաձևերով

$$W_i = \frac{\sum\limits_{i=j}^{R} \lambda_j \overline{x}_j}{2(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}, \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \overline{x}_j, \; i=\overline{1,R}$$

$$T_i = w_i + h_i, \quad h_i = \overline{x}_i/(1-\sigma_i)$$

Այս համակարգի համար ստացիոնար բաշխման գոյության պայմանն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{i=1}^{R} \lambda_i \overline{x}_i < 1:$$

Հարաբերական առաջնությամբ համակարգում ստացիոնար բաշխման գոյության պայմանն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{i=2}^{R} \lambda_1 \overline{x}_1 < 1:$$

Իսկ համակարգի w_i և T_i բնութագրերը որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$W_i = \sum_{j=1}^{R} \lambda_j \overline{x}_j^2 \Big/ (2(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)),$$

$$T_i = W_i + \overline{x}_i:$$

Պետք է նշել, որ առաջնություններով համակարգերում նույնպես գործում է Լիթլի բանաձևը, ինչը թույլ է տալիս ինչպես յուրաքանչյուր առաջնության, այնպես էլ հայտերի գումարային հոսքի համար հերթում և սպասարկման համակարգում որոշել հայտերի միջին քանակը՝

$$\overline{N}_{q^r} = \lambda_r W_r, \quad \overline{N}_r = \overline{N}_{q^r} + \rho_r,$$

$$\overline{N}_q = \sum_{r=1}^{R} \overline{N}_{q^r}, \quad \overline{N} = \overline{N}_q + \sum_{r=1}^{R} \rho_r:$$

10. Ստուգողական հարցեր

1. Պուասոնի բաշխման միջին արժեքն ու ցրվածքը հավասար լինել չեն կարող:
2. Եթե զանգվածային սպասարկման հայտերի մուտքի պահերը բաշխված են ըստ Պուասոնի օրենքի, ապա իրար հաջորդող հայտերի միջև ընկած ժամանակահատվածները բաշխված են էքսպոնենցիալ:
3. Եթե մուտքի հոսքը պուասոնյան է, ապա ժամանակի անվերջ փոքր հատվածում համակարգ կարող է մուտք գործել երկու հայտ:
4. Պուասոնյան մուտքի հոսքի հայտերի միջին հաճախությունը հավասար է՝ ըստ էքսպոնենցիալ օրենքի բաշխված, հաջորդական հայտերի միջև ընկած միջին ժամանակահատվածին:
5. Եթե համակարգում հայտերի մուտքի պահերը պուասոնյան բաշխում ունեն, ապա վերջին մուտքի պահից անցած ժամանակահատվածից է կախված հավանականությունն այն բանի, որ հետագա որոշակի ժամանակահատվածում տեղի կունենա սպասարկման հերթական հայտի մուտքը:
6. Եթե իրար հաջորդող հայտերի միջև ընկած ժամանակահատվածները բաշխված են էքսպոնենցիալ, ապա ըստ հաշվի յուրաքանչյուր երրորդ (ընթացիկի համեմատությամբ) հայտերի մուտքի պահերը նույնպես բաշխված են էքսպոնենցիալ:
7. Եթե իր հերթում սպասող հաճախորդը անհամբեր է,ապա նա կարո՞ղ է իր հերթից անցնել մի այլ հերթ:
8. Որոշ ժամանակ հերթում սպասելով և համոզվելով, որ սպասարկումն իրականացվում է չափազանց դանդաղ, հաճախորդը կարո՞ղ է հրաժարվել սպասարկման տվյալ համակարգից:
9. Անհամբեր հաճախորդի հերթից հերթ անցնելը արդյո՞ք բացատրվում է նրանով, որ հաճախորդը հույս ունի կրճատել իր սպասման տևողությունը:
10. Սպասման տևողությունների բաշխումը կախված է այն բանից, թե հերթի որ կանոնակարգով է կատարվում սպասման համակարգի մեջ մուտք գործող հայտերը սպասարկման ընդունելու հերթականությունը:
11. Սպասման միջին տևողությունը ավելի կարճ է այն համակարգում, որտեղ սպասարկման համակարգ մուտք գործող պահանջների քանակը սահմանափակվում է:
12. Սպասարկման մեկ հայտին տրված սպասման միջին ժամանակը պատահական մուտքի հոսք ունեցող սպասարկման համակարգում ավելի քիչ է, քան կամայական ընտրված հայտի սպասման միջին ժամանակը յուրաքանչյուր հաճախորդի սպասարկման սևեռուն ժամանակ ունեցող համակարգում:
13. Սպասարկման համակարգ մտնող հայտերի արդյունավետ հաճախությունը չի կարող գերազանցել սկզբնաղբյուրից սերվող պահանջների ստացման չվերահսկվող հաճախությանը:Եթե հայտնի են ստացիոնար հավանականությունների արժեքները, որոնք համապատասխանում են

համակարգում եղած հայտերին, կարելի է հաշվել զանգվածային սպասարկման համակարգի բոլոր հիմնական գործառական բնութագրերը՝ հաճախորդների մուտքի և ելքի բաշխման պահերի կամայական տեսակների համար:

14. Սպասարկման մեկ սարք ունեցող զանգվածային համակարգում ստացիոնար վիճակը երկարատև ժամանակահատվածում հասանելի է ,երբ մեկ միավոր ժամանակի ընթացքում մուտք գործող հաճախորդների միջին թիվը փոքր է մեկ միավոր ժամանակի ընթացքում սպասարկվող հաճախորդների միջին թվից և եթե հերթի երկարությունը սահմանափակ է:
15. Սպասարկող համանման սարքերի միավորումը չի կարող հանգեցնել մուտք գործող հայտերի սպասման միջին տևողության նվազեցմանը:
16. Այն փաստը, որ ցանցայիններում ավտոմեքենաների վարորդները լինենք են միացնում և անջատում բենզապոմպը, հնարավորություն է տալիս ցանցայանը դիտարկել որպես ինքնասպասարկման համակարգ:
17. Ավտոմեքենաների կայանմանը հատկացված տարածքը կարելի է դիտար-կել որպես զանգվածային սպասարկման համակարգ, որում սպասարկ-ման հանգույցների քանակը հավասար է այն տեղերի քանակին, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է ծառայել մեկ ավտոմեքենայի կայանման:
18. Գերակայությամբ համակարգի մեջ ավելի բարձր գերակայությամբ հայտի մուտք գործելու դեպքում սպասարկումը չի կարող ընդհատվել:
19. Պուասոնյան մուտքի հոսքի ելքի հոսքը նույնպես պուասոնյան է:

Գրականություն

1. Г. Кофман, Р. Крион. Массовое обслуживание теория и приложения. /Пер. С франц./-М.: Мир, 1965.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. /Пер. С англ./ -М.: Машиностроение, 1979.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 3 /Пер. с англ./ -М.: Мир, 1978.
4. Кокс Дж., Теория очередей. -М.: Наука, 1978.
5. Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания. -М.: Радио и связь, 1981.
6. Таха Х. Исследование операций. Т.2,- М.: Мир, 1982
7. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. -М.: Наука, 1984.
8. Башарин Г. П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных системах. -М.: Наука, 1989.

XIV. ՆՄԱՆԱԿՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Փոխված՝ կստանան մի նոր կերպարանք:
Ասպարեզ կգան գործերը ծածուկ,...

Գրիգոր Նարեկացի,
Մատյան ողբերգության բան Հ.Թ.Բ,
Ե. 1979

Մուտք

Առաջին հատորում և սույն հատորի նախընթաց բաժիններում ծանոթացանք գործույթների հետազոտման զանազան մոդելներին և դրանց վերլուծական եղանակներին: Դիտարկված խնդիրները և մոդելները բավական պարզ էին: Սակայն իրականությունը շատ ավելի բարդ է և հաճախ հանդիպում են այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծումները դուրս են գալիս վերը դիտարկված մոդելների շրջանակից: Նման դեպքերում ստիպված ենք դիմելու գործույթների հետազոտման ավելի հզոր և ընդհանուր եղանակի՝ ինչպիսին է նմանակումը կամ նմանակող մոդելավորումը:

Այս եղանակն օգտագործվում է այն բոլոր դեպքերում, երբ խնդիրը վերլուծական եղանակներով լուծելը կամ անհնարին է կամ էլ՝ անարդյունավետ: Նմանակման գաղափարը շատ պարզ է և թույլ է տալիս հետազոտվող համակարգի մոդելի հետ կատարել փորձեր, քայլ առ քայլ դիտարկել նրա վարքը, հավաքել զանազան տվյալներ և գնահատել մոդելի գործառույթի բնութագրերը, և այլն: Բարդ համակարգերի հետազոտման շատ խնդիրներում նմանակումը հետազոտողին մատչելի միակ հնարավոր գործիքն է: Նմանակող մոդելավորումը իր մեծ հնարավորությունների և ճշգրտության շնորհիվ լայնորեն կիրառվում է ինչպես ֆիզիկայի, քիմիայի, կենսաբանության, այնպես էլ տնտեսագիտական, տեխնիկական, սոցիալական և այլ բարդ համակարգերի հետազոտման խնդիրներ լուծելիս:

1. Նմանակման ընթացակարգեր

Որպեսզի հասկանալի լինեն նմանակման կիրառելիության շրջանակները, դիտարկենք երեք հարց.

- Ինքնին ի՞նչ է ներկայացնում նմանակման եղանակը.
- Երբ է նպատակահարմար նրա օգտագործումը
- Ինչպիսի՞ ընթացակարգերից է նա բաղկացած:

Նմանակման եղանակը համակարգի գործառույթի հետազոտման, նրա հետագա վարքի կանխատեսման և տարբեր վարվելակերպերի գնահատման նպատակով թվային-ալգորիթմական մոդելների ստեղծման և դրանց հետ փորձեր անելու գործընթաց է:

Որպես համակարգերի հետազոտման փորձառական եղանակ՝ նմանակումը մյուս փորձառական եղանակների համեմատությամբ ունի մի շարք առավելություններ, այդ թվում՝ փորձերի կրկնությունն ու փորձի պայմանների վերարտադրությունը, դրանց դյուրին դադարեցումն ու վերսկսումը ,փորձերի պայմանների կառավարելիությունը և այլն: Նմանակման ժամանակ փորձարկման առարկա են հանդիսանում ոչ թե իրական համակարգերը, այլ դրանց ալգորիթմական մոդելները: Մոդելավորման ժամանակ համակարգիչների կիրառումը թույլ է տալիս զգալիորեն կրճատել գիտափորձերի անցկացման ժամանակը և պակասեցնել հնարավոր սխալները, համակարգի վարքը հետազոտել ինչպես ժամանակի որոշակի պահին (ստատիկ նմանակում), այնպես էլ տևական ժամանակահատվածի ընթացքում (դինամիկ նմանակում):

Որպես համակարգերի հետազոտման թվային եղանակ՝ նմանակումը հիշեցնում է նախընթաց բաժիններից մեզ հայտնի մյուս թվային եղանակները: Սակայն, եթե վերջիններիս կիրառությունները սահմանափակված են քննարկվող մոդելների բարդությամբ և չափայնությամբ, ապա նմանակման մոդելները զերծ են նման սահմանափակումներից:

Բարդ համակարգերի հետազոտման ժամանակ անհրաժեշտ է հաշվի առնել պատահական գործոնների ազդեցությունը դրանց բնութագրերի և վարքի վրա: Նման համակարգերը վերլուծական եղանակներով հետազոտելը հաճախ պահանջում է, որ դրանց վարքը նկարագրող պատահական գործընթացները բավարարեն կայունության, համասեռության, անընդհատության և այլ պայմանների: Սակայն նշված պայմանների բավարարման դեպքում անգամ, ինչպես նշվել է XI բաժնում, նման համակարգերի հետազոտումը հաճախ կապված է հաշվողական բարդ ընթացակարգերի հետ: Այդպիսի համակարգերի հետազոտման համար ավելի նպատակահարմար է օգտագործել հավանականային նմանակման եղանակը, որը հայտնի է Մոնտե Կարլոյի եղանակ անվանումով:

Հաշվի առնելով նմանակող մոդելավորման մեծ հնարավորությունները, սակայն իրականացման զգալի աշխատատարությունը, այս եղանակի յուրաքանչյուր կիրառում պետք է ըստ ամենայնի հիմնավորված լինի: Նմանակումը նպատակահարմար է օգտագործել հետևյալ պայմաններից որևէ մեկի առկայության դեպքում՝

- Համակարգի հետազոտման վերլուծական եղանակներ տակավին գոյություն չունեն:
- Համակարգի հետազոտման վերլուծական եղանակներ գոյություն ունեն, սակայն դրանց ընթացակարգերը շատ բարդ են և աշխատատար:
- Հայտնի են համակարգի բնութագրերի բանաձևերը, սակայն դրանց կիրառումը մեծ բարդության պատճառով նպատակահարմար չէ:
- Համակարգի բնութագրերի գնահատման հետ միասին նաև անհրաժեշտ է նրա վարքի դիտարկումը տևական ժամանակի ընթացքում:

• Իրական պայմաններում համակարգերի վարքի դիտարկման և փորձերի կազմակերպման դժվարությունների պատճառով դրանց հետազոտման միակ հնարավոր գործիքը նմանակման եղանակն է:

Համակարգերի նմանակումը մի բարդ ու բազմափուլ գործընթաց է, որը բաղկացած է հետևյալ փուլերից.

1. Համակարգի մոդելավորման խնդրի բովանդակային նկարագրում:
2. Համակարգի ալգորիթմական մոդելի ձևակերպում:
3. Տվյալների հավաքում և մշակում:
4. Մոդելի աշխատանքի ծրագրավորում:
5. Մոդելի և իրական պատկերի համարժեքության գնահատում:
6. Գիտափորձերի ռազմավարական և մարտավարական ծրագրում:
7. Նմանակման մոդելի փորձարկում:
8. Արդյունքների վերլուծություն:
9. Իրագործում:
10. Փաստագրում:

Անցնենք նմանակման եղանակի առանձին փուլերի բովանդակության մեկնաբանմանը:

1. Ինչպես որ ամեն մի ուսումնասիրություն, նմանակումը նույնպես սկսվում է հետազոտվող հիմնախնդրի և նպատակների ձևակերպումից: Հետազոտման նպատակները սովորաբար ձևակերպվում են՝

• Հարցերի տեսքով, որոնց պետք է պատասխանել համակարգի հետազոտման արդյունքում: Դրա համար անհրաժեշտ է մոդելավորման սկզբում հստակ և հասկանալի ձևակերպել համակարգի հետազոտման խնդիրները, տալ դրանց հնարավոր լուծումների գնահատման չափանիշները:

• Վարկածների տեսքով, որոնք պետք է ստուգվեն համակարգի հետազոտումով: Այս դեպքում անհրաժեշտ է պարզորոշ ձևակերպել ստուգման ենթակա վարկածները և դրանց գնահատման՝ ընդունման կամ մերժման, չափանիշները:

• Գնահատականների տեսքով, որոնք պետք է կառուցվեն համակարգի բնութագրերի համար: Համակարգի տարբեր վարվելակերպերի, մուտքի փոփոխականների և պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում, նրա բնութագրերի համար կառուցվում են տարբեր գնահատականներ և վստահելիության միջակայքեր:

2. Համակարգի մոդելավորման նպատակների ձևակերպումից հետո անհրաժեշտ է կառուցել նրա ձևական-ալգորիթմական մոդելը, որը համակարգի մուտքի փոփոխականները կապում է նրա կառավարման և ելքի փոփոխականների հետ: Այս ընթացակարգում առանձնացվում են համակարգի վարքը բնութագրող հիմնական գործոնները և կառուցվածքային տարրերը: Դա պահանջում է համակարգի բաղադրիչների և դրանց փոխազդեցությունների վերլուծություն:

Համակարգի ալգորիթմական մոդելի կառուցման ժամանակ հաշվի են առնվում համակարգի վարքը նկարագրող էական փոփոխականները, մոդելի բարդությունը, ծրագրավորման լեզվով ներկայացվելու դյուրությունը, մոդելավորվող համակարգի գործառույթի նկարագրման ճշգրտությունը և այլ գործոններ: Մոդելավորման հաջորդ փուլին կարելի է անցնել, եթե համակարգի մոդելում հաշվի են առնված մուտքի բոլոր էական փոփոխականները, ճիշտ են ձևակերպված մուտքի և ելքի փոփոխականների փոխադարձ ֆունկցիոնալ կապերը, ստույգ են գնահատված մոդելի պարամետրերը և այլն:

3. Համակարգի յուրաքանչյուր հետազոտում ընդգրկում է նրա վարքը, բնութագրող տարրերը, դրանց փոխազդեցությունը, ինչպես նաև գործառույթի պայմանները բնութագրող տվյալների հավաքման ու մշակման ընթացակարգը: Մոդելավորման այս փուլում ուսումնասիրվում են համակարգի վարքը նկարագրող ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական տվյալները, և որոշվում է փորձառական ու տեսական հավանականային բաշխումների օգտագործման նպատակահարմարությունը: Նմանակման ընթացքում տվյալների ստացման համար սովորաբար օգտագործվում են թվային եղանակներ և համակարգչային ենթածրագրեր: Պատահական թվերի և մեծությունների ստացման տարբեր թվային եղանակները և դրանց Ֆորտրան ծրագրերը կքննարկվեն 2-րդ ենթաբաժնում:

4. Հաջորդ քայլում կատարվում է համակարգի ալգորիթմական մոդելի ծրագրավորում, այսինքն՝ որևէ ծրագրավորման լեզվով նրա նկարագրում: Նմանակման մոդելները սովորաբար ունեն բարդ տրամաբանական կառուցվածք և բնութագրվում են իրենց ենթահամակարգերի և տարրերի փոխազդեցությունների դինամիկ փոփոխմամբ: Մոդելների առանձնահատկությունները պահանջում են դրանց նկարագրման և իրականացման համար օգտագործել ծրագրավորման հատուկ լեզուներ: Այդպիսի լեզուներից մեծ տարածում են գտել GPSS-ը, MIDAS-ը COBLOC-ը ԴԻՆԱՄՈ-ն և այլն:

Ծրագրավորման հատուկ լեզուները բնորոշվում են մի շարք առավելություններով, որոնցից կարելի է նշել՝

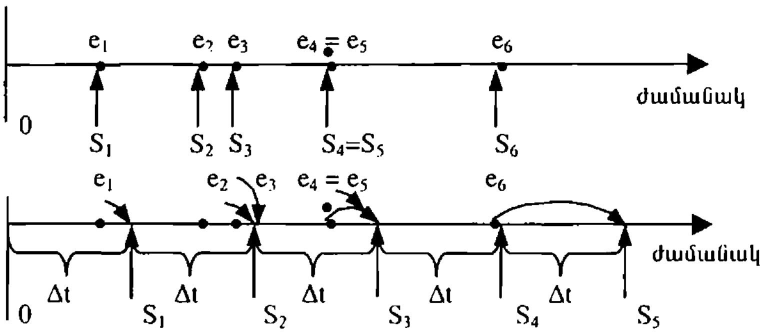
- մոդելների ծրագրավորման պարզությունը
- նմանակման ընթացքին հետևելու հնարավորությունը
- ծրագրային փոփոխությունների իրականացման ճկունությունը
- մոդելի կառուցվածքում անհրաժեշտ փոփոխությունների իրականացման ճկունության ապահովումը և այլն:

Համակարգի ալգորիթմական մոդելի կառուցման և ծրագրավորման լեզվի ընտրության փուլերի կարևոր խնդիրներից են համակարգի վիճակի ժամանակային կոորդինատների ճշգրտումը և համակարգում տարբեր պատահույթների ու տարրերի փոխազդեցության համաձայնեցվածության ապահովումը:

Պետք է հաշվի առնել, որ ալգորիթմական մոդելի գործառույթն ընթանում է համակարգային՝ արհեստական ժամանակում, որի ընթացքում անհրաժեշտ է ապահովել տարբեր պատահույթների հանդես գալու կարգն ու նրանց միջև եղած ժամանակային միջակայքերը:

Օգտագործվում են մոդելավորման ժամանակի ներկայացման երկու հիմնական եղանակ՝ ժամանակի հաստատուն և փոփոխական միջակայքերով, որոնք հաճախ անվանվում են նաև սևեռված քայլով և մինչև հաջորդ պատահույթը քայլով եղանակներ:

Առաջին եղանակի դեպքում համակարգային ժամանակի հաշվարկն իրականացվում է նախօրոք որոշված հաստատուն տևողությամբ Δt ժամանակային միջակայքերով: Երկրորդ եղանակի դեպքում մոդելավորվող համակարգի վիճակը նորացվում է յուրաքանչյուր էական պատահույթը հայտնվելիս: Ստորև գծանկարում բերված են նշված եղանակների դեպքում համակարգային ժամանակի հաշվարկի օրինակներ:



Այստեղ ժամանակային առանցքի վրա ցույց է տրված e_i պատահույթների հաջորդականությունը: Սլաքները ցույց են տալիս երկու եղանակների դեպքում համակարգային ժամանակի աճի կետերը և հերթական պատահույթների հայտնվելու պահերը: Առաջին եղանակի դեպքում համակարգային ժամանակի աճի կետերի հաջորդականությունը հետևյալն է՝ $S_1=e_1$, $S_2=e_2,\ldots,S_5=e_6$, որտեղ ժամանակի աճի $S_1,S_2,\ldots,S_5$ կետերը համընկնում են $e_1,e_2,\ldots,e_6$ պատահույթների հայտնվելու պահերի հետ: Եթե t_i-ն i-րդ պատահույթի հայտնվելու պահին համակարգային ժամանակի արժեքն է, ապա $t_i=t_{i-1}+S_i$, $i=1,2,\ldots$, $t_0=0$: Երկրորդ եղանակի դեպքում, համակարգային ժամանակը ընդունում է հետևյալ արժեքները՝

$$S_1^{1}=\Delta t, S_2^{1}=2\Delta t,\ldots,S_5^{1}=5\Delta t:$$

Այս դեպքում համակարգային ժամանակի աճի պահերը կախված չեն պատահույթների հայտնվելու պահերից և որոշվում են միայն Δt-ի արժեքով: Երկու եղանակներն էլ մեծ կիրառում են գտել նմանակող մոդելավորման մեջ: Եղանակի ընտրությունը պայմանավորված է խնդրի առանձնահատկություններով, պահանջվող ճշգրտությամբ:

5. Այս փուլի իրականացման համար սովորաբար օգտագործվում են վիճակագրական գնահատման և վարկածների ստուգման տարբեր եղանակներ: Ստուգվում են ինչպես մոդելի հիմքում ընկած վարկածները, այնպես էլ գիտափորձերի հիման վրա արված եզրահանգումները: Այս նպատակների համար հիմնականում օգտագործվում են՝

- միջին արժեքների ստուգումը
- ցրվածքի և կովարիացիայի վերլուծությունը
- ըստ համաձայնության չափանիշների ստուգումը
- ռեգրեսիայի և հարաբերակցության վերլուծությունը:

6. Այս փուլում իրականացվում է համակարգի մոդելավորման անհրաժեշտ տվյալներն ապահովող գիտափորձերի ծրագրումը: Որոշվում են համակարգի մոդելի փորձերի թիվը, սկզբնական պայմանները, դրանց տվյալների հավաքման ու մշակման եղանակները: Նմանակման փորձեր կատարելիս համակարգի գործառույթի կայունացված ռեժիմին համապատասխանող վիճակին հասնելու համար պահանջվում է որոշակի՝ անցումային, ժամանակ:

Այս փուլի ընթացքում որոշվում են փորձերի այնպիսի սկզբնական պայմաններ, որոնք կրճատում են անցումային ռեժիմի տևողությունը: Այնուհետև որոշվում է մոդելավորման արդյունքների ճշգրտությունն ապահովող անցավազքերի նվազագույն թիվը: Անցավազքերի թվի որոշման տարբեր վիճակագրական եղանակները դիտարկվում են 4-րդ ենթաբաժնում:

7. Այս փուլում իրականացվում են համակարգի ալգորիթմական մոդելի համակարգչային փորձարկումները և նրա զգայունության վերլուծությունը: Հետազոտվում է մոդելի տարբեր պարամետրերի փոփոխությունների ազդեցությունը համակարգի բնութագրերի վրա: Դրա շնորհիվ հնարավորություն է ստեղծվում զգալիորեն բարձրացնել վստահելիությունը մոդելավորման արդյունքների նկատմամբ:

8. Այնուհետև կատարվում են գիտափորձերի օգնությամբ ստացված արդյունքների վերլուծությունը, հետազոտվող համակարգի վարքին ու բնութագրերին վերաբերող վարկածների մշակումը: Վերջինս հնարավորություն է տալիս նոր վարկածների և իրավիճակների ստեղծում, մոդելավորում ու հետազոտում:

9. Այս փուլի ընթացակարգում կատարվում է ստացված արդյունքների գործնական կիրառումը, որն իր հերթին հետազոտման նոր խնդիրների աղբյուր կարող է հանդիսանալ:

10. Վերջին փուլի ընթացակարգում կատարվում է համակարգի մոդելավորման, նրա օգնությամբ ստացված արդյունքների ներդրման ու օգտագործման ողջ գործընթացի փաստագրումը:

Մի շարք գործնականում հետաքրքրություն ներկայացնող համակարգերի, այդ թվում, հերթերի, պաշարների կառավարման և մարկովյան ու կիսամարկովյան գործընթացների նմանակման մոդելները կքննարկվեն 3-րդ ենթաբաժնում:

2. Մոնտե Կարլոյի եղանակ

Հավանականային նմանակման մոդելների կառուցման ժամանակ անհրաժեշտ է ապահովել ըստ տրված աղյուսակի կամ ըստ հավանականային բաշխման օրենքի պատահական մեծությունների՝ մոդելի պարամետրերի, փոփոխականների և ցուցանիշների, ստացման հնարավորությունը:

Այդ նպատակով ներկայումս լայնորեն օգտագործվում է Մոնտե Կարլոյի եղանակը: Եղանակն իր անվանումն ստացել է 40-ական թվականների վերջին ֆոն Նոյմանի և Ուլամի կողմից Լոս Ալամոսում (ԱՄՆ) «Մոնտե Կարլո» ծածկանվամբ գաղտնի ծրագրով միջուկային հետազոտություններ կատարելիս: Այս եղանակն այնքան արդյունավետ եղավ, որ շատ արագ տարածվեց տնտեսության տարբեր բնագավառներում բարդ հավանականային համակարգեր հետազոտելիս: Ներկայումս Մոնթե Կառլոյի եղանակն օգտագործվում է ինչպես բարդ հավանականային, այնպես էլ դետերմինիկ համակարգերի հետազոտման խնդիրներում:

Դիցուք՝ A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p-ի: Այս պատահույթի մոդելավորման համար բավական է ունենալ [0,1] միջակայքում հավասարաչափ բաշխում ունեցող r թիվ: Եթե $r\in[0,p]$ միջակայքին, ապա համարվում է որ տեղի է ունեցել A պատահույթը:Իսկ հակառակ դեպքում, երբ $p\leq r\leq 1$, A պատահույթը տեղի չի ունեցել: $p_1,p_2,\ldots,p_N$ հավանականություններով պատահույթների մոդելավորման համար Մոնթե Կարլոյի եղանակում օգտագործվում են [0,1] միջակայքում հավասարաչափ բաշխում ունեցող պատահական թվեր: Նման բաշխում ունեցող պատահական թվեր ստանալու համար կարելի է օգտագործել պատահական թվերի աղյուսակները, համակարգչային հատուկ ենթածրագրերը կամ հավասարաչափ բաշխված պատահական թվերի այլ, օրինակ՝ համանման, աղբյուրներ: Համակարգչային հատուկ ենթածրագրերի օգնությամբ ստացված հավասարաչափ բաշխված պատահական թվերը կոչվում են կեղծ պատահական թվեր: [0,1] միջակայքում հավասարաչափ բաշխում ունեցող կեղծ պատահական թվերի ստացման տարբեր եղանակները և Ֆորտրան լեզվով դրանց ենթածրագրերը ղիտարկված են հաջորդ ենթաբաժնում: Պատահական մեծությունների մոդելավորման համար կարող են օգտագործվել ինչպես չափումների օգնությամբ ստացված փորձառական տվյալները, այնպես էլ հայտնի հավանականությունների բաշխման խտության ֆունկցիաները: Դիտարկենք առանձին պատահույթների և պատահական մեծությունների մոդելավորման եղանակները:

Անկախ պատահույթների $A=\{A_1,A_2,\ldots,A_N\}$ լրիվ խմբի մոդելավորման համար նույնպես բավական է ունենալ r պատահական թվի մեկ արժեք: Համարվում է, որ A_n պատահույթը հանդես է եկել, եթե

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i \leq r < \sum_{i=1}^{n} p_i\,,\ \ n=1,2,\ldots,N,\ \ p_0=0,\ \ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1: \qquad (2.1)$$

Նշանակենք $F(x)=P\{y\leq x\}$-ով y պատահական մեծության կուտակման բաշխման ֆունկցիան: Եթե y պատահական մեծությունը անընդհատ է, իսկ $F(x)$-ը բացարձակ անընդհատ է, ապա

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

որտեղ $f(x)=dF(x)/dx$-ը y պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության ֆունկցիան է: Ընդհատ պատահական մեծության դեպքում $F(x)$-ը որոշվում է հետևյալ բանաձով.

$$F(x)=\sum_{i=0}^{x} f(x_i),$$

որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան x արգումենտի ամբողջական արժեքների դեպքում որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$f(t)=P(x=t),\quad t=0,1,2,\ldots:$$

Տրված $F(x)$ հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայով անընդհատ պատահական մեծությունների մոդելավորման համար օգտագործվում են ոչ գծային ձևափոխությունների, արտաքսումների, բաղադրյալ և այլ եղանակները:

Ոչ գծային ձևափոխությունների եղանակներից ամենատարածվածը հակադարձ ֆունկցիաի եղանակն է: Այս եղանակի դեպքում նախ կառուցում են y պատահական մեծության $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան: Այնուհետև $F(y)=r$ պայմանից, որտեղ r-ը [0,1] միջակայքում հավասարաչափ բաշխում ունեցող պատահական թիվ է, որոշվում է y պատահական մեծությունը:

Խիստ մոնոտոն $F(x)$ ֆունկցիայի դեպքում y պատահական մեծությունը միարժեքորեն որոշվում է $F(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ձևափոխությամբ: Եթե $F^{-1}(x)$-ը $F(x)$ ֆունկցիայի հակադարձն է, ապա $y=F^{-1}(x)$: Օրինակ, $1/m_y$ պարամետրով ցուցչային բաշխում ունեցող y պատահական մեծությոան մոդելավորման համար այս եղանակի օգնությամբ կստանանք՝

$$y=-m_y\ln(1-r),\ f(y)=1/m_y\exp(-y/m_y):$$

Եթե y-ը ընդհատ պատահական մեծություն է, ապա նրա արժեքները որոշվում են $F(y-1)<r\leq F(y)$ պայմանից, որտեղ r-ը [0,1] միջակայքում հավասարաչափ բաշխում ունեցող պատահական թիվ է:

Դիտարկենք Մոնտե Կարլոյի եղանակի կիրառման մի պարզագույն օրինակ: Դիցուք՝ մեկ ժամյա պարբերությունների ընթացքում տուրիստական ձեռնարկության մոտ հավաքված հաճախորդների թիվը և դրանց հավանականությունները բերված են 1-ին աղյուսակում:

Մոդելավորենք 5 ժամվա ընթացքում ձեռնարկության մոտ հաճախորդների թիվը: Կառուցենք հավանականությունների կուտակման բաշխման $F(x)$ ֆունկցիան: Այնուհետև պատահական թվերի աղյուսակից (տե՛ս հավելված) վերցնենք հինգ երկնիշ թիվ, օրինակ՝ 09,54,42,80 և 20, և կառուցենք դրանց համապատասխան տասնորդական թվերը՝ 0,09; 0,54; 0,42; 0,80; 0,20: Այս թվերից յուրաքանչյուրն օգտագործենք մեկ ժամի ընթացքում ձեռնարկության մոտ հավաքված հաճախորդների թվի որոշման համար: (2.1) բանաձևի օգնությամբ ստացված տարբեր ժամերին ձեռնարկության մոտ հավաքված հաճախորդների թվերը բերված են 2-րդ աղյուսակում:

Աղյուսակ 1.

Հաճախորդների թիվը	Հավանականու-թյունը	Կուտակված F(x) հավանականությունը
0	0.40	0.40
1	0.25	0.65
2	0.20	0.85
3	0.15	1.0

Պատահական թվերի աղյուսակից վերցնելով նմուշներ, կարելի է համոզվել, որ հաճախորդների թիվը նկարագրված օրինակում կունենա նույնպիսի հարաբերական հաճախություն, ինչպիսին բերված է 1-ին աղյուսակում: Նման 5 նմուշների օգնությամբ ստացված հաճախորդների թիվը (տե՛ս աղ. 2) կունենա այդեն հավանականային բնույթ:

Աղյուսակ 2.

Ժամանակը	Պատահական թիվը	Հաճախորդների թիվը
1	0.09	0
2	0.54	1
3	0.42	1
4	0.80	2
5	0.20	0

Նմանակման մոդելավորման խնդիրներում սկզբնական տվյալների և փորձերի արդյունքների հետազոտման ժամանակ, հաճախ անհրաժեշտ է լինում ստուգել, թե փորձառական կամ նմուշային տվյալները որքանով են տարբերվում համապատասխան տեսական բաշխման օգնությամբ ստացվածներից: Դրա համար վիճակագրական եղանակներով ստուգվում է Ho վարկածը, ըստ որի ընտրանքային տվյալների համախումբը տեսականորեն կանխատեսվածի համեմատությամբ չնչին տարբերություն ունի: Նման վարկածի վիճակագրական գնահատման համար օգտագործում են համաձայնեցման չափանիշները: Գործնականում մեծ կիրառություն է գտել χ^2 չափանիշը: χ^2 վիճականին որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_0 - f_i)^2}{f_i},$$

որտեղ f_0-ն պատահույթների խմբի դիտարկվող հաճախությունն է, f_i-ն i-րդ խմբի սպասվող (տեսական) հաճախությունն է, k-ն պատահույթների խմբերի թիվն է: Եթե, $\chi^2=0$ ապա դիտարկվող և տեսականորեն կանխատեսված հաճախականությունների արժեքները ճիշտ համընկնում են, իսկ $\chi^2>0$-ից դեպքում լրիվ համընկնելիություն չկա: Որքան մեծ է χ^2-ն, դիտարկվող և սպասվող արժեքների միջև այնքան մեծ է տարբերությունը:

Այս դեպքում χ^2-ի հաշվարկային արժեքը համեմատում են նրա աղյուսակային արժեքների հետ: χ^2-ի արժեքները աղյուսակավորված են ազատության տարբեր աստիճանների թվի և $1-\alpha$ վստահելիության հավանականության տարբեր մակարդակների համար:

3. Հարբած անցորդի խնդիրը

Մոնտե Կարլոյի եղանակի օգնությամբ դիտարկենք հարբած անցորդի վարքի նմանակման խնդիրը: Դիցուք՝ հարբածը գտնվում է խաչմերուկում և սթափվելու համար որոշում է զբոսնել քաղաքում: Հերթական խաչմերուկում նրա հարավ, հյուսիս, արևելք կամ արևմուտք շարժվելու հավանականությունները ընդունենք իրար հավասար: Տեսնենք թե հարբածը ինչպիսի հավանականությամբ 10 խաչմերուկ անցնելուց հետո կգտնվի զբոսանքն սկսելու վայրից 2 խաչմերուկ հեռավորության վրա: Հարբածի գտնվելու վայրը և շարժման ուղղությունը կնկարագրենք (x,y) վեկտորով, որտեղ x-ը ցույց է տալիս արևելքից արևմուտք ուղղությունը, իսկ y-ը՝ հարավից հյուսիս: Խաչմերուկից դեպի արևելք գնալուն համապատասխանում է x-ի մեկ միավորով աճը, իսկ արևմուտք գնալուն՝ մեկ միավորով նվազելը: Նմանապես, դեպի հյուսիս գնալուն համապատասխանում է y-ի մեկ միավորով աճը, իսկ հարավ գնալուն՝ մեկ միավորով նվազելը: Եթե զբոսանքի սկզբնական վայրը նշանակենք (0,0)-ով, ապա հարբածի յուրաքանչյուր քայլից հետո կարելի է ճշգրիտ որոշել սկզբնակետից նրա հեռավորությունը: Եթե 10 խաչմերուկից հետո՝ զբոսանքի վերջում, x-ի և y-ի բացարձակ արժեքների գումարը հավասար կլինի 2-ի, ապա հարբածը կգտնվի սկզբնակետից 2 խաչմերուկ հեռավորության վրա: Քանի որ քաղաքի խաչմերուկներում բոլոր ուղղություններով շարժվելու հավանականությունները իրար հավասար են, ապա հարբածը որևէ ուղղությամբ կշարժվի 0.25 հավանականությամբ:

Քաղաքում մեր հերոսի զբոսանքը նմանակելու համար պատահական թվերի աղյուսակից վերցնենք 10 երկնիշ պատահական թվեր՝ յուրաքանչյուր խաչմերուկի համար 1 թիվ հաշվով: Պայմանավորվենք, որ պատահական թվի 00-ից 24 միջակայքում արժեքներին համապատասխանում է մեր հերոսի խաչմերուկից դեպի արևելք շարժվելը և x-ի 1-ով աճը, 25-ից 49-ը արժեքներին՝ դեպի արևմուտք շարժվելը և x-ի 1-ով նվազելը, 50-ից 74 արժեքներին՝ դեպի հյուսիս շարժվելը և y-ի 1-ով աճը, իսկ 75-ից 99-ը արժեքներին՝ դեպի հարավ շարժվելը և y-ի 1-ով նվազելը:

Ստորև բերված է նմանակման 5 փորձերի արդյունքները (տես աղ. 3) և խնդրի մոդելավորման ալգորիթմի բլոկ-սխեման,որտեղ N-ը՝ անցած խաչմերուկների թիվն է:

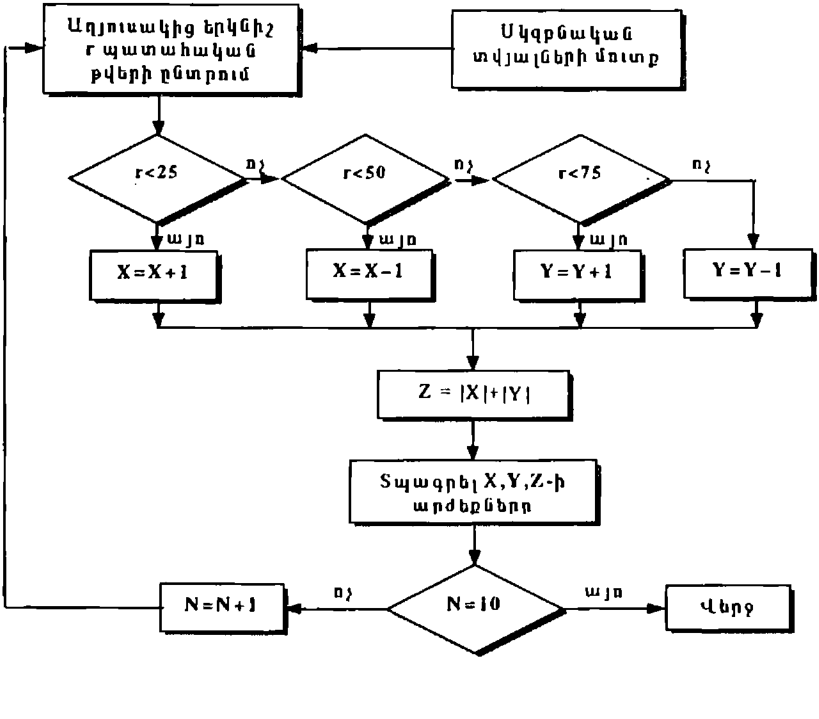
Ինչպես հետևում է աղյուսակից, հարբածը p=3/5 հավանականությամբ կգտնվի (0,0) սկզբնակետից 2 խաչմերուկ հեռավորության վրա:

Աղյուսակ 3.

Անցումների թիվը N	I փորձ		II փորձ		III փորձ		IV փորձ		V փորձ	
	Պատ. թիվ	(x,y)	Պատ. թիվ	(x,y)	Պատ. թիվ	(x,y)	Պատ. թիվ	(x,y)	Պատ. թիվ	(x,y)
1	7.3	0.1	10	1,0	05	1,0	06	1,0	64	0,1
2	21	1.1	89	1,-1	88	1,-1	95	1,-1	76	0,0
3	45	0.1	14	2,-1	10	2,-1	04	2,-1	79	0,-1
4	76	0.0	81	2,-2	04	3,-1	67	2,0	54	0,0
5	96	0.-1	30	1,-2	48	2,-1	51	2,1	28	-1,0
6	94	0,-2	91	1,-3	19	3,-1	95	2,0	05	0,0
7	53	0,-1	06	2,-3	44	2,-1	73	2,1	71	0,1
8	57	0,0	38	1,-3	21	3,-1	10	3,1	75	0,0
9	96	0,-1	79	1,-4	95	3,-2	76	3,0	53	0,1
10	43	-1,-1	43	0,-4	11	4,-2	30	2,0	29	-1,1
$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert\le 2$	Այո		Ոչ		Ոչ		Այո		Այո	

Հասկանալի է, որ 5 փորձերը բավարար չեն p հավանականության ճշգրիտ գնահատման համար: Փորձերի քանակի ընտրության հարցը կդիտարկենք փորձերի ծրագրմանը նվիրված բաժնում:

Հարբած անցորդի վարքի նմանակման մոդելի բլոկ-սխեմա



4. «Կեղծ» պատահական թվերի ստացում

Նմանակման ընթացքում տրված բաշխման ֆունկցիայով պատահական թվեր ստանալու համար օգտագործվում են հավասարաչափ բաշխված պատահական թվերի տարբեր աղբյուրներ: Ներկայումս հայտնի են հավասարաչափ բաշխված պատահական թվերի համակարգչային վերարտադրության բազմաթիվ եղանակներ: Ծրագրային եղանակների միջոցով հաշվում են այսպես կոչված կեղծ պատահական թվերը, որոնք չնայած իրենց դետերմինիկ առնչություններով հաշվարկմանը, [0,1] միջակայքում ունեն հավասարաչափ բաշխված թվերին բնորոշ վիճակագրական հատկություններ:

Հատուկ վիճակագրական թեսթերով (հաճախական, ինքնահարաբերակցական և այլն) ստուգվելուց հետո կեղծ պատահական թվերի հաջորդականությունը կարելի է օգտագործել որպես «իրական» պատահական թվերի հաջորդականություն:

Կատարյալ աղբյուրից ստացված կեղծ պատահական թվերի հաջորդականությունը պետք է կազմված լինի հավասարաչափ բաշխված, վիճակագրականորեն անկախ, վերարտադրելի և չկրկնվող թվերից: Կեղծ պատահական թվերի աղբյուրը պետք է նաև աշխատի արագ և ունենա նվազագույն մեքենայական հիշողություն: Գործնականում լայն կիրառություն են գտել կեղծ պատահական թվերի ստացման համընկնելիության հետևյալ երեք եղանակները՝ բազմապատկական, խառը և համակցված: Համընկնելիության եղանակների հիմքում դրված է ամբողջ թվերի համեմատելիության հատկությունը: Երկու՝ A և B ամբողջ թվեր համարվում են ըստ m մոդուլի համընկնելի, եթե գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ R թիվ, որ $A-B=Rm$: A և B թվերի համընկնելիությունը ըստ m մոդուլի գրվում է հե-տևյալ կերպ.

$$A \equiv B \pmod{m}: \qquad (4.1)$$

Բանաձևը նշանակում է, որ A և B թվերի տարբերությունը առանց մնացորդի բաժանվում է m թվի վրա: Օրինակ՝

$$1897\equiv7 \pmod{5},\ 4339\equiv39 \pmod{10}:$$

Համընկնելիության բոլոր եղանակները հիմնվում են հետևյալ անդրադարձ բանաձևի վրա.

$$n_{i-1} \equiv \lambda n_i+\mu \pmod{m}, \qquad (4.2)$$

որտեղ λ-ն, n_i-ը, m-ը և μ-ն ոչ բացասական ամբողջ թվեր են:

(4.2) բանաձևից n_i-ի համար կստանանք՝

$$n_i \equiv \lambda^i n_0+\mu(\lambda^i-1)/(\lambda-1) \pmod{m}, \qquad (4.3)$$

Եթե տրված են n_0 սկզբնական արժեքը, λ և μ հաստատունները, ապա (4.3)-ը որոշում է ամբողջ թվերի այնպիսի $(n_1,n_2,\ldots)$ հաջորդականություն, որի տարրերը կազմված են $(\lambda^i n_0+\mu(\lambda^i-1)/(\lambda-1))$ հաջորդականության տարրերի m թվի վրա բաժանումից ստացված մնացորդներից: Քանի որ ցանկացած $i\geq1$-ի համար $n_i<m$, ապա միավոր միջակայքում կարելի է կազմել (n_i/m) ռացիոնալ թվերի հաջորդականությունը:

Համընկնելիության եղանակները իրարից տարբերվում են λ-ի, n_0-ի և μ-ի արժեքների ընտրությամբ: Օրինակ՝ բազմապատկական եղանակի դեպքում μ=0, իսկ m մոդուլը ընդունվում է հավասար p^e-ի, որտեղ p^e-ն համակարգչում օգտագործվող հաշվարկային համակարգի թվերի քանակն է, իսկ e-ն՝ թվի գրանցման համար օգտագործվող մեքենայական բառի երկարությունը: Երկուական մեքենայի համար p=2, իսկ տասականի դեպքում՝ p=10: Երկուական մեքենայում m=2b, որտեղ b-ն մեքենայական բառի մեջ երկուական թվերի քանակն է: Այս եղանակի օգնությամբ ստացված հաջորդականության առավելագույն պարբերությունը հավասար է 2b-ի:

Խառը եղանակի դեպքում $\mu\neq0$: Այս պարամետրի առկայությունը թույլ է տալիս m-ի տրված արժեքի դեպքում ստանալ այնպիսի կեղծ պատահական թվեր, որոնց արժեքները գտնվում են (1, m–1) միջակայքում:

Ներկայումս ծրագրավորման բոլոր լեզուներում կան կեղծ պատահական թվերի ստացման կանոնական ենթածրագրեր, որոնք ի պատիվ RAND Corporation ձեռնարկության, որը մշակել է պատահական թվերի առաջին ծրագրերը, կրում են RAND կամ RANDUM անվանումը:

5. Պատահական թվերի ստացում

Նմանակման խնդիրներում առավել հաճախ օգտագործվում են պատահական թվերի բաշխման հետևյալ ֆունկցիաները. անընդհատ բաշխումներից՝ հավասարաչափ, բնականոն, ցուցչային, գամմա, իսկ ընդհատ բաշխումներից՝ երկրաչափական, Պասկալի, երկանդամ, Պուասոնի: Ստորև բերված են դրանց հիմնական բնութագրերը և Ֆորտրան լեզվով պատահական մեծությունների ստացման ծրագրերը:

Հավասարաչափ բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x)=1/(b-a),$$

երբ a<x<b և f(x)=0, հակառակ դեպքում:

Պարամետրերը՝ a և b:

Մաթեմատիկական սպասելին՝ E(x)=(b+a)/2: Ցրվածքը՝ $V(x)=(b-a)^2/12$:

Ֆորտրան ծրագիրը՝

```
SUBROUTINE UNIFRM (A,B,X)
1. CALL RAND(R)
2. X = A + (B-A)*R
3. RETURN
4. END
```

Բնականոն /նորմալ/ բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x)=\exp(-(x-\mu_x)^2/2\sigma_x^2)/\sigma_x\sqrt{2\pi},-\infty<x<+\infty:$$

Պարամետրերը՝ μ_x, σ_x:

Մաթեմատիկական սպասելին՝ $E(x)=\mu_x$: Ցրվածքը՝ $V(x)=\sigma_x^2$:

Ֆորտրան ծրագիրը՝

```
SUBROUTINE NORMAL (EX,STDX,X)
1. SUM
2. DO4 I=1*12
3. CALL RAND(R)
4. SUM=SUM + R
5. X = STDX*(SUM–6) + EX
6. RETURN
7. END
```

Ցուցչային բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x)=\lambda\exp(-\lambda x),\ \lambda>0,\ x\geq 0$$

Պարամետրը՝ λ:

Մաթեմատիկական սպասելին՝ $E(x)=1/\lambda$: Ցրվածքը՝ $V(x)=1/\lambda^2$:

Ֆորտրան ծրագիրը՝

```
SUBROUTINE EXPENT (EX, X)
1. CALL RAND (R)
2. X = –EX*LOG (R)
3. RETURN
4. END
```

Գամմա բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x)=\frac{\alpha^k x^{(k-1)}\exp(-\alpha x)}{(k-1)!},\ \alpha>0,\ k>0,\ x\geq 0:$$

Պարամետրերը՝ α, k: Ծրագրում A = α

Մաթեմատիկական սպասելին՝ $E(x)=k/\alpha$: Ցրվածքը՝ $V(x)=k/\alpha^2$:

Ֆորտրան ծրագիրը՝

```
SUBROUTIN GAMMA (K,A,X)
1. TR = 1.0
2. DO4 I = I, K
3. GALL RAUND (R)
4. TR = TR*R
5. X = –LOG (TR)IA
6. RETURN
```

Երկրաչափական բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x)= pq^x, x = 0,1,2,\ldots:$$

Պարամետրերը՝ p և q, $0\le p\le 1$, $q = 1-p$:
Մաթեմատիկական սպասելին՝ $E(x) = q/p$: Ցրվածքը՝ $V(x) = q/p^2$:
Այս բաշխումը Պասկալի բաշխման մասնավոր դեպքն է, երբ $k = 1$:

Պասկալի բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x, \ x=0,1,2,\ldots:$$

Պարամետրերը՝ k, p, q: k-ն ամբողջ թիվ է $0\le p\le 1$, $q=1-p$:
Մաթեմատիկական սպասելին՝ $E(x) = kq/p$: Ցրվածքը՝ $V(x) = kq/p^2$:
Ֆորտրան ծրագիրը՝

```
SUBROUTINE PASCAL (K,Q,X)
1. TR = I,Q
2. QR = LOG (Q)
3. DO 5 I = I,K
4. CALL RAND(R)
5. TR = TR*R
6. NX = LOG (TR )/QR
7. X = NX
8. RETURN
9. END
```

Երկանդամ բաշխում

Բաշխման խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}, \ x=0,1,2,\ldots n; \ q=1-p:$$

Պարամետրերը՝ p, q, n, որտեղ $0\le p \le 1$:
Մաթեմատիկական սպասելին՝ $E(x) = np$: Ցրվածքը՝ $V(x) = npq$:
Ֆորտրան ծրագիրը՝

```
SUBROUTINE BINOM (N,P,X)
1. X = 0.0
2. DO 6 I = I,N
3. CALL RAND (R)
4. IF(R-P) 5,5
5. X = X + 1.0
6. CONTINUE
7. RETURN
8. END
```

6. Նմանակման մոդելի կառուցում

Ցանկացած մոդել կարելի է դիտել որպես որևէ իրական համակարգի վերացարկում, որն օգտագործվում է նրա բնութագրերի հետազոտման, գնահատման, վարքի կանխատեսման և կառավարման համար: Հետազոտողը մոդելի օգնությամբ կարող է ուսումնասիրել մոդելավորվող համակարգի մեկ կամ մի քանի պարամետրերի փոփոխության ազդեցությունը նրա ելքի փոփոխականների կամ ամբողջ համակարգի վարքի վրա:

Համակարգի մոդելի որակը գնահատվում է նրա իրական պատկերին համարժեք լինելու ունակությամբ, այսինքն համակարգի վարքի, նրա տարբեր բաղադրիչների փոխազդեցությունների նկարագրման ճշտությամբ: Մի կողմից՝ մոդելը պետք է ճիշտ նկարագրի հետազոտվող համակարգի գործառույթը և հաշվի առնի նրա վարքի հիմնական առանձնահատկությունները: Մյուս կողմից՝ մոդելը պետք է բավականին պարզ լինի, որպեսզի հնարավոր լինի հասկանալ նրա հիմնական հատկությունները և օգտագործվի այլընտրանքները: Ցավոք՝ իրականությանը համարժեք մոդելները հազվադեպ են լինում պարզ, իսկ պարզ մոդելները հաճախ շատ հեռու են իրականությունից:

Համակարգերի մաթեմատիկական մոդելները սովորաբար բաղկացած են հետևյալ չորս տարրերից՝

- բաղադրիչներ
- փոփոխականներ
- պարամետրեր
- ֆունկցիոնալ կապեր:

Մոդելի բաղադրիչները իրենցից կարող են ներկայացնել հետազոտվող համակարգի տարբեր ենթահամակարգերի մոդելներ: Վերջիններս իրենց հերթին կարող են ունենալ բարդ կառուցվածք և կազմված լինել ավելի պարզ ենթահամակարգերից և այդպես շարունակ: Մոդելի բաղադրիչների ընտրությունը պայմանավորված է համակարգի մոդելավորման նպատակներից ու բարդությունից:

Փոփոխականները ներմուծվում են հետազոտվող համակարգի տարբեր բաղադրիչների միջև կապերի նկարագրման համար: Դրանք համապատասխանորեն բաժանվում են՝ կախյալ, անկախ, կառավարման և վիճակի փոփոխականների: Կախյալ փոփոխականները նկարագրում են համակարգի ելքի պարամետրերը: Դրանք որոշվում են համակարգի գործառույթի հավասարումներից: Մոդելի յուրաքանչյուր ելքին համապատասխանում է մեկ հավասարում: Օրինակ՝ ձեռնարկության ելքի փոփոխականներ կարող են լինել նրա ծախսերը, արտադրանքը, վաճառքը, շահույթը և այլն: Հաճախ ելքի փոփոխականների մի մասն օգտագործվում է նաև որպես վիճակի փոփոխականներ: Վերջիններս բացահայտորեն չեն մտնում համակարգի կառավարման որակը բնութագրող հավասարումների մեջ և ներմուծվում են մոդելի նկարագիրը ամբողջացնելու նպատակով:

Կառավարման փոփոխականները որոշվում են համակարգը կառավարող մարմնի կողմից: Օրինակ՝ երկրի տնտեսության կառավարման փոփոխականներ կարող են լինել վարկերի ու հարկերի տոկոսադրույքները, իսկ ձեռնարկության համար՝ արտադրանքի քանակը և տեսականին, օգտագործվող աշխատուժը և այլն:

Ֆունկցիոնալ կապերը որոշում են համակարգի մոդելի փոփոխականների ու բաղադրիչների փոխազդեցությունը և բաժանվում են երկու դասի՝ նույնություններ և գործառույթի բնութագրերի հավասարումներ: Ընդ որում նույնությունները հանդես են գալիս կամ սահմանումների, կամ համակարգի բաղադրիչները բնորոշող հաստատունների ձևով: Նույնությունների օրինակներ են ձեռնարկության շահույթի սահմանումը՝ որպես նրա լրիվ եկամուտի և լրիվ ծախսերի տարբերություն, ձեռնարկության ակտիվի հավասարությունը նրա մասնավոր կապիտալի ու վարկերի գումարին և այլն:

Բնութագրերը իրենցից ներկայացնում են մոդելի ելքի և վիճակի փոփոխականների մաթեմատիկական առնչությունների տեսքով արտահայտված կապը մուտքի փոփոխականների հետ: Բնութագրերի օրինակներ են տնտեսության մակրոտնտեսական ցուցանիշները, տնտեսության որևէ ճյուղի արտադրանքի պահանջարկի ֆունկցիան, ձեռնարկության արտադրական ֆունկցիաները և այլն: Համակարգի գործառույթի հավասարումների պարամետրերը որոշվում են վիճակագրական գնահատականների օգնությամբ:

Դիտարկենք համակարգերի հետազոտման խնդիրներում մեծ կիրառություն գտած մի քանի նմանակման մոդելներ:

6.1 Մարկովի շղթայի և կիսամարկովյան գործընթացների մոդելներ

Մարկովի շղթաները և կիսամարկովյան գործընթացները մեծ կիրառում են գտել գործույթների հետազոտման՝ հերթերի,պաշարների, պահեստավորման, կառավարման և այլ խնդիրներում: Դիտարկենք վերջավոր թվով վիճակների $E=\{0,1,...,N\}$ բազմությունով և $P=\|p_{ij}\|$ մեկ քայլում անցումների մատրիցով Մարկովի շղթան, որի մեկ վիճակից մյուսը անցումները կատարվում են ժամանակի ընդհատ $t=0,1,2,\ldots$ պահերին: Նման մոդելները օգտագործվում են, օրինակ՝ առևտրի պլանավորման խնդիրներում ապրանքի պահանջարկի նմանակման համար: Այս դեպքում շղթայի առանձին վիճակներին համապատասխանում են տարբեր որակի համասեռ ապրանքների տարբեր գերադասման կառուցվածքները: Մարկովի շղթան նմանակվում է նրա P մատրիցի տողերի օգնությամբ: Համարվում է, որ շղթան մեկ քայլում i վիճակից անցում է կատարում j վիճակի, եթե

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} \le r < \sum_{k=0}^{j} p_{ik}$$

որտեղ r-ը (0,1) միջակայքից կեղծ պատահական թիվ է:

Այսպիսով կեղծ պատահական թվերի $r_1,r_2,\ldots,r_n$ հաջորդականության օգնությամբ M քայլերի ընթացքում մոդելավորվում է Մարկովի շղթայի վարքը:

Այժմ դիտարկենք վերջավոր $E=\{0,1,...,N\}$ վիճակների բազմությամբ համասեռ կիսամարկովյան գործընթացների մոդելավորվում խնդիրը: Ինչպես նշվել է XI բաժնում, կիսամարկովյան գործընթացները կարող են որոշվել մի քանի եղանակով: Դիտարկենք հետևյալ երկու եղանակները, երբ գործընթացը որոշվում է՝

1. $Q(t)$ անցումային մատրիցի օգնությամբ:
2. Անցման սպասման $\alpha=||\alpha_{ij}||$ ժամանակների և նրանց $F(t)=||F_{ij}(t)||$, $F_{ij}(t)=P\{\alpha_{ij}\le t\}$ բաշխման ֆունկցիաների մատրիցների օգնությամբ:

Առաջին դեպքում, գործընթացը որոշվում է անցումների հավանականությունների $Q(t)=||Q_{ij}(t)||$ մատրիցով, որի $Q_{ij}(t)$ տարրերը որոշվում են $Q_{ij}(t)=p_{ij}Q_i(t)$-ի բանաձևից: Նմանակումն իրականացվում է հետևյալ կերպ:

Դիցուք՝ $\theta=(\theta_i,\ i\in E)$-ն գործընթացի E բազմության վիճակներում մնալու ժամանակների պատահական մեծությունների վեկտորն է: Յուրաքանչյուր i վիճակի համար սկզբում մոդելավորվում է $Q_i(t)$ բաշխման ֆունկցիայով θ_i պատահական մեծությունը, այնուհետև P մատրիցի i-րդ տողի (Մարկովի շղթայի նմանությամբ)

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} \le r < \sum_{k=0}^{j} p_{ik}$$

նմանակման պայմանից որոշվում է գործընթացի հաջորդ j, $j\in E$ վիճակը՝

Նմանակման համակարգային ժամանակը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝ $T_i=T_{i-1}+\theta_{ik}$, $i=1,2,\ldots$, $k\in E$, որտեղ T_i-ն համակարգային ժամանակն է i անցումների դեպքում, T_0-ն համակարգային ժամանակի արժեքն է մոդելավորման սկզբնական պահին, θ_{ik}-ն i-րդ քայլում r_k վիճակում գործընթացի մնալու ժամանակն է:

Երկրորդ դեպքում տրված է $\alpha=||\alpha_{ij}||$ անցման սպասման ժամանակների մատրիցը, որի α_{ij} տարրը գործընթացի i վիճակից j վիճակ անցման սպասման ժամանակի պատահական մեծությունն է: հայտնի է նաև $F_{ij}(t)$-ն՝ α_{ij} մեծության բաշխման ֆունկցիան: Նմանակումն իրականացվում է հետևյալ կերպ: Գործընթացի i վիճակում $i\in E$ որոշվում են $F_{ij}(t)$ բաշխման ֆունկցիայով α_{ij} պատահական մեծությունների $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{iN}$ արժեքները: Այնուհետև $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{iN}$ թվերից գտնում ենք $\alpha_{is}=\min\{\alpha_{ij},\ j\in E\}$ և ընդունում, որ գործընթացը i վիճակից անցում է կատարում s վիճակ, որից հետո նմանակում ենք գործընթացի հաջորդ վիճակ անցումը և այդպես շարունակ:

6.2 Հերթերի մոդելներ

Ինչպես հայտնի է XIII բաժնից տնտեսական, տեխնիկական և այլ համակարգերի գործունեությունը գործնականում կապված է, հաճախորդների պատվերների և հայտերի սպասարկման հետ: Որպես հայտեր կարելի է դիտել արտադրության կամ առևտրի պատվերները, մեքենայի վերանորոգումը, հիվանդների բուժսպասարկումը, ուսանողներից քննությունների ընդունումը և այլն:

Որպես սպասարկման սարքեր՝ արտադրական գործընթացի տարբեր փուլերը, բանվորական բրիգադները, բժշկական լաբորատորիան, դրամարկղը և այլն: Սպասարկման համակարգերի տարբեր օրինակներ և դրանց հետազոտման վերլուծական եղանակները քննարկված են XIII բաժնում:

Հերթերի առաջացման հետ կապված վնասները պայմանավորվում են հաճախորդների կորստով, պահեստավորման, սպասարկման միջոցների պարապուրդի և այլ ծախսերով: Հերթերի հետազոտման խնդիրը տնտեսագիտական տեսանկյունից հանգում է պատվերների և հայտերի հերթում սպասելու և համակարգի սարքերի պարապուրդի հետ կապված կորուստների նվազեցմանը:

Այժմ դիտարկենք սպասարկման համակարգերի նմանակման մոդելների կառուցման մի քանի օրինակներ: Սկզբում քննարկենք մեկ սպասարկման սարքով և անվերջ հերթով G|G|1 տեսակի համակարգը:

Դիցուք՝ A(t)-ն համակարգի մուտքի հոսքի, իսկ B(t)-ն հայտերի սպասարկման տևողության բաշխման ֆունկցիաներն են:

6.2.1 G|G|1 համակարգի նմանակման մոդել

Ելքի փոփոխականներ

W_t - հայտի հերթում մնալու միջին ժամանակը; Idt - հերթական հայտի ստացմանն սպասելիս համակարգի պարապուրդի միջին ժամանակը:

Վիճակի փոփոխականներ

Wt_i - i-րդ հայտի սպասման ժամանակը, i=1,2,3,...m; Idt_i - i-րդ հայտի ստացմանն սպասելիս համակարգի պարապուրդի ժամանակը, i=1,2,3,...,m:

Մուտքի փոփոխականներ

At_i - i-րդ և (i+1)-րդ հայտերի ստացման միջև ընկած ժամանակահատվածը;
St_i - i-րդ հայտի սպասարկման ժամանակը, i=1,2,3,...,m:

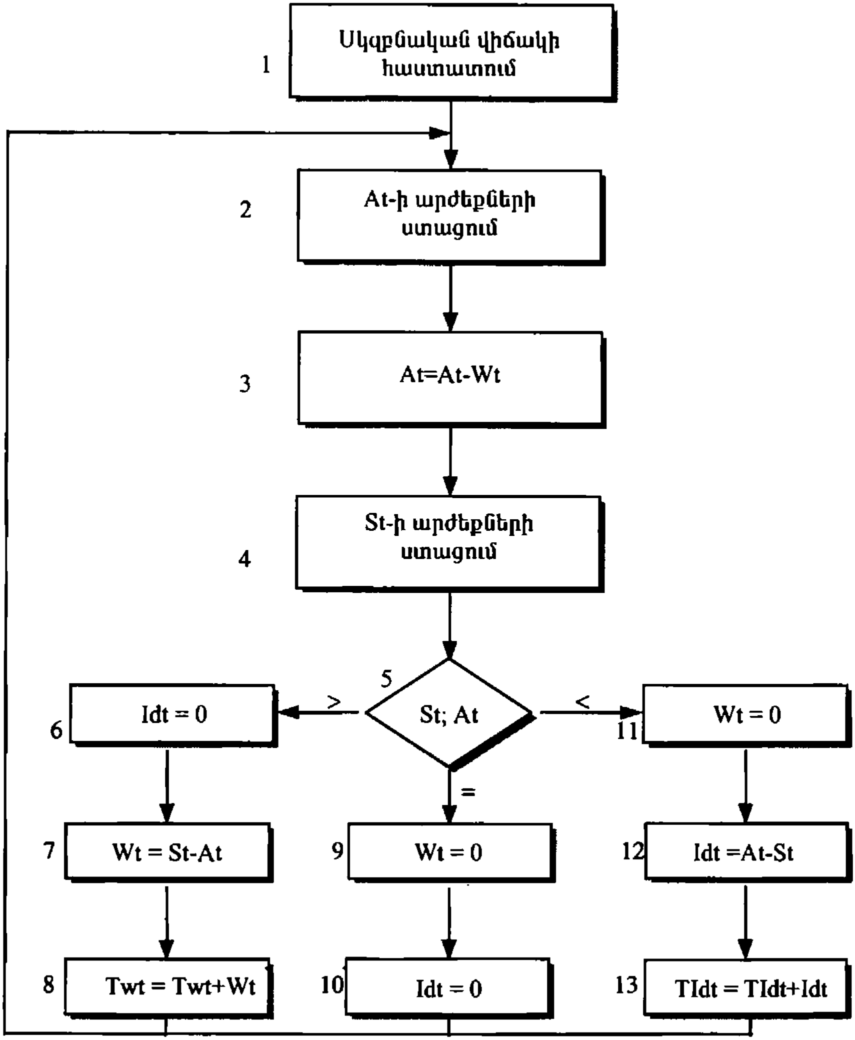
Համակարգի գործունեության բնութագրեր

f(At) - երկու հաջորդական հայտերի ստացման պահերի միջև ընկած ժամանակահատվածների բաշխման խտության ֆունկցիան;
f(St) - հայտերի սպասարկման ժամանակի բաշխման խտության ֆունկցիան:

Նույնություններ

Wt_i= TWt/m, Idt_i=T/mIdt:

G|G|1 համակարգի նմանակման մոդելի բլոկ-սխեմա:



1. Այս բլոկում զրոյի են բերվում մոդելի մի շարք փոփոխականներ՝ առաջին հայտի ստացվելու ժամանակը, դրա սպասման ժամանակը, համակարգի պարապուրդի ժամանակը, ինչպես նաև լրիվ սպասման պարապուրդի ժամանակները: Դրանով իսկ հաստատվում է համակարգի սկզբնական վիճակը և գրանցվում է առաջին հայտի ստացվելու փաստը:

2. Որոշվում է նոր (երկրորդ) հայտի հայտնվելու հարաբերական ժամանակը, որը հաշվարկվում է նախորդ (առաջին) հայտի ստացվելու պահից:

3. Ստացված մեծությունից հանվում է նախորդ հայտի սպասման ժամանակը:Այս տարբերությունը որոշում է նոր հայտի գալու հարաբերական ժամանակի նոր արժեքը: Նրա հաշվանքը այժմ տարվում է նախորդ հայտի սպասարկումն սկսվելու պահից:

4. Որոշվում է հայտի սպասարկման ժամանակի տևողությունը: Եթե այն գերազանցում է նոր հայտի ստացվելու հարաբերական ժամանակը, ապա վերջինս պետք է սպասի հերթում: Նոր հայտի սպասման ժամանակը այս դեպքում հավասար է նախորդ հայտի սպասարկման տևողության և նրա ստացման հարաբերական ժամանակի տարբերությանը: Այդ տարբերությունը հաշվարկվում է 7-րդ բլոկում, որից հետո 8-րդ բլոկում վերահաշվարկվում է համակարգում լրիվ սպասման ժամանակը: Եթե նոր հայտն ստացվելու հարաբերական ժամանակը մեծ է նախորդ հայտի սպասարկման ժամանակից,ապա նա չի սպասում հերթում: Այս դեպքում առաջանում է պարապուրդ, որի մեծությունը որոշվում է 12-րդում, որպես նշված ժամանակների տարբերություն:

13. Կատարվում է համակարգի պարապուրդի լրիվ ժամանակի վերահաշվարկ: Եթե հայտի ստացվելու հարաբերական ժամանակը և նրա սպասարկման ժամանակը միմյանց հավասար են, ապա պարապուրդ և հերթ չեն առաջանում:

2-րդ բլոկից սկսվող ցիկլը կարելի է կրկնել բազմակի անգամ և այդպիսով դիտարկել կամայական թվով հայտեր: Նման հաշվարկների օգնությամբ կարելի է գտնել համակարգի հավանականային բնութագրերի, օրինակ՝ պարապուրդի, հերթում սպասելու համակարգում մնալու և այլ ժամանակների միջին արժեքները և դրանց վիճակագրական գնահատականները:

Բերված մոդելի պիտանիության ստուգման համար կարելի է անցկացնել ըստ հատուկ բաշխման ֆունկցիաների, օրինակ, ցուցչային բաշխման, համակարգի մոդելի փորձարկումներ և նրա բնութագրերի համար ստացված վիճակագրական գնահատականները համեմատել վերլուծական եղանակով հայտնի արդյունքների հետ: XIII բաժնում դիտարկվող սպասարկման համակարգի համար, երբ մուտքի հոսքն ունի λ պարամետրով Պուասոնի բաշխում, իսկ սպասարկման ժամանակը՝ μ պարամետրով ցուցչային բաշխում, համակարգի կայունության $\lambda/\mu<1$ պայմանի բավարարման դեպքում նրա որոշ բնութագրերի համար՝ (հայտերի հերթում սպասելու միջին ժամանակի, համակարգի բեռնվածության, հերթի միջին երկարության, համակարգում հայտերի միջին քանակի, համակարգում n հայտերի գտնվելու (n>0) հավանականության և այլն) ստացվել են վերլուծական բանաձևեր:

Մոդելի ճշտության ստուգման համար անհրաժեշտ է հաշվել նաև նրա համապատասխան բնութագրերի ցրվածությունը: Դրա համար մոդելի փորձարկումները կատարվում են կեղծ պատահական թվերի ստացման ծրագրի տարբեր սկզբնական արժեքների դեպքում:

Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս հետազոտել բաշխման ֆունկցիաների պարամետրերի փոփոխման ազդեցությունը համակարգի բնութագրերի վիճակագրական գնահատականների վրա և մոդելի զգայունությունը:

Որոշ ձևափոխություններից հետո բերված մոդելում կարելի է դիտարկել հայտերի տարբեր սպասարկումների կարգերը, հերթի երկարությունը և այլ բնութագրիչներ: Դիտարկված մոդելը կարելի է նաև օգտագործել որպես ավելի բարդ համակարգի (օրինակ՝ սպասարկման ցանցի) բաղադրիչ:

6.2.2 Սպասարկման N նույնատիպ սարքերով մոդել

Դիտարկենք այժմ սպասարկման N նույնատիպ սարքեր ունեցող G|G|N համակարգի նմանակման մոդելը, որի մի շարք կիրառություններ և մարկովյան մոդելը բերված են XIII բաժնում:

Դիցուք՝ A(t)-ն համակարգում երկու հաջորդական հայտերի ստացվելու պահերի միջև ընկած ժամանակի բաշխման ֆունկցիան է, իսկ B(t)-ն i-րդ սարքում հայտի սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիան է: Ենթադրենք, որ t=0 սկզբնական պահին համակարգը ազատ է հայտերից:

Մոդելը նկարագրող փոփոխականները համանման են նախորդ՝ G|G|1, մոդելի համար օգտագործվածներին, բացառությամբ՝

Tat_i - բացարձակ ժամանակը i-րդ հայտն ստացվելու պահին,

$T_{ij}=St_{ij}+Idt_{ij}$ (i–1)-րդ և i-րդ հայտերի սպասարկման ավարտի պահերի միջև ընկած ժամանակահատվածը, i=1,2,…,N, j=1,2,…,N,

Tt_i - բացարձակ ժամանակը i-րդ սարքի կողմից i-րդ հայտի սպասարկման ավարտի պահին,

S_{min} - Tt_{i-1j} մեծության նվազագույն արժեքը բոլոր j-երի համար j=1,2,…,N:

Ենթադրվում է որ համակարգում առաջին հայտի ստացվելու պահին բավարարվում են հետևյալ սկզբնական պայմանները՝

$$At_1 = 0,\quad Idt_{1j} = 0,\quad Wt_{1j} = 0,\ j = 1,2,\dots,N,$$

$$Tt_{11} = St_{11},\quad St_{1j} = 0,\quad j = 1,2,\dots,N,$$

i-րդ հայտի հայտնվելուց հետո մոդելի վիճակի փոփոխականների արժեքները որոշվում են Tt_{ij} մեծությունների նվազագույն արժեքներն ապահովող j համարի համար գրված հետևյալ բանաձևերով.

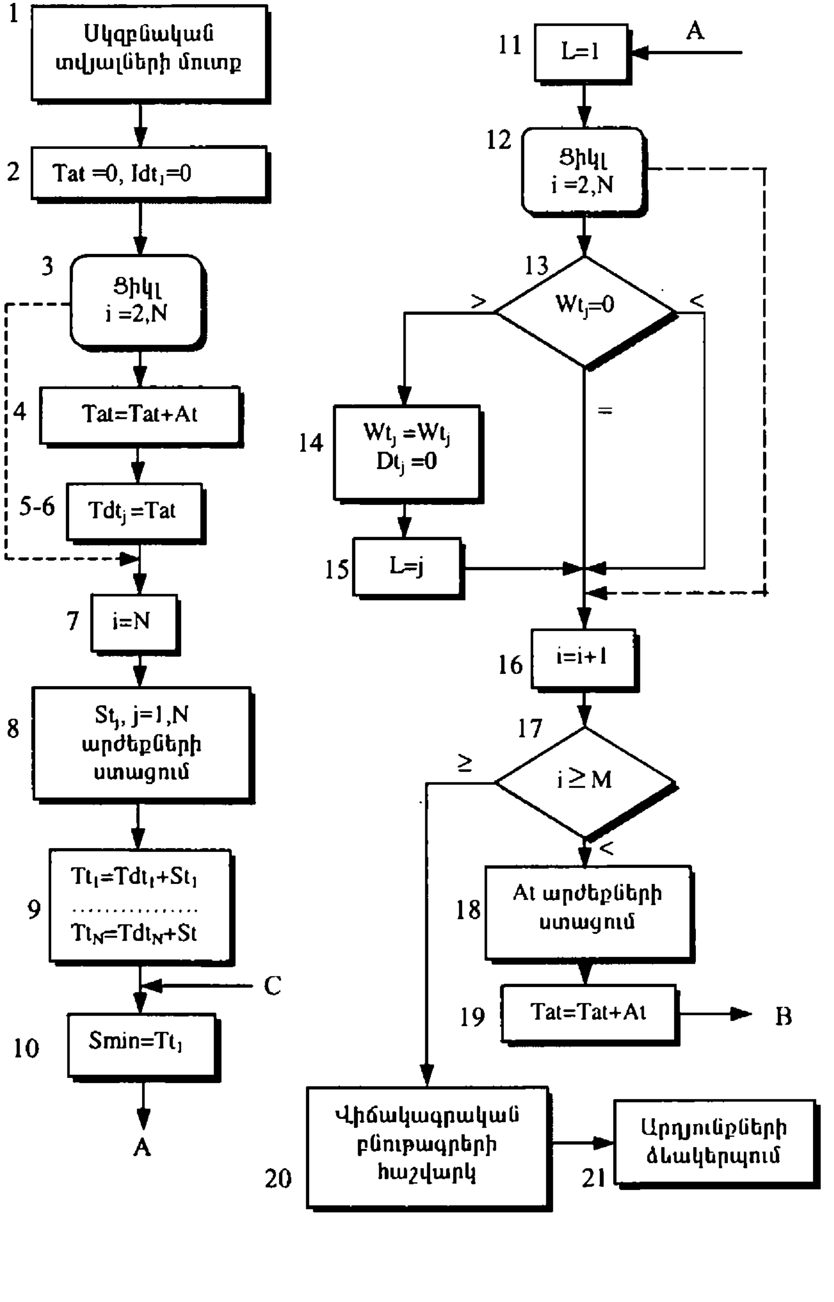
Եթե $Tat_i > Smin$, ապա $D\, t_{ij} = Tat_i - Smin$, և $Wt_{ij} = 0$, i=1,2,…:

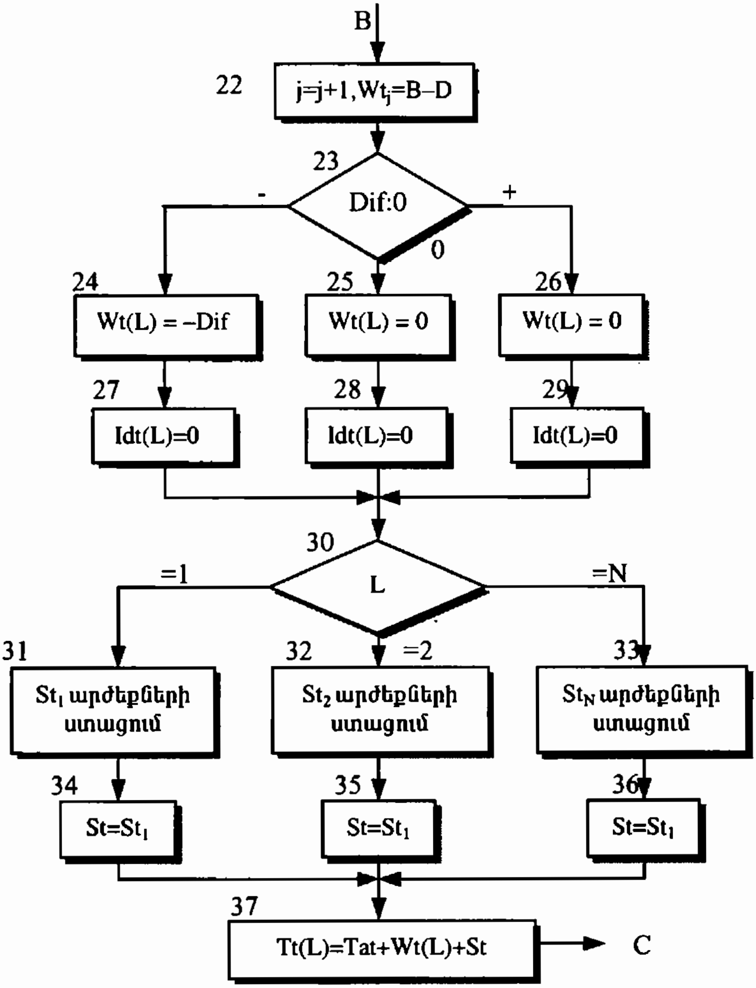
Եթե $Tat_i \le Smin$, ապա $Wt_{ij} = Smin - Tat_i$ և $Id\, t_{ij} = 0$, i=1,2,…:

Նշենք, որ i ինդեքսը բերված առնչություններում կրկնակի դեր է խաղում: At_i և Tat_i փոփոխականներում i-ն համապատասխանում է համակարգում ստացված հայտի համարին, իսկ $Sd\, t_{ij}$, $Id\, t_{ij}$, t_{ij}, Tt_{ij}, j և Wt_{ij}-ում i-ն ցույց է տալիս j-րդ սարքում i հայտի սպասարկման համարը:

Մոդելի նմանակման ալգորիթմի բլոկ-սխեման բերված է ստորև:

Սպասարկման N նույնատիպ սարքերով մոդելի բլոկ-սխեմա





Մոդելավորումն սկսվում է մոդելավորվող հայտերի M թվի, սպասարկման սարքերի N թվի, A(t) և B(t) բաշխման ֆունկցիաների միջին արժեքների և ցրվածքի ներմուծմամբ: Այնուհետև առաջին հայտն ստացվելու բացարձակ ժամանակը և սպասարկման սարքերի պարապուրդի ժամանակները բերվում են զրոյական արժեքի:

3-6-րդ բլոկների ցիկլը ընդգրկում է հաջորդ N–1 հայտերն ստացվելու և 2-րդ բլոկից N համարների սարքերի սկզբնական պարապուրդի ժամանակների հաշվարկները: Համակարգում հերթ կարող է առաջանալ միայն առաջին N հայտերը համակարգում ստացվելուց հետո: i-րդ սպասարկման սարքի սկզբնական պարապուրդի ժամանակը հավասար է j-րդ հայտն ստացվելու պահի բացարձակ ժամանակին:

7-րդ բլոկում գրանցվում է N թվով հայտերի ստացվելը: Նշենք, որ այս դեպքում սարքերից յուրաքանչյուրը ստացել է մեկ հայտ: Այնուհետև որոշվում են այդ հայտերի սպասարկման ժամանակները, որից հետո հաշվարկվում են սարքերում առաջին հայտերի սպասարկումն ավարտվելու պահերը: 10-ից մինչև 15-րդ բլոկը գործում է վերջավոր թվերի հաջորդականությունից ամենափոքր անդամը գտնելու ենթածրագրին: Այդ ծրագրին օգտագործվում է Tt_{ij} ժամանակի ամենափոքր արժեքի որոշման համար:

Ցիկլի ավարտից հետո i ինդեքսի արժեքը ավելացվում է մեկով, որին համապատասխանում է համակարգում նոր հայտի ստացվելը:

17-րդ բլոկում համեմատվում է դիտարկված հայտերի i թիվը M-ի հետ: Եթե i=M-ի, ապա նմանակումն ընդհատվում է և կատարվում է համակարգի բնութագրերի վիճակագրական գնահատականների հաշվարկ: Եթե i<M-ից, ապա որոշվում է համակարգում հերթական հայտի ստացման բացարձակ ժամանակը: Դրանից հետո հաշվարկվում է նրա և L-րդ (առաջին ազատ) սարքի ազատման ժամանակների Dif տարբերությունը: Կախված Dif-ի նշանից՝ հաշվարկվում է հերթում հայտի մնալու ժամանակը կամ հայտի ստացմանը L-րդ սարքի սպասման ժամանակը: Այնուհետև որոշվում է ընթացիկ հայտի սպասարկման ժամանակը:

37-րդ բլոկում այն գումարվում է հայտն ստացվելու և սպասելու ժամանակներին: Դրանց գումարը իրենից ներկայացնում է բացարձակ ժամանակի արժեքը L-րդ սարքի ազատ գտնվելու պահին: Դրանից հետո անցում է կատարվում 10-րդ բլոկ և նորից կրկնվում են ազատ սարքի որոնման ընթացակարգը, հերթական հայտի ստացման ժամանակի որոշումը, սպասման, սպասարկման և պարապուրդի ժամանակների հաշվարկը և այլն: Գործընթացը շարունակվում է մինչև M-րդ հայտի համակարգում ստացվելը: Մոդելի միջոցով ստացված արդյունքների ստուգման համար կարող են օգտագործվել X բաժնում A(t) և B(t) ֆունկցիաների λ և μ պարամետրերով ցուցչային բաշխման դեպքում ստացված բանաձևերը:

6.3 Պաշարների կառավարման նմանակման մոդել

Պաշարների կառավարման խնդիրները հաճախ կարելի է ձևակերպել որպես մատակարարումների լավագույն բաշխման տարբերակի որոնման խնդիր: Օրինակ, ինչքան պետք է ձեռնարկությունը արտադրի (պատվիրի) և որքան հաճախ պետք է արտադրի (պատվիրի) որոշակի արտադրանք, որպեսզի նվազագույնի հասցնի պահեստավորման գումարային ծախսերը, մատակարարումների կազմակերպման ծախսերը և պակասուրդով պայմանավորված կորուստները:

Դիտարկենք պաշարների կառավարման մի համակարգ, որտեղ որոշակի ապրանքի ամենօրյա պահանջարկը և մատակարարումների պատվերների բավարարման ժամանակը տրված բաշխման ֆունկցիայով պատահական մեծություններ են: Պահեստից ամեն օր հանվող ապրանքի քանակը որոշվում է ընթացիկ պահանջարկով:

Երբ պաշարի մակարդակը իջնում է տրված մակարդակից (պաշարի վերականգնման կետից), պահեստի ղեկավարությունը կատարում է որոշակի՝ լավագույն քանակի, ապրանքի մատակարարման պատվեր: Պատվերի կատարման ժամանակի ավարտից հետո ապրանքը հանձնում են պահեստ և լրացնում այդ պահին եղած պակասը:

Նկարագրված համակարգը բնութագրվում է հետևյալ փոփոխականներով և ֆունկցիոնալ առնչություններով.

Ելքի փոփոխականներ
TC - համակարգի լրիվ ծախսերը,

Վիճակների փոփոխականներ
TC1 - պաշարի պահպանման լրիվ ծախսերը,
TC2 - մատակարարումների կազմակերպման հետ կապված լրիվ ծախսերը,
TC3 - պահեստում ապրանքի պակասուրդից առաջացած լրիվ կորուստները,
CLOCK - ընթացիկ ժամանակը,
T - հերթական մատակարարման ժամանակը,
V1 - պահեստավորված ապրանքի քանակը,

Մուտքի փոփոխականներ
P_i - i-րդ օրվա համար պահանջարկը, i = 1,2,...
Plt_j - j-րդ պատվերի կատարման համար անհրաժեշտ ժամանակը,

Կառավարման փոփոխականներ
EOQ - մեկ մատակարարման ծավալը,
ROP - պաշարի վերականգնման կետը,

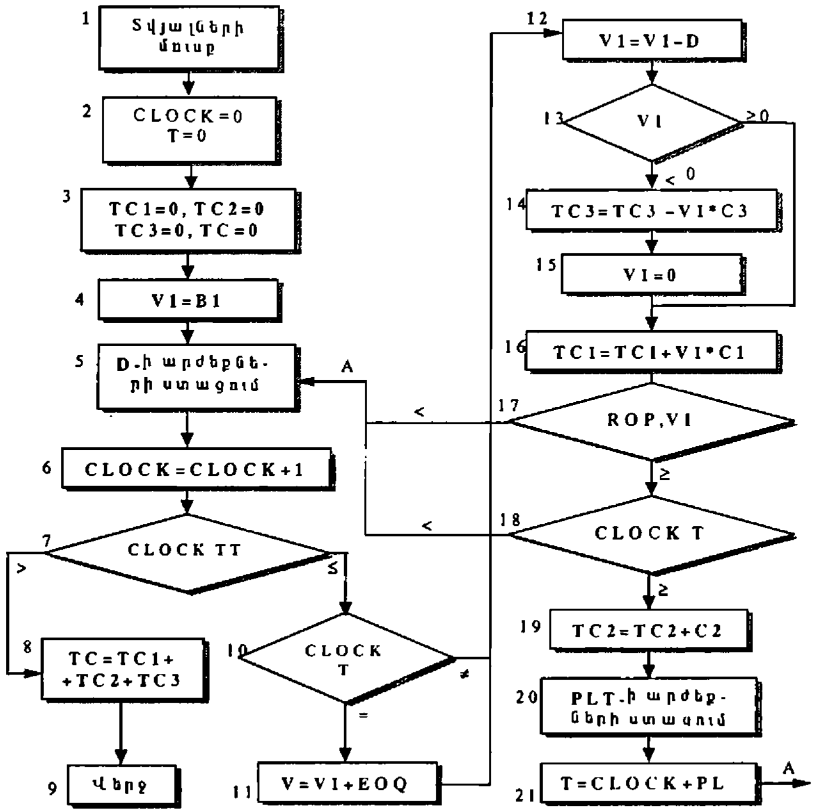
Պարամետրեր
C1 - միավոր ապրանքի մեկ օր պահելու հետ կապված ծախսերը,
C2 - մեկ մատակարարման կազմակերպման ծախսերը,
C3 - ապրանքի միավորի պակասուրդի հետ կապված կորուստները,
B1 - պաշարի սկզբնական մակարդակը,
TT - դիտարկվող ժամանակի տևողությունը (օրերով):

Համակարգի բնութագրերը
f(P) - պահանջարկի բաշխման խտության ֆունկցիան,
f(PLT) - պատվերի կատարման ժամանակի բաշխման ֆունկցիան:

Նույնություն
TC = TCI + TC2 + TC3:

Մոդելի օգնությամբ կարելի է հետազոտել EOQ և ROP մեծությունների ազդեցությունը լրիվ ծախսերի ծավալի վրա կամ գտնել TC ծախսերը նվազեցնող նրանց լավագույն արժեքները: Նմանակման մոդելի բլոկ-սխեման բերված է ստորև:

Պաշարների կառավարման նմանակման մոդելի բլոկ-սխեմա



Մոդելավորումն սկսվում է EOQ, ROP, C1, C2, C3, B1, TT մեծությունների և D ու PLT փոփոխականների բաշխումները նկարագրող պարամետրերի ներմուծմամբ: Այնուհետև CLOCV, T, TC1, TC2, TC3 և TC-ի արժեքները բերվում են զրոյի, իսկ պաշարի ընթացիկ VI արժեքը հաստատվում է BI մակարդակի վրա: Դրանից հետո համապատասխան ենթածրագրի օգնությամբ որոշվում է պահանջարկի մեծությունը և մեկ օրով առաջ է տարվում համակարգային CLOCK ժամանակը: 7-րդ բլոկում ստուգվում է մոդելավորման ժամանակի ավարտի պայմանը:

Եթե համակարգային ժամանակի ընթացիկ արժեքը գերազանցում է TT-ին, ապա մոդելավորումն ավարտվում է և հաշվարկվում են TC լրիվ ծախսերը: Հակառակ դեպքում ստուգվում է ընթացիկ ժամանակի և ավելի վաղ ստացված պատվերով մատակարարումն իրականացվելու պահի համընկնման պայմանը:

Եթե պայմանը բավարարվում է, ապա պասրի քանակը ավելացվում է EOQ մեծությամբ: Դրանից հետո, անկախ բլոկի աշխատանքի արդյունքներից, պաշարից հանվում է ընթացիկ պահանջարկը:

Ստացված տարբերությունը կարող է լինել բացասական, այսինքն՝ պահեստից հանվել է ամբողջ արտադրանքը, և առաջացել է ճեղքվածք: Այս դեպքում հաշվարկվում են ճեղքվածքի հետ կապված կորուստները: Ընդ որում ընդունվում է, որ ճեղքվածքը չի կարելի փակել ապագա վաճառքի հաշվին: Կորուստների հաշվարկից հետո անհրաժեշտ է գրոյացնել պահեստում ընթացիկ պաշարների արժեքը (բլոկ 15):

Հաջորդ բլոկում վերահաշվարկվում են պաշարի պահպանման լրիվ ծախսերը: Եթե պաշարի ընթացիկ մակարդակը գերազանցում է ROP-ի արժեքը, ապա կառավարումը անցնում է 5-րդ բլոկ: Այստեղ որոշվում է պահանջարկի նոր արժեքը և կրկնվում է նկարագրված ողջ ընթացակարգը: Եթե պահեստում ապրանքի քանակը չի գերազանցում սահմանային մեծությունը, ծրագիրը դիմում է 18-րդ բլոկ, որը ստուգում է համակարգում ավելի վաղ ստացված, բայց չիրագործված մատակարարման պատվերի առկայությունը: Եթե այդպիսի պատվեր կա, ապա վերադառնում ենք 5-րդ բլոկ: Հակառակ դեպքում կառավարումը տրվում է 19-րդ բլոկ, որտեղ սկսվում է նոր պատվերի նկարագրումը: Այստեղ վերահաշվարկվում են մատակարարումների կազմակերպման հետ կապված լրիվ ծախսերը: Այնուհետև որոշվում է նոր պատվերի կատարման ժամանակը: Ստացված արժեքը գումարվում է համակարգային ժամանակի ընթացիկ արժեքին: Այս գումարը որոշում է մատակարարման իրականացման պահը: Գործողությունների ավարտից հետո ծրագիրը դիմում է 5-րդ բլոկ, և սկսվում է մոդելավորման նոր ցիկլը:

EOQ և ROP կառավարման փոփոխականների տարբեր արժեքների հետ կատարվող փորձերից բացի կարելի է հետազոտել նաև TC լրիվ ծախսերի լավագույն արժեքի վրա C1,C2,C3 և B1 պարամետրերի ազդեցությունը: Ընտրելով այս մեծությունները և փոխելով դրանց բաշխումների պարամետրերը կարելի է որոշել համակարգի տարբեր բնութագրերը:

7. Գիտափորձի նմանակման ծրագրում

7.1 Նմանակման գիտափորձերի ռազմավարական ծրագրում

Գիտափորձերի ծրագրումը համակարգերը նմանակող մոդելավորման կարևորագույն ընթացակարգերից մեկն է: Գիտափորձերի ծրագրումն իրականացվում է մոդելավորվող համակարգի վարքի ուսումնասիրման, նրա բնութագրերի հետազոտման ու գնահատման համար անհրաժեշտ տվյալներ ստանալու նպատակով: Ծրագրով է պայմանավորված համակարգի մոդելի փորձառական հետազոտման տևողությունը և ծախսերը, ստացված արդյունքների ճշտությունը, դրանց վիճակագրական վերլուծման կարգը, փորձարկումների թիվը և այլն:

Գիտափորձի ծրագիրն ապահովում է հետազոտվող համակարգի բնութագրերի գնահատման ճշտությունը, բայց է տալիս զգալիորեն կրճատել դրա համար անհրաժեշտ փորձերի թիվն ու ծախսերը: Նրա ընտրությունը կախված է նաև համակարգի մոդելավորման նպատակներից և բույլատրելի ծախսերից: Համակարգերի մոդելավորման խնդիրներում օգտագործվում են գիտափորձերի հետևյալ տեսակները.

1. Տարբեր երկրնտրանքների դեպքում համակարգի բնութագրերի միջին արժեքների և ցրվածքի գնահատում,

2. Համակարգի վարքի և բնութագրերի վրա տարբեր փոփոխականների և սահմանափակումների ազդեցության չափի և կարևորության որոշում,

3. Համակարգի բնութագրերի լավագույն արժեքների որոնում:

Առաջին տեսակի գիտափորձերը սովորաբար անվանում են միագործոն գիտափորձեր: Դրանք բավականին պարզ գիտափորձեր են, որոնց ծրագրում հիմնականում որոշում են նմուշի չափը, փորձի սկզբնական պայմանները և ինքնահարաբերակցության առկայությունը: Երկրորդ տեսակի փորձերը անվանում են բազմագործոն գիտափորձեր: Դրանց արդյունքների մշակման համար օգտագործում են ցրվածքային և ռեգրեսիոն վերլուծության եղանակները: Երրորդ տեսակի գիտափորձերում օգտագործվում են փորձարկումների կազմակերպման հաջորդական և որոնման եղանակները:

Փորձերի ծրագրման ժամանակ դիտարկվում են երկու տեսակի փոփոխականներ՝ գործոններ և բնութագրեր: Գործոնները գիտափորձի անկախ (մուտքի) փոփոխականներն են, իսկ բնութագրերը՝ ելքի կամ կախյալ փոփոխականները: Գիտափորձի ծրագրի ընտրության համար անհրաժեշտ է որոշել փորձի ծրագրման չափանիշները, կազմել փորձառական մոդելը և մշակել գիտաբորձի ծրագիրը:

Գիտափորձի ծրագրի մշակումն իրականացվում է երեք փուլով: Սկզբում կառուցվում է նրա կառուցվածքային մոդելը, այնուհետև՝ ֆունկցիոնալ և փորձառական մոդելները:

Մոդելների ստեղծման ժամանակ հաշվի են առնվում փորձի ծրագրման հետևյալ երեք չափանիշները՝ փոփոխվող գործոնների թիվը, յուրաքանչյուր գործոնի փոփոխման մակարդակների (արժեքների) թիվը, ելքի փոփոխականների չափումների անհրաժեշտ թիվը: Առաջին չափանիշի դեպքում քննարկվում են համակարգի վարքի և բնութագրերի վրա առավել ազդեցություն ունեցող գործոնները: Երկրորդ չափանիշի դեպքում քննարկվում է գործոնների բնույթը՝ որակական թե քանակական, ոչ գծային երևույթների գնահատման անհրաժեշտությունը և քանակական գործոնների փոփոխման մակարդակների թիվը: Երրորդ չափանիշի դեպքում քննարկվում են տարբեր գործոնների փոխազդեցության հետազոտման անհրաժեշտությունը, սահմանափակումների բնույթը, բնութագրերի պահանջվող ճշտությունը և այլն:

Առաջին երկու չափանիշները որոշիչ դեր են խաղում գիտափորձի կառուցվածքային մոդելի որոշման ժամանակ, որը բնութագրվում է գիտափորձի գործոնների թվով և յուրաքանչյուր գործոնի մակարդակների՝ (արժեքների) թվով: Այս պարամետրերի ընտրությունը կախված է գիտափորձի նպատակներից, գործոնների չափման ճշտությունից և այլն:

Գիտափորձի կառուցվածքային մոդելն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$N_k=q_1q_2\ldots q_k,$$

որտեղ N_k-ը գիտափորձի տարրերի թիվն է, k-ն գիտափորձի գործոնների թիվը, q_i-ն i-րդ գործոնի մակարդակների թիվը, $i=1,2,\ldots,k$:

Գիտափորձի գործոնների թիվը՝ k-ն, և բնույթը՝ քանակական թե որակական, որոշվում են ելնելով գիտափորձի նպատակից: Որոշվում են համակարգի հետազոտման կամ նրա վարքի գնահատման համար անհրաժեշտ բնութագրերը: Այնուհետև որոշվում են համակարգի բնութագրերի վրա ազդող գործոնները: Սովորաբար գիտափորձի գործոնների թիվը շատ մեծ է և դրանցից առավել էականների ընտրման համար անհրաժեշտ է կատարել գործոնների վերլուծություն: Այնուհետև որոշվում է յուրաքանչյուր գործոնի օգտագործման կարգը: Գործոնները կարող են հաշվի առնվել հետևյալ երեք ձևերով՝

1. Գործոնը կարող է լինել հաստատուն և դառնալ փորձի սահմանային պայման:
2. Գործոնը կարող է լինել անկառավարելի փոփոխական և դրանով մեծացնել փորձի սխալները:
3. Գործոնը կարող է լինել չափելի և կառավարելի:

Կառուցվածքային մոդելի ստեղծման հաջորդ քայլում հարկավոր է որոշել յուրաքանչյուր գործոնի մակարդակների թիվը: Հաստատուն գոր-ծոնի մակարդակների թիվը հավասար է երկուսի՝ զրո կամ որևէ թիվ: Ակնհայտ է, որ գործոնի մակարդակների թիվը պետք է ընտրել հնարավորին չափ փոքր, սակայն՝ փորձի նպատակների ապահովման համար բավարար: Եթե գիտափորձի բոլոր գործոնների մակարդակների թիվը նույնն է, ապա N_k-ի համար կստանանք՝

$$N_k= q^k: \qquad (7.1)$$

Գիտափորձը կոչվում է համաչափական, եթե բոլոր գործոններն ունեն հավասար թվով մակարդակներ: Ֆունկցիոնալ մոդելը որոշում է գիտափորձի ժամանակ անմիջական չափվող կառուցվածքային մոդելի տարրերի թիվը: Եթե N_f-ը ֆունկցիոնալ մոդելի տարրերի թիվն է, ապա՝ $N_f<N_k$: $N_f=N_k$-ի դեպքում ֆունկցիոնալ մոդելը անվանում են կատարյալ, իսկ $N_f<N_k$-ի դեպքում՝ անկատար: Եթե N-ը մեքենայի անցավազքերի ընդհանուր թիվն է, իսկ p-ն՝ կրկնությունների թիվը, ապա՝

$$N = pq^k: \qquad (7.2)$$

Բանաձևից հետևում է, որ գիտափորձում անցավազքերի p թվի մեկով ավելացումը հանգեցնում է գիտափորձերի ընդհանուր թվի ավելացման q^k-ով:

Մոդելավորման միջոցների սահմանափակության պայմաններում p, q և k պարամետրերի ճիշտ ընտրության համար կատարվում է N-ի վրա նրանց ազդեցության վերլուծություն: Դրա համար հետազոտվում են հետևյալ հարաբերությունները՝

$$\frac{\partial N/\partial K}{\partial N/\partial q}=\frac{q\ln q}{k},\quad \frac{\partial N/\partial p}{\partial N/\partial q}=\frac{q}{kp},\quad \frac{\partial N/\partial p}{\partial N/\partial k}=\frac{1}{p\ln q}$$

Եթե $kp > q$ և $k > q\ln q$, ապա N-ի վրա գերիշխում է մակարդակների թվի ազդեցությունը, $kp > q$ և $k < q\ln q$ դեպքում՝ գործոնների թվինը, իսկ $p < q$ և $p\ln q < 1$-ի դեպքում՝ կրկնությունների թվինը: Այս պայմանների հետազոտումը թույլ է տալիս առանձնացնել գիտափորձի ավելի ազդեցիկ պարամետրերը և զգալիորեն կրճատել փորձերի ընդհանուր քանակը:

Այժմ դիտարկենք բազմագործոն գիտափորձերի ծրագրման եղանակները: Դիցուք՝ որոշված են գիտափորձի p, q և k պարամետրերը: Անհրաժեշտ է հետազոտել ելքի փոփոխականի վրա k գործոնների ազդեցությունը: Այս դեպքում օգտագործվում են ռեգրեսիայի վերլուծության եղանակները: Բազմագործոն գիտափորձերի հետազոտման պարզագույն եղանակը k–1 գործոնների սևեռյալ արժեքների դեպքում ելքի փոփոխականի վրա k-րդ գործոնի ազդեցության որոշումն է: Այս դեպքում գործոնները հերթով փոփոխում ենք և հետազոտում:

Դիցուք՝ $X=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$-ն համակարգի մոդելի գործոնների վեկտորն է, իսկ x_{ij}-ն j-րդ գիտափորձի ժամանակ x_i-ի արժեքն է՝ $x_i=(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ik})$, $i=1,2,\ldots,n$, y-ը՝ համակարգի մոդելավորման ժամանակ հետազոտվող բնութագրերից՝ մոդելի ելքի փոփոխականներից, մեկն է: y-ը սկալյար մեծություն է և նկարագրվում է գիտափորձի դիտարկման հետևյալ հավասարումով՝

$$y(X)=\eta(X)+\varepsilon(X),$$

որտեղ $\eta(X)$-ը մոդելի արձագանքի ֆունկցիան է, իսկ $\varepsilon(X)$-ը գիտափորձի սխալն է: $\eta(X)$-ը դետերմինիկ մեծություն է, իսկ $\varepsilon(X)$-ը պատահական մեծություն է, որի միջին արժեքը հավասար է զրոյի, իսկ նրա բաշխումը կախված է X վեկտորից: Գիտափորձի նպատակն է ստանալ $\eta(X)$ արձագանքի ֆունկցիայի գնահատման համար անհրաժեշտ տվյալներ: Այդ նպատակով գիտափորձի գործոնների տարբեր արժեքների համար դիտարկվում և չափվում են y(X) փոփոխականի արժեքները, որոնց օգնությամբ կառուցվում է $\eta(X)$ ֆունկցիայի գնահատականը: Քանի որ y(X)-ի արժեքները պատահական մեծություններ են, ապա $\eta(X)$-ը գնահատում են y(X)-ի միջին արժեքի միջոցով: Եթե $\eta(X)$ ֆունկցիայի տեսքը նախօրոք հայտնի չէ, ապա ռեգրեսիայի վերլուծության եղանակների օգնությամբ կառուցվում են ըստ X վեկտորի տարրերի բազմանդամներ և $\eta(X)$ ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.

$$\eta(X)=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i+\sum_{i,j}\beta_{ij}x_i x_j+\ldots$$

Այստեղ β_i, β_{ij}-երը ռեգրեսիայի հավասարման անհայտ գործակիցներն են: Գիտափորձի արդյունքների վրա պատահական գործոնների ազդեցության և փորձերի թվի սահմանափակության պատճառով β_i,β_{ij}-ի բոլոր արժեքները կարող են գնահատվել միայն մոտավորապես:

Այսպիսով, գիտափորձի արդյունքում կառուցվում է հետևյալ ֆունկցիան.

$$y^* = b_0 + \sum_i b_i x_i + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + \dots$$

որտեղ y^*-ը $\eta(X)$ ֆունկցիայի գնահատականն է, իսկ b_i,b_{ij}-երը՝ փոքրագույն քառակուսիների եղանակով հաշված β_i, β_{ij} գործակիցների վիճակագրական գնահատականներն են: Գիտափորձերի թվի ավելանալու հետ y^*-ի և բոլոր b_i, b_{ij}-երի գնահատականների ճշտությունը մեծանում է: Դիցուք՝ $\eta(X)$-ի գնահատման համար կատարվում են ելքի y փոփոխականի n չափումներ: Այս դեպքում $x_1,x_2,\dots,x_k$ փորձերի կետերի հաջորդականությունը, որոնցում կատարվում են y ելքի փոփոխականի չափումները որոշում են գիտափորձի ծրագիրը: Դիտարկենք $\eta(X)$-ի գնահատման համար համաչափական գիտափորձերի ծրագրման խնդիրը: Այս դեպքում յուրաքանչյուր գործոն կարող է ընդունել միայն երկու արժեք: Նման գիտափորձում y փոփոխականի արժեքների չափումները թիվը հավասար է 2^k-ի: k գործոններից յուրաքանչյուրը կարող է ընդունել որևէ սկզբնական մակարդակի նկատմամբ ստորին և նրան համաչափական վերին արժեքները: Կընդունենք, որ i-րդ գործոնի ստորին արժեքի կոդը հավասար է –1-ի, այսինքն՝ x_i=—1, կամ ուղղակի (–), իսկ վերին արժեքը +1-ի՝ x_i=+1, կամ (+): Գիտափորձի ծրագիրը ներկայացվում է ծրագրման հատուկ աղյուսակի օգնությամբ: Ստորև բերված է 2^2 լրիվ գործոնային գիտափորձի (ԼԳԳ) աղյուսակը:

#	x_1	x_2	y
1	--	--	y_1
2	+	--	y_2
3	--	+	y_3
4	+	+	y_4

Այս աղյուսակը հիմնային է ավելի բարդ՝ 2^k ԼԳԳ-ի աղյուսակների կառուցման համար:

2^3 ԼԳԳ-ի մատրիցը կառուցվում է հետևյալ կերպ: Առաջին երկու՝ x_1 և x_2 գործոնների սյունակներում գրվում է 2^2 ԼԳԳ-ի մատրիցը: Երրորդ՝ x_3 գործոնի սյունակում առաջին 2^2 փորձերի համար գրվում են $x_{i1}x_{i2}$ արտադրյալների արժեքները: Հաջորդ 2^2 փորձերի համար առաջին երկու սյունակներում կրկնում են 2^2 ԼԳԳ-ն, իսկ x_3 գործոնի սյունում գրվում են $x_{i1}x_{i2}$ արտադրյալների արժեքները: 2^3 ԼԳԳ-ի ծրագրման աղյուսակը բերված է ստորև:

#	x_1	x_2	x_3	y
1	--	--	+	y_1
2	+	--	--	y_2
3	--	+	--	y_3
4	+	+	+	y_4
5	--	--	--	y_5
6	+	--	+	y_6
7	--	+	+	y_7
8	+	+	--	y_8

Նման ձևով կառուցված ԼԳԳ-ի մատրիցները ունեն հետևյալ հատկությունները՝

Համաչափություն՝ ցանկացած գործոնի սյունակի բոլոր տարրերի արտադրյալը հավասար է զրոյի՝ $x_{1j}x_{2j}\ldots x_{nj}= 0$, $j=1,2,\ldots,k$:

Նորմավորվածություն՝ ցանկացած սյունակի տարրերի քառակուսիների գումարը հավասար է փորձերի թվին՝ $x^2_{1j}+x^2_{2j}+\ldots+x^2_{nj}=n$, $j=1,2,\ldots,k$:

Ուղղանկյունություն՝ ցանկացած երկու սյունակների անդամ առ անդամ արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի՝ $x_{1j}x_{1e}+x_{2j}x_{2e}+\ldots+x_{nj}x_{ne}=0$, $j\neq e$:

2^k տեսակի ԼԳԳ աղյուսակները ունեն նաև պտտական հատկություն, այսինքն՝ պատասխանի ֆունկցիայի գնահատման սխալի ցրվածքը գործոնային տարածության ցանկացած կետում մնում է անփոփոխ:

ԼԳԳ-ն թույլ է տալիս քանակապես գնահատել գործոնների բոլոր գծային կապերը և փոխազդեցությունները: Սա նշանակում է, որ մի գործոնի արժեքը կախված է մյուս գործոնի արժեքից:

Գիտափորձի արդյունքներով ռեգրեսիայի հավասարման գործակիցների հաշվարկի համար օգտվելով ԼԳԳ-ի ծրագրման մատրիցից, կառուցվում է k սյունակներից և 2^k տողերից կազմված հատուկ մատրից: Դրան ձախից ավելացնում են x_0 կեղծ փոփոխականի սյունակը, որը կազմված է (+)-ներից, իսկ աջից ավելացնում են փորձի գործոնների բոլոր հնարավոր արտադրյալները՝ x_1x_2, $x_1x_2x_3$, տես ստորև բերված աղյուսակը:

#	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+	--	-	+	+	-	--	+	y_1
2	+	--	+	--	--	+	--	+	y_1
3	+	+	--	--	--	--	+	+	y_2
4	+	+	+	+	+	+	+	+	y_4
5	+	--	--	--	+	+	+	--	y_5
6	+	--	+	+	--	--	+	--	y_6
7	+	+	--	+	--	+	--	--	y_7
8	+	+	+	--	+	--	--	--	y_8

Այստեղ բերված է ռեգրեսիայի հավասարման գործակիցների հաշվարկի համար 2^3 ԼԳԳ-ի հատուկ մատրիցը: Գործոնների այտաղրյալ-ների սյունակների տարրերը ստացվում են համապատասխան գործոնների անդամ առ անդամ բազմապատկումով: ԼԳԳ-ի մատրիցի ուղղանկյունու-թյան հատկության շնորհիվ

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i ,$$

ռեգրեսիայի հավասարման գործակիցների համար ստացվում են անկախ գնահատականներ: Հավասարման գործակիցների գնահատականները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_0 y_i , \quad b_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} y_i , \quad b_{je} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ie} x_{ir} y_i , \quad b_{jer} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ie} x_{ir} y_i$$

Գնահատականների անկախությունը ապահովվում է միայն ԼԳԳ-ի հատուկ ծրագրի ընտրությամբ: Եթե ծրագիրը կառուցվի կամայականորեն՝ ապա գնահատականները կլինեն են հարաբերակցված և հնարավոր չի լինի մեկնաբանել ստացված հավասարումը:

2^k տեսակի ԼԳԳ-ի օգնությամբ հնարավոր չէ գնահատել գործոնների երկրորդ և ավելի բարձր աստիճանի գործակիցները: Դրա համար անհրա-ժեշտ է փորձարկումներ կատարել գործոնների 2-ից ավելի մակարդակների դեպքում: Փորձերի թվի կրճատման արդյունավետ եղանակներից են ոչ լրիվ գործոնային գիտափորձերը: Օրինակ, եթե անհրաժեշտ է գնահատել հա-վասարման գործակիցները, ապա 2^k փորձերի փոխարեն կարելի է իրա-կանացնել միայն k+1 փորձեր:

Սակայն փորձերի թվի կրճատումը հանգեցնում է իրազեկության կորստի և ինչպես ԼԳԳ-ի դեպքում ոչ ԼԳԳ-ն ևս պետք է մանրակրկիտ ծրագրել:

Օրինակ, եթե 2^3 ԼԳԳ-ում իրականացվեն միայն առաջին 4 փորձերը, ապա փորձի արդյունքների խառնվածության պատճառով հավասարման գործակիցները չեն կարող անկախորեն գնահատվել:

7.2 Գիտափորձերի մարտավարական ծրագրում

Գիտափորձերի ռազմավարական ծրագրումից հետո անհրաժեշտ է քննարկել նրանց համակարգչային իրականացման մարտավարության հետ կապված մի շարք խնդիրներ: Քանի որ հավանականային նմանակման մոդելներին բնորոշ են ֆլուկտուացիաները, ապա մոդելավորման արդյունք-ների պահանջվող ճշտությունն ապահովելու համար անհրաժեշտ է անց-կացնել կրկնական փորձարկումներ՝ յուրաքանչյուր անգամ փոխելով մոդե-լի պատահական գործոնների արժեքները: Սովորաբար բարդ համակարգե-րի մոդելավորման ընդհանուր ժամանակը սահմանափակ է իսկ դրանց նմանակման մոդելների մեկ համակարգչային անցավազքը զգալի ժամա-նակ է պահանջում:

Այս պատճառով գիտափորձերը ծրագրելիս անհրաժեշտ է որոշել փորձերի կրկնության այն նվազագույն քանակը, որն ապահովում է մոդելավորման նպատակների իրականացման համար անհրաժեշտ տվյալները: Մյուս կողմից՝ փորձերը պետք է կազմակերպել այնպես, որ հնարավոր լինի ապահովել դրանց միջոցով ստացվող արդյունքների պահանջվող ճշտությունը:

Գիտափորձերի արդյունքների ճշտության աստիճանը պայմանավորված է պատահական գործոնների արժեքների ցրվածքի մեծությունից: Ճշտության ցանկալի աստիճանը կարող է տրվել տարբեր եղանակներով: Օրինակ՝ կանոնական շեղման մասի տեսքով, միջին արժեքի մեծության տոկոսով, բացարձակ արժեքով և այլն:

Գործոնի ազդեցության գնահատման սխալի փոքրացման համար օգտագործվում են տարբեր եղանակներ: Օրինակ՝ ցրվածքի փոքրացման կամ փորձերի կրկնության թվի ավելացման եղանակները: Փորձերի կրկնության թիվը որոշվում է մոդելավորվող համակարգի առավել կարևոր բնութագրի ճշտության ապահովման պայմանից: Եթե նման բնութագրերը մի քանիսն են, ապա փորձերի կրկնության թիվը որոշվում է նրանցից ամենամեծ ցրվածք ունեցող բնութագրով: Փորձերի պահանջվող թիվը կարելի է գնահատել նաև փորձում հետազոտվող բնութագրերը միջին արժեքների և նրանց միջին քառակուսային սխալների հարաբերությունից:

Դիտարկենք փորձարկումների ճշտությունը և ծախսերը պայմանավորող հետևյալ գործոնները՝ փորձի սկզբնական պայմանները, ընտրանքի չափը և պարամետրերի ստոխաստիկ զուգամիտումը: Սովորաբար մնանակման մոդելները օգտագործվում են համակարգերի վարքը կայունացված ռեժիմում հետազոտելու համար: Հավանականային նմանակման մոդելներում գոյություն ունեն կայունացված ռեժիմին ոչ բնորոշ սկզբնական արդյունքների կարճատև շեղումներ: Նմանակման մոդելավորման արդյունքների վերլուծման ժամանակ անհրաժեշտ է հաշվի առնել նման անցումային ռեժիմները և հաշվարկներից հանել դրանց համապատասխան արդյունքները: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է որոշել մոդելի կայուն ռեժիմ մտնելու ժամանակը կամ դրա համար անհրաժեշտ փորձերի քանակը:

Նմանակման մոդելավորման արդյունքների վրա փորձարկումների սկզբնական պարբերության ազդեցությունը փոքրացնելու համար օգտագործում են հետևյալ մոտեցումները՝

1. Որպեսզի անցումային ռեժիմի տվյալների թիվը կայունացած ռեժիմի տվյալների թվի համեմատությամբ աննշան լինի կատարվում են նմանակման մոդելի երկարատև անցավազքեր,

2. Մոդելի փորձարկման սկզբնական անցավազքերի արդյունքները դիտարկումից բացառվում են,

3. Որպես մոդելի սկզբնական վիճակ ընտրվում է նրա կայունացված ռեժիմին բնորոշ որևէ վիճակ:

Մոտեցումներից յուրաքանչյուրի օգտագործումը կապված է մի շարք խնդիրների լուծման հետ: Առաջին մոտեցումը կարելի է օգտագործել միայն այն դեպքում, երբ մոդելի մեկ անցավազքի իրականացումը մեծ ժամանակ չի պահանջում: Երկրորդ մոտեցմանը բնորոշ են հետևյալ թերությունները. սկզբնական հաշվարկների իրականացման համար ժամանակն օգտագործվում է անօգուտ, եղանակի օգտագործումը մոդելավորման ժամանակի կրճատման պատճառով հաճախ հանգեցնում է արդյունքների ցրվածքի աճի, դեն նետվող տվյալների չափը որոշելու համար անհրաժեշտ է իմանալ անցումային ժամանակի տևողությունը և այլն:

Մարտավարական ծրագրման երկրորդ կարևոր խնդիրը ընտրանքի չափայնության որոշումն է: Այս դեպքում անհրաժեշտ է որոշել մոդելի բնութագրերի պահանջվող ճշտությունը և մոդելավորման ծախսերի նվազագույն արժեքը ապահովող ընտրանքի նվազագույն չափայնությունը:

Նմուշի չափայնությունը կարելի է որոշել երկու ճանապարհով՝ մոդելի աշխատանքից անկախ՝ ապրիորի, և մոդելի փորձարկման ընթացքում ստացված արդյունքների հիման վրա:

Առաջին դեպքում օգտագործում են հավանականությունների տեսության կենտրոնական սահմանային թեորեմի վրա հիմնված եղանակները: Օրինակ՝ համախմբի միջին արժեքների գնահատման, վստահելի միջակայքերի եղանակները և այլն: Դիտարկենք մոդելի պարամետրերի գնահատման վրա հիմնված ընտրանքի չափը որոշման մի քանի եղանակներ:

Համախմբի միջին արժեքի գնահատման եղանակ

Ենթադրենք՝ անհրաժեշտ է համախմբի իրական միջին արժեքի համար կառուցել այնպիսի χ^2 գնահատական, որպեսզի՝

$$P\{\mu-d \le X_{\text{մ}} \le \mu+d\}=1-\alpha \qquad (7.3)$$

որտեղ $X_{\text{մ}}$-ն ընտրանքի միջինն է, $(1-\alpha)$-ն $(\mu\pm d)$ միջակայքի $X_{\text{մ}}$-ը պարունակելու հավանականությունն է: Եթե ընտրանքի արժեքները ունեն բնականոն բաշխում, ապա ընտրանքի չափայնությունը՝ n-ը կարելի որոշել հետևյալ բանաձևից՝

$$n = (\sigma Z_{\alpha/2})^2/d^2 \qquad (7.4)$$

որտեղ $Z_{\alpha/2}$ -ը երկկողմանի բնականոն վիճականին է:

Այսպիսով n -ի որոշման համար անհրաժեշտ է իմանալ՝

1. Համախմբի փոփոխականության (ցրվածության) մեծությունը՝ σ^2-ն:
2. Թույլատրելի α ռիսկի արժեքը:
3. Պարամետրի իրական μ արժեքի և $X_{\text{մ}}$ գնահատականի տարբերության թույլատրելի d արժեքը:

Հաճախ ընտրանքի չափը կարելի է որոշել առանց σ^2 ցրվածքի և առանց d պարամետրն իմանալու:

Դիցուք անհրաժեշտ է գտնել ընտրանքի n չափայնությունը, որը 0,95 հավանակությամբ ապահովում է մոդելի բնութագրի $X_{\text{մ}}$ գնահատականի $(\mu\pm\sigma/m)$ սահմաններում գտնվելը:

Քանի որ, $d=\sigma/m$, $Z_{\alpha/2}=1,96$, ապա n-ի համար կստանանք՝

$$n = (\sigma Z_{\alpha/2})^2/d^2 = (1,96m),^2$$

եթե m=4, ապա n=61:

Եթե փորձնական անցավազքից հայտնի է ելքի փոփոխականի ցրվածքի s^2 գնահատականը, ապա նմուշի n չափը կարելի է որոշել հե-տևյալ բանաձևով՝

$$n = (ts/d),^2 \qquad (7.5)$$

որտեղ t-ն աղյուսակավորված մեծություն է, d-ն հավասար է վստահելիության միջակայքի կեսին, s^2-ն փորձնական անցավազքի համար հաշվարկված ցրվածքի գնահատականն է:

Վստահելիության միջակայքերի եղանակ

Վստահելիության միջակայքերի կառուցման համար օգտագործվում է ընտրանքի ցրվածքը կամ ընտրանքի միջին քառակուսային շեղումը: Համախմբի ցրվածքի գնահատումը կարելի է դիտել որպես՝

$$P\{(1-d)\sigma^2 \le s^2 \le (1+d)\sigma^2\} = 1-\alpha \qquad (7.6)$$

պայմանին բավարարող s^2 գնահատականի որոնման խնդիր: Այստեղ d-ն, $0 \le d \le 1$ s^2 գնահատականի և σ^2 իրական ցրվածքի մոտիկության աստիճանը բնութագրող թիվ է: (7.6)-ի մեջ հարմար է օգտագործել (n–1) ազատության աստիճաններով χ^2 վիճականին՝

$$(n-1)s^2/\sigma^2,$$

որը թույլ է տալիս վստահելիության հավանականությունը դարձնել σ^2 ցրվածքից անկախ: Եթե n-ը բավականաչափ մեծ թիվ է, ապա χ^2 բաշխումը կարելի է մոտարկել բնականոն բաշխմամբ, որտեղից n-ի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$n = 1+2(Z_{\alpha/2})^2/d^2: \qquad (7.7)$$

Բերված եղանակները թույլ են տալիս որոշել պարամետրերի տրված ճշտության ապահովման համար անհրաժեշտ ընտրանքի չափը: Նմանակման գիտափորձերում հաճախ մոդելավորման սկզբում տրվում են ելքի փոփոխականների վստահելիության միջակայքերը, և մոդելի փորձարկումը դադարեցնում են այն պահին, երբ փոփոխականների արժեքները պատկանում են այդ միջակայքերին: Դա թույլ է տալիս ընտրել անցավազքի ժամանակի լավագույն արժեքը: Նման եղանակի կիրառումը կապված է մի շարք բարդությունների հետ, որոնցից նշենք՝

1. Վստահելիության միջակայքերի որոշման հետ կապված լրացուցիչ հաշվարկների անհրաժեշտությունը;

2. Փորձի դադարեցման պայմանները հաճախ կարող են բավարարվել նմուշների շատ փոքր չափերի դեպքում, ինչը կարող է հանգեցնել մոդելի բնութագրերի գնահատման սխալների:

Նմանակող մոդելավորման խնդիրներում նաև օգտագործվում են փորձի ինքնաբերական դադարեցման տարբեր եղանակներ: Օրինակ՝ մոդելի փորձարկումը կատարվում է 2 փուլով: Սկզբում փարձնական անցավազք են կատարում ընտրանքի n չափն ստանալու համար, այնուհետև մոդելից ստացված ընտրանքի օգնությամբ որոշում են տրված ճշտությունը ապահովող n^*-ի արժեքը: Եթե $n^*<n$-ից, ապա մոդելի անցավազքը դադարեցվում է, հակառակ դեպքում անցավազքը շարունակվում է մինչև մնացած n^*-n նմուշների արժեքներն ստանալը:

Նմանակման մոդելի անցավազքի դադարեցման համար օգտագործում են նաև ցրվածքի փոքրացման, ըստ նշանակալիության նմուշների հատուցման և այլ եղանակներ:

8. Ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկության մոդել

Որպես նմանակող մոդելավորման կիրառության օրինակ դիտարկենք ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկության մոդելը: Նկարագրենք ձեռնարկության աշխատանքը և հիմնական ենթադրությունները:

1. Ձեռնարկությունում հաճախորդների սպասարկումը կատարում են k մասնագիտացված բրիգադները: Հաճախորդները սկզբում սպասարկվում են 1-ին բրիգադի կողմից: Այնուհետև անցնում են 2-րդ բրիգադ և այդպես շարունակ: k-րդ բրիգադում սպասարկվելուց հետո հաճախորդները հեռանում են ձեռնարկությունից: Եթե i-րդ բրիգադում սպասարկումն ավարտվելու պահին i+1-րդ բրիգադն զբաղված է, ապա հաճախորդը հերթագրվում է այդ բրիգադում: Բոլոր բրիգադներում հերթի թույլատրելի երկարությունը անսահմանափակ է: Յուրաքանչյուր բրիգադում հաճախորդների սպասարկումը կատարվում է՝ «առաջինն է եկել՝ առաջինն է սպասարկվում» կարգով: Այսպիսով ձեռնարկության մոդելը կարելի է նկարագրել սպասարկման k հաջորդական ցանցի օգնությամբ, որտեղ 1-ը մուտքի հանգույցն է, իսկ k-ն սպասարկման ելքի հանգույցն է:

2. Յուրաքանչյուր բրիգադ բնութագրվում է սեփական արտադրական գործառույթով, որը կախված չէ մյուս բրիգադների արտադրական գործառույթներիցով :

3. i-րդ բրիգադում միավոր ժամանակում սպասարկված հաճախորդների q_i (i=1,2,…,k) թիվը (արտադրական արագությունը) պատահական մեծություն է: Արտադրական արագության $f_i(q_i)$ հավանականությունների խտության ֆունկցիան ամբողջությամբ որոշվում է ծրագրային TM ժամանակի ընթացքում i-րդ բրիգադի կողմից արտադրական գործոնների օգտագործման մակարդակով: Փոփոխելով արտադրական գործոնների բաշխումը, ձեռնարկությունը կարող է փոխել q_i արտադրական արագության բաշխման ֆունկցիան: Եթե $f_i(q_i)$-ն որոշված է, ապա հայտնի են նաև նրա $E(q_i)$ միջին արժեքը և $Var(q_i)$-ի ցրվածքը:

4. q_i արտաղրական արագության նկարագրման համար հարմար է օգտագործել նրա հակադարձ $St_i=1/q_i$ մեծությունը՝ մեկ հաճախորդի սպասարկման համար անհրաժեշտ ժամանակը, որը որոշում է i-րդ բրիգադը: St_i մեծության հավանականությունների խտության ֆունկցիան և նրա պարամետրերն ամբողջությամբ որոշվում են i-րդ բրիգադի արտադրական գործոնների օգտագործման մակարդակով: Նշանակենք $f(St_i)$-ով St_i պատահական թվի հավանականությունների խտության ֆունկցիան, իսկ $E(t_i)$-ով ու $Var(t_i)$-ով նրա միջին արժեքը և ցրվածքը: Գործոնների բաշխման միջոցով ձեռնարկությունը կարող է փոփոխել $E(t_i)$-ի և $Var(t_i)$-ի արժեքները:

5. Միավոր ժամանակում ձեռնարկություն եկած հաճախորդների d թիվը՝ f(d) հավանականությունների բաշխման խտությամբ, E(d) միջին արժեքով և Var(d) ցրվածքով պատահական մեծություն է: Ձեռնարկությունը չի կարող ճշգրիտ կանխատեսել պլանային TM ժամանակի ընթացքում հաճախորդների թիվը: Սակայն փոխելով իր գովազդի ծախսերի ռազմավարությունը նա կարող է ազդել f(d) ֆունկցիայի տեսքի, E(d) և Var(d) մեծությունների արժեքների վրա: Նշանակենք At_i-ով i–1-րդ և i-րդ հաճախորդների գալու պահերի միջև ընկած ժամանակահատվածի պատահական մեծությունը, $f(At_i)$-ով բաշխման ֆունկցիան, իսկ E(t)-ով ու Var(t)-ով նրա միջին արժեքն ու ցրվածքը:

6. Պլանավորման ամբողջ ժամանակի ընթացքում ձեռնարկությունը առանց սահմանափակումների ընդունում է բոլոր հաճախորդներին:

7. Ձեռնարկությունը պլանավորման TM ժամանակի սկզբում ընդունում է որոշում՝ գովազդի ծախսերի մակարդակի և բոլոր բրիգադներում գործոնների բաշխման վերաբերյալ: TM պլանավորման ժամանակի համար որոշվում են f (d)-ն, E(d)-ն, V ar(d)-ն և $f(q_i)$-ը, $E(q_i)$-ը ու $Var(q_i)$-ը:

Այժմ դիտարկենք ձեռարկության վարքը նկարագրող մաթեմատիկական մոդելը: Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

At_i - i և (i–1)-րդ հաճախորդների գալու պահերի միջև ընկած ժամանակը,

St_{ij} - i-րդ հաճախորդների սպասարկման ժամանակը i-րդ բրիգադում, i=1,2,…,m; j=1,2,…,k,

Wt_{ij} - i-րդ հաճախորդ j-րդ բրիգադի հերթում սպասման ժամանակը i=1,2,…,m; j=1,2,…,k,

Dt_{ij} - j-րդ բրիգադում մնալու լրիվ ժամանակը,

$t_{ij}=Dt_{ij}+Wt_{ij}$ - i-րդ հաճախորդի j-րդ բրիգադում սպասարկվելու ժամանակը i=1,2,…,m; j=1,2,..k:

Ընդունենք, որ առաջին հաճախորդի գալու պահին՝ (i=1), ձեռնարկության վիճակը նկարագրվում է հետևյալ առնչություններով՝

$$At_1 = 0 \tag{8.1}$$

$$Dt_{11}= 0,\ Dt_{12}=Dt_{11},\ Dt_{1k}= Dt_{11}+Dt_{12}+\ldots+ Dt_{1k-1} \tag{8.2}$$

$$Wt_{11}= 0,\ Wt_{12}=0,\ Wt_{1k}=0 \tag{8.3}$$

$$t_{11}= St_{11},\ t_{12}=St_{12},\ \ldots,\ t_{1k}=St_{1k}: \tag{8.4}$$

Նոր հաճախորդների գալու ժամանակ հավասարումները համապատասխանորեն փոփոխվում են, և (8.4) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$t_{i1}=Wt_{i1}+St_{i1},\ t_{i2}=Wt_{i2}+St_{i2},\ t_{ik}=Wt_{ik}+St_{ik},\ i=2,\dots,m$:

Արդյոք հաճախորդը սպասում է հերթում, թե բրիգադն է գտնվում պարապուրդի մեջ, կախված է հետևյալ տարբերություններից նշանից՝

$Dif_1=t_{i-1,1}-At_1;\ Dif_2=(t_{i-1,1}+t_{i-1,2})-(At_i+Wt_{i1}+St_{i1});$

$Dif_k=(t_{i-1,1}+\dots+t_{i-1,k})-[At_i+St_{i1}+Wt_{i1}+St_{i2}+Wt_{i2}+\dots+St_{ik-1}+Wt_{ik-1}]$:

Եթե j-րդ բրիգադի համար $Dif_j>0$, ապա նրա պարապուրդի ժամանակը հավասար է զրոյի, իսկ հաճախորդի սպասման ժամանակը հավասար է

$Wt_{ij}=Dif_j,\ i=2,3,\dots,k,\ j=1,2,\dots,k$:

Եթե $Dif_j<0$, ապա i-րդ հաճախորդի սպասման ժամանակը հավասար է զրոյի, իսկ բրիգադի պարապուրդի ժամանակը հավասար է

$Dt_{ij}=-Dif_j,\quad i=2,3,\dots,k;\ j=1,2,\dots,k$:

Եթե $Dif_j<0$, ապա i-րդ հաճախորդի սպասման և բրիգադի պարապուրդի ժամանակները հավասար են զրոյի:

Այժմ քննարկենք ձեռնարկության բնութագրերը: Ընդունենք, որ մոդելավորման ժամանակի տևողությունը 90 օր է (TM=90), այսինքն ձեռնարկության աշխատանքների համար պետք է մշակել 90 օրյա ծրագիր: Դիտարկվող խնդրում ելքի փոփոխական է ձեռնարկության շահույթը: Գիտափորձի գործոններ են արտադրական ծախսերը (աշխատուժ, հումք, սարքավորումներ և այլն) և գովազդի ծախսերը: Երկու գործոններն էլ քանակական են: Դիցուք՝ ձեռնարկությունում դիտարկվում է աշխատանքների ծրագրման 5 տարբերակ, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է հետևյալ ցուցանիշները՝

1. Գովազդի ռազմավարություն:
2. Միջոցների բաշխումը տարբեր բրիգադների միջև: Ենթադրվում է, որ բրիգադների թիվը՝ k=4-ի:
3. C՝ լրիվ ծախսերը և 5 տարբերակների համար սկզբնական տվյալները բերված են ստորև:

Աղյուսակ 1

տարբե-րակ	E(d)	$E(q_j)$				C
		j=1	J=2	J=3	J=4	
I	3,00	3,33	3,75	4,00	3,50	800
II	3,00	3,50	3,33	6,00	3,50	800
III	3,00	5,00	4,25	6,00	5,00	1250
IV	3,75	5,00	4,25	6,00	5,00	1550
V	3,75	5,00	--	4,50	4,50	1720

Մոդելի հետազոտման ժամանակ պարզության համար ընդունենք, որ f(d) և f(q) բաշխումները ցուցչային են: Դա նշանակում է, որ քննարկվող յուրաքանչյուր տարբերակ ամբողջությամբ որոշվում է C լրիվ ծախսերի և

E(d), E(q_i), i=1,2,3,4 պարամետրերի արժեքներով: Դիցուք՝ At և St պատահական թվերը ևս ունեն ցուցչային բաշխում, իսկ նրանց միջին արժեքները հավասար են E(At) =1/E(d), E(St_{ij}) =1/E(q_i), i=1,2,3,4: Գիտափորձի ընթացքում ընդունվում է, որ մեկ հաճախորդի լրիվ սպասարկման արժեքը հավասար է 15 միավորի:

Դիտարկենք նմանակման մոդելի ալգորիթմը և բլոկ-սխեման:

Ընդունենք, որ յուրաքանչյուր տարբերակ մոդելավորման TM ժամանակի ընթացքում նմանակվում է 25 անգամ: Յուրաքանչյուր նմանակումով որոշվում է ձեռնարկությոան ամբողջ շահույթը՝

$$R= P\times Q\ \ C,$$

որտեղ P-ն մեկ հաճախորդի սպասարկման արժեքն է, Q-ն՝ ծրագրային TM ժամանակի ընթացքում սպասարկված հաճախորդների թիվը, իսկ C-ն ձեռնարկության լրիվ ծախսը:

1-ին բլոկում կատարվում է k բրիգադների պարամետրերի՝ E(St_{ij}), j=1,k և P, C, TM, E(At), N արժեքների մուտքագրում: Այստեղ N-ը մոդելի տարբերակների նմանակումների կրկնության թիվն է: 3-րդ և 4-րդ բլոկներում՝ L-ի մեծությանը՝անցավազքի ընթացիկ համարին,տրվում է 1 արժեք, իսկ Q-ին սպասարկված հաճախորդներիթվին՝ 0 արժեք: 5-րդ բլոկում ստացվում են ցուցչային բաշխմամբ հաճախորդների սպասարկման ժամանակների մեծությունները, որից հետո (8.1)-(8.4) բանաձևերով հաշվարկվում են պարապուրդի, հերթում առաջին հաճախորդի սպասելու և յուրաքանչյուր բրիգադում մնալու լրիվ ժամանակները:

Բլոկ-սխեմայում համակարգային ժամանակի CLOCK փոփոխականը հաշվարկվում է որպես k-րդ բրիգադի պարապուրդի և սպասարկման ժամանակների գումար:

Մոդելավորումը դադարեցվում է, երբ CLOCK-ի մեծությունը՝ համակարգային ժամանակը գերազանցում է TM-ից: 8-րդ բլոկում որոշվում է երկու հաջորդական հաճախորդների գալու պահերի միջև ընկած AT ժամանակը: 9-րդ բլոկում որոշվում են k բրիգադների սպասարկման նոր ժամանակների մեծությունները: 13-21-րդ բլոկները կրկնվում են յուրաքանչյուր բրիգադի համար: Համակարգային ժամանակը վերահաշվարկվում է 22-րդ բլոկում: Եթե CLOCK≥TM, ապա առաջին տարբերակի առաջին հաշվարկը, այսինքն՝ ալգորիթմի մեկ անցավազքը, ավարտված է: Այնուհետև կատարվում է դիտարկվող տարբերակի համար ամբողջ շահույթի (տեսական) հաշվարկ՝

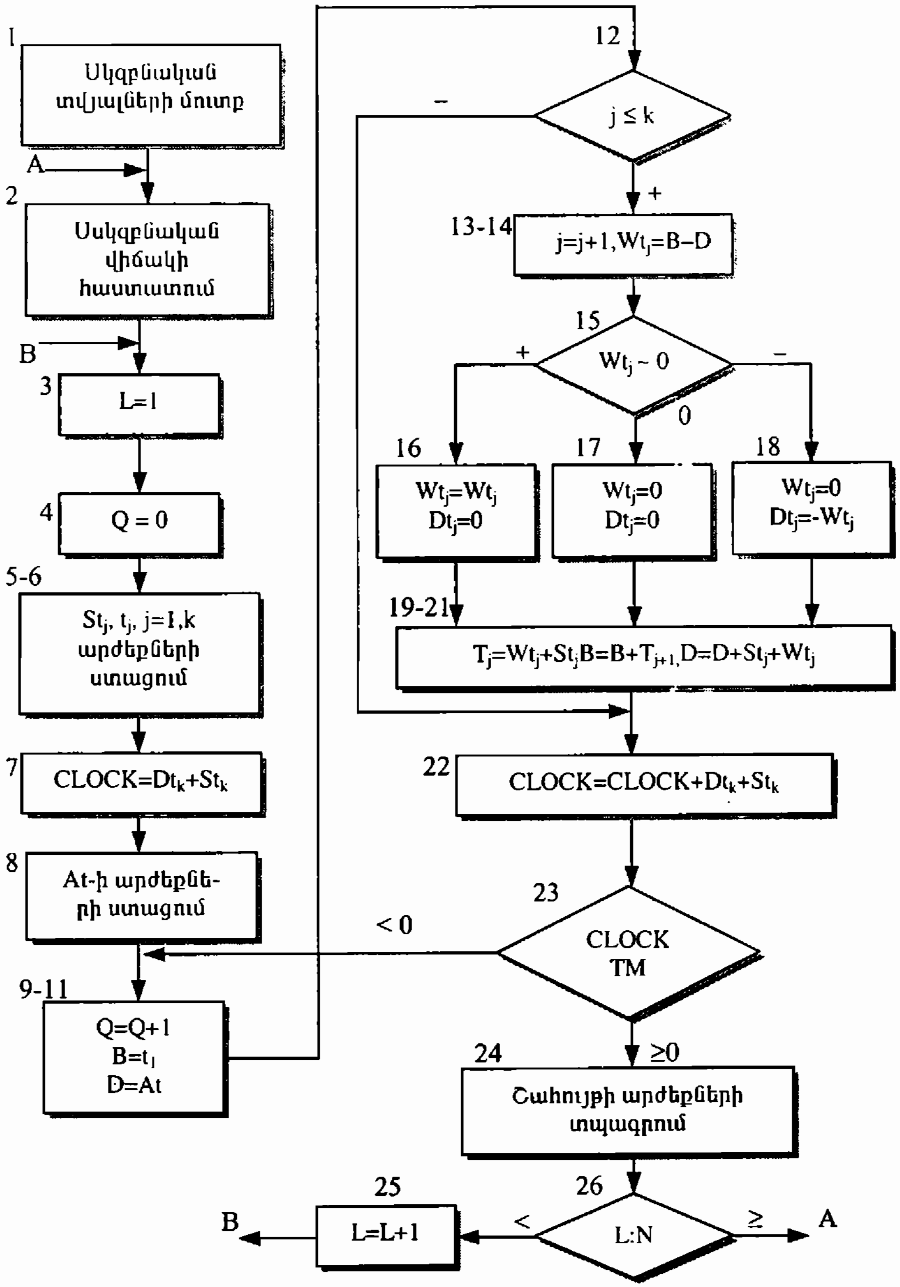
$$R = P\left[E(d)TM - \sum E(d)/(E(q_i) - E(d))\right] - C,$$

որտեղ E(d)TM-ը TM ժամանակում սպաևլի հաճախորդների թիվն է:

Եթե L< N, ապա L-ին գումարվում է 1 և սկսվում է նոր հաշվարկ, L≥N-ի դեպքում տարբերակի հաշվարկն ավարտվում է:

Ձեռնարկության նմանակման մոդելի պիտանիության ստուգման համար կարելի է օգտագործել բազմափուլ ցուցչային սպասարկման ցանցերի համար ստացվոնար ռեժիմում ստացված բանաձևերը:

Ավտոտեխսպասարկման ձեռնարկությաննմանակման մոդելի բլոկ-սխեմա



Հետազոտման ժամանակ ենթադրվում է, որ $E(d)/E(q)<1$, այսինքն ծրագրային TM ժամանակի ընթացքում ձեռնարկությունը գտնվում է ստացիոնար ռեժիմում: Ստորև բերված աղյուսակներում 5 տարբերակներից յուրաքանչյուրի համար համեմատվում են շահույթի տեսական (բանձևից ստացված) արժեքը և նմանակող մոդելավորմամբ ստացված ընտրանքի միջինը: Տեսական արժեքները հաշվարկվել են 2-րդ աղյուսակի տվյալների օգնությամբ: Տվյալների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ բոլոր 5 տարբերակների նմուշային միջինները մոտ են համապատասխան տեսական արժեքներին, ինչը հաստատում է նմանակման մոդելի և նրա հետ կատարված գիտափորձի արդյունքների ճշտությունը: Փորձի սկզբնական պայմանները դիտարկվող տարբերակներում նույնն են՝ յուրաքանչյուր անցավազքի սկզբում ձեռնարկությունում հաճախորդներ չկան: Մոդելի յուրաքանչյուր տարբերակի համար կատարվել է 50 անցավազք:

Հաշվարկների արդյունքները բերված են 2-րդ աղյուսակում, իսկ ընտրանքների միջինները և շեղումները բերված են 3-րդ աղյուսակում: Նմուշային միջինների ճշտության գնահատման համար կառուցենք 99% հավանականությամբ վստահելիության միջակայքերը, որտեղ $\overline{X}$-ը ընտրանքի միջինն է, s-ը ընտրանքի կանոնական շեղումը, N=50, $Z_{\alpha/2}$-ը բնականոն բաշխման պրոցենտիլն է, իսկ R-ը՝ իրական շահույթի մեծությունը:

$$R = \overline{X} + Z_{\alpha/2} S/\sqrt{N}$$

Յուրաքանչյուր ծրագրի համար 99% վստահելիության միջակայքերը հավասար են՝ $2912<R_1<3040$, $2918<R_2<3065$, $2584<R_3<2766$, $3185<R_4<3345$, $3031< R_5< 3235$:

Նշենք, որ 1 և 2 տարբերակների R_1 և R_2 արժեքները մոտենում են վստահելիության միջակայքերի սահմանին: Այդ տարբերակներում առաջանում են ամենամեծ հերթերը, դրա համար ձեռնարկության վարքը մոդելավորող գործընթացը դանդաղ է կայունանում և R_1 ու R_2-ը վատ են մոտարկվում համապատասխան ստացիոնար արժեքներով: Պլանային TM ժամանակի մեծացման դեպքում 1 և 2 տարբերակները ևս կմտնեն ստացիոնար ռեժիմ և անկասկած կնվացեն իրական շահույթի գնահատման ճշտությունը:

Հաշվարկների արդյունքները

Աղյուսակ 2

տարբերակ եւր	I	II	III	IV	V
1	3055	3175	2275	3325	3605
2	2665	3310	2470	3220	3335
3	2860	3280	2350	3250	3333
4	2995	2890	2665	2755	2855
5	2935	3220	2990	3130	3635
6	2875	2905	2530	3265	3140
7	3025	2635	3055	3355	3665
8	3115	2785	3085	3520	3110
9	2845	2515	2515	3220	3215
10	2965	2830	2500	3235	2945
11	2920	3085	2800	3265	3590
12	2890	2980	2245	2980	3125
13	3040	3145	2770	3070	2765
14	2920	2950	3010	2995	3680
15	3445	2845	2755	3490	3305
16	2845	2830	2710	3070	3470
17	3265	3055	2575	3145	3390
18	2815	2845	2770	3475	2840
19	3250	3055	2800	3500	3170
20	2890	3100	2890	3475	3200
21	3400	2830	2725	3610	3665
22	3040	2785	2830	3220	3110
23	3130	3145	2455	3130	3225
24	2755	3070	2845	3430	3140
25	2800	3025	2995	3145	2900

Աղյուսակ 3

Տարբերակ ##	Սպասվող շահույթի արժեքը R	Նմուշային միջինը $X_{մ}$	Կանոնական շեղումը S
I	2918.64	2976.40	175.83
II	2918.64	2992.30	202.20
III	2704.00	2675.20	250.51
IV	3285.00	3265.30	221.81
V	3147.50	3131.90	277.04

Հավելված

Պատահական թվերի աղյուսակ

3513 6976 9847 1722 3874	2883 882 4311 2741 2020	5675 2501 7238 945 7257	7526 9890 2642 7480 6422	5988 3214 829 4491 7	6531 515 3775 7600 7370	7513 7581 4348 13 8252
6793 5587 4368 7740 2544	6904 7242 1157 9490 1043	283 3170 7628 7272 3355	4834 4524 3463 3880 4256	6771 162 6466 8113 5332	5664 1641 8621 7013 2650	1217 3713 125 2466 3461
1247 4679 1275 7556 5297	2749 7881 3774 3225 6238	5269 5173 1169 1644 9944	3781 4089 372 7503 6337	8111 107 8833 5383 3958	6253 7228 9661 7136 526	3469 7756 7572 9398 103
9636 4353 627 8749 3644	3854 4503 9998 743 2297	6403 7840 4341 5716 976	4748 8497 7311 4171 2397	4992 5086 5185 1300 3868	2243 5086 6896 7283 2662	5116 8005 3969 5744 9125
7028 896 7677 7719 8276	9175 9497 1153 1679 4871	9776 6306 7834 4311 8221	8477 9231 5720 19 8918	8902 9260 5122 2116 9556	6846 8196 6861 9952 3070	2282 7443 5303 8086 4023

Գրականություն

1. Исследование операций в экономике. Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. - М: ЮНИТИ, 1997.
2. А. Пинскер. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II. /Пер. с англ./ -М: Мир, 1987.
3. Лотов А.В. Введение в экономическое моделирование. -М: Наука.1984.
4. Исследование операций. Методологические основы и математические методы. В 2-х томах. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. /Пер. с англ./ - М: Мир. 1981
5. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. -М.: Наука, 1981.
6. Р. Шеннон. Имитационное моделирование систем. /Пер. с англ./ - М: Наука, 1978.
7. Ю.М. Максимов, И.М. Рожков, М.А. Саакян. Матеметичское моделирование металлургического производства. -М: Металлургия, 1976.
8. Т. Нейлор. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. /Пер. с англ./ -М: Мир, 1975.

ԼԵՎՈՆ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ
Սանկտ Պետերբուրգի պետական համալսարանի պրոֆեսոր

ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ի՞նչ շահ սրանից, կամ ինձ ի՞նչ օգուտ...
Գրիգոր Նարեկացի,
Մատյան ողբերգության, բան Ձ,Ա,
Ե. 1979

Խաղերի տեսությունը ժամանակակից կիրառական մաթեմատիկայի ճյուղերից է, որը նպատակ ունի վերլուծել նմանատիպ կամ տարբեր շահեր հետապնդող հակադիր կողմերի հարաբերությունները:

Խաղերի տեսությունը որպես գիտություն մշակել են Ջոն ֆոն Նոյմանը և Օսկար Մորգենշտեռնը: Նրանք խաղերի տեսությունը զարգացրել են բարդ տնտեսական համակարգերում որոշումներ կայացնելու նպատակով: Իրենց «Խաղերի տեսությունը և տնտեսական վարվելակերպը» գրքում (1944թ.), հեղինակները պնդում են, որ դասական մաթեմատիկան, զարգացվելով մեխանիկայում և ֆիզիկայում կիրառվելու համար, չկարողացավ նկարագրել և բացատրել տնտեսագիտության մեջ և հասարակական կյանքում տեղի ունեցող իրական գործընթացները: Նրանք նաև նկատեցին շատ ընդհանուր գործոններ, ինչպիսիք են հակամարտ շահերը, որոշումներ կայացնողների տարբեր նախընտրությունները, յուրաքանչյուր անհատի կախումը իրական խաղերում, և տնտեսական իրադրություններում այլ անհատների կողմից կայացվող որոշումներից: Ուստի, Օ.Մորգենշտեռնը և Ջ.Նոյմանը այս նոր տիպի մաթեմատիկան անվանեցին խաղերի տեսություն:

Նախկին Խորհրդային Միությունում խաղերի տեսությունը լայնորեն տարածվեց 1968թ. Երևանում տեղի ունեցած Առաջին Համամիութենական խաղերի տեսության կոնֆերանսից հետո:Տեղին է նշել պրոֆեսոր Նիկոլայ Ն. Վորոբյովի հանգուցային դերը նախկին սոցիալիստական երկրներում խաղերի տեսության տարածման և զարգացման մեջ:

Հեղինակի մասին

Լեոն Պետրոսյանը ծնվել է 1940թ. ք.Սանկտ-Պետերբուրգում (Լենինգրադում) մտավորականների ընտանիքում: 1957թ. ընդունվել է Երևանի պետական համալսարանի մեխանիկա-մաթեմատիկական ֆակուլտետը: 1960թ. փոխադրվել է Լենինգրադի պետական համալսարանի մաթեմատիկա-մեխանիկական ֆակուլտետ և մասնագիտացել խաղերի տեսության գծով:

1965թ. պաշտպանել է թեկնածուական, իսկ 1972թ. դոկտորական ատենախոսությունը դիֆերենցյալ խաղերի ոլորտում: 1974 թվականից Սանկտ Պետերբուրգի պետական համալսարանի ամբիոնի վարիչ է, իսկ 1975 թվականից համատեղությամբ՝ Կիրառական մաթեմատիկայի - կառավարման գործընթացների ֆակուլտետի դեկանը:

Լեոն Պետրոսյանը հավատարիմ է մնացել խաղերի տեսությանը և այդ բնագավառում հասել է լուրջ արդյունքների՝ նա հրատարակել է 15 մենագրություն և դասագիրք, որոնցից 3-ը թարգմանվել են անգլերեն: Նա հեղինակ է ավելի քան 150 գիտական աշխատության: Խաղերի տեսության բնագավառում նրա ղեկավարությամբ պաշտպանվել է մի քանի տասնյակ թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսություն:

Նա հրավիրվել է դասախոսելու աշխարհի առաջատար շատ համալսարաններում՝ Բերկլի, Քեմբրիջ, Լոնդոն, Մոնրեալ, Տոկիո, Մյունխեն, Մեխիկո, Սան Պաուլո, Հոնկոնգ... և բազմիցս Երևանի պետական համալսարանում:

Լեոն Պետրոսյանը՝ «International Game Theory Review» ամսագրի և «Game Theory and Applications» տարեգրքի հիմնադիր խմբագիրն է: Նա նաև Ռուսական բաժանմունքի դինամիկ խաղերի միջազգային գիտական ընկերության նախագահն է:

I. ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

1. Բնականոն տեսքի հակամարտ խաղի սահմանումը

Սույն բաժնի որոշ հասկացություններ և սահմանումներ կրկնում են առաջին հատորի հավելվածում քննարկված հասկացություններն ու սահմանումները: Այդ կրկնությունը կատարվել է ամբողջականությունը չխախտելու և ընթերցանությունը հարմարավետ դարձնելու նպատակով:

1.1 Սահմանում: Հետևյալ համակարգը՝

$$\Gamma = (X,Y,H) \tag{1.1}$$

որտեղ X-ը և Y-ը ոչ դատարկ բազմություններ են, և $H{:}X\times Y\to R^1$ որևէ ֆունկցիա է, կոչվում է բնականոն տեսքի հակամարտ խաղ:

$x\in X$ և $y\in Y$ տարրերը կոչվում են համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների վարվելակերպեր Γ խաղում: X×Y դեկարտյան արտադրյալի տարրերը (այսինքն՝ վարվելակերպերի (x,y) զույգերը, որտեղ $x\in X$ և $y\in Y$) կոչվում են իրավիճակներ: H(x,y) ֆունկցիան կոչվում է առաջին խաղացողի շահումի (վճարումի) ֆունկցիա, իսկ երկրորդ խաղացողի շահումի ֆունկցիան սահմանվում է, որպես՝ $-H(x,y)$: Այդ պատճառով H(x,y) ֆունկցիան անվանում են նաև պարզապես Γ խաղի շահումի ֆունկցիա, իսկ Γ խաղը՝ զրո գումարով խաղ (քանի որ ցանկացած $(x,y)\in X\times Y$ համար՝ $H(x,y)+(-H(x,y))=0$): Այսպիսով, օգտագործելով ընդունված տերմինաբանությունը, որպեսզի Γ խաղը տրված լինի, պետք է տրված լինեն առաջին և երկրորդ խաղացողների վարվելակերպերի X և Y բազմությունները, ինչպես նաև բոլոր իրավիճակների X×Y բազմության վրա որոշված H շահումի ֆունկցիան:

Γ խաղը մեկնաբանվում է հետևյալ կերպ.

Խաղացողները միաժամանակ և միմյանցից անկախ ընտրում են $x\in X$ և $y\in Y$ վարվելակերպերը: Արդյունքում առաջին խաղացողն ստանում է H(x,y) շահում (H ֆունկցիայի արժեքն (x,y) կետում), երկրորդը՝ $-H(x,y)$ շահում:

Սահմանում: $\Gamma'=(X',Y',H')$ խաղը կոչվում է $\Gamma=(X,Y,H)$ խաղի ենթախաղ, եթե $X'\subseteq X$, $Y'\subseteq Y$ և $H'{:}X'\times Y'\to R^1$ ֆունկցիան H ֆունկցիայի նեղացումն է $X'\times Y'$ բազմության վրա:

Սույն բաժնում դիտարկվելու են հիմնականում այնպիսի հակամարտ խաղեր, որոնցում խաղացողների վարվելակերպերի բազմությունները վերջավոր են:

1.2 Սահմանում: Այն հակամարտ խաղերը, որոնցում երկու խաղացողներն էլ ունեն վարվելակերպերի վերջավոր բազմություններ, կոչվում են մատրիցային խաղեր:

Դիցուք՝ (1.1) մատրիցային խաղում առաջին խաղացողն ունի ընդամենը m թվով վարվելակերպ: Կարգավորենք առաջին խաղացողի վարվելակերպերի X բազմությունը, այսինքն՝ X և $M=\{1,2,\ldots,m\}$ բազմությունների միջև ստեղծենք փոխմիարժեք համապատասխանություն: Համանմանորեն, եթե երկրորդ խաղացողն ունի n թվով վարվելակերպ, ապա Y և $N=\{1,2,\ldots,n\}$ բազմությունների միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այդ դեպքում Γ խաղը լիովին որոշվում է $A=\{a_{ij}\}$ մատրիցով, որտեղ՝

$$a_{ij}=H(x_i,y_j),\quad (i,j)\in M\times N,\quad (x_i,y_j)\in X\times Y,\quad i\in M,\ j\in N:$$

Այստեղից էլ՝ խաղի անվանումը՝ մատրիցային: Ընդ որում Γ խաղն իրագործվում է հետևյալ կերպ: Առաջին խաղացողն ընտրում է $i\in M$ տող, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ առաջինի հետ միաժամանակ՝ որևէ $j\in N$ սյունակ: Որից հետո առաջին խաղացողն ստանում է a_{ij} շահումը, իսկ երկրորդը՝ $-a_{ij}$ շահումը: Եթե շահումը հավասար է բացասական թվի, ապա իրականում խոսքը վորաբերվում է այդ գումարը տանուլ տալուն:

Շահումների A մատրիցով Γ խաղը նշանակենք Γ_A-ով և անվանենք (m×n) խաղ (ըստ A մատրիցի չափսերի): Եթե շարադրանքից հասկանալի է, թե խոսքը ինչ մատրիցով խաղի մասին է, ապա A ինդեքսը չենք նշի:

Մատրիցային խաղում վարվելակերպերի համարակալումը կարող է կատարվել տարբեր եղանակներով, հետևաբար կարգավորվածության յուրաքանչյուր հարաբերությանը, խիստ ասած, համապատասխանում է դրա մատրիցը: Այսպիսով, վերջավոր հակամարտ խաղը կարող է նկարագրվել տարբեր մատրիցներով, որոնք միմյանցից տարբերվում են միայն տողերի կամ սյունակների կարգով:

1.3 Օրինակ 1. (Քաղաքի պաշտպանություն): Այս օրինակը հայտնի է որպես "գնդապետ Բլոտոյի խաղ" [4]: Գնդապետ Բլոտոն ունի m հատ գունդ, իսկ իր հակառակորդը՝ n հատ գունդ: Հակառակորդը պաշտպանում է երկու դիրք: Գնդապետ Բլոտոն դիրքը կգրավի, եթե հարձակվող գնդերի թիվը մեծ լինի դիրքը պաշտպանող գնդերի թվից: Հակառակորդ կողմերից պահանջվում է գնդերը բաշխել երկու դիրքերի միջև:

Որոշենք գնդապետ Բլոտոյի (առաջին խաղացողի) շահումը յուրաքանչյուր դիրքում: Եթե իր գնդերը որևէ դիրքում ավելի շատ են, քան հակառակորդինը (երկրորդ խաղացողը), ապա իր շահումն այդ դիրքում հավասար է հակառակորդի գնդերի թվին գումարած մեկ (դիրքի գրավումը համարժեք է մեկ գնդի գրավմանը): Եթե որևէ դիրքում երկրորդ խաղացողի գնդերը ավելի շատ են, քան առաջին խաղացողինը, ապա առաջին խաղացողը կորցնում է այդ դիրքում իր բոլոր գնդերը և ևս մեկ միավոր (դիրքը կորցնելու համար): Եթե տվյալ դիրքում երկու կողմերի գնդերի թիվը հավասար է, ապա ոչ ոքի է, և կողմերից ոչ մեկը ոչինչ չի ստանում: Առաջին խաղացողի ընդհանուր շահումը հավասար է երկու դիրքերում ստացված շահումների գումարին:

Ակներև է, որ խաղը հակամարտ է:

Նկարագրենք խաղացողների վարվելակերպերը: Դիցուք՝ որոշակիության համար, m>n: Առաջին խաղացողն ունի հետևյալ վարվելակերպը. $x_0=(m,0)$՝ բոլոր զնդերն ուղարկել առաջին դիրք, $x_1=(x-1,1)$՝ (m–1) հատ զունդ ուղարկել առաջին դիրք, իսկ մեկը՝ երկրորդ, $x_2=(m-2,2),\ldots,x_{m-1}=(1,m-1)$, $x_m=(0,m)$: Հակառակորդը (երկրորդ խաղացողը) ունի այսպիսի վարվելակերպեր. $y_0=(n,0),y_1=(n-1,1),\ldots,y_n=(0,n)$:

Դիցուք՝ առաջին խաղացողն ընտրում է x_0 վարվելակերպը, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ y_0 վարվելակերպը: Հաշվենք առաջին խաղացողի a_{00} շահումն այդ իրավիճակում: Քանի որ m>n, ապա առաջին դիրքում շահում է առաջին խաղացողը: Իր շահումը հավասար է (n+1)-ի (միավոր՝ դիրքը պահելու համար): Երկրորդ դիրքում ոչ-ոքի է: Այսպիսով՝ $a_{00}=n+1$: Հաշվենք a_{01}-ը: Քանի որ m>n–1, ապա առաջին դիրքում առաջին խաղացողի շահումը հավասար է՝ n–1+1=n:

Երկրորդ դիրքում շահում է երկրորդ խաղացողը: Հետևաբար, առաջին խաղացողն այդ դիրքում կորցնում է մեկ միավոր: Այսպիսով՝ $a_{01}=n-1$: Այս դատողությունները շարունակելով, ստանում ենք՝ $a_{0j}=n-j+1-1=n-j$, $1\le j\le n$: Եթե m–1>n, ապա $a_{10}=n+1+1=n+2$, $a_{11}=n-1+1=n$, $a_{1j}=n-j+1-1-1=n-j-1$, $2\le j\le n$: Ընդհանուր դեպքում (ցանկացած m և n թվերի համար) շահումների մատրիցի a_{ij}, $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$ տարրերը հաշվվում են հետևյալ կերպ.

$$a_{ij}=H(x_i,y_j)=\begin{cases} n+2, & \text{եթե } m-i>n-j,\ i>j,\\ n-j+1, & \text{եթե } m-i>n-j,\ i=j,\\ n-j-i, & \text{եթե } m-i>n-j,\ i<j,\\ -m+i+j, & \text{եթե } m-i<n-j,\ i>j,\\ j+1, & \text{եթե } m-i=n-j,\ i>j,\\ -m-2, & \text{եթե } m-i<n-j,\ i<j,\\ -i-1, & \text{եթե } m-i=n-j,\ i<j,\\ -m+i-1, & \text{եթե } m-i<n-j,\ i=j,\\ 0, & \text{եթե } m-i=n-j,\ i=j: \end{cases}:$$

Այսպես, m=4, n=3 դեպքում դիտարկելով բոլոր հնարավոր իրավիճակները, ստանում ենք այս խաղի շահումների A մատրիցը՝

$$A=\begin{array}{c} \\ x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3\end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\end{array}:$$

Օրինակ 2: (Ճեղվելու խաղ): Առաջին և երկրորդ խաղացողներն ընտրում են 1 և n թվերի միջև ընկած համապատասխանաբար i և j թվեր, ընդ որում առաջին խաղացողը շահում է |i–j| մեծությունը: Այս խաղի մատրիցը քառակուսային է, (n×n) չափսերի, $a_{ij}=|i-j|$: Այդպես, եթե n=4, ապա խաղի A մատրիցը ունենում է հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}:$$

2. Մաքսիմինային և մինիմաքսիմային վարվելակերպեր

2.1. Դիտարկենք Γ=(X,Y,H) հակամարտ խաղը: Այստեղ խաղացողներից յուրաքանչյուրը իր վարվելակերպն ընտրելու միջոցով ձգտում է ստանալ առավելագույն շահում: Սակայն առաջին խաղացողի համար այն որոշվում է H(x,y) ֆունկցիայով, իսկ երկրորդի համար՝ –H(x,y) ֆունկցիայով, այսինքն՝ խաղացողների նպատակները լրիվին ներհակ են: Հաշվի առնելով, որ –H ֆունկցիայի մաքսիմումը գտնելու խնդիրը համարժեք է H ֆունկցիայի մինիմումը գտնելու խնդրին, կարելի է եզրակացնել, որ առաջին խաղացողը ձգտում է H ֆունկցիայի առավելագույն արժեքին, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ նույն ֆունկցիայի նվազագույն արժեքին: Այս պատճառով էլ, առաջին խաղացողին հաճախ անվանում են մաքսիմացնող, իսկ երկրորդին՝ մինիմացնող խաղացող: Հիշեցնենք ընդհանուր հակամարտ խաղերի վերաբերյալ առաջին հատորի Հակամարտ խաղեր գլխում բերված մի շարք սահմանումներ և հասկացություններ:

Ցանկացած Γ=(X,Y,H) հակամարտ խաղում

$$\underline{v} = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) \qquad (2.1)$$

թիվն անվանում են Γ խաղի ստորին արժեք: Եթե (2.1) արտահայտության արտաքին էքստրեմումը հասանելի է, ապա $\underline{v}$ թիվն անվանում են նաև մաքսիմին, կամ առաջին խաղացողի ապահովված առավելագույն շահում: Վարվելակերպի ընտրության այդ սկզբունքն անվանում են մաքսիմինի, կամ ապահովված առավելագույն շահումի սկզբունք, իսկ այդ սկզբունքով ընտրված x վարվելակերպը՝ մաքսիմային վարվելակերպ:

Համանմանորեն՝

$$\overline{v} = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y) \qquad (2.2)$$

թիվն անվանում են Γ խաղի վերին արժեք: Եթե այս արտահայտության արտաքին էքստրեմումը հասանելի է, ապա $\overline{v}$-ն անվանում են նաև մինիմաքս կամ երկրորդ խաղացողի նվազագույն ապահովված կորուստ: Վարվելակերպ ընտրելու այդ սկզբունքն անվանում են մինիմաքսիմային, իսկ այդ սկզբունքով ընտրված y վարվելակերպը՝ մինիմաքսային վարվելակերպ:

Հայտնի է, որ երկու փոփոխականի ցանկացած H(x,y) ֆունկցիայի համար՝

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y)$$

Սա նշանակում է, որ ցանկացած Γ=(X,Y,H) խաղում՝

$$\underline{v} \le \overline{v}: \tag{2.3}$$

Քանի որ մատրիցային խաղերը վերջավոր հակամարտ խաղեր են, այսինքն՝ վարվելակերպերի X և Y բազմությունները վերջավոր են, ապա մատրիցային խաղերում (2.1) և (2.2) արտահայտությունների արտաքին էքստրեմումները հասանելի են: Դիցուք՝ տրված է Γ_A մատրիցային (m×n) խաղ: Այդ դեպքում

$$\underline{v} = \max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij}, \tag{2.4}$$

$$\overline{v} = \min_{1\le j\le n}\max_{1\le i\le m} a_{ij}: \tag{2.5}$$

Այսպես,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցով Γ_A խաղում $\underline{v}$ ստորին արժեքը (մաքսիմինը) և առաջին խաղացողի i_0 մաքսիմինային վարվելակերպը հավասար են՝ $\underline{v}=3$, $i_0=2$, իսկ $\overline{v}$ վերին արժեքը (մինիմաքսը) և երկրորդ խաղացողի j_0 մինիմաքսային վարվելակերպը հավասար են՝ $\overline{v}=3$, $j_0=2$:

3. Հավասարակշռության իրավիճակներ

3.1. Դիտարկենք հակամարտ խաղում խաղացողների լավագույն (օպտիմալ) վարքագծի հարցը:

Սահմանում: Γ=(X,Y,H) հակամարտ խաղում (x^*,y^*) իրավիճակը կոչվում է հավասարակշռության իրավիճակ կամ թամբակետ, եթե

$$H(x,y^*) \le H(x^*,y^*), \tag{3.1}$$

$$H(x^*,y) \le H(x^*,y^*), \tag{3.2}$$

բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար:

Γ խաղի հավասարակշռության բոլոր իրավիճակները նշանակենք Z(Γ): Պարզ է, որ $Z(\Gamma)\subseteq X\times Y$:

Γ_A մատրիցային (m×n) խաղում հավասարակշռության իրավիճակների սահմանումն ընդունում է հետևյալ տեսքը: (i^*,j^*) իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է Γ_A խաղում, եթե (միացնելով (3.1) և (3.2) անհավասարությունները) $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ բոլոր $1\le i\le m$ և $1\le j\le n$ համար:

Թամբակետում մատրիցի $a_{i^*j^*}$ տարրը միաժամանակ և փոքրագույնն է իր տողում, և առավելագույնը իր սյունակում: Նախորդ՝ 2.1. կետում դիտարկված

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցով խաղում (2.2) իրավիճակը հավասարակշռված է:

3.2. Γ հակամարտ խաղում հավասարակշռության իրավիճակների բազմությունը օժտված է այնպիսի հատկություններով, որոնք թույլ են տալիս խոսել հավասարակշռության իրավիճակին պատկանող վարվելակերպերի լավագույն լինելու մասին:

Թեորեմ: Դիցուք՝ (x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*) իրավիճակները հավասարակշիռ են Γ հակամարտ խաղում: Այդ դեպքում՝

$$1)\ H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*) = H(x_1^*, y_2^*) = H(x_2^*, y_1^*),$$

$$2)\ (x_1^*, y_2^*) \in Z(\Gamma),\ (x_2^*, y_2^*) \in Z(\Gamma):$$

Ապացուցում: Հավասարակշռության իրավիճակի սահմանումից՝

$$H(x, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y) \qquad (3.3)$$

$$H(x, y_2^*) \le H(x_2^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y) \qquad (3.4)$$

բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ համար: (3.3) անհավասարության ձախ մասում տեղադրենք x_2^*, իսկ աջ մասում՝ y_2^*: (3.4) անհավասարության ձախ մասում տեղադրենք x_1^*, իսկ աջ մասում y_1^*: Կստանանք՝

$$H(x_2^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*) \le H(x_1^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y_1^*):$$

Որտեղից հետևում է

$$H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*) = H(x_2^*, y_1^*) = H(x_1^*, y_2^*) \qquad (3.5)$$

հավասարությունը: Ցույց տանք երկրորդ պնդման ճշմարտությունը: Դիտարկենք (x_2^*, y_1^*) իրավիճակը: (3.3)-(3.5) առնչություններից ստանում ենք՝

$$H(x, y_1^*) \le H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*) \le H(x_2^*, y) \quad (3.6)$$

բոլոր $x \in X$, $y \in Y$ համար: (x_1^*, y_2^*) իրավիճակի հավասարակշռված լինելը ապացուցվում է համանմանորեն:

Թեորեմից հետևում է, որ հավասարակշռության բոլոր իրավիճակներում շահումի ֆունկցիան ընդունում է միևնույն արժեքը: Ուստի խելացի է ներմուծել հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում: Դիցուք՝ (x^*, y^*)-ը հավասարակշռության իրավիճակ է Γ խաղում: Այդ դեպքում

$$v = H(x^*, y^*) \qquad (3.7)$$

թիվը կոչվում է Γ խաղի արժեք:

Թեորեմի երկրորդ պնդումից մասնավորապես հետևում է մի այսպիսի փաստ: Z(Γ) բազմության պրոեկցիաները X և Y բազմությունների վրա նշանակենք համապատասխանաբար X^* և Y^*, այսինքն՝

$$X^* = \{x^* | x^* \in X, \exists y^* \in Y, (x^*, y^* \in Z(\Gamma)\},$$
$$Y^* = \{y^* | y^* \in Y, \exists x^* \in X, (x^*, y^* \in Z(\Gamma)\}:$$

Այդ դեպքում Z(Γ) բազմությունը կարելի է ներկայացնել

$$Z(\Gamma) = X^* \times Y^* \quad (3.8)$$

տեսքով: Այս պնդումն անմիջապես հետևում է թեորեմի երկրորդ պնդումից:

Սահմանում: $X^*(Y^*)$ բազմությունը կոչվում է առաջին (երկրորդ) խաղացողի լավագույն վարվելակերպերի բազմություն, իսկ դրա տարրերը՝ առաջին (երկրորդ) խաղացողի լավագույն վարվելակերպեր:

Նկատենք, որ (3.5) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ խաղացողի լավագույն վարվելակերպերը կարող են փոխարինել միմյանց, այսինքն՝ լավագույն վարվելակերպերի ցանկացած զույգ կազմում է հավասարակշռության իրավիճակ, իսկ շահումը այդ իրավիճակում հավասար է խաղի արժեքին:

3.3. Խաղացողների վարքագծի լավագույն լինելը չի փոխվի, եթե խաղի վարվելակերպերի բազմությունները մնան նույնը, իսկ շահումի ֆունկցիան բազմապատկվի որևէ դրական հաստատունով (կամ դրան գումարվի հաստատուն թիվ):

Լեմ (մասշտաբի վերաբերյալ): Դիցուք՝ Γ=(X,Y,H)-ը և Γ′=(X,Y,H′)-ը երկու հակամարտ խաղեր են, ընդ որում՝

$$H' = \beta H + \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha = \text{const},\ \beta = \text{const}: \quad (3.9)$$

Այդ դեպքում՝

$$Z(\Gamma') = Z(\Gamma),\ v_{\Gamma'} = \beta \cdot v_{\Gamma} + \alpha: \quad (3.10)$$

Ապացույց: Դիցուք՝ (x^*,y^*)-ը հավասարակշռության իրավիճակ է Γ խաղում: Այդ դեպքում ունենք՝

$$H'(x^*,y^*) = \beta H(x^*,y^*) + \alpha \le \beta H(x^*,y) + \alpha = H'(x^*,y),$$
$$H'(x,y^*) = \beta H(x,y^*) + \alpha \le \beta H(x^*,y^*) + \alpha = H'(x^*,y^*)$$

բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ համար: Ուստի՝ $(x^*,y^*) \in Z(\Gamma')$, $Z(\Gamma) \in Z(\Gamma')$:

Հակառակը, դիցուք՝ $(x,y) \in Z(\Gamma')$: Այդ դեպքում՝

$$H(x,y) = (1/\beta)H'(x,y)\ \ \alpha/\beta$$

և, համանմանորեն դատելով, ստանում ենք, որ $(x,y) \in Z(\Gamma)$: Ուստի՝ $Z(\Gamma) = Z(\Gamma')$, ըստ որում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$v_{\Gamma'} = H'(x^*,y^*) = \beta H(x^*,y^*) + \alpha = \beta v_{\Gamma} + \alpha:$$

Տվյալ լեմը վկայում է այն մասին, որ միայն շահումների հաշվման սկզբնակետով և դրանց չափման մասշտաբով միմյանցից տարբերվող ցանկացած երկու խաղեր վարվելակերպային համարժեք խաղեր են:

3.4. Այժմ հաստատենք հավասարակշռության սկզբունքի ու մաքսիմինի և մինիմաքսի սկզբունքների փոխադարձ կապը հակամարտ խաղում:

Թեորեմ: Որպեսզի $\Gamma=(X,Y,H)$ հակամարտ խաղում գոյություն ունենա հավասարակշռության իրավիճակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան մինիմաքսը և մաքսիմինը՝

$$\min_y \sup_x H(x,y)\,,\ \max_x \inf_y H(x,y) \tag{3.11}$$

և կատարվի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\underline{v} = \max_x \inf_y H(x,y) = \min_y \sup_x H(x,y) = \overline{v} \tag{3.12}$$

Ապացուցում: Անհրաժեշտությունը: Դիցուք՝ $(x^*,y^*)\in Z(\Gamma)$: Այդ դեպքում բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար ճիշտ են

$$H(x,y^*) \le H(x^*,y^*) \le H(x^*,y) \tag{3.13}$$

անհավասարությունները, որտեղից՝

$$\sup_x H(x,y^*) \le H(x^*,y^*) : \tag{3.14}$$

Դրա հետ մեկտեղ ունենք՝

$$\inf_y \sup_x H(x,y) \le \sup_x H(x,y^*) : \tag{3.15}$$

Համեմատելով (3.14)-ը և (3.15)-ը, ստանում ենք՝

$$\inf_y \sup_x H(x,y) \le \sup_x H(x,y^*) \le H(x^*,y^*) : \tag{3.16}$$

Համանմանորեն դատելով, հանգում ենք հետևյալ անհավասարություններին՝

$$H(x^*,y^*) \le \inf_y (x^*,y) \le \sup_x \inf_y H(x,y) : \tag{3.17}$$

Այսպիսով՝

$$\inf_y \sup_x H(x,y) \le \sup_x \inf_y H(x,y) :$$

Մյուս կողմից, միշտ ճիշտ է (2.6) հակառակ անհավասարությունը: Այսուհետև, ստանում ենք՝

$$\sup_x \inf_y H(x,y) = \inf_y \sup_x H(x,y) : \tag{3.18}$$

Ընդ որում (3.16) և (3.17) անհավասարությունները իրականանում են որպես հավասարություններ՝

$$\inf_y \sup_x H(x,y) = \sup_x H(x,y^*) = H(x^*,y^*)\,,$$

$$\sup_x \inf_y H(x,y) = \inf_y H(x^*,y) = H(x^*,y^*)\,,$$

այսինքն՝ մինիմաքսի և մաքսիմինի արտաքին էքստրեմումները հասանելի են դառնում համապատասխանաբար y^* և x^* կետերում:

Բավարարությունը: Դիցուք մինիմաքսն ու մաքսիմինը գոյություն ունեն՝

$$\max_x \inf_y H(x,y) = \inf_y H(x^*,y) \tag{3.19}$$

$$\min_y \sup_x H(x,y) = \sup_x H(x,y^*) \tag{3.20}$$

և (3.12) հավասարությունն ուժի մեջ է: Ցույց տանք, որ (x^*,y^*) իրավիճակը հավասարակշիռ է: Իրոք՝

$$H(x^*,y^*) \ge \inf_y H(x^*,y) = \max_x \inf_y H(x,y) \tag{3.21}$$

$$H(x^*,y^*) \le \sup_x H(x,y^*) = \min_y \sup_x H(x,y) : \tag{3.22}$$

Ըստ (3.12) հավասարության, մինիմաքսը հավասար է մաքսիմինին, իսկ (3.21)-ից և (3.22)-ից հետևում է, որ այն նաև հավասար է $H(x^*,y^*)$ մեծությանը, այսինքն՝ (3.21)-ի և (3.22)-ի անհավասարությունները կատարվում են որպես հավասարություններ: Այժմ ունենք՝

$$H(x^*,y^*) = \inf_y H(x^*,y) \le H(x^*,y)\ ,$$

$$H(x^*,y^*) = \sup_x H(x,y^*) \ge H(x,y^*)$$

բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար, այսինքն՝ $(x^*,y^*)\in Z(\Gamma)$:

Նշենք, որ ապացուցման ընթացքում ցույց տրվեց, որ մինիմաքսի և մաքսիմինի ընդհանուր արժեքը հավասար է $H(x^*,y^*)$՝ խաղի արժեքին, ընդ որում թեորեմի պայմաններում մինիմաքսային (մաքսիմինային) ցանկացած $y^*(x^*)$ վարվելակերպը լավագույն է, այսինքն (x^*,y^*) իրավիճակը հավասարակշիռ է: Թեորեմի ապացուցման ընթացքում ստացանք հետևյալ պնդումը:

Հետևություն: Եթե (3.11)-ում մինիմաքսը և մաքսիմինը գոյություն ունեն և հասանելի են համապատասխանաբար $\bar{y}$ և $\bar{x}$ կետերի վրա, ապա՝

$$\max_x \inf_y H(x,y) \le H(\bar{x},\bar{y}) \le \min_y \sup_x H(x,y) : \tag{3.23}$$

Հիշեցնենք, որ այն խաղերը, որոնցում գոյություն ունեն հավասարակշռության իրավիճակներ, կոչվում են լիորոշ խաղեր, հետևաբար թեորեմը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ: Որպեսզի խաղը լինի լիորոշ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ մինիմաքսը և մաքսիմինը (3.11)-ում գոյություն ունենան և տեղի ունենա (3.12) հավասարությունը:

Նշենք, որ Γ_A մատրիցային խաղում (3.11)-ի էքստրեմումները միշտ հասանելի են, ուստի այդ խաղերի համար թեորեմն ընդունում է հետևյալ տեսքը:

Հետևանք 2: Որպեսզի Γ_A մատրիցային $(m\times n)$ խաղը լինի լիորոշ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\min_{j=1,2,\dots,n}\ \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,2,\dots,m}\ \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \tag{3.24}$$

Նկատենք, որ 1.3 կետում բերված օրինակներում ձևակերպված խաղերը լիորոշ չեն, իսկ 3.1 կետում բերված խաղը լիորոշ է:

4. Խաղի խառն ընդլայնում

4.1. Դիտարկենք Γ_A մատրիցային խաղը: Եթե այդ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, ապա մինիմաքսը հավասար է մաքսիմինին, ընդ որում հավասարակշռության իրավիճակի սահմանման համաձայն, խաղացողներից յուրաքանչյուրը կարող է հակառակորդին հաղորդել իր լավագույն վարվելակերպը, և այդ հանգամանքը խաղացողներից ոչ մեկին չի կարող լրացուցիչ օգուտ տալ: Այժմ ենթադրենք, որ Γ_A խաղում գոյություն չունի հավասարակշռության իրավիճակ: Այդ դեպքում ըստ 3.4 կետի թորեմի և 2.2 կետի լեմի ունենք՝

$$\min_j \max_i a_{ij} - \max_i \min_j a_{ij} > 0 \qquad (4.1)$$

Այս դեպքում մաքսիմինային և մինիմաքսային վարվելակերպերն լավագույն չեն: Ավելին, խաղացողներին ձեռնտու չէ այդ վարվելակերպերը կիրառել, քանի որ նրանք կարող են ստանալ ավելի մեծ շահում: Սակայն հակառակորդին իր վարվելակերպի ընտրության մասին տեղեկացնելը կարող է հանգեցնել ավելի մեծ կորուստների, քան մաքսիմինային կամ մինիմաքսային վարվելակերպերի դեպքում:

Իրոք, թող A մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցի համար

$$\min_j \max_i a_{ij} = 5, \quad \max_i \min_j a_{ij} = 3,$$

այսինքն՝ հավասարակշռության իրավիճակ գոյություն չունի: i^*-ով նշանակենք առաջին խաղացողի մաքսիմային վարվելակերպը ($i^*=1$), իսկ j^*-ով՝ երկրորդ խաղացողի մինիմաքսային վարվելակերպը ($j^*=2$): Դիցուք՝ երկրորդ խաղացողն ընտրում է իր մինիմաքսային $j^*=2$ վարվելակերպը, իսկ առաջինն ընտրում է i=2: Այդ դեպքում վերջինը կստանա 5, այսինքն 2 միավորով ավելի, քան մաքսիմինայինն է: Սակայն եթե երկրորդ խաղացողը կռահի առաջին խաղացողի ընտրությունը, ապա նա կփոխի իր վարվելակերպը, ընտրելով j=1, և այդ դեպքում առաջինը կստանա ընդամենը 2 միավոր, այսինքն մեկ միավոր ավելի քիչ, քան մաքսիմինի դեպքում: Համանման դատողություններ կարելի է անել նաև երկրորդ խաղացողի համար: Ըստ էության, հարցն այն է, թե (4.1) գումարը ինչպես բաժանել խաղացողների միջև:

Պարզվում է, որ այդ դեպքում խելամիտ կլինի, որ խաղացողները գործեն պատահականորեն, ինչը կապահովի վարվելակերպի առավելագույն գաղտնիությունը: Ընտրության արդյունքը չի կարող հայտնի դառնալ հակառակորդին, քանի որ դա նույնիսկ իրեն՝ խաղացողին, հայտնի չէ քանի դեռ պատահական սարքը չի աշխատեցվել:

4.2. Սահմանում: Պատահական մեծությունը, որի արժեքները խաղացողի վարվելակերպերն են, կոչվում է խաղացողի խառը վարվելակերպ:

Այսպես, Γ_A մատրիցային խաղում առաջին խաղացողի խառը վարվելակերպը պատահական մեծություն է, որի արժեքները A մատրիցի տողերի $i \in M$ համարներն են, $M=\{1,2,...m\}$: Համանմանորեն է սահմանվում երկրորդ խաղացողի խառը վարվելակերպը, որի արժեքները A մատրիցի $j \in N$ սյուների համարներն են:

Հաշվի առնելով խառը վարվելակերպի այս սահմանումը, նախկին վարվելակերպերը կանվանենք "մաքուր": Քանի որ պատահական մեծությունը բնութագրվում է իր բաշխվածությամբ, ապա հետագայում խառը վարվելակերպը կնույնացնենք մաքուր վարվելակերպերի բազմության վրա տրված հավանականային բաշխվածության հետ: Այդպիսով, մատրիցային խաղում առաջին խաղացողի x խառը վարվելակերպը m չափանի վեկտոր է՝

$$x = (\xi_1,\ldots,\xi_m) \in R^m,\ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i=1,\ldots,m: \qquad (4.2)$$

Համանմանորեն, երկրորդ խաղացողի y խառը վարվելակերպը n չափանի վեկտոր է՝

$$y = (\eta_1,\ldots,\eta_n),\ \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1,\ \eta_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n: \qquad (4.3)$$

Ընդ որում $\xi_i \geq 0$ և $\eta_j \geq 0$ թվերը $i \in M$ և $j \in N$ մաքուր վարվելակերպերի ընտրության հավանականություններն են խաղացողների կողմից համապատասխանաբար x և y խառը վարվելակերպերի օգտագործման դեպքում:

Առաջին և երկրորդ խաղացողների խառը վարվելակերպերի բազմությունները նշանակենք համապատասխանաբար X-ով և Y-ով: Դժվար չէ նկատել, որ յուրաքանչյուր խաղացողի խառը վարվելակերպերի բազմությունը կոմպակտ է համապատասխան վերջավորչափանի Էվկլիդեսյան տարածության մեջ (փակ, սահմանափակ բազմություն):

Սահմանում: Դիցուք՝ $x=(\xi_1,\ldots,\xi_m) \in X$-ը առաջին խաղացողի խառը վարվելակերպն է: Այդ դեպքում՝

$$M_x=\{i | i \in M,\ \xi_i > 0\}, \qquad (4.4)$$

որտեղ $M=\{1,2,\ldots,m\}$-ը, կանվանենք x վարվելակերպի սպեկտր:

Համանմանորեն, երկրորդ խաղացողի $y=(\eta_1,\ldots,\eta_n) \in Y$ խառը վարվելակերպի N_y սպեկտրը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$N_y=\{j | j \in N,\ \eta_j > 0\}, \qquad (4.5)$$

որտեղ $N=\{1,2,\ldots,n\}$: Խառը վարվելակերպի սպեկտրը բաղկացած է այն մաքուր վարվելակերպերից, որոնք ընտրված են դրական հավանականություններով:

Ցանկացած x խառը վարվելակերպի համար $M_x \neq \varnothing$, քանի որ x վեկտորի բաղադրիչները ոչ բացասական են, և դրանց գումարը հավասար է մեկի [տե՛ս (4.2)]:

Դիտարկենք $u_i=(\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_n)\in X$, որտեղ $\xi_i=1$, $\xi_j=0$, $j\neq i$, $i=1,2,\ldots,m$: Այսպիսի վարվելակերպը քելադրում է A մատրիցի i-րդ տողի ընտրությունը 1 հավանականությամբ: Բնական է $u_i\in X$ խառը վարվելակերպը նույնացնել i-րդ տողի ընտրության, այսինքն՝ առաջին խաղացողի $i\in M$ մաքուր վարվելակերպի հետ: Համանմանորեն, $w_j=(\eta_1,\ldots,\eta_j,\ldots,\eta_n)\in Y$, որտեղ $\eta_j=1$, $\eta_i=0$, $i\neq j$, $j=1,2,\ldots,n$, խառը վարվելակերպը նույնացնենք երկրորդ խաղացողի $j\in N$ մաքուր վարվելակերպի հետ: Այսպիսով մենք ստացանք, որ խաղացողի խառը վարվելակերպերի բազմությունը իր մաքուր վարվելակերպերի տարածության ընդլայնումն է:

Սահմանում: Γ_A մատրիցային խաղում խաղացողների խառը վարվելակերպերի (x,y) զույգը կոչվում է խառը վարվելակերպերով իրավիճակ:

Γ_A մատրիցային $(m\times n)$ խաղում առաջին խաղացողի շահումը խառը վարվելակերպերով (x,y) իրավիճակում սահմանենք որպես իր շահումի մաթեմատիկական սպասելի: Խաղացողների կողմից վարվելակերպերի ընտրությունը կատարվում է միմյանցից անկախ, ուստի $x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ և $y=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ խառը վարվելակերպերով (x,y) իրավիճակում շահումի H(x,y) մաթեմատիկական սպասելին հավասար է՝

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j=(xA)y=x(Ay):$$

ըստ որում H(x,y) ֆունկցիան անընդհատ է ըստ $x\in X$ և $y\in Y$: Նկատենք, որ այն դեպքում, երբ խաղացողներից մեկն ընտրում է մաքուր վարվելակերպ (համապատասխանաբար, i կամ j), իսկ մյուսը՝ խառը վարվելակերպ (x կամ y), H(i,y), H(x,j) շահումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$H(i,y)=H(u_i,y)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_i=a_iy,\ i=1,\ldots,m,$$

$$H(x,j)=H(x,w_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\xi_i=xa^j,\ j=1,\ldots,m,$$

որտեղ α_i-ն և α^j-ն A մատրիցի համապատասխանաբար i-րդ տողն ու j-րդ սյունակն են:

Այսպիսով, $\Gamma_A=(M,N,A)$ մատրիցային խաղից մենք եկանք նոր՝ $\overline{\Gamma}_A=(X,Y,H)$ խաղին, որտեղ X-ը և Y-ը խառը վարվելակերպերի բազմությունները են Γ_A խաղում, իսկ H-ը՝ շահումի ֆունկցիան խառը վարվելակերպերով: $\overline{\Gamma}_A$ խաղը կանվանենք Γ_A խաղի խառը ընդլայնում: Γ_A խաղը $\overline{\Gamma}_A$ խաղի ենթախաղն է, այսինքն՝ $\Gamma_A\subset\overline{\Gamma}_A$:

4.3. Սահմանում: $\overline{\Gamma}_A$ խաղում (x^*,y^*) իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, իսկ $v=H(x^*,y^*)$ թիվը $\overline{\Gamma}_A$ խաղի արժեքն է, եթե բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար՝

$$H(x,y^*)\leq H(x^*,y^*)\leq H(x^*,y):$$

3.2 կետի թեորեմից հետևում է, որ հավասարակշռության իրավիճակին պատկանող x^* և y^* վարվելակերպերը լավագույնն են: Ավելին, 3.4 կետի թեորեմին համաձայն, x^* և y^* վարվելակերպերը, համապատասխանաբար, մաքսիմինային և մինիմաքսային վարվելակերպեր են, քանի որ (3.11)-ում արտաքին էքստրեմումները հավասար են (H(x,y) ֆունկցիան անընդհատ է): (X և Y կոմպակտ բազմությունների վրա):

3.3 կետում ցույց էր տրված այնպիսի երկու խաղերի վարվելակերպային համարժեքությունը, որոնք տարբերվում են միայն շահումների հաշվման սկզբնակետով, ինչպես նաև դրանց չափման մասշտաբով (մասշտաբի վերաբերյալ լեմը): Պարզվում է, որ եթե Γ_A և $\Gamma_{A'}$ երկու մատրիցային խաղերը գտնվում են այդ լեմի պայմաններում, ապա դրանց խառն ընդլայնումները վարվելակերպորեն համարժեք են: Ձևականորեն այդ փաստը հաստատվում է հետևյալ պնդումով.

Լեմ: Դիցուք՝ Γ_A-ն և $\Gamma_{A'}$-ը երկու մատրիցային (m×n) խաղեր են, ընդ որում

$$A'=\alpha A+B,\ \alpha>0,\ \alpha=\text{const},$$

իսկ B-ն՝ միևնույն β տարրերով մատրից է, այսինքն՝ $\beta_{ij}=\beta$ բոլոր i,j-երի համար: Այդ դեպքում՝

$$Z(\overline{\Gamma}_{A'})=Z(\overline{\Gamma}_A),\ \ \overline{v}_{A'}=\alpha\overline{v}_A+\beta,$$

որտեղ $\overline{\Gamma}_{A'}$-ը և $\overline{\Gamma}_A$-ն համապատասխանաբար $\Gamma_{A'}$ և Γ_A խաղերի խառն ընդլայնումներն են, իսկ $\overline{v}_{A'}$, $\overline{v}_A$ թվերը՝ $\overline{\Gamma}_{A'}$ և $\overline{\Gamma}_A$ խաղերի արժեքները:

Ապացուցում: A և A′ մատրիցները երկուսն էլ (m×n) չափսերի են, ուստի $\Gamma_{A'}$ և Γ_A խաղերում խառը վարվելակերպերի բազմությունները համընկնում են: Ցույց տանք, որ ցանկացած (x,y) խառը իրավիճակում ճշմարիտ է

$$H'(x,y)=\alpha H(x,y)+\beta \tag{4.8}$$

հավասարությունը, որտեղ H′-ը և H-ը առաջին խաղացողի շահումներն են համապատասխանաբար $\overline{\Gamma}_{A'}$ և $\overline{\Gamma}_A$ խաղերում:

Իրոք, բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$-ների համար ունենք՝

$$H'(x,y)=xA'y=\alpha(xAy)+xBy=\alpha H(x,y)+\beta:$$

Մասշտաբի վերաբերյալ լեմից հետևում է, որ՝

$$Z\,\overline{\Gamma}_{A'}=Z\,\overline{\Gamma}_A,\ \ v_{A'}=\alpha v_A+\beta:$$

Օրինակ 3: Ստուգենք, որ $x^*=(1/2,\ 1/4,\ 1/4)$ և $y^*=(1/2,\ 1/4,\ 1/4)$ վարվելակերպերը լավագույն են, իսկ v=0՝ $\overline{\Gamma}_A$-ն մատրիցային խաղի արժեքն է, որտեղ՝

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}:$$

Պարզեցնենք A մատրիցը (ուղեսցի առավելագույն թվով զրոներ ստանանք)։ A մատրիցի բոլոր տարրերին ավելացնելով մեկ, կստանանք

$$A'=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&4\\0&4&0\end{pmatrix}$$

մատրիցը։ H′ մատրիցի յուրաքանչյուր տարրը բաժանենք 2-ի վրա։ Նոր մատրիցը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$A''=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}:$$

Ըստ լեմի՝ խաղերի արժեքները կապված են

$$v_{A''}=1/2v_{A'}=1/2(v_A+1)$$

հավասարությամբ։

Այդպիսով, հարկավոր է ստուգել, որ $\Gamma_{A''}$ խաղի արժեքը հավասար է 1/2։ Իրոք, $H(x^*,y^*)=x^*A''y^*=1/2$։

Մյուս կողմից, ցանկացած $y\in Y$, $y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ վարվելակերպերի համար ունենք՝ $H(x^*,y)=1/2\eta_1+1/2\eta_2+1/2\eta_3=1/2\cdot 1=1/2$, իսկ բոլոր $x\in X$, $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ համար՝ $H(x,y^*)=1/2\xi_1+1/2\xi_2+1/2\xi_3=1/2\cdot 1=1/2$։ Հետևաբար, նշված x^*,y^* վարվելակերպերը լավագույն են, իսկ $v_A=0$։

5. Մատրիցային խաղի լուծման գոյությունը խառը վարվելակերպերի դասում

5.1. Ապացուցենք, որ ցանկացած մատրիցային խաղ լիովին որոշված է խառը վարվելակերպերի դասում։

Թեորեմ: Ցանկացած մատրիցային խաղ ունի խառը վարվելակերպերով հավասարակշռության իրավիճակ։

Ապացույց։ Դիցուք՝ Γ_A-ն կամայական $(m\times n)$ խաղ է $A=\{\alpha_{ij}\}$ խիստ դրական մատրիցով, այսինքն՝ $\alpha_{ij}>0$ բոլոր $i=\overline{1,m}$ և $j=\overline{1,n}$ համար։ Ցույց տանք, որ այդ դեպքում թեորեմը ճիշտ է։

Դրա համար դիտարկենք գծային ծրագրման հետևյալ լրացուցիչ խնդիրը.

$$\min xu,\ xA\geq w,\ x\geq 0 \tag{5.1}$$

և դրա երկակի խնդիրը՝

$$\max yw,\ Ay\leq u,\ y\geq 0, \tag{5.2}$$

որտեղ $u=(1,1,\ldots,1)\in R^m$, $w=(1,\ldots,1)\in R^n$։

Քանի որ A մատրիցը խիստ դրական է, ապա գոյություն ունի այնպիսի $x>0$ վեկտոր, որի համար $xA\geq w$, այսինքն՝ (5.1) խնդիրը թույլատրելի է։

Մյուս կողմից, y=0 վեկտորը (5.2) խնդրի թույլատրելի լուծումն է: Ուստի, ըստ գծային ծրագրման երկակիության թեորեմի, (5.1) և (5.2) խնդիրները երկուսն էլ ունեն համապատասխանաբար $\bar{x}$ և $\bar{y}$ լավագույն լուծումները, ընդ որում՝

$$\bar{x}u = \bar{y}u = \theta > 0 : \qquad (5.3)$$

Դիտարկենք $x^{*} = \bar{x}/\theta$ և $y^{*} = \bar{y}/\theta$ վեկտորները և ցույց տանք, որ դրանք $\bar{\Gamma}_A$ խաղում համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների լավագույն վարվելակերպերն են, ընդ որում խաղի արժեքը հավասար է $1/\theta$-ի:

Իրոք, (5.3)-ից ունենք՝

$$x^{*}u = (\bar{x}u)/\theta = (\bar{y}w)/\theta = y^{*}w = 1,$$

իսկ քանի որ (5.1) և (5.2) խաղերի համար $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորները թույլատրելի են, ապա

$$x^{*} = \bar{x}/\theta \geq 0,$$

$$y^{*} = \bar{y}w/\theta ,$$

այսինքն՝ x^{*}-ը և y^{*}-ը առաջին և երկրորդ խաղացողների խառը վարվելակերպերն են Γ_A խաղում:

Հաշվենք առաջին խաղացողի շահումը (x^{*},y^{*}) իրավիճակում՝

$$H(x^{*},y^{*}) = x^{*}Ay^{*} = (\bar{x}A\bar{y})/\theta^2 : \qquad (5.4)$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\bar{x}$ և $\bar{y}$ վեկտորները թույլատրելի են (5.1) և (5.2) խաղերի համար, և (5.3) հավասարությունից ունենք՝

$$\theta = w\bar{y} \leq (\bar{x}A)\bar{y} = \bar{x}(A\bar{y}) \leq \bar{x}u = \theta : \qquad (5.5)$$

Այսպիսով, $\bar{x}A\bar{y} = \theta$ և (5.4)-ից ստանում ենք՝

$$H(x^{*},y^{*}) = 1/\theta : \qquad (5.6)$$

Դիցուք՝ $x \in X$-ը և $y \in Y$-ը՝ առաջին և երկրորդ խաղացողների կամայական խառը վարվելակերպերն են: Այդ դեպքում՝

$$H(x^{*},y) = (x^{*}A)y = (\bar{x}A)y/\theta \geq (wy)/\theta = 1/\theta , \qquad (5.7)$$

$$H(x,y^{*}) = x(Ay^{*}) = x(A\bar{y})/\theta \leq (xu)/\theta = 1/\theta : \qquad (5.8)$$

Համեմատելով (5.6)-(5.8) առնչությունները, ստանում ենք, որ (x^{*},y^{*}) իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, իսկ $1/\theta$-ն խիստ դրական մատրիցով Γ_A խաղի արժեքն է:

Այժմ դիտարկենք $A' = \{a'_{ij}\}$ կամայական մատրիցով $\Gamma_{A'}$ $(m \times n)$ խաղը: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\beta > 0$ հաստատուն, որ $A = A' + B$ մատրիցը խիստ դրական է, որտեղ $B = \{\beta_{ij}\}$-ն $(m \times n)$ մատրից է, $\beta_{ij} = \beta$, $i = \overline{1,m}$ և $j = \overline{1,n}$: Γ_A խաղում գոյություն ունի խառը վարվելակերպերով (x^{*},y^{*}) հավասարակշռության իրավիճակ, իսկ խաղի արժեքը հավասար է $v_A = 1/\theta$, որտեղ θ-ն որոշվում է այնպես, ինչպես (5.3)-ում:

4.3 կետի լեմից հետևում է, որ (x^*,y^*)-ը հավասարակշռության իրավիճակ է խառը վարվելակերպերով $\Gamma_{A'}$ խաղում՝ $(x^*,y^*)\in Z(\overline{\Gamma}_{A'})$, իսկ խաղի արժեքը հավասար է՝

$$v_{A'} = v_A - \beta = 1/\theta - \beta :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Խառը վարվելակերպերի դասում լուծման գոյության փաստը նշանակում է, որ մաքուր վարվելակերպերի հավանականային ընտրությամբ. խաղացողները միշտ կարող են վերացնել այն անորոշությունը, որն առկա էր խաղն սկսելուց առաջ: Հարկ է նշել, որ ոչ բոլոր հակամարտ խաղերում գոյություն ունի խառը վարվելակերպերով լուծում: Գոյություն ունեն անվերջ թվով մաքուր վարվելակերպերով հակամարտ խաղեր, որոնք խառը վարվելակերպերով լուծում չունեն:

Նշենք նաև, որ թեորեմի ապացուցումը կառուցողական է, քանի որ մատրիցային խաղի լուծումը հանգեցնում է գծային ծրագրման խնդրին, ընդ որում $\Gamma_{A'}$ խաղի լուծման ալգորիթմը հետևյալն է.

1. Ըստ A' մատրիցի կառուցում ենք $A=A'+B$ խիստ դրական մատրիցը, որտեղ $B=\{\beta_{ij}\}$, $\beta_{ij}=\beta>0$:

2. Լուծում ենք (5.1) և (5.2) գծային ծրագրման խնդիրները: Գտնում ենք $\overline{x}$ և $\overline{y}$ վեկտորները և θ թիվը [տե՛ս (5.3)]:

3. Կառուցում ենք առաջին և երկրորդ խաղացողների լավագույն վարվելակերպերը՝

$$x^* = \overline{x}/\theta , \quad y^* = \overline{y}/\theta :$$

4. Հաշվում ենք $\Gamma_{A'}$ խաղի արժեքը՝

$$v_{A'} = 1/\theta - \beta :$$

Օրինակ 4: Դիտարկենք

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

մատրիցով որոշվող մատրիցային Γ_A խաղը: Դրան համապատասխան՝ գծային ծրագրման խնդիրները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} &\xi_1+\xi_2\to \min, && \eta_1+\eta_2\to \max,\\ &4\xi_1+2\xi_2\ge 1, && 4\eta_1\le 1,\\ &3\xi_2\ge 1, && 2\eta_1+3\eta_2\le 1,\\ &\xi_1\ge 0,\ \xi_2\ge 0, && \eta_1\ge 0,\ \eta_2\ge 0: \end{aligned}$$

Նշենք, որ այս խնդիրները կարող են գրվել համարժեք տեսքով՝ հավասարությունների տեսքով սահմանափակումների համար՝

$$\begin{aligned} &\xi_1+\xi_2\to \min, && \eta_1+\eta_2\to \max,\\ &4\xi_1+2\xi_2-\xi_3 = 1, && 4\eta_1+\eta_3 = 1,\\ &3\xi_2-\xi_4 = 1, && 2\eta_1+3\eta_2+\eta_4 = 1,\\ &\xi_1 \ge 0,\ \xi_2 \ge 0,\ \xi_3 \ge 0,\ \xi_4 \ge 0, && \eta_1\ge 0,\ \eta_2\ge 0,\ \eta_3\ge 0,\ \eta_4\ge 0: \end{aligned}$$

Այսպիսով, գծային ծրագրման խնդիրների լուծման ցանկացած եղանակ կարող է հարմարեցվել մատրիցային խաղեր լուծելու համար: Այդպիսի խնդիրները լուծելու համար ամենահարմարը սիմպլեքս եղանակն է:

5.2. Գծային ծրագրման խնդիրը որոշակի իմաստով համարժեք է Γ_A մատրիցային խաղին: Իրոք, դիտարկենք գծային ծրագրման հետևյալ ուղիղ և երկակի խնդիրները.

$$\begin{aligned} &xu \to \min, \\ &xA \geq w, \\ &x \geq 0, \qquad\qquad (5.9) \\ &yw \to \max, \\ &Ay \leq u, \\ &y \geq 0: \qquad\qquad (5.10) \end{aligned}$$

Դիցուք (5.9) և (5.10) խնդիրների լավագույն լուծումների բազմությունները, համապատասխանաբար, $\overline{X}$ և $\overline{Y}$ բազմություններն են:

Նշանակենք՝

$$(1/\theta)\overline{X} = \{\overline{x}/\theta \mid \overline{x} \in \overline{X}\}, \quad (1/\theta)\overline{Y} = \{\overline{y}/\theta \mid \overline{y} \in \overline{Y}\}, \quad \theta > 0:$$

Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ_A-ն A դրական մատրիցով (բոլոր տարրերը դրական են) (m×n) խաղ է, և տրված են գծային ծրագրման (5.9) և (5.10) երկու երկակի խնդիրները: Այդ դեպքում ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

1. Գծային ծրագրման երկու խնդիրներն էլ ունեն լուծում ($\overline{X} \neq \varnothing$ և $\overline{Y} \neq \varnothing$), ընդ որում՝

$$\theta = \min_x xu = \max_y yw:$$

2. Γ_A խաղի v_A արժեքը հավասար է՝ $v_A = 1/\theta$, իսկ

$$x^* = \overline{x}/\theta, \quad y^* = \overline{y}/\theta$$

վարվելակերպերը լավագույն են, որտեղ (5.9) ուղիղ խնդրի լուծումը $\overline{x} \in \overline{X}$ է, իսկ (5.10) երկակի խնդրի լուծումը $\overline{y} \in \overline{Y}$ է:

3. Խաղացողների ցանկացած $x^* \in X^*$ և $y^* \in Y^*$ լավագույն վարվելակերպերը կարող են կառուցվել նշված եղանակով, այսինքն՝

$$X^* = (1/\theta)\overline{X}, \quad Y^* = (1/\theta)\overline{Y}:$$

Ապացուցում: 1 և 2 պնդումները, ինչպես նաև $(1/\theta)\overline{X} \subset X^*$, $(1/\theta)\overline{Y} \subset Y^*$ ներառումները անմիջապես հետևում են 5.1 կետի թեորեմի ապացուցումից:

Ցույց տանք հակառակ ներառումը: Դրա համար դիտարկենք

$$x^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*) \text{ և } \overline{x} = \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_m$$

վեկտորները, որտեղ $\overline{x} = \theta x^*$:

Այդ դեպքում բոլոր $j \in N$ համար ունենք՝

$$\overline{x}a^j = \theta x^* a^j \geq \theta(1/\theta) = 1,$$

ընդ որում $\bar{x} \geq 0$, քանի որ $\theta > 0$ և $x^* \geq 0$: Ուստի $\bar{x}$-ը (5.9) խնդրի թույլատրելի լուծումն է:

Հաշվենք նպատակային ֆունկցիայի արժեքը՝

$$\bar{x}u = \theta x^* u = \theta = \min_x xu\ ,$$

այսինքն՝ $\bar{x} \in \bar{X}$ վեկտորը (5.9) խնդրի լավագույն լուծումն է:

Համանմանորեն ապացուցվում է

$$Y^* \subset (1/\theta)\bar{Y}$$

ներառումը: Թեորեմն ապացուցված է:

6. Խաղի արժեքի և լավագույն վարվելակերպերի հատկությունները

6.1. Դիտարկենք լավագույն վարվելակերպերի հատկությունները, որոնք մի շարք դեպքերում օգնում են գտնելու խաղի արժեքը և հավասարակշռության իրավիճակները:

Դիցուք՝ (x^*,y^*)-ը խառը վարվելակերպերով որևէ իրավիճակ է Γ_A խաղում ($(x^*,y^*) \in X \times Y$): Պարզվում է, որ (x^*,y^*) իրավիճակի հավասարակշռությունը ստուգելու համար բավարար է (4.7) անհավասարությունն ստուգել ոչ թե բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$-ների համար, այլ միայն $i \in M$ և $j \in N$-ի համար, քանի որ ճիշտ է հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ: Որպեսզի (x^*,y^*) իրավիճակը Γ_A խաղում հավասարակշռված լինի, իսկ $v = H(x^*,y^*)$ թիվը լինի Γ_A խաղի արժեքը, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ անհավասարությունների ճշմարտությունը՝

$$H(i,y^*) \leq H(x^*,y^*) \leq H(x^*,j) \qquad (6.1)$$

բոլոր $i \in M$ և $j \in N$-երի համար:

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Դիցուք՝ (x^*,y^*)-ը հավասարակշռության իրավիճակն է Γ_A խաղում: Այդ դեպքում՝

$$H(x,y^*) \leq H(x^*,y^*) \leq H(x^*,y)$$

բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ համար: Հետևաբար, մասնավորապես, $u_i \in X$ և $w_j \in Y$ համար ունենք՝

$$H(i,y^*) = H(u_i,y^*) \leq H(x^*,y^*) \leq H(x^*,w_j) = H(x^*,j)$$

բոլոր $i \in M$ և $j \in N$ համար:

Բավարարություն: Դիցուք՝ (x^*,y^*)-ը խառը վարվելակերպերի զույգ է, որի համար կատարվում են (6.1) անհավասարությունները: Դիցուք՝ նաև, $x = (\xi_1,\ldots,\xi_m) \in X$ և $y = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in Y$ վեկտորները համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների կամայական վարվելակերպերն են: (6.1) առաջին և երկրորդ անհավասարությունները բազմապատկելով համապատասխանաբար ξ_i-ով և η_j-ով և գումարելով ստանում ենք՝

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i H(i,y^*)\le H(x^*,y^*)\sum_{i=1}^{m}\xi_i = H(x^*,y^*), \tag{6.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j H(x^*,j)\ge H(x^*,y^*)\sum_{j=1}^{n}\eta_j = H(x^*,y^*), \tag{6.3}$$

ընդ որում ունենք՝

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i H(i,y^*) = H(x,y^*), \tag{6.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j H(x^*,j) = H(x^*,y)\,: \tag{6.5}$$

(6.4) և (6.5) տեղադրելով արտահայտությունները համապատասխանաբար (6.2) և (6.3) անհավասարությունների մեջ և հաշվի առնելով $x\in X$ և $y\in Y$ վարվելակերպերի կամայական լինելը, ստանում ենք (x^*,y^*) իրավիճակի հավասարակշռությունը:

Հետևանք 1: Դիցուք՝ (i^*,j^*) զույգը հավասարակշռության իրավիճակ է Γ_A խաղում: Այս դեպքում (i^*,j^*) իրավիճակը հավասարակշռված է նաև $\overline{\Gamma}_A$ խաղում:

Օրինակ 5: (Ճեղման խնդրի լուծումը): Ենթադրվում է, որ խաղացողները ընտրում են i և j ամբողջ թվերը 1-ի և n-ի միջև, իսկ առաջին խաղացողը շահում է $\alpha_{ij}=|i-j|$, այսինքն i և j թվերի միջև եղած հեռավորությունը:

Դիցուք՝ առաջին խաղացողն ընտրում է $x^*=(1/2,0,\ldots,0,1/2)$ վարվելակերպը: Այդ դեպքում՝

$$H(x^*,j) = 1/2|1-j|+1/2|n-j| = 1/2(j-1)+1/2(n-j) = n-1/2$$

բոլոր $1\le j\le n$-երի համար:

ա) Դիցուք՝ $n=2k+1$ թիվը կենտ է: Այդ դեպքում երկրորդ խաղացողն ունի $j^*=(n+1)/2=k+1$ մաքուր վարվելակերպ այնպիսին, որ՝

$$a_{ij^*} = |i-(n+1)/2| = |i-k-1|\le k = (n-1)/2$$

բոլոր $i=1,2,\ldots,n$-երի համար:

բ) Ենթադրենք, որ $n=2k$ թիվը զույգ է: Այդ դեպքում երկրորդ խաղացողն ունի այնպիսի $y^*=(0,0,\ldots,1/2,1/2,0,\ldots,0)$ վարվելակերպ, որտեղ $\eta_k^* = 1/2$, $\eta_{k+1}^* = 1/2$, $\eta_j=0$, $j\ne k+1$, $j\ne k$, որ

$$H(i,y^*) = 1/2|i-k|+1/2|i-k-1|\le 1/2k+1/2(k-1) = (n-1)/2$$

բոլոր $1\le i\le n$-երի համար:

Այժմ, օգտագործելով թեորեմը, դժվար չէ համոզվել, որ խաղի արժեքը հավասար է $v=(n-1)/2$, առաջին խաղացողի լավագույն վարվելակերպը x^* է, իսկ երկրորդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպը հավասար է j^*-ի, եթե $n=2k+1$, և y^*-ի, եթե $n=2k$:

Բերենք մի շարք արդյունքներ, որոնք 6.1 կետի թեորեմի անմիջական հետևանքներն են:

Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ_A-ն $(m\times n)$ խաղ է: Որպեսզի (x^*, y^*) խառը վարվելակերպով իրավիճակը հավասարակշիռ լինի $\overline{\Gamma}_A$ խաղում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\max_{1\le i\le m} H(i, y^*) = \min_{1\le j\le n} H(x^*, j) : \qquad (6.6)$$

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Եթե (x^*,y^*) իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, ապա (6.1) կետի թեորեմի համաձայն՝

$$H(i,y^*) \le H(x^*, y^*) \le H(x^*, j)$$

բոլոր $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$-երի համար: Ուստի՝

$$H(i,y^*) \le H(x^*, j)$$

ցանկացած i-ի և j-ի համար: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ որ (6.6)-ը չի կատարվում: Այդ դեպքում՝

$$\max_{1\le i\le m} H(i, y^*) < \min_{1\le j\le n} H(x^*, j) :$$

Հետևաբար, ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները.

$$H(x^*,y^*) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* H(i, y^*) \le \max_{1\le i\le m} H(i, y^*) <$$

$$< \min_{1\le j\le n} H(x^*, j) \le \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* H(x^*, j) = H(x^*, y^*) :$$

Ստացված հակասությունն ապացուցում է թեորեմի պնդման անհրաժեշտությունը:

Բավարարություն: Դիցուք՝ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ խառը վարվելակերպերի զույգն այնպիսին է, որ $\max_i H(i, \tilde{y}) < \min_j H(\tilde{x}, j)$: Ցույց տանք, որ այս դեպքում $(\tilde{x}, \tilde{y})$ իրավվիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է Γ_A խաղում:

Ճշմարիտ են հետևյալ առնչությունները.

$$\min_{1\le j\le n} H(\tilde{x}, j) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\eta}_j H(\tilde{x}, j) = H(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i H(i, \tilde{y}) \le \max_{1\le i\le m} H(i, \tilde{y}) :$$

Ուստի ունենք՝

$$H(i, \tilde{y}) \le \max_i H(i, \tilde{y}) = H(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min_j H(\tilde{x}, j) \le H(\tilde{x}, j)$$

բոլոր $1\le i\le m$-երի և $1\le j\le n$-երի համար և, ըստ 6.1 կետի թեորեմի, $(\tilde{x}, \tilde{y})$-ը հավասարակշռության իրավիճակ է Γ_A խաղում: Ապացուցումից հետևում է, որ (6.6)-ի թվերից յուրաքանչյուրը հավա-սար է խաղի արժեքին:

6.3. Թեորեմ: $\overline{\Gamma}_A$ մատրիցային խաղի համար ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$\max_x \min_y H(x, j) = v_A = \min_y \max_x H(i, y) \qquad (6.7)$$

Ընդ որում (6.7)-ի էքստրեմումները ըստ x և y խառը վարվելակերպերի հասանելի են խաղացողների լավագույն վարվելակերպերի վրա:

Սույն թեորեմը 3.4 և 6.2 կետերի թեորեմների հետևանքն է, և դրա ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին:

6.4. Թեորեմ: Γ_A մատրիցային խաղում խաղացողների լավագույն խառը վարվելակերպերի X^* և Y^* բազմությունները ուռուցիկ բազմանիստներ են:

Ապացուցում: 6.1. կետի թեորեմի համաձայն X^* բազմությունը անհավասարումների հետևյալ համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունն է՝

$$xa^j \geq v_A, \quad j \in N,$$
$$xu = 1, \quad x \geq 0,$$

որտեղ $u=(1,\ldots,1) \in K^m$, v_A-ն խաղի արժեքն է: Այսպիսով, X^*-ը ուռուցիկ բազմանիստ բազմություն է: Մյուս կողմից, $X^* \subset X$, որտեղ X-ը ուռուցիկ բազմանիստ է: Ուստի X^*-ը սահմանափակ է: Հետևաբար, X^* բազմությունը ուռուցիկ բազմանիստ է:

Համանմանորեն ապացուցվում է, որ Y^*-ը ուռուցիկ բազմանիստ է:

6.5. Որպես 6.3 կետի թեորեմի օրինակ, բերենք այն խաղերի երկրաչափական լուծումը, որտեղ խաղացողներից մեկն ունի երկու մաքուր վարվելակերպ ($(2\times n)$ և $(m\times n)$ խաղեր): Գրականության մեջ այդպիսի մոտեցումը նաև անվանում են խաղերի լուծման գրաֆավերլուծական եղանակ: Գրաֆավերլուծական եղանակների հիմքում ընկած է այն, որ

$$v_A = \max_x \min_j H(x, j) = \min_y \max_i H(i, y)$$

հավասարության արտաքին էքստրեմումները հասանելի են լավագույն վարվելակերպերի վրա:

Օրինակ 6: ($(2\times n)$ խաղ): Դիտարկենք մի խաղ, որտեղ առաջին խաղացողն ունի երկու վարվելակերպ, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ n հատ վարվելակերպ: Մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}:$$

Դիցուք՝ առաջին խաղացողն ընտրել է $x=(\xi, 1-\xi)$ խառը վարվելակերպը, իսկ երկրորդ խաղացողը՝ $j \in N$ մաքուր վարվելակերպը: Այդ դեպքում առաջին խաղացողի շահումը (x,j) իրավիճակում հավասար է՝

$$H(x,j) = \xi\alpha_{1j} + (1-\xi)\alpha_{2j}: \qquad (6.8)$$

Երկրաչափորեն սա ուղիղ գիծ է (ξ, H) կոորդինատներում: Այդպիսով, յուրաքանչյուր j մաքուր վարվելակերպին համապատասխանում է իր ուղիղը:

$$H(\xi) = \min_j H(x, j)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը (6.8) ուղիղների ընտանիքի ստորին ընդգրկողն է: Այդ ֆունկցիան գոգավոր է՝ որպես գոգավոր (տվյալ դեպքում՝ գծային) ֆունկցիաների ստորին ընդգրկող: Այն ξ^* կետը, որտեղ $H(\xi)$ ֆունկցիան իր մաքսիմումին է հասնում ըստ $\xi \in [0,1]$, և տալիս է պահանջվող $x^* = (\xi^*, 1-\xi^*)$ լավագույն լուծումը և $v_A = H(\xi^*)$՝ խաղի արժեքը:

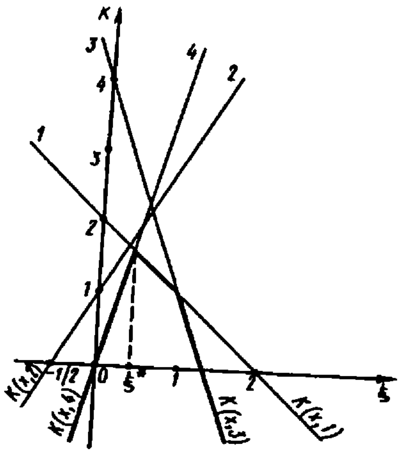
Որոշակիության համար դիտարկենք

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1&4\\2&1&4&0\end{pmatrix}$$

մատրիցով խաղը: Յուրաքանչյուր j=1,2,3,4-ի համար ունենք. $H(x,1)=-\xi+2$, $H(x,2)=2\xi+1$, $H(x,3)=-3\xi+4$, $H(x,4)=4\xi$: $\{H(x,j)\}$ ուղիղների ընտանիքի ընդ-գըրկող, ինչպես նաև իրենք՝ $H(x,j)$, j=1,2,3,4 ուղիղները պատկերված են 1-ին գծանկարում: $H(\xi)$ ֆունկցիայի $H(\xi^*)$ մաքսիմումը գտնվում է առաջին և չորրորդ ուղիների հատման կետում: Այսպիսով, ξ^*-ը հետևյալ հավասար-ման լուծումն է՝

$$4\xi^*=-\xi^*+2=v_A:$$

Այստեղ ստանում ենք առաջին խաղացողի $x^*=(2/5,3/5)$ լավագույն վարվե-լակերպը և խաղի արժեքը՝ $v_A=8/5$: Երկրորդ խաղացողի լավագույն վարվե-լակերպը գիտենք հետևյալ նկատառումներից: Նկատենք, որ դիտարկվող դեպքում՝ $H(x^*,1)=H(x^*,4)=v_A=8/5$:



Գծ. 1

Լավագույն $y^*=(\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*,\eta_4^*)$ վարվելակերպի համար պետք է բավա-րարվի

$$v_A=H(x^*,y^*)=\eta_1^*H(x^*,1)+\eta_2^*H(x^*,2)+\eta_3^*H(x^*,3)+\eta_4^*H(x^*,4)$$

հավասարությունը: Ընդ որում՝ $H(x^*,2)>8/5$, $H(x^*,3)>8/5$, հետևաբար՝ $\eta_2^*,\eta_3^*=0$, իսկ η_1^*-ը, η_4^*-ը կարելի է գտնել (6.1) պայմանից՝

$$\eta_1^*+4\eta_4^*=8/5,\ 2\eta_1^*=8/5:$$

Այսպիսով, $\eta_1^*=4/5$ և $\eta_4^*=1/5$ և երկրորդ խաղացողի լավագույն վարվե-լակերպը հավասար է՝ $y^*=(4/5,0,0,1/5)$:

Օրինակ 7: (($m\times 2$) խաղ): Այս օրինակում երկրորդ խաղացողն ունի երկու մաքուր վարվելակերպ, իսկ առաջին խաղացողը՝ m հատ մաքուր վարվելակերպ: Ուստի A մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}:$$

Այս խաղի վերլուծությունը կատարվում է համամասնորեն: Իրոք, դիցուք՝ $y=(\eta,1-\eta)$-ն երկրորդ խաղացողի կամայական խառը վարվելակերպն է: Այդ դեպքում, առաջին խաղացողի շահումը (i,y) իրավիճակում հավասար է՝

$$H(i,y)=\alpha_{ij}\eta+\alpha_{i2}(1-\eta)=(\alpha_{i1}-\alpha_{i2})\eta+\alpha_{i2}:$$

$H(i,y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ուղիղ գիծ է: Դիտարկենք այդ ուղիղների վերին ընդգրկողը, այսինքն՝

$$H(\eta)=\max_i[(a_{i1}-a_{i2})\eta+a_{i2}]$$

ֆունկցիան: $H(\eta)$ ֆունկցիան ուռուցիկ ֆունկցիա է (որպես ուռուցիկ ֆունկցիաների ընտանիքի վերին ընդգրկող):

$H(\eta)$ ֆունկցիայի մինիմումի η^* կետը տալիս է $y^*=(\eta^*,1-\eta^*)$ լավագույն վարվելակերպը և խաղի արժեքը՝

$$v_A=H(\eta^*)=\min_{\eta\in[0,1]}H(\eta):$$

6.6. Բերենք մի արդյունք, որն օգտակար է խաղի լուծումը փնտրելիս:

Թեորեմ: Դիցուք՝ $x^*=(\xi_1^*,\dots,\xi_m^*)$ և $y^*=(\eta_1^*,\dots,\eta_n^*)$ վեկտորները լավագույն վարվելակերպերն են $\overline{\Gamma}_A$ խաղում և v_A-ն խաղի արժեքն է: Այդ դեպքում, ցանկացած i-ի համար, որի դեպքում $H(i,y^*)<v_A$, ճիշտ է $\xi_i^*=0$ հավասարությունը, իսկ ցանկացած j-ի դեպքում, որի համար $v_A<H(x^*,j^*)$, ճիշտ է $\eta_j^*=0$ հավասարությունը:

Ընդհակառակը, եթե $\xi_i^*>0$, ապա $H(i,y^*)=v_A$, իսկ եթե $\eta_j^*>0$, ապա $H(x^*,j)=v_A$:

Ապացուցում: Ենթադրենք, որ որևէ $i_0\in M$-ի համար՝ $H(i_0,y^*)<v_A$, ընդ որում $\xi_{i_0}^*\neq 0$: Այդ դեպքում ստանում ենք, որ

$$H(i_0,y^*)\xi_{i_0}^*<v_A\xi_{i_0}^*:$$

Բոլոր $i\in M$-երի համար $H(i,y^*)\le v_A$, ուստի՝

$$H(i,y^*)\xi_i^*\le v_A\xi_i^*:$$

Հետևաբար, $H(x^*,y^*)<v_A$, ինչը հակասում է այն հանգամանքին, որ v_A-ն խաղի արժեքն է: Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցվում է համանմանորեն:

Սահմանում: Առաջին (երկրորդ) խաղացողի $i \in M (j \in N)$ մաքուր վարվելակերպը կոչվում է էական կամ գործուն վարվելակերպ, եթե գոյություն ունի $x^* = (\xi_1^*, ..., \xi_m^*)(y^* = (\eta_1^*, ..., \eta_n^*))$ լավագույն վարվելակերպ, որի համար $\xi_i^* > 0$ $(\eta_j^{**} > 0)$:

Այս սահմանումից և վերջին թեորեմից հետևում է, որ Γ_A խաղում առաջին խաղացողի ցանկացած i էական վարվելակերպի և երկրորդ խաղացողի $y^* \in Y^*$ լավագույն վարվելակերպի համար՝

$$H(i, y^*) = a_{iy}^* = v_A:$$

Համանման հավասարությունը ճիշտ է երկրորդ խաղացողի ցանկացած էական $j \in N$ և առաջին խաղացողի ցանկացած $x^* \in X^*$ լավագույն վարվելակերպի համար՝

$$H(x^*, j) = a^j x^* = v_A:$$

Եթե $i \in M$ մաքուր վարվելակերպի և $y \in Y$ խառը վարվելակերպի համար ճիշտ է $a_{iy} = v_A$, ապա ասում են, որ i վարվելակերպը y խառը վարվելակերպը հավասարակշռում է Γ_A խաղում:

Այսպիսով, թեորեմը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ: Եթե խաղացողի մաքուր վարվելակերպը էական է, ապա այն հավասարակշռում է հակառակորդի ցանկացած լավագույն վարվելակերպը:

Լավագույն վարվելակերպի սպեկտրի իմացությունը պարզեցնում է խաղի լուծումը գտնելը: Իրոք, դիցուք՝ M_{x^*}-ը առաջին խաղացողի x^* օպտիմալ վարվելակերպի սպեկտրն է: Այդ դեպքում երկրորդ խաղացողի յուրաքանչյուր $y^* = (\eta_1^*, ..., \eta_n^*)$ լավագույն վարվելակերպը և խաղի v արժեքը բավարարում են անհավասարությունների հետևյալ համակարգին.

$$a_{iy}^* = v, \ i \in M_{x^*},$$

$$a_{iy}^* \leq v, \ i \in M \backslash M_{x^*},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* = 1, \ \eta_j^* \geq 0, j \in N:$$

Ընդ որում ցանկացած x^* լավագույն վարվելակերպի M_{x^*} սպեկտրի մեջ կարող են պատկանել միայն էական վարվելակերպերը:

7. Վարվելակերպերի գերակայություն

Մատրիցային խաղի լուծման բարդությունն աճում է A մատրիցի չափսերն աճելու հետ մեկտեղ: Բացի այդ, մի շարք դեպքերում շահումների մատրիցի վերլուծությունը թույլ է տալիս եզրակացնել, որ որոշ մաքուր վարվելակերպեր չեն պատկանում լավագույն վարվելակերպի սպեկտրին: Դա հանգեցնում է սկզբնական մատրիցի փոխարինմանը ավելի փոքր չափսերի մատրիցով:

7.1. Սահմանում: Ասում են, որ Γ_A մատրիցային ($m\times n$) խաղում առաջին խաղացողի x' վարվելակերպը գերակայում է x'' վարվելակերպին, եթե երկրորդ խաղացողի բոլոր $j\in\{1,...,n\}$-երը մաքուր վարվելակերպերի համար բավարարում են

$$x'a^j\geq x''a^j \qquad (7.1)$$

անհավասարություններին:

Համանմանորեն, երկրորդ խաղացողի y' վարվելակերպը իր y'' վարվելակերպին գերակայում է, եթե առաջին խաղացողի բոլոր $i\in\{1,...,m\}$-երի մաքուր վարվելակերպերի համար՝

$$a_iy'\leq a_iy'': \qquad (7.2)$$

Եթե (7.1), (7.2) անհավասարությունները կատարվում են որպես խիստ անհավասարություններ, ապա խոսում են խիստ գերակայության մասին: Վարվելակերպերի գերակայության մասնավոր դեպքը դրանց համարժեքությունն է:

Սահմանում: Առաջին խաղացողի x' և x'' վարվելակերպերը համարժեք անվանենք Γ_A խաղում, եթե բոլոր $j\in\{1,...,n\}$-երի համար՝ $x'a^j=x''a^j$ և նշանակենք $x'\sim x''$:

Երկու համարժեք x' և x'' վարվելակերպերի համար (յուրաքանչյուր $y\in Y$-ի համար)՝

$$H(x',y) = H(x'',y):$$

Համանմանորեն, երկրորդ խաղացողի y' և y'' վարվելակերպերը ($y'\sim y''$) Γ_A խաղում համարժեք են, եթե բոլոր $i\in\{1,..., m\}$-երի համար՝

$$y'a_i = y''a_i:$$

Այստեղից ունենք, որ առաջին խաղացողի ցանկացած $x\in X$ խառը վարվելակերպի համար՝

$$H(x,y') = H(x,y''):$$

Մաքուր վարվելակերպերի համար մուծված սահմանումները ձևափոխվում են հետևյալ կերպ. եթե առաջին խաղացողի մաքուր՝ i' վարվելակերպը գերակայում է i'' վարվելակերպին, իսկ երկրորդ խաղացողի j' մաքուր վարվելակերպը՝ նույն խաղացողի j'' վարվելակերպին, ապա բոլոր $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$-երի համար՝

$$a_{i'j}\geq a_{i''j},\ a_{ij'}\leq a_{ij''}:$$

Դա կարելի է վեկտորական տեսքով գրել հետևյալ կերպ.

$$a_{i'}\geq a_{i''},\ a^{j'}\leq a^{j''}:$$

Վարվելակերպերի i', i'' և j', j'' զույգերի համարժեքությունը ($i'\sim i''$, $j'\sim j''$) նշանակում է $a_{i'}=a_{i''}$, $a^{j'}=a^{j''}$ հավասարությունների կատարում:

Սահմանում: Առաջին (երկրորդ) խաղացողի $x''(y'')$ վարվելակերպը կասենք, որ գերակայող է, եթե գոյություն ունի այդ խաղացողի $x'\neq x''(y'\neq y'')$ վարվելակերպ, որը գերակայում է $x''(y'')$ վարվելակերպին: Հակառակ դեպքում, $x''(y'')$ վարվելակերպը ոչ գերակայվող է:

Համանմանորեն, առաջին (երկրորդ) խաղացողի x'' (համապատասխանաբար, y'') վարվելակերպը կոչվում է խիստ գերակայվող, եթե գոյություն ունի այդ խաղացողի այնպիսի $x'(y')$ վարվելակերպ, որը խիստ գերակայում է $x''(y'')$ վարվելակերպին, այսինքն՝ բոլոր $j=\overline{1,n}$ $(i=\overline{1,m})$-երի համար՝

$$x'a^j < x''a^j,\ a_iy' < a_iy''։$$

Հակառակ դեպքում կասենք, որ առաջին (երկրորդ) խաղացողի $x''(y'')$ վարվելակերպերը խիստ գերակայվող չեն:

7.2. Ցույց տանք, որ խաղացողները կարող են չօգտագործել գերակըշռվող վարվելակերպերը: Այդ փաստը հաստատում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ: Եթե $\overline{\Gamma}_A$ խաղում խաղացողներից մեկի x' վարվելակերպը գերակշռում է x^* լավագույն վարվելակերպին, ապա x' վարվելակերպը նույնպես լավագույն է:

Ապացուցում: Դիցուք՝ որոշակիության համար, x'-ը և x^*-ը առաջին խաղացողի վարվելակերպերն են: Այդ դեպքում գերակայության շնորհիվ՝

$$x'a^j \geq x^*a^j$$

բոլոր $j=\overline{1,n}$-երի համար: Այստեղից x^* վարվելակերպի լավագույն լինելու շնորհիվ (տե՛ս 6.3 կետը) բոլոր $j=\overline{1,n}$ ստանում ենք՝

$$v_A = \min_j x^*a^j \geq \min_j x'a^j \geq \min_j x^*a^j = v_A$$

Ուստի, 6.3 կետի թեորեմի համաձայն, x' վարվելակերպը նույնպես լավագույն է:

Այսպիսով, լավագույն վարվելակերպը կարող է գերակայվել միայն լավագույն վարվելակերպով: Մյուս կողմից, ոչ մի լավագույն վարվելակերպ խիստ գերակայվող չէ, ուստի խաղացողները չպետք է օգտագործեն խիստ գերակայվող վարվելակերպեր:

Թեորեմ: Եթե $\overline{\Gamma}_A$ խաղում խաղացողներից որևէ մեկի x^* վարվելակերպը լավագույն է, ապա x^*-ը խիստ գերակայվող չէ:

Ապացուցում: Դիցուք՝ որոշակիության համար, x^*-ը առաջին խաղացողի լավագույն վարվելակերպն է: Ենթադրենք, որ x^*-ը խիստ գերակայվող է, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $x' \in X$ վարվելակերպ, որ

$$x'a^j > x^*a^j,\ j=1,2,\ldots,n:$$

Որտեղից՝

$$\min_j x'a^j \geq \min_j x^*a^j:$$

Սակայն, $x^* \in X$ վարվելակերպի լավագույն լինելու շնորհիվ ճիշտ է

$$\min_j x^*a^j = v_A$$

հավասարությունը: Ուստի ճիշտ է և հետևյալ խիստ անհավասարությունը՝

$$\max_x \min_j xa^j > v_A,$$

ինչը հակասում է նրան, որ v_A-ն խաղի արժեքն է (կետ 6.3): Ստացված հակասությունը ապացուցում է թեորեմը:

Պարզ է, որ հակառակ պնդումը ընդհանուր առմամբ ճիշտ չէ: Այդպես,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցով խաղում առաջին խաղացողի առաջին և երկրորդ մաքուր վարվելակերպերը խիստ գերակայվող չեն, սակայն դրանք լավագույն չեն:

Մյուս կողմից, ներըմբռնորեն հասկանալի է, որ եթե A մատրիցի i-րդ տողը (j-րդ սյունակը) գերակայվող է, ապա անհրաժեշտություն չկա դրան տալու դրական հավանականություն: Այսպիսով, լավագույն վարվելակերպերը գտնելու համար Γ_A խաղի փոխարեն բավական է լուծել $\Gamma_{A'}$ ենթախաղը, որտեղ A'-ը մատրից է, որը ստացվում է A մատրիցից ջնջելով գերակայվող տողերը և սյունակները:

Այս արդյունքի ճշգրիտ ձևակերպմանը և ապացուցմանն անցնելուց առաջ, մուծենք «x խառը վարվելակերպի ընդլայնում i-րդ տեղում» հասկացությունը: Եթե $x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)\in X$ և $1\le i\le m+1$, ապա i-րդ տեղում x վարվելակերպի ընդլայնում կանվանենք $\overline{x}_i=(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},0,\xi_i,\ldots,\xi_m)$ վեկտորը: Այսպես, երկրորդ տեղում (1/3,2/3,1/3) վեկտորի ընդլայնումը (1/3,0,2/3,1/3) վեկտորն է, չորրորդ տեղում՝ (1/3,2/3,2/3,0) վեկտորն է, առաջին տեղում՝ (0,1/3,2/3,1/3) վեկտորը:

7.3. Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ_A-ն $(m\times n)$ խաղ է: Ենթադրենք, որ A մատրիցի i-րդ տողը գերակայվող է (այսինքն՝ գերակայվող է առաջին խաղացողի i-րդ մաքուր վարվելակերպը) և դիցուք՝ Γ_A-ն A' մատրցով խաղ է, որն ստացվում է A-ից i-րդ տողը ջնջելով: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները.

1. $v_A = v_{A'}$:

2. $\Gamma_{A'}$ խաղում երկրորդ խաղացողի ցանկացած y^* լավագույն վարվելակերպ լավագույն է նաև Γ_A խաղում:

3. Եթե x^*-ը առաջին խաղացողի կամայական լավագույն վարվելակերպն է $\Gamma_{A'}$ խաղում և $\overline{x}_i^*$-ը x^* վարվելակերպի ընդլայնումն է i-րդ տեղում, ապա $\overline{x}_i^*$-ը այդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպն է Γ_A խաղում:

4. Եթե A մատրիցի i-րդ տողը խիստ գերակայվող է, ապա առաջին խաղացողի կամայական $\overline{x}^*$ լավագույն վարվելակերպը Γ_A խաղում կարող է ստացվել $\Gamma_{A'}$ խաղի որևէ $\tilde{x}^*$ լավագույն վարվելակերպից՝ i-րդ տեղում ընդլայնելով:

Ապացուցում: Ընդհանրությունը չխախտելով, կարելի է ենթադրել, որ գերակայվողը վերջին՝ m-րդ տողն է: Դիցուք՝ $x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$-ը խառը վարվելակերպն է, որը գերակայում է m-րդ տողը: Եթե $\xi_m=0$, ապա գերակայության պայմանից բոլոր $j=1,2,\ldots,n$-երի համար ստանում ենք՝

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{m-1}\xi_i a_{ij} \ge a_{mj} ,$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i = 1\,,\ \xi_i \ge 0,\ i=1,\dots,m-1: \tag{7.3}$$

Հակառակ դեպքում ($\xi_m>0$) դիտարկենք $x'=(\xi_1',\dots,\xi_m')$ վեկտորը, որտեղ՝

$$\xi_i' = \begin{cases}\xi_i/(1-\xi_m), & i\ne m,\\ 0 & i=m\end{cases} \tag{7.4}$$

Վեկտորի բաղադրիչները ոչ բացասական են ($\xi_i'\ge 0$, $i=1,\dots,m$): Մյուս կողմից, բոլոր $j=1,\dots,n$-երի համար ունենք՝

$$\frac{1}{1-\xi_m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i a_{ij} \ge a_{mj}\frac{1}{1-\xi_m}\xi_i\,,$$

կամ

$$\frac{1}{1-\xi_m}\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i a_{ij} \ge a_{mj}\frac{1}{1-\xi_m}\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i\ :$$

Հաշվի առնելով (7.4)-ը, ստանում ենք՝

$$\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i' a_{ij} \ge a_{mj}\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i' = a_{mj}\,,\quad j=1,\dots,n, \tag{7.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\xi_i' = 1\,,\ \xi_i'\ge 0,\ i=1,\dots,m-1:$$

Այդպիսով, m-րդ տողի գերակայվող լինելուց միշտ հետևում է, որ այն չի գերազանցում մնացած m–1 տողերի ուռուցիկ գծային համակցությանը:

Դիցուք՝ $(x^*,y^*)\in Z(\Gamma_{A'})$ զույգը հավասարակշռության իրավիճակ է $\Gamma_{A'}$ խաղում, $x^*=(\xi_1^*,\dots,\xi_m^*)$, $y^*=(\eta_1^*,\dots,\eta_m^*)$: Թեորեմի 1-ին, 2-րդ, 3-րդ պնդումների ապացուցելու համար բավական է ապացուցել, որ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* \le v_{A'} \le \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\xi^* + 0\cdot a_{ij} \tag{7.6}$$

բոլոր $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$-երի համար:

Առաջին հավասարությունն ակներև է, իսկ $\Gamma_{A'}$ խաղում (x^*,y^*) վարվելակերպերի լավագույն լինելուց հետևում են

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* \le v_{A'} \le \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\xi^* + 0\cdot a_{ij}\,,\quad i=1,\dots,m-1,\quad j=1,\dots,n \tag{7.7}$$

անհավասարությունները: (7.7)-ից ակնհայտորեն հետևում է (7.6) անհավասարություններից աջը: Ապացուցենք ձախ անհավասարությունը: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* \le v_{A'}\ :$$

(7.3) և (7.5) անհավասարություններից ստանում ենք՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\eta_j^* \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1} a'_{ij}\xi'_i\eta_j^* \le \sum_{i=1}^{m-1} a'_{ij}\xi'_i = v_{A'},$$

որը և ապացուցում է թեորեմի առաջին մասը:

Թեորեմի երկրորդ մասը (4-րդ պնդումը) ապացուցելու համար բավական է նկատել, որ m-րդ տողի խիստ գերակայվող լինելու դեպքում (7.3) և (7.5) անհավասարությունները կատարվում են որպես խիստ անհավասարություններ բոլոր $j=\overline{1,n}$ -երի համար: Ուստի՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\eta_j^* < \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1} a_{ij}\xi'_i\eta_j^* = v_{A'}:$$

Այդ դեպքում 6.6 կետի թեորեմից ստանում ենք, որ Γ_A խաղում առաջին խաղացողի ցանկացած լավագույն վարվելակերպի m-րդ բաղադրիչը հավասար է զրոյի: Թեորեմն ապացուցված է:

Ձևակերպենք երկրորդ խաղացողի վարվելակերպերի մասին թեորեմը, որի ապացուցումը բաց ենք թողնում:

Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ_A-ն $(m\times n)$ խաղ է: Ենթադրենք, որ A մատրիցի j-րդ սյունակը գերակայվող է, և դիցուք՝ $\Gamma_{A'}$-ը A′ մատրիցով խաղ է, որն ստացվում է A-ից j-րդ սյունակը ջնջելով: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները.

1. $v_A = v_{A'}$:

2. Առաջին խաղացողի ցանկացած x^* լավագույն վարվելակերպը $\Gamma_{A'}$ խաղում լավագույն է նաև Γ_A խաղում:

3. Եթե y^*-ը երկրորդ խաղացողի կամայական լավագույն վարվելակերպն է $\Gamma_{A'}$ խաղում, և $\overline{y}_j^*$-ը y^* վարվելակերպի ընդլայնումն է j-րդ տեղում, ապա $\overline{y}_j^*$ վարվելակերպը երկրորդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպն է Γ_A խաղում:

4. Եթե A մատրիցի j-րդ սյունակը խիստ գերակայվող է, ապա Γ_A խաղում երկրորդ խաղացողի կամայական $\overline{y}^*$ լավագույն վարվելակերպը կարող է ստացվել $\Gamma_{A'}$ խաղի որևէ y^* լավագույն վարվելակերպից՝ j-րդ տեղում ընդլայնելով:

7.4. Հանրագումարի բերենք ստացված արդյունքները: 7.3. կետի թեորեմները տալիս են խաղի մատրիցի չափսերի նվազեցման ալգորիթմը:

Այդպիսով, եթե մատրիցի որևէ տող (սյունակ) մեծ (փոքր) չէ այդ մատրիցի մնացած տողերի (սյունակների) որևէ ուռուցիկ գծային համակցությունից, ապա խաղի լուծումը գտնելու համար այդ տողը (սյունակը) կարելի է ջնջել: Ընդ որում հատյալ մատրիցով խաղի լավագույն վարվելակերպերի ընդլայնումը կտա սկզբնական խաղի լավագույն լուծումը: Եթե անհավասարությունները խիստ էին, ապա սկզբնական խաղի լավագույն վարվելակերպերի բազմությունը կարելի է ստանալ հատյալ խաղի լավագույն վարվելակերպերի բազմության ընդլայնումով, հակառակ դեպքում այդպիսի գործընթաց կիրառելիս լավագույն վարվելակերպերը կարելի է կորցնել: Տվյալ թեորեմների կիրառումը բացատրենք օրինակով:

Օրինակ 7: Դիտարկվում է

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

մատրիցով խաղը: Քանի որ 3-րդ տողը՝ a_3-ը գերակայում է առաջին տողին ($a_3 \geq a_1$), ապա, ջնջելով առաջին տողը, ստանում ենք՝

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցում 3-րդ սյունակը՝ a^3-ը, չի գերազանցում առաջին սյունակին՝ a^1-ին: Ուստի, ստանում ենք՝

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}:$$

Վերջին մատրիցում ոչ մի տող (սյունակ) չի գերակայվում այլ տողով (սյունակով): Դրա հետ մեկտեղ a^1 առաջին սյունակը գերազանցում է a^2 և a^3 սյունակների ուռուցիկ գծային համակցությանը, քանի որ $a^1 \geq 1/2\ a^2 + 1/2\ a^3$: Իրոք, $3 > 1/2 + 1/2^* 3$, $1 = 1/2^* 2 + 1/2^* 0$, $3 = 0^* 1/2 + 1/2^* 6$: Արտաքսելով 1-ին սյունակը՝ ստանում ենք

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցում առաջին տողը համարժեք է $x=(0,\ 1/2,\ 1,2)$ խառը վարվելակերպին, քանի որ $1=1/2^* 2+1/2^* 0$, $3=1/2^* 0+1/2^* 6$: Այդպիսով, արտաքսելով առաջին տողը, ստանում ենք

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Այս մատրիցով խաղում խաղացողների x^* և y^* լավագույն վարվելակերպերը հավասար են՝ $x^*=y^*=(3/4,\ 1/4)$, ըստ որում խաղի արժեքը հավասար է 3/2-ի:

Վերջին մատրիցն ստացվել է առաջին մատրիցից երկու տողերը և սյունակները ջնջելով, ուստի սկզբնական խաղում խաղացողների լավագույն վարվելակերպերը նշված վարվելակերպերի ընդլայնումներն են առաջին և երկրորդ տեղերում, այսինքն՝ $\overline{x}^*_{12} = \overline{y}^*_{12} = (0,0,3/4,1/4)$:

8. Լիովին խառը և համաչափ խաղեր

Լավագույն վարվելակերպի սպեկտրն իմանալը պարզեցնում է խաղի լուծումը գտնելը: Լավագույն վարվելակերպի սպեկտրին կարող են պատկանել խաղացողի միայն էական մաքուր վարվելակերպերը: Ընդ որում ոչ մի էական վարվելակերպ խիստ գերակայվող չէ, ինչը անմիջականորեն հետևում է 7-րդ կետի թեորեմից:

8.1. Դիտարկենք խաղերի մի դաս, որտեղ սպեկտրն իմանալը բավարար է խաղը լուծելու համար:

Սահմանում: Առաջին (երկրորդ) խաղացողի x(y) վարվելակերպը կոչվում է լիովին խառը, եթե դրա սպեկտրը բաղկացած է խաղացողի բոլոր մաքուր վարվելակերպերի բազմությունից, այսինքն՝ $M_x=M$ $(N_y=N)$:

Հավասարակշռության (x^*,y^*) իրավիճակը կոչվում է լիովին խառը, եթե x^* և y^* վարվելակերպերը լիովին խառն են: Γ_A խաղը կոչվում է լիովին խառը, եթե այդ խաղում յուրաքանչյուր հավասարակշռության իրավիճակ լիովին խառն է:

Հետևյալ թեորեմը պնդում է, որ լիովին խառը խաղը ունի միակ լուծում:

Թեորեմ: Γ_A լիովին խառը $(m\times n)$ խաղը ունի միակ հավասարակշռության իրավիճակ և քառակուսի մատրից $(m=n)$: Եթե $v_A\neq 0$, ապա A մատրիցը վերածվող չէ, և

$$x^*=\frac{uA^{-1}}{uA^{-1}u}, \tag{8.1}$$

$$y^*=\frac{A^{-1}u}{uA^{-1}u}, \tag{8.2}$$

$$v_A=\frac{1}{uA^{-1}u}: \tag{8.3}$$

Ապացուցում: Դիցուք՝ $x^*=(\xi_1^*,\dots,\xi_m^*)\in X^*$-ը և $y^*=(\eta_1^*,\dots,\eta_m^*)\in Y^*$-ը խաղացողների կամայական լավագույն վարվեակերպերն են, իսկ v_A-ն Γ_A-ն խաղի արժեքն է: Քանի որ Γ_A-ն լիովին խառը խաղ է, ապա x^*-ը և y^*-ը լիովին խառը վարվելակերպեր են, որոնք (և միայն դրանք) (6.6) կետի

$$xa^j=v_A,\ xu=1,\ x>0,\ j=1,\dots,n, \tag{8.4}$$

$$ya_i=v_A,\ yw=1,\ y>0,\ i=1,\dots,m, \tag{8.5}$$

$$u=(1,\dots,1)\in R^m,\ \ w=(1,\dots,1)\in R^n,$$

գծային անհավասարությունների համակարգի լուծումներն են:

Թեորեմի պնդումները հետևում են գծային անհավասարությունների համակարգերին վերաբերող հայտնի արդյունքներից:

Հետևյալ թեորեմի ապացուցումը նույնպես թողնում ենք ընթերցողին:

Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ_A ($m\times n$) խաղում A մատրիցը ոչ վերածված է: Այդ դեպքում, եթե երկրորդ խաղացողը Γ_A խաղում ունի լիովին խառն լավագույն վարվելակերպ, ապա առաջին խաղացողն ունի միակ x^* լավագույն վարվելակերպ (8.1):

Եթե Γ_A խաղում առաջին խաղացողն ունի լիովին խառն լավագույն վարվելակերպ, ապա երկրորդ խաղացողն ունի միակ y^* լավագույն վարվելակերպ՝ (8.2), ընդ որում խաղի v_A արժեքը որոշվում է (8.3)-ով:

Օրինակ 8: ((2×2) խաղ): Դիցուք՝ տրված է

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

մատրիցով (2×2) խաղ: Առաջին խաղացողի կամայական x խառը վարվելակերպը կարող է գրվել $x=(\xi,1-\xi)$ տեսքով, որտեղ $0\le\xi\le1$: Համանմանորեն, երկրորդ խաղացողի y խառը վարվելակերպն ունի $y=(\eta,\ 1-\eta)$ տեսքը, որտեղ $0\le\eta\le1$: (x,y) իրավիճակում շահումը հավասար է՝

$$H(x,y)=\xi[a_{11}\eta+a_{12}(1-\eta)]+(1-\xi)\,[a_{21}\eta+a_{22}(1-\eta)]:$$

Այժմ ենթադրենք, որ Γ_A խաղում մաքուր վարվելակերպերով հավասարակշռության իրավիճակ չկա (հակառակ դեպքում լուծումը հեշտ է գտնել մինիմաքսերի հավասարությունից), և, դիցուք՝ $x^*=(\xi^*,1-\xi^*)$-ը և $y^*=(\eta^*,1-\eta^*)$-ը համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների կամայական լավագույն վարվելակերպերն են: (x^*,y^*) իրավիճակը և Γ_A խաղը լիովին խառն են ($\xi^*>0$ և $\eta^*>0$):

Հետևաբար, ըստ 8.1 կետի թեորեմի, խաղում գոյություն ունի լավագույն խառը վարվելակերպերի միակ զույգ: Այդ վարվելակերպերը հավասարումների հետևյալ համակարգի լուծումն են՝

$$a_{11}\eta^*+(1-\eta^*)\,a_{21}=v_A,\qquad a_{11}\xi^*+(1-\xi^*)\,a_{21}=v_A,$$
$$a_{21}\eta^*+(1-\eta^*)\,a_{22}=v_A,\qquad a_{12}\xi^*+(1-\xi^*)\,a_{22}=v_A:$$

Եթե մենք վստահ ենք, որ $v_A\neq0$ (երբ, օրինակ, A մատրիցի բոլոր տարրերը դրական են, ապա այդ անհավասարությունը բավարարվում է), ապա խաղի լուծումը հետևյալն է.

$$v_A=\frac{1}{uA^{-1}u},\ x^*=v_A uA^{-1},\ y^*=v_A A^{-1}u,$$

որտեղ u=(1,1): Այդպես, հեշտ է ստուգել, որ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցում թամբակետ չկա: Հակադարձ A^{-1} մատրիցը հավասար է՝

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

Այս խաղի լուծումը հետևյալն է.

$$v_A=1/3,\quad x^*=(2/3,\ 1/3),\quad y^*=(1/3,\ 2/3):$$

8.2. Հետազոտենք հատուկ տեսքի մատրիցներով խաղերի մի մասնավոր դաս:

Սահմանում: Քառակուսի A մատրիցով Γ_A խաղը կոչվում է համաչափ խաղ, եթե A մատրիցը շեղհամաչափ է, այսինքն՝ եթե $a_{ij}=-a_{ij}$ բոլոր i-երի և j-երի համար:

Այս դեպքում A մատրիցի բոլոր անկյունագծային տարրերը հավասար են 0-ի, այսինքն՝ $a_{jj}=0$ բոլոր i-երի համար: Շեղհամաչափ A մատրիցի համար միշտ բավարարում է $A^T=-A$ պայմանը: Քանի որ A մատրիցը քառակուսային է, ապա խաղացողների խառը վարվելակերպերի բազմությունները համընկնում են, այսինքն՝ X=Y:

Ապացուցենք համաչափ Γ_A խաղի լուծման հատկությունների վերաբերյալ մի թեորեմ, որն օգտակար է հավասարակշռության իրավիճակը փնտրելիս:

Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ_A-ն համաչափ խաղ է: Այդ դեպքում՝

$$v_A=0,$$

և խաղացողների լավագույն վարվելակերպերի բազմությունները համընկնում են, այսինքն՝

$$X^*=Y^*:$$

Ապացույց: Դիցուք A-ն խաղի մատրիցն է, իսկ $x\in X$-ը՝ կամայական վարվելակերպ է: Այդ դեպքում՝ $xAx=xA^Tx=-xAx$: Ուստի $xAx=0$:

Դիցուք՝ $(x^*,y^*)\in Z(A)$ հավասարակշռության իրավիճակն է, իսկ v_A-ն խաղի արժեքն է: Այդ դեպքում՝

$$v_A=x^*Ay^*\leq x^*Ay,$$
$$v_A=x^*Ay^*\geq xAy^*$$

Բոլոր $x\in X$-ի և $y\in Y$-ի համար: Հետևաբար՝

$$v_A\leq x^*A\,x^*=0,$$
$$v_A\geq y^*Ay^*=0:$$

Այստեղից՝ $v_A=0$:

Դիցուք՝ x^* վարվելակերպը լավագույն է Γ_A խաղում: Այդ դեպքում (տես 6.1 կետի թեորեմը)՝

$$x^*A\geq 0:$$

Սակայն այստեղից հետևում է, որ $x^*(-A^T)\geq 0$, ուստի $x^*A^T\leq 0$: Այսպիսով ստանում ենք՝

$$Ax^*\leq 0:$$

Որեմն, ըստ այդ նույն 6.1 կետի թեորեմի, x^*-ը երկրորդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպն է: Այսպիսով ապացուցված է, որ $X^*\subset Y^*$: Հակառակ ներառումը ապացուցվում է համանմանորեն:

Հետագայում, $X^*=Y^*$ հավասարման հիման վրա, խոսելով համաչափ խաղում խաղացողի լավագույն վարվելակերպի մասին, մենք չենք նշի, թե որ խաղացողի մասին է խոսքը:

Օրինակ 9: Լուծենք

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցով խաղը: Դիցուք՝ $x^*=(\xi_1^*,\xi_2^*,\xi_3^*)$-ը լավագույն վարվելակերպն է Γ_A խաղում: Այդ դեպքում պետք է բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\begin{aligned} \xi_2^*-\xi_3^* &\geq 0, \\ -\xi_1^*+\xi_3^* &\geq 0, \qquad (8.6) \\ \xi_1^*-\xi_2^* &\geq 0, \\ \xi_1^*+\xi_2^*+\xi_3^*=1,\ \xi_1^* &\geq 0,\ \xi_2^*\geq 0,\ \xi_3^*\geq 0: \end{aligned}$$

Ցույց տանք, որ այս խաղը լիովին խառն է: Իրոք, դիցուք՝ $\xi_1^*=0$: Այդ դեպքում անհավասարությունների (8.6) համակարգից ստանում ենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{aligned} \xi_2^*-\xi_3^* &\geq 0, \\ \xi_3^* &\geq 0, \\ -\xi_2^* &\geq 0, \\ \xi_1^*+\xi_2^*+\xi_3^* &=1, \end{aligned}$$

որը չունի ոչ բացասական լուծում: Համանման դատողությունները ցույց են տալիս $\xi_2^*=0$ կամ $\xi_3^*=0$ դեպքերի անհնարինությունը: Ուստի Γ_A խաղը լիովին խառը խաղ է: Հետևաբար, ξ_1^*,ξ_2^*,ξ_3^* բաղադրիչները հետևյալ համակարգի լուծումն են.

$$\begin{aligned} \xi_2^*-\xi_3^* &=0, \\ -\xi_1^*+\xi_3^* &=0, \\ \xi_1^*-\xi_2^* &=0, \\ \xi_1^*+\xi_2^*+\xi_3^*=1,\ \xi_i &>0,\ i=1,2,3: \end{aligned}$$

Այս համակարգն ունի միակ լուծում: Լավագույն վարվելակերպը $x^*=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ վեկտորն է:

II. ԲԱԶՄԱՔԱՅԼ ԽԱՂԵՐ

1. Լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղեր

1.1 Առաջին հատորում դիտարկված են բնականոն տեսքով խաղերը: Սկզբունքորեն՝ նման տեսքի կարելի է բերել դինամիկորեն (այսինքն՝ ոչ թե ակնթարթորեն, այլ ինչ-որ ժամանակահատվածում ընթացող), ներհակորեն կառավարվող գործընթացը՝ մաքուր վարվելակերպ հասկացության ձևական ներմուծումով: Այն դեպքերում, երբ վարվելակերպերի տարածության հզորությունը մեծ չէ և հնարավոր է գտնել թվային լուծումներ, նման մոտեցումը լիովին ընդունելի է: Սակայն ներհակորեն կառավարվող գործընթացի մասնակիցների լավագույն վարքագծի որոնման խնդիրների մեծ մասում բնականոն տեսքի անցումը, այսինքն՝ խնդիրը մաքուր վարվելակերպերի՝ որպես տարածության տարրերի, միապատիկ ընտրության հանգեցնելը, լուծումներ գտնելու արդյունավետ եղանակ չի ընձեռում, թեև հնարավորություն է տալիս ակնթախորեն պատկերել օպտիմացման այս կամ այն սկզբունքը:

Մի շարք դեպքերում բնականոն տեսքով խաղերի համար լուծումների գոյության ընդհանուր թեորեմները հնարավորություն չեն տալիս գտնելու կամ նույնիսկ մասնավորեցնելու լավագույն վարքագիծն այն խաղերում, որոնց բնականոնացումը դյուրին են: Ինչպես ցույց կտրվի ստորև, «շախմատում» գոյություն ունի լուծում մաքուր վարվելակերպերի դասում: Սակայն այդ արդյունքը հնարավոր չէ ստանալ մատրիցային խաղի ուղղակի ուսումնասիրությամբ: Այս պարագան շատ ավելի ցայտուն է հետապնդման դիֆերենցիալ խաղերն ուսումնասիրելիս, որոնց համար մի շարք դեպքերում հաջողվում է գտնել բացահայտ տեսքով լուծումներ, սակայն դիֆերենցիալ խաղի բնականոն տեսքն այնքան ընդհանուր է, որ գործնականում անհնար է կոնկրետ արդյունքներ ստանալ:

1.2 Ներհակությունների մաթեմատիկական մոդելները, որոնք հաշվի են առնում դինամիկան, ուսումնասիրվում են դիրքային խաղերի տեսության մեջ: Դիրքային խաղերի առավել պարզ դասը լրիվ իրազեկմամբ վերջնաքայլավոր խաղերի դասն է: Լրիվ իրազեկմամբ n անձանց վերջնաքայլավոր խաղի սահմանման համար անհրաժեշտ է գրաֆների տեսության տարրական իմացություն:

Դիցուք՝ X-ը որևէ վերջավոր բազմություն է: Յուրաքանչյուր $x\in X$ տարրին $f(x)\in X$ տարրը համապատասխանեցնող f կանոնը կոչվում է X-ի միարժեք արտապատկերում X-ի մեջ, կամ X-ի վրա որոշված և X-ի մեջ արժեքներ ընդունող ֆունկցիա: X բազմության F բազմարժեք արտապատկերումը X բազմության մեջ մի կանոն է, որը յուրաքանչյուր $x\in X$ տարրին համապատասխանեցնում է որոշ $F_x\in X$ ենթաբազմություն (ընդ որում, չի բացառվում F_x=Մ հնարավորությունը):

Այսուհետև «բազմարժեք արտապատկերում» բառակապակցության փոխարեն պարզության համար կօգտագործենք «արտապատկերում» եզրը:

Դիցուք՝ F-ը X-ի արտապատկերումն է X-ի մեջ, իսկ $A \subset X$: A բազմության պատկեր ասելով կհասկանանք $FA = \bigcup_{x \in A} F_x$ բազմությունը, որտեղ $F(\varnothing) = \varnothing$: Կարելի է համոզվել, որ եթե $A_i \in X$, $i=1,\ldots,n$, ապա

$$F(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} FA_i,\ F(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} FA_i$$

Սահմանենք $F^2, F^3, \ldots, F^k, \ldots$ արտապատկերումները հետևյալ կերպ.

$$F_x^2 = F(F_x),\ F_x^3 = F(F_x^2), \ldots, = F(F_x^{k-1}), \ldots \qquad (1.1)$$

X բազմության $\hat{F}$ արտապատկերումը X-ի մեջ կոչվում է F արտապատկերման փոխանցական միակցում, եթե

$$\hat{F}_x = \{x\} \cup F_x^2 \cup \ldots \cup F_x^k \cup \ldots \qquad (1.2)$$

F արտապատկերմանը հակադարձ F^{-1} արտապատկերումը որոշվում է որպես $F_y^{-1} = \{x | y \in F_x\}$, այսինքն՝ դա այն x կետերի բազմությունն է, որոնց պատկերը պարունակում է y կետը: F_x^k արտապատկերմանը համանման որոշվում է $(F^{-1})_y^k$ արտապատկերումը, այն է՝

$$(F^{-1})_y^2 = F^{-1}((F^{-1})_y), \qquad (1.3)$$

$$(F^{-1})_y^2 = F^{-1}((F^{-1})_y^2), \ldots, (F^{-1})_y^k = F^{-1}((F^{-1})_y^{k-1}).$$

Եթե $B \subset X$, ապա ենթադրում ենք, որ

$$F^{-1}(B) = \{x | F_x \cap B \neq \varnothing\} \qquad (1.4)$$

Օրինակ 1: (Շախմատ) Խաղատախտակի վրա յուրաքանչյուր դիրք որոշվում է ինչպես յուրաքանչյուր խաղացողի խաղաքարերի քանակով ու կազմով, այնպես էլ տվյալ պահին դրանց դասավորությամբ, ինչպես նաև նրանով, թե խաղացողներից ումն է քայլ անելու հերթը: Դիցուք՝ տրված են. X-ը դիրքերի բազմությունն է, F_x, $x \in X$-ը՝ այն դիրքերի բազմությունն է, որոնք կարող են անմիջականորեն իրագործվել x դիրքից հետո: Եթե x դիրքում սև և սպիտակ խաղաքարերի թիվը հավասար է զրոյի, ապա $F_x = \varnothing$: Այդ դեպքում (1.1)-ով որոշվող F_x^k-ը այն դիրքերի բազմությունն է, որ x դիրքից կարող է ստացվել k քայլ կատարելուց հետո, $\hat{F}_x$-ը այն բոլոր դիրքերի բազմությունն է, որոնք կարող են ստացվել x դիրքից, $F^{-1}(A)$ $(A \subset X)$-ը այն դիրքերի բազմությունն է, որոնցից մեկ քայլով հնարավոր է անցնել A բազմության դիրքերին: Պատկերելով դիրքերը և սլաքով միացնելով x և y, $y \in F_x$, երկու դիրքերը, տեսականորեն կարելի է կառուցել խաղի՝ սկզբնական դիրքից ելնող գրաֆը: Սակայն դիրքերի չափազանց մեծ թվի պատճառով հնարավոր չէ նկարել այդ գրաֆը:

Վերջավոր բազմությունների վրա բազմարժեք արտապատկերումների օգտագործումը հնարավորություն է տալիս ներկայացնելու բազմաթիվ բազմաքայլ խաղերի՝ շախմատի, շաշկու, «գո»-ի և այլ խաղերի կառուցվածքը:

Սահմանում. (X,F) զույգը կոչվում է գրաֆ, եթե X-ը որևէ վերջավոր բազմություն է, իսկ F-ը՝ X-ի արտապատկերումը X-ի մեջ:

(X,F) գրաֆը նշանակենք G պայմանանշանով: Այսուհետև X բազմության տարրերը կպատկերենք հարթության վրա կետերով, իսկ x և y կետերի զույգերը, որոնց համար $y\in F_x$, կմիացնենք սլաքավոր անընդհատ գծերով, ընդ որում սլաքներն ուղղված են x-ից դեպի y: Այդ դեպքում X բազմության յուրաքանչյուր տարրը կկոչվի գրաֆի գագաթ կամ հանգույց, իսկ տարրերի (x,y) զույգը, որում $y\in F_x$, գրաֆի աղեղ: P=(x,y) աղեղի համար x և y գագաթները կոչվում են եզրային գագաթներ, ընդ որում, x-ը աղեղի սկիզբն է, իսկ y-ը՝ վերջը: p և q երկու աղեղները կոչվում են կից, եթե դրանք տարբեր են և ունեն ընդհանուր եզրային կետ:

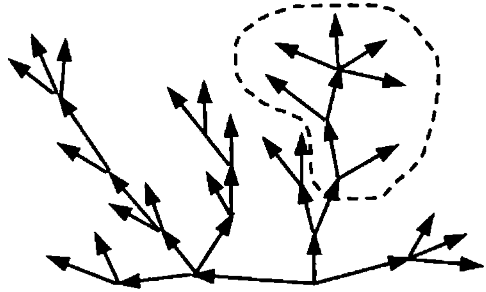
Գրաֆի աղեղների բազմությունը նշանակենք P-ով: G=(X,F) գրաֆում տրված աղեղների բազմությունը որոշում է F արտապատկերումը և, ընդհակառակը, F արտապատկերումը որոշում է P բազմությունը: Այդ պատճառով G գրաֆը կարելի է գրել ինչպես G=(X,F), այնպես էլ G=(X,P) տեսքով:

G=(X,F) գրաֆում ուղի է կոչվում $p=(p_1,p_2,\dots,p_k)$ աղեղների այնպիսի հաջորդականությունը, որ յուրաքանչյուր աղեղի վերջը համընկնում է հաջորդի սկզբի հետ: $p=(p_1,p_2,\dots p_k)$ ուղու երկարությունը հաջորդականության աղեղների $\ell(p)=k$ թիվն է; անվերջ P ուղու դեպքում ընդունում ենք, որ $\ell(p)=\infty$:

G=(X,P) գրաֆի կող է կոչվում $x,y\in X$ երկու տարրերից բաղկացած բազմությունը, որտեղ $(x,y)\in P$ կամ $(y,x)\in P$: Ի տարբերություն աղեղի, կողի կողմնորոշվածությունը էական չէ: Կողերը նշանակենք p և q տառերով, իսկ կողերի բազմությունը՝ P-ով: Շղթա ասելով՝ կհասկանանք $(p_1,p_2,\dots)$ կողերի հաջորդականությունը, որում յուրաքանչյուր p_k կողի եզրային գագաթներից մեկը եզրային է նաև p_{k-1}-ի, իսկ մյուսը p_{k+1}-ի համար:

Ցիկլը մի վերջավոր շղթա է, որն սկսվում է ինչ-որ գագաթում և վերջանում է նույն գագաթում: Գրաֆը կոչվում է կապակցված, եթե նրա ցանկացած երկու գագաթներ կարելի է միացնել շղթայով: Ծառը կամ ծառակերպ գրաֆը, ըստ սահմանման, առանց ցիկլերի վերջավոր կապակցված գրաֆ է, որն ունի առնվազն երկու գագաթ: Ցանկացած ծառգրաֆում գոյություն ունի միակ x_0 գագաթը՝ այնպիսին, որ $F_{x_0}=X$: x_0 գագաթը կոչվում է G գրաֆի սկզբնական գագաթ:

Օրինակ 2: 1-ին գծանկարում բերված է x_0 սկիզբ ունեցող ծառը կամ ծառակերպ գրաֆը: Կետերով նշված են $x\in X$ հանգույցները կամ գրաֆի գագաթները: Գրաֆի աղեղները պատկերված են սլաքավոր հատվածներով, որոնց սլաքը ցույց է տալիս աղեղի սկիզբն ու վերջը:



Գծ. 1

Օրինակ 3: Շաշկին կամ շախմատը չեն կարող պատկերվել ծառակերպ գրաֆի միջոցով, եթե գրաֆի գագաթ ասելով հասկանանք խաղաքարերի դասավորությունը տվյալ պահին և քայլի նշումը, քանի որ խաղաքարերի միևնույն դասավորությունը կարող է ստացվել տարբեր ուղիներով: Միևնույն ժամանակ, եթե շաշկու կամ շախմատի կառուցվածքը պատկերող գրաֆի գագաթ ասելով հասկանանք խաղատախտակի վրա խաղաքարերի դասավորությունը տվյալ պահին, քայլի նշումը և խաղի ողջ նախապատմությունը (խաղաքարերի բոլոր հաջորդական դասավորությունները նախորդ քայլերից առաջ), յուրաքանչյուր գագաթ սկզբնականից կարող է ստացվել միայն մեկ ձևով (այսինքն՝ գոյություն ունի միակ շղթա, որն սկզբնական գագաթից ուղղվում է դեպի կամայական տվյալ գագաթը), ուստի և խաղի համապատասխան գրաֆը ցիկլեր չի պարունակում և ծառ է:

1.3 Դիցուք՝ $z \in X$: $G=(X,F)$ ծառակերպ գրաֆի G_z ենթագրաֆ է կոչվում (X_z,F_z) տեսքի գրաֆը, որտեղ $X_z=\hat{F}_z$, իսկ $F_z x=F_z \cap X_z$:

1-ին գծանկարում կետագծով նշված է z գագաթից սկիզբ առնող ենթագրաֆը: Բոլոր $x \in X$-երի համար ծառակերպ գրաֆում F_x բազմությունը համընկնում է F_zX բազմության հետ, այսինքն՝ F_z արտապատկերումը F արտապատկերման նեղացումն է X_z բազմության վրա: Այդ պատճառով ծառակերպ գրաֆի ենթագրաֆների համար կօգտագործենք $G_z=(X_z,F)$ նշանակումը:

1.4 Այժմ անցնենք վերջավոր ծառակերպ գրաֆի վրա լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղի սահմանմանը:

Դիցուք՝ $G=(X,F)$-ը ծառակերպ գրաֆ է: Դիտարկենք X գագաթների բազմության տրոհումը $n+1$ բազմությունների՝

$$X_1,X_2,\ldots,X_n,X_{n+1}, \quad \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i=X, \quad X_k \cap X_\ell=\varnothing, \quad k\neq\ell,$$

որտեղ $x \in X_{n+1}$-ի համար $F_x=\varnothing$: X_i, $i=1,\ldots,n$ բազմությունը կոչվում է i-րդ խաղացողի հերթականության բազմություն, իսկ X_{n+1} բազմությունը՝ վերջնական դիրքերի բազմություն: X_{n+1} վերջնական դիրքերի բազմության վրա որոշված են իրական n ֆունկցիաներ $H_1(x),\ldots,H_n(x)$, $x \in X_{n+1}$: $H_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$ ֆունկցիան կոչվում է i-րդ խաղացողի շահում:

Խաղն ընթանում է հետևյալ կերպ: Տրված է խաղացողների N բազմությունը, որոնք համարակալված են բնական 1,2,…,i,…,n թվերով (հետագայում N={1,2,…,n}): Դիցուք՝ $x_0 \in X_{i_1}$, այդ դեպքում x_0 գագաթում (դիրքում) «խաղում է» [«քայլ է անում»] i_1 խաղացողը և ընտրում $x_1 \in F_{x_0}$ գագաթը: Եթե $x_1 \in X_{i_2}$, ապա x_1 գագաթում «խաղում է» i_2 խաղացողը և ընտրում հաջորդ $x_2 \in F_{x_1}$ գագաթը (դիրքը), և այլն: Այսպիսով, եթե k-րդ քայլում x_{k-1} գագաթը (դիրքը) պատկանում է X_{i_k} բազմությանը, ապա այդտեղ «խաղում է» i_k խաղացողը և ընտրում հաջորդ գագաթը (դիրքը) ընտրվում է $F_{x_{k-1}}$ բազմությունից: Խաղն ավարտվում է, երբ որևէ խաղացող հասնում է վերջնական x_ℓ գագաթ ($x_\ell \in X_{n+1}$), որի համար $F_{x_\ell} = \varnothing$:

Դիրքերի հաջորդական ընտրության արդյունքում միարժեքորեն իրացվում է ինչ-որ $x_0,\ldots,x_k,\ldots,x_\ell$ հաջորդականություն, որը G ծառակերպ գրաֆում որոշում է այն ուղին, որ սկիզբ է առնում x_0 սկզբնական դիրքից և հասնում խաղի վերջնական դիրքերից մեկին: Այդպիսի ուղին հետագայում կանվանենք պարտիա:

Քանի որ G-ն ծառ է, ապա յուրաքանչյուր պարտիա միարժեքորեն որոշում է x_ℓ վերջնական դիրքը, որին նա հանգեցնում է, և, ընդհակառակը, x_ℓ վերջնական դիրքը միարժեքորեն որոշում է պարտիան: Յուրաքանչյուր i-րդ, i=1,2,…,n, խաղացողը x_ℓ դիրքում ստանում է $H_i(x_\ell)$ շահումը: Ենթադրենք, որ i խաղացողը $x \in X_i$ դիրքում ընտրություն կատարելիս գիտե այդ x դիրքը, հետևաբար և, G գրաֆի՝ ծառակերպության շնորհիվ կարող է վերականգնել նաև նախորդ բոլոր դիրքերը: Նման դեպքում ասում են, որ խաղացողներն ունեն լրիվ իրազեկում: Լրիվ իրազեկմամբ խաղերի օրինակ են շախմատն ու շաշկին, քանի որ խաղացողները կարող են գրանցել քայլերը և, ուրեմն, կարելի է համարել, որ նրանք խաղի նախապատմությունը գիտեն յուրաքանչյուր հերթական քայլը կատարելիս:

Սահմանում: u_i միարժեք արտապատկերումը, որը յուրաքանչյուր $x \in X_i$ գագաթին (դիրքին) համապատասխանեցնում է որոշ $y \in F_x$ գագաթ (դիրք) կոչվում է i-րդ խաղացողի վարվելակերպ:

U_i-ով նշանակենք i-րդ խաղացողի բոլոր հնարավոր վարվելակերպերի բազմությունը: Այսպիսով i-րդ խաղացողի վարվելակերպը նրան պարտադրում է իր X_i հերթականության բազմության ցանկացած x դիրքում միարժեքորեն ընտրել հաջորդ դիրքը:

Յուրաքանչյուր $u=(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n)$ կարգավորված հավաքածուն, որտեղ $u_i \in U_i$, կոչվում է խաղի իրավիճակ, իսկ $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ դեկարտյան արտադրյալը՝ իրավիճակների բազմություն: Ամեն մի $u=(u_1,u_2,\ldots,u_i,\ldots,u_n)$ իրավիճակ միարժեքորեն որոշում է խաղի պարտիան և, հետևաբար՝ խաղացողների շահումները: Իրոք, դիցուք՝ $x_0 \in X_i$: Այս դեպքում $u=(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n)$ իրավիճակում հաջորդ x_1 դիրքը միարժեքորեն որոշվում է $u_{i_2}(x_0)=x_1$ կանոնով: Դիցուք՝ այժմ $x_1 \in X_{i_2}$: Այդ դեպքում x_2-ը միարժեքորեն որոշվում է $u(x_1)=x_2$ կանոնով: Եթե այժմ k-երորդ քայլում իրագործվել է $x_{k-1} \in X_{ik}$ դիրքը, ապա x_k-ն միարժեքորեն որոշվում է $x_k = u_{i_k}(x_{k-1})$ կանոնով և այլն:

Դիցուք՝ $u=(u_1,u_2,\ldots,u_i,\ldots,u_n)$ իրավիճակին նշված առումով,համապատասխանում է $x_0,x_1,\ldots,x_\ell$ պարտիան: Այդ դեպքում կարելի է մտցնել i-րդ խաղացողի K_i շահումի ֆունկցիա հասկացությունը, յուրաքանչյուր u իրավիճակում շահումի ֆունկցիայի արժեքը հավասարեցնելով $u=(u_1,\ldots,u_n)$ իրավիճակին համապատասխանող $x_0,x_1,\ldots,x_\ell$ պարտիայի վերջնական դիրքում H_i շահումի արժեքին, այսինքն՝

$$K_i(u_1,u_i,\ldots,u_n) = H_i(x_\ell), \qquad i=1,2,\ldots,n:$$

K_i, $i=1,\ldots,n$, ֆունկցիաները որոշված են $U=\prod_{i-1}^{n} U_i$ իրավիճակների բազմության վրա: Այդպիսով ստանում ենք $\Gamma=(N\{u_i\}_{i\in N},\{K_i\}_{i\in N})$ բնականոն տեսքով խաղ, որտեղ $N=\{1,\ldots,i,\ldots,n\}$՝ խաղացողների բազմությունն է, U_i-ն՝ i-րդ խաղացողի վարվելակերպերի բազմությունը,K_i-ն՝ i-րդ խաղացողի շահումի ֆունկցիան:

1.5 Γ խաղի հետագա ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ է դիտարկել ենթախաղ հասկացությունը, այսինքն՝ խաղ՝ հիմնական խաղի G գրաֆի ենթագրաֆի վրա:

Դիցուք՝ $z \in X$: Դիտարկենք $G_z=(X_z,F)$ ենթագրաֆը, որի հետ Γ_z ենթախաղը կկապենք հետևյալ կերպ: Խաղացողների հերթականության բազմությունը Γ_z ենթախաղում որոշվում է $Y_i^z = X_i \cap X_z$, $i=1,2,\ldots,n$, կանոնով, վերջնական դիրքերի բազմությունը՝ $Y_{n+1}^z = X_{n+1} \cap X_z$ i-րդ խաղացողի $H_i^z(x)$ շահումը՝ ենթախաղում համարվում է հավասար

$$H_i^z(x) = H_i(x),\ x \in Y_{n+1}^z, \quad i=1,\ldots,n:$$

Համապատասխանաբար, i-րդ խաղացողի u_i^z վարվելակերպը Γ_z ենթախաղում որոշված է որպես Γ խաղի i-րդ խաղացողի u_i վարվելակերպի նեղացում Y_i^z բազմության վրա, այսինքն՝

$$u_i^z = {}_i(x),\ x \in Y_i^z = X_i \cap X_z, \quad i=1,\ldots,n:$$

Ենթախաղում i-րդ խաղացողի բոլոր վարվելակերպերի բազմությունը նշանակվում է U_i^z -ով: Ի վերջո՝ յուրաքանչյուր G_z ենթագրաֆի հետ մենք կապում ենք բնականոն տեսքով ենթախաղ՝

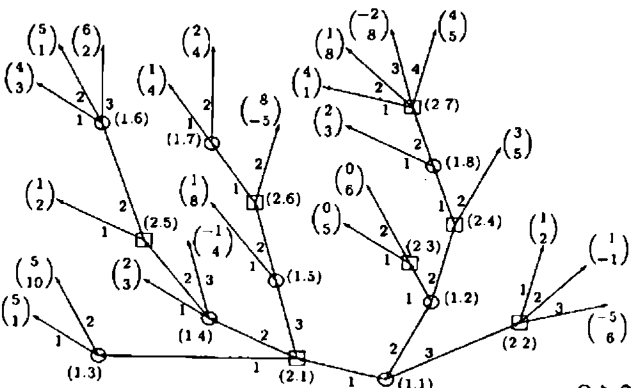
$$\Gamma_z = (N,\{U_i^z\},\{K_i^z\})\text{-ը},$$

որտեղ, K_i^z, $i=1,\ldots,n$ շահումի ֆունկցիաները որոշված են $U^z=\prod_{i=1}^{n} U_i^z$ դեկարտյան արտադրյալի վրա:

Սահմանում: Հիմնական խաղի $u^*=(u_1^*,\ldots,u_n^*)$ Նեշի հավասարակշռության իրավիճակը կոչվում է Γ խաղում Նեշի բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակ, եթե ցանկացած $z\in X$-ի համար $(u^*)^z=((u_1^*)^z,\ldots,(u_n^*)^z)$ իրավիճակը, որտեղ $(u_i^*)^z$-ը u_i^* վարվելակերպի նեղացումն է Γ_z ենթախաղի վրա, Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ է Γ ենթախաղում:

Ճշմարիտ է հետևյալ հիմնական թեորեմը.

Թեորեմ: Ցանկացած լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղում վերջավոր ծառակերպ գրաֆի վրա գոյություն ունի Նեշի բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակ:



Գծ.2

Օրինակ 4. Դիցուք՝ Γ խաղը տեղի է ունենում 2-րդ գծանկարում պատկերված գրաֆի վրա և N բազմությունը բաղկացած է երկու խաղացողից. $N=\{1,2\}$:

2-րդ գծանկարում որոշենք հերթականության բազմությունները: X_1 բազմության գագաթները պատկերենք շրջանակներով, իսկ X_2 բազմության գագաթները՝ քառակուսիներով: Խաղացողների շահումները նշված են վերջնական դիրքերում: X_1 և X_2 բազմությունների մեջ մտնող դիրքերը համարակալենք երկյակ համաքվով, իսկ յուրաքանչյուր գագաթից ելնող աղեղները՝ մեկ համարով: Ընտրությունը x գագաթում համարժեք է հաջորդ $x'\in F_x$ գագաթի ընտրությանը, ուստի կհամարենք, որ յուրաքանչյուր գագաթում վարվելակերպերը ցույց են տալիս այն աղեղի համարը, որով պետք է ընթանալ առաջ: Օրինակ, առաջին խաղացողի $u_1=(2,1,2,3,1,2,1,1)$ վարվելակերպը նրան պարտադրում է 2-րդ աղեղն ընտրել 1-ին գագաթում, 1-ին աղեղը՝ 2-րդ գագաթում, 2-րդ աղեղը՝ 3-րդ գագաթում, 3-րդ աղեղը՝ 4-րդ գագաթում և այլն: Քանի որ առաջին խաղացողի հերթականության բազմությունը բաղկացած է ութ գազաթից, ուրեմն նրա վարվելակերպը ութչափանի վեկտոր է: Համանմանորեն, 2-րդ խաղացողի ցանկացած վարվելակերպ յոթչափանի վեկտոր է: Առաջին խաղացողն ունի 864 վարվելակերպ, իսկ երկրորդը՝ 576 վարվելակերպ: Այսպիսով, համապատասխան բնականոն տեսքը 864×576 չափի մատրիցներով երկմատրից խաղ է: Բնական է, որ այդպիսի երկմատրից խաղերի լուծումը բավականին բարդ է: Սակայն դիտարկվող խաղը պարզ է և լուծելի:

Իսկապես, նշանակենք $v_1(x)$, $v_2(x)$-ով Γ_x ենթախաղի շահումները բացարձակ հավասարակշռության որևէ սևեռյալ իրավիճակում: Սկզբում լուծում ենք $\Gamma_{1,6}$, $\Gamma_{1,7}$, $\Gamma_{2,7}$ ենթախաղերը: Հեշտ է համոզվել, որ $v_1(1,6)=6$, $v_2(1,6)=2$, $v_1(1,7)=2$, $v_2(1,7)=4$, $v_1(2,7)=1$, $v_2(2,7)=8$: Այնուհետև լուծում ենք $\Gamma_{2,5}$, $\Gamma_{2,6}$, $\Gamma_{1,8}$ ենթախաղերը: $\Gamma_{2,5}$ ենթախաղում կա Նեշի երկու հավասարակշռություն, քանի որ 2-րդ խաղացողի համար միևնույնն է, թե որ այլընտրանքն ընտրի: Միաժամանակ նրա ընտրածնն էական է դառնում առաջին խաղացողի համար, քանի որ 2-րդ խաղացողի կողմից ձախ աղեղն ընտրվելու դեպքում առաջին խաղացողն ստանում է +1, իսկ երկրորդ աղեղն ընտրվելու դեպքում՝ +6: Նշենք այս հանգամանքը և ենթադրենք, որ 2-րդ խաղացողը «բարյացակամ է» և (2,5) դիրքում ընտրում է աջ աղեղը: Այդ դեպքում $v_1(2,5)=v_1(1,6)=6$, $v_2(2,5)=v_2(1,6)=2$, $v_1(2,6)=v_1(1,7)=2$, $v_2(2,6)=v_2(1,7)=4$, $v_1(1,8)=2$, $v_2(1,8)=3$: Այնուհետև լուծում ենք $\Gamma_{1,3}$, $\Gamma_{1,4}$, $\Gamma_{1,5}$, $\Gamma_{2,3}$, $\Gamma_{2,4}$ խաղերը: $\Gamma_{1,3}$ ենթախաղում կա Նեշի երկու հավասարակշռություն, քանի որ առաջին խաղացողի համար միևնույնն է, թե որ այլընտրանքն ընտրի: Միաժամանակ նրա ընտրությունն էական է 2-րդ խաղացողի համար, քանի որ 1-ին խաղացողի կողմից ձախ այլընտրանքն ընտրվելու դեպքում, ինքն ստանում է 1, իսկ աջի դեպքում՝ –10: Ենթադրենք, որ առաջին խաղացողը «բարյացակամ է» և (1,3) դիրքում ընտրում է աջ այլընտրանքը: Այդ դեպքում՝ $v_1(1,3)=5$, $v_2(1,3)=10$, $v_1(1,4)=v_1(2,5)=6$, $v_2(1,4)=v_2(2,5)=2$, $v_1(1,5)=v_1(2,6)=2$, $v_2(1,5)==v_2(2,6)=4$, $v_1(2,3)=0$, $v_2(2,3)=6$, $v_1(2,4)=3$, $v_2(2,4)=5$: Այնուհետև լուծում ենք $\Gamma_{2,1}$, $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{2,2}$ խաղերը; $v_1(2,1)=v_1(1,3)=5$, $v_2(2,1)=v_2(1,3)=10$, $v_1(1,2)=v_1(2,4)=3$, $v_2(1,2)=v_2(2,4)=5$, $v_1(2,2)=-5$ $v_2(2,2)=6$: Այժմ լուծում ենք $\Gamma_{1,1}$ խաղը: Այստեղ $v_1(1,1)=v_1(2,1)=5$, $v_2(1,1)=v_2(2,1)=10$:

Արդյունքում ստանում ենք (u_1^*, u_2^*) Նեշի բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակ, որտեղ

$$u_1^* = (1,2,2,2,2,3,2,1), \quad u_2^* = (1,3,2,2,2,1,2) \qquad (1.5)$$

(u_1^*, u_2^*) իրավիճակում խաղը զարգանում է (1,1), (2,1), (1,3) ուղիով: Կառուցման ընթացքում նկատվեց, որ u_i^*, i=1,2, վարվելակերպերը «բարյացակամ են» այն առումով, որ i-րդ խաղացողը իր քայլը կատարելիս, հավասարապես շահագրգռված լինելով հետագա այլընտրանքների ընտրությամբ, դրանցից ընտրում է մյուս խաղացողի համար առավել բարենպաստը:

Γ խաղում գոյություն ունեն բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակներ, որոնցում խաղացողները կունենան այլ շահումներ: Այդպիսի հավասարակշռություններ կառուցելու համար բավական է հանել խաղացողների «բարյացակամություն» պայմանը և փոխարինել «անբարյացակամություն» հակադարձ պայմանով: Γ_x ենթախաղում «անբարյացակամ» հավասարակշռության օգտագործման դեպքում խաղացողների շահումները նշանակենք $\bar{v}_1(x)$, $\bar{v}_2(x)$-ով: Այդ դեպքում ունենք

$$v_1(1,6)=\bar{v}_1(1,6)=6,\ v_2(1,6)=\bar{v}_2(1,6)=2,\ v_1(1,7)=\bar{v}_1(1,7)=2,$$

$$v_2(1,7)=\bar{v}_2(1,7)=4,\ \bar{v}_1(2,7)=-2,\ v_2(2,7)=\bar{v}_2(2,7)=8:$$

Ինչպես նշվեց, $\Gamma_{2,5}$ ենթախաղում գոյություն ունի Նեշի երկու հավասարակշռություն: Ի տարբերություն նախորդ դեպքի, ենթադրենք, որ 2-րդ խաղացողը «անբարյացակամ է» և ընտրում է այն գագաթը, որում իր առավելագույն շահումի դիմաց առաջին խաղացողի շահումը նվազագույն է: Այդ դեպքում

$$\bar{v}_1(2,5)=1,\ \bar{v}_2(2,5)=2,\ \bar{v}_1(2,6)=v_1(1,7)=2,$$

$$\bar{v}_2(2,6)=v_2(1,7)=4,\ \bar{v}_1(1,8)=v_1(1,8)=2,\ \bar{v}_2(1,8)=v_2(1,8)=3:$$

Այնուհետև փնտրում ենք $\Gamma_{1,3}$, $\Gamma_{1,4}$, $\Gamma_{1,5}$, $\Gamma_{2,3}$, $\Gamma_{2,4}$ խաղերի լուծումը: $\Gamma_{1,3}$ ենթախաղում կա Նեշի երկու հավասարակշռություն: Ինչպես նախորդ դեպքում, ընտրենք առաջին խաղացողի «անբարյացակամ» գործողությունները: Այդ դեպքում ունենք

$$\bar{v}_1(1,3)=\bar{v}_1(1,3)=5,\ \bar{v}_2(1,3)=1,\ \bar{v}_1(1,4)=2,\ \bar{v}_2(1,4)=3$$

$$\bar{v}_1(1,5)=v_1(2,6)=v_1(1,5)=2,\ \bar{v}_2(1,5)=v_2(2,6)=\bar{v}_2(2,6)=4,$$

$$\bar{v}_1(2,3)=v_1(2,3)=0,\ \bar{v}_2(2,3)=v_2(2,3)=6,$$

$$\bar{v}_1(2,4)=v_1(2,4)=3,\ \bar{v}_2(2,4)=v_2(2,4)=5:$$

Այնուհետև լուծում ենք $\Gamma_{2,1}$, $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{2,2}$ խաղերը: Ունենք

$$\bar{v}_1(2,1)=v_1(1,5)=2,\ \bar{v}_2(2,1)=\bar{v}_2(1,5)=4,\ \bar{v}_1(1,2)=\bar{v}_1(2,4)=3,$$

$$\bar{v}_2(1,2)=\bar{v}_2(2,4)=5,\ \bar{v}_2(2,2)=v_2(2,2)=6,\ v_1(2,2)=\bar{v}_1(2,2)=5:$$

Այժմ լուծենք $\Gamma=\Gamma_{1,1}$ խաղը: Այստեղ $\bar{v}_1(1,1)=\bar{v}_1(1,2)=3$, $\bar{v}_2(1,1)=\bar{v}_2(1,2)=5$:

Այսպիսով ստացվեց Նեշի հավասարակշռության նոր իրավիճակ՝

$$\bar{v}_1(\cdot)=(2,2,1,1,2,3,2,1),\ \bar{v}_2(\cdot)=(3,3,2,2,1,1,3): \quad (1.6)$$

Երկու խաղացողների շահումները (1.6) իրավիճակում փոքր են (1.5) իրավիճակում շահածից: (1.6) իրավիճակը ինչպես և (1.5) իրավիճակը, բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակ է:

1.6 Ակնհայտ է, որ Նեշի բացարձակ հավասարակշռության «բարյացակամ» և «անբարյացակամ» իրավիճակներից բացի գոյություն ունի բացարձակ հավասարակշռության միջանկյալ իրավիճակների մի ամբողջ ընտանիք: Հետաքրքրական է այն հարցը, թե երբ կարելի է պնդել խաղացողների շահումներով տարբերվող բացարձակ հավասարակշռության երկու տարբեր իրավիճակների բացակայությունը:

Թեորեմ: Դիցուք՝ Γ խաղում խաղացողների $H_i(x)$, $i=1,\ldots,n$ շահումները այնպիսիք են, որ եթե գոյություն ունի այնպիսի i_0 և այնպիսի x, y, որ $H_{i_0}(x)=H_{i_0}(y)$, ապա $H_i(x)=H_i(y)$ բոլոր $i\in N$-ի համար:

Այդ դեպքում Γ խաղում խաղացողների շահումները համընկնում են բացարձակ հավասարակշռության բոլոր իրավիճակներում:

2. Հիմնական ֆունկցիոնալ հավասարումներ

2.1 Դիտարկենք լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ հակամարտ խաղերը: Եթե 1.4 ենթակետի պայմաններում խաղացողների $N=\{1,2\}$ բազմությունը բաղկացած է երկու տարրից և $H_2(x)=-H_1(x)$ բոլոր $x\in X_3$ համար (X_3-ը վերջնական դիրքերի բազմությունն է Γ խաղում), ապա դա

$$\Gamma=\langle N, U_i, K_i\rangle$$

լրիվ իրազեկմամբ հակամարտ բազմաքայլ խաղ է: Ակնհայտ է, որ նույն հատկությամբ օժտված են նաև Γ խաղի բոլոր Γ_z ենթախաղերը: Քանի որ $H_2(x)=-H_1(x)$ պայմանից անմիջապես հետևում է, որ բոլոր $u_1\in U_1$-ի, $u_2\in U_2$-ի համար $K_2(u_1,u_2)=-K_1(u_1,u_2)$, ապա (u_1^*, u_2^*) Նեշի հավասարակշռության իրավիճակում բոլոր $u_1\in U_1$-ի, $u_2\in U_2$-ի համար ճշմարիտ են

$$K_1(u_1, u_2^*)\le K_1(u_1^*, u_2^*)\le K_1(u_1^*, u_2)$$

անհավասարումները: Այդ դեպքում (u_1^*, u_2^*) զույգը կանվանենք հավասարակշռության իրավիճակ կամ թամբակետ, իսկ հավասարակըշռության իրավիճակ կազմող վարվելակերպերը՝ օպտիմալ կամ լավագույն վարվելակերպեր: Շահումի ֆունկցիայի արժեքները հավասարակշռության իրավիճակում նշանակենք v-ով և անվանենք Γ խաղի արժեք:

2.2 1-ին պարագրաֆիցից հետևում է, որ լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ հակամարտ խաղում վերջավոր ծառակերպ գրաֆի վրա գոյություն ունի բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակ, այսինքն՝ այնպիսի (u_1^*, u_2^*) իրավիճակ, որի նեղացումը Γ խաղի ցանկացած Γ_z ենթախաղի վրա Γ_z-ում ստեղծում է հավասարակշռության իրավիճակ: Ցանկացած Γ_y ենթախաղի համար նաև կարելի է որոշել v(y) թիվը, որն այդ ենթախաղի հավասարակշռության իրավիճակում շահումի ֆունկցիայի արժեքն է և կոչվում է Γ_y ենթախաղի արժեք: Ինչպես արդեն նշել ենք, հակամարտ խաղի արժեքը (այսինքն՝ հավասարակշռության իրավիճակում առաջին խաղացողի շահումի ֆունկցիայի արժեքը) որոշվում է միակ ձևով, այդ պատճառով v(y) ֆունկցիան որոշված է բոլոր $y\in X_1$, $y\in X_2$-ի համար և միարժեք է:

2.3 v(y) ֆունկցիան հաշվելու համար արտածենք ֆունկցիոնալ հավասարումը. v(y)-ի սահմանումից հետևում է, որ

$$v(y)=K_1^y((u_1^*)^y,(u_2^*)^y)=-K_2^y((u_1^*)^y,(u_2^*)^y),$$

որտեղ $((u_1^*)^y,(u_2^*)^y)$-ը Γ_y ենթախաղում հավասարակշռության իրավիճակն է, որը (u_1^*,u_2^*) բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակի նեղացումն է:

Դիցուք՝ $y_1\in X_1$ և $z\in F_y$: Այդ դեպքում ունենք

$$v(y)=\max_{z=F_y}K_1^z((u_1^*)^z,(u_2^*)^z)=\max_{z=F_y}v(z) \quad (2.1)$$

$y\in X_2$-ի համար համանմանորեն ստանում ենք

$$v(y)=-K_2^z((u_1^*)^z,(u_2^*)^z)=-\max_{z=F_y}K_2^z((u_1^*)^z,(u_2^*)^z)=$$

$$=\max_{z=F_y}(-v(z))=\min_{z=F_y}v(z): \quad (2.2)$$

(2.1) և (2.2)-ից վերջնականապես ունենք

$$v(y)=\max_{z=F_y}v(z),\ y\in X_1 \quad (2.3)$$

$$v(y)=\min_{z=F_y}v(z),\ y\in X_n \quad (2.4)$$

(2.3), (2.4) հավասարումները լուծվում են

$$v(y)|_{y\in X_3}=H_1(y) \quad (2.5)$$

եզրային պայմանի դեպքում:

(2.5) եզրային պայմանով (2.3), (2.4) հավասարումների համակարգը հնարավորություն է տալիս իրագործելու խաղի արժեքը և խաղացողների լավագույն վարվելակերպերը գտնելու հետընթաց անդրադարձ ընթացակարգը: Իրոք, դիցուք՝ $\ell(z)\leq k-1$ երկարությամբ բոլոր Γ_z ենթախաղերի արժեքները հայտնի են և հավասար են v(z)-ի, դիցուք՝ Γ_y-ը $\ell(y)=k$ երկարություն ունեցող ենթախաղ է: Այդ դեպքում, եթե $y\in X_1$, ապա v(y)-ը որոշվում է (2.3) բանաձևով, իսկ եթե $y\in X_2$, ապա v(y)-ը որոշվում է (2.4) բանաձևով: Ընդ որում (2.3), (2.4) բանաձևերում v(z) ֆունկցիայի արժեքները հայտնի են, քանի որ համապատասխան ենթախաղերի երկարությունը k-1-ից մեծ չէ: Այս բանաձևերը ցույց են տալիս խաղացողների վարվելակերպերի կառուցման եղանակը: Իսկապես, եթե $y\in X_1$-ին, ապա առաջին խաղացողը (մաքսիմացնողը) պետք է y կետում ընտրի $z\in F_y$ գագաթը, որի համար հաջորդ ենթախաղի արժեքը առավելագույնն է: Իսկ եթե $y\in X_2$-ին, ապա 2-րդ խաղացողը (մինիմացնողը) պետք է ընտրի $z\in F_y$ դիրքը, որի համար հաջորդ ենթախաղի արժեքը նվազագույնն է:

Այն դեպքում, երբ խաղացողների ընտրությունները հակամարտ բազմաքայլ խաղում հերթագայվում են (հերթովի խաղ), (2.3), (2.4) հավասարումները կարող են գրվել մեկ հավասարման տեսքով: Իսկապես, դիտարկենք Γ_x ենթախաղը, և դիցուք՝ որոշակիության համար, $x\in X_1$-ին: Այդ դեպքում հաջորդ դիրքում խաղում է 2-րդ խաղացողը, կամ այդ դիրքը (խաղը հերթովի է) վերջնական է, այսինքն՝ $F_x\subset X_2\cup X_3$: Ուստի, կարելի է գրել

$$v(x) = \max_{y\in F_x} v(y), \quad x\in X_1, \tag{2.6}$$

$$v(y) = \min_{z\in F_y} v(z), \quad y\in F_x\subset X_2\cup X_3 \tag{2.7}$$

(2.7) տեղադրելով (2.6)-ի մեջ, ստանում ենք

$$v(x) = \max_{y\in F_x} [\min_{z\in F_y} v(z)], \quad x\in X_1 \tag{2.8}$$

Եթե $x\in X_2$, ապա համանմանորեն ունենք

$$v(x) = \min_{z\in F_y} [\max_{y\in F_x} v(z)] \tag{2.9}$$

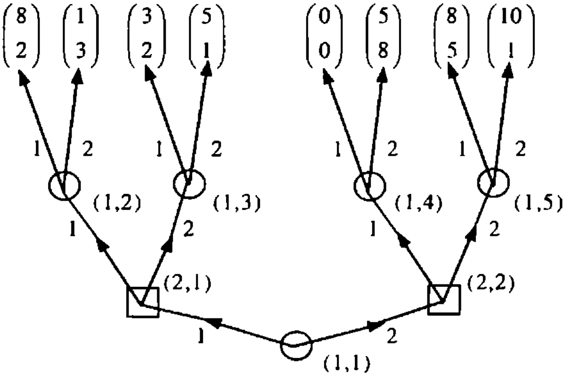
(2.8), (2.9) հավասարումները համարժեք են և պետք է դիտարկվեն $v(x)|_{x\in X_3} = H_1(x)$ սկզբնական պայմանով:

2.4 Նեշի բացարձակ հավասարակշռության գոյության թեորեմը՝ դիտարկվելով հակամարտ հերթովի բազմաքայլ խաղերի նկատմամբ, հնարավորություն է տալիս պնդելու «շախմատ», «շաշկի» խաղերում մաքուր վարվելակերպերի դասում հավասարակշռության իրավիճակի գոյությունը, իսկ (2.8), (2.9) հավասարումները ցույց են տալիս խաղի արժեքը գտնելու ուղին: Դրա հետ մեկտեղ ակնհայտ է, որ խաղի արժեքը և լավագույն վարվելակերպերը գտնելու համար տվյալ ֆունկցիոնալ հավասարումների լուծումը մոտ ապագայում չի իրագործվի ԷՀՄ-ներով և մենք այդպես էլ չենք իմանա, թե կարո՞ղ է, արդյոք, «սպիտակներով» կամ «սևերով» որևէ խաղացող երաշխավորել իր հաղթանակը ամեն մի պարտիայում, թե միշտ հնարավոր է «ոչ ոքին»: Սակայն շախմատում և շաշկիում բավականին հաջող փորձեր են կատարվում մի քանի քայլ առաջ մտածող ծրագրերի օգնությամբ կառուցելու մոտավոր լավագույն լուծումները և օգտագործելու (որպես կանոն փորձառական ճանապարհով ստացված) ընթացիկ դիրքերը գնահատող բազմապիսի ֆունկցիաները: Այդպիսի մոտեցումը հնարավոր է նաև լրիվ իրազեկմամբ ընդհանուր հակամարտ բազմաքայլ խաղերի ուսումնասիրության դեպքում: Գնահատող ֆունկցիաների հաջորդական բազմակրկնումը մի քանի քայլ առաջ կարող է ցանկալի արդյունքներ տալ:

3. Պատժման վարվելակերպեր

3.1 1-ին պարագրաֆում մենք առաջարկեցինք վերջավոր ծառակերպ գրաֆի վրա լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղերում բացարձակ հավասարակշռության (ըստ Նեշի) իրավիճակի գոյության թեորեմը: Միևնույն ժամանակ այդ դասի կոնկրետ խաղերը ուսումնասիրելիս կարելի է հայտնաբերել հավասարակշռության այնպիսի իրավիճակների մի ամբողջ ընտանիք, որոնց ներդրումները պարտադիր չէ, որ հավասարակշռության իրավիճակներ լինեն սկզբնական խաղի բոլոր ենթախաղերում: Այդպիսի իրավիճակների թվին են պատկանում հավասարակշռությունները պատժման վարվելակերպերում: Այս հասկացությունը ցույց տանք օրինակով:

Օրինակ 5. Դիցուք՝ Γ խաղն ընթանում է 3-րդ գծանկարում պատկերված գրաֆի վրա: N={1,2} բազմությունը բաղկացած է երկու խաղացողից: X_1 բազմությունը կազմող գագաթները պատկերված են շրջանակներով, X_2 բազմությունը՝ քառակուսիներով: Գրաֆի գագաթները համարակալված են երկյակ համարներով, աղեղները՝ մեկական համարներ:



Գծ. 3

Դժվար չէ համոզվել, որ $u_1^* = (1,1,2,2,2)$, $u_2^* = (1,1)$ իրավիճակը բացարձակ հավասարակշիռ է Γ խաղում: Ընդ որում խաղացողների շահումները համապատասխանաբար հավասար են 8 և 2 միավորի: Այժմ դիտարկենք $\bar{u}_1 = (2,1,2,1,2)$, $\bar{u}_2 = (2,2)$ իրավիճակը: Այս իրավիճակում խաղացողների շահումները համապատասխանաբար հավասար են 10-ի և 1-ի: Դրանով իսկ առաջին խաղացողը ստանում է ավելին, քան (u_1^*, u_2^*) իրավիճակում: $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ իրավիճակը հավասարակշիռ է Γ խաղում, սակայն բացարձակ հավասարակշիռ չէ: Իսկապես, $\Gamma_{1,4}$ ենթախաղում $\bar{u}_1$ վարվելակերպի ներդրումը առաջին խաղացողին թելադրում է ձախ աղեղի ընտրությունը, որը 1.4 դիրքում նրա համար լավագույնը չէ: 1.4 դիրքում առաջին խաղացողի նման գործողությունը կարելի է մեկնաբանել որպես 2-րդ խաղացողի «պատժման» սպառնալիք, եթե նա 2.2 դիրքում շեղվի առաջին խաղացողի համար ցանկալի 2-րդ աղեղի ընտրությունից, դրանով իսկ առաջին խաղացողին զրկելով 10 միավոր առավելագույն շահումից: Սակայն «պատժման» նման սպառնալիքն ըստ էության հազիվ թե կարելի է գործում միջոց համարել, քանի որ պատժողն ինքը կարող է կորցնել 5 միավոր շահում (ոչ լավագույն ձևով գործելով $\Gamma_{1,4}$ խաղում):

3.2 Տանք պատժման վարվելակերպերի խստորոշ սահմանումը: Պարզության համար սահմանափակվենք երկու անձանց անհակամարտ խաղի օրինակով: Դիցուք՝ տրված է երկու անձանց անհակամարտ խաղ՝

$$\Gamma = <u_1, u_2, K_1, K_2>$$

Γ խաղի հետ Γ_1 և Γ_2 երկու հակամարտ խաղերը կապենք հետևյալ կերպ. Γ_1-ը մի հակամարտ խաղ է՝ կառուցված Γ խաղի հիմքի վրա, որտեղ 2-րդ խաղացողը խաղում է առաջին խաղացողի դեմ, այն է՝ $K_2=-K_1$: Γ_2-ը հակամարտ խաղ է՝ կառուցված Γ խաղի հիմքի վրա, որտեղ առաջին խաղացողը խաղում է 2-րդ խաղացողի դեմ, այն է՝ $K_1=-K_2$: Γ_1, Γ_2, Γ խաղերի գրաֆները և դրանցում վարվելակերպերի բազմությունները համընկնում են: Γ_1 և Γ_2 խաղերում բացարձակ հավասարակշռության իրավիճակները համապատասխանաբար նշանակենք (u_{11}^*, u_{21}^*)-ով և (u_{12}^*, u_{22}^*)-ով: Դիցուք՝ Γ_{1x}-ը և Γ_{2x}-ը Γ_1 և Γ_2 խաղերի ենթախաղերն են, իսկ $v_1(x)$-ը $v_2(x)$-ը՝ այդ ենթախաղերի արժեքները: Այդ դեպքում $\{u_{11}^{*x}, u_{21}^{*x}\}$ և $\{u_{12}^{*x}, u_{22}^{*x}\}$ իրավիճակները հավասարակշիռ են համապատասխանաբար Γ_{1x}, Γ_{2x} խաղերում և $v_1(x)=K_1^*(u_{12}^{*x}, u_{22}^{*x})$, $v_2(x)=K_2^x(u_{12}^{*x}, u_{22}^{*x})$:

Դիտարկենք Γ խաղի (u_1,u_2) վարվելակերպերի կամայական զույգը: Իհարկե, վարվելակերպերի այս զույգը այդպիսին է նաև Γ_1, Γ_2 խաղերում: Դիցուք՝ $Z=(x_0=z_0,z_1,\ldots,z_e,\ldots,z_\ell)$-ը այն ուղին է, որ իրագործվում է (u_1,u_2) իրավիճակում:

Սահմանում: $\tilde{u}_1(\cdot)$ վարվելակերպը կոչվում է առաջին խաղացողի պատժման վարվելակերպ, եթե

$$\tilde{u}_1(z_k)=z_{k+1},\ z_k\in Z\cap X_1\text{-ի համար},$$

$$\tilde{u}_1(y)=u_{12}^*(y),\ y\in X_1,\ y\notin Z\text{-ի համար:} \qquad (3.1)$$

$\tilde{u}_2(\cdot)$ վարվելակերպը կոչվում է 2-րդ խաղացողի պատժման վարվելակերպ, եթե

$$\tilde{u}_2(z_k)=z_{k+1},\ z_k\in Z\cap X_2\text{-ի համար},$$

$$\tilde{u}_2(y)=u_{21}^*(y),\ y\in X_2,\ y\notin Z\text{-ի համար:} \qquad (3.2)$$

3.3 Պատժման վարվելակերպերի սահմանումից անմիջապես ստանում ենք հետևյալ հատկությունները՝

1^0. $K_1(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) = H_1(z_\ell)$, $K_2(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) = H_2(z_\ell)$:

2^0. Դիցուք՝ որևէ խաղացող, օրինակ՝ առաջին խաղացողն օգտագործելով $u_1(\cdot)$ վարվելակերպը, որի համար $z_k\in Z\cap X_1$ դիրքը առաջինն է Z ուղու վրա, որտեղ $u_1(\cdot)$-ը թելադրում է z'_{k+1} հաջորդ դիրքի ընտրությունը, որը տարբերվում է $u_1(\cdot)$ վարվելակերպով թելադրվող դիրքից, այսինքն՝ $z'_{k+1}\neq z_{k+1}$:

Այդ դեպքում $u_2(\cdot)$ պատժման վարվելակերպի սահմանումից հետևում է, որ

$$K_1(u_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) \le v_1(z_k): \qquad (3.3)$$

Համանմանորեն, եթե 2-րդ խաղացողն օգտագործում է $u_2(\cdot)$ վարվելակերպը, որի համար $z_k \in Z\cap X_2$ դիրքը առաջինն է Z ուղու վրա, որտեղ $u_2(\cdot)$-ը թելադրում է z'_{k+1} հաջորդ դիրքի ընտրությունը, որը տարբերվում է $\tilde{u}_2(\cdot)$ վարվելակերպով թելադրվող դիրքից, այսինքն, $z'_{k+1}\neq z_{k+1}$ ապա $\tilde{u}_1(\cdot)$ պատժման վարվելակերպի սահմանումից հետևում է, որ

$$K_2(\tilde{u}_1(\cdot), u_2(\cdot)) \le V_2(Z_k): \qquad (3.4)$$

Այստեղից մասնավորապես ստանում ենք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Դիցուք՝ $(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot))$-ը պատժման վարվելակերպերի իրավիճակ է: $(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot))$ իրավիճակի հավասարակշռության համար բավարար է, որ բոլոր $k=0,1,\ldots,\ell-1$-երի համար ճշմարիտ են

$$K_1(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) \ge v_1(z_k),$$

$$K_2(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) \ge v_2(z_k) \qquad (3.5)$$

անհավասարությունները, որտեղ $z_0,z_1,\ldots,z_\ell$-ը $(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot))$ իրավիճակում իրագործված ուղին է:

3.4. Դիցուք՝ $u^*_{11}(\cdot)$-ը և $u^*_{22}(\cdot)$-ը առաջին և երկրորդ խաղացողների լավագույն վարվելակերպերն են համապատասխանաբար Γ_1 և Γ_2 օժանդակ հակամարտ խաղերում, և $\bar{z}=\{\bar{z}_0,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_\ell\}$-ը այն ուղին է, որ համապատասխանում է $(u^*_{11}(\cdot),u^*_{22}(\cdot))$ իրավիճակին: Ենթադրենք, $\tilde{u}_1(\cdot)$ և $\tilde{u}_2(\cdot)$ պատժման վարվելակերպերը այնպիսին են, որ $\tilde{u}_1(\bar{z}_k)= u^*_{11}(\bar{z}_n)$, $\bar{z}_k \in Z\cap X_1$-ի համար և $\tilde{u}_2(\bar{z}_k)= u^*_{22}(\bar{z}_k)$, $\bar{z}_k \in Z\cap X_2$-ի համար: Այդ դեպքում $(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot))$ իրավիճակը պատժման վարվելակերպերում կազմում է Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ: Այս պնդումն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$K_1(u^*_{11}(\cdot),u^*_{22}(\cdot)) = K_1(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) \ge V_1(\bar{z}_k)\,,$$

$$K_2(u^*_{11}(\cdot),u^*_{22}(\cdot)) = K_2(\tilde{u}_1(\cdot),\tilde{u}_2(\cdot)) \ge V_2(\bar{z}_k)\,, \qquad (3.6)$$

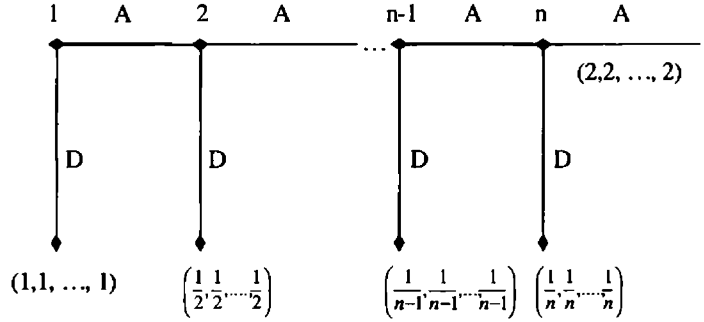
$$K= 0,1,\ldots,\ell-1$$

և օգտվել նախորդ կետի թեորեմից: (3.6) անհավասարումները հետևում են համապատասխանաբար Γ_1 և Γ_2 խաղերում $u^*_{11}(\cdot)$ և $u^*_{22}(\cdot)$ վարվելակերպերի օպտիմալությունից: Դրանց հիմնավորումն առաջարկում ենք որպես վարժություն: Այսպիսով, ստացանք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Γ խաղում պատժման վարվելակերպերում միշտ գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, ընդ որում այդ իրավիճակում շահումները հավասար են $K_i(u^*_{11}(\cdot),u^*_{22}(\cdot))$, որտեղ $u^*_{11}(\cdot)$-ը և $u^*_{22}(\cdot)$-ը համապատասխանաբար Γ_1 և Γ_2 օժանդակ հակամարտ խաղերում առաջին և երկրորդ խաղացողների լավագույն վարվելակերպերն են:

Պատժման վարվելակերպերի իմաստն այն է, որ խաղացողը հակառակորդին ստիպում է խաղի մեջ ընթանալ որոշակի ուղիով (որոշակի ընտրություններով), օգտագործելով մշտական սպառնալիքը՝ անցնելու այն վարվելակերպին, որը լավագույնն է հակառակորդի դեմ հակամարտ խաղում: Պատժման վարվելակերպերի դասում հավասարակշռության իրավիճակների բազմությունը բավականաչափ ներկայացուցչական է, սակայն այդ վարվելակերպերը չպետք է համարել «շատ լավը», քանի որ, պատժելով հակառակորդին, խաղացողը կարող է է՛լ ավելի խստորեն պատժած լինել ինքն իրեն:

Օրինակ 6: Դիտարկենք N անձանց խաղը, որը պատկերված է 4-րդ գծանկարում



Գծ. 4

Այս խաղում յուրաքանչյուր խաղացող կատարում է մեկ քայլ և խաղացողները իրենց քայլերը կատարում են հերթով, յուրաքանչյուր դիրքում հնարավորություն ունենալով երկընտրանքից ընտրելու մեկը՝ A-ն կամ D-ն: Խաղացողների շահումները նշված են վերջնական դիրքերում: Կիրառելով ինդուկցիայի եղանակը խաղի վերջից, հեշտ է համոզվել, որ $u_i^* = A$, $i=1,\dots,N$, $u^*=(A,A,\dots,A)$ իրավիճակը Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ է և $(2,2,\dots,2)$ շահումներով բացարձակ հավասարակշիռ իրավիճակ:

Իսկապես, դիցուք՝ i-րդ խաղացողն ընտրում է $u_i=D$, այդ դեպքում $(u^*/u_i)=(u^*/D)=(A,A\dots,A,D,A,\dots,A)$ իրավիճակում բոլոր խաղացողների շահումները հավասար են համապատասխանաբար $1/i,1/i,\dots,1/i$: Այսինքն՝

$$2 = K_i(u_i^*) > K_i(u^*/u_i = D) = 1/i,$$

և u^*-ն Նեշի հավասարակշռություն է: Ակնհայտ է, որ այս նույն դատողությունը ճշմարիտ է ցանկացած ենթախաղի համար՝ սկսած k-րդ քայլից:

Սակայն, այդ իրավիճակը անկայուն է այն իմաստով, որ մեծ թվով խաղացողների դեպքում, առաջին խաղացողները չեն կարող վստահ լինել, որ խաղացողներից որևէ մեկը չի «սխալվի» և A-ի փոխարեն չի ընտրի D-ն և այդ դեպքում բոլոր խաղացողները (ոչ միայն նա, ով «սխալվեց», շահումի կորուստներ կունենան:

Խաղի մեջ պատժման վարվելակերպերում գոյություն ունի նաև հավասարակշռության իրավիճակների հարուստ բազմություն: Այն իրավիճակը, որի դեպքում առաջին և ցանկացած այլ խաղացող ընտրում է D-ն, Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ է: Այսինքն՝ պարզվում է, որ հավասարակշիռ են հետևյալ տեսքի իրավիճակները.

$$\bar{u} = (D,A,...,D,...,A),$$

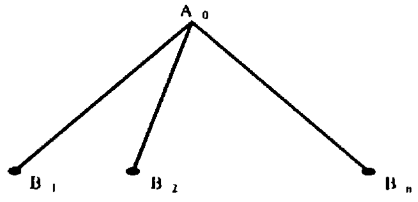
(D-ով՝ առաջին և ևս մեկ D-ով՝ ցանկացած այլ տեղում): Բոլոր նման իրավիճակներում շահումները միևնույն են և հավասար են (1,1,...,1)-ի:

Իսկապես, դիցուք՝ $\bar{u}$ իրավիճակում 2-րդ խաղացողը, որն ընտրում է D-ն, ունի k>1 համարը, եթե i≥2 խաղացողն ընտրում է u_i-ն, որը չի պատկանում $\bar{u}$ իրավիճակին, ապա խաղացողների շահումները չեն փոխվում, քանի որ 1-ին խաղացողի կողմից առաջին քայլում D այլընտրանքի ընտրությունը երաշխավորում է խաղի ավարտը այդ քայլում, որի դեպքում բոլոր խաղացողների շահումը հավասար է 1-ի: Եթե i=1 խաղացողը D այլընտրանքի փոխարեն ընտրում է A այլընտրանքը, ապա շնորհիվ $\bar{u}$ դիրքում ևս մեկ խաղացողի առկայության, որն ընտրում է D-ն (k համարով խաղացողը), 1-ին խաղացողի շահումը պակասում և հավասարվում է $\frac{1}{K}$-ի:

$\bar{u}$ իրավիճակում շահումները, իհարկե, քիչ են u^*=(A,A,...,A) իրավիճակի շահումներից, սակայն կախված չեն մեծ թվով խաղացողների սխալներից:

4. Ստորակարգ խաղեր

Անհակամարտ բազմաքայլ խաղերի կարևորագույն ենթադաս են կազմում ստորակարգ խաղերը: Այս խաղերը՝ մոդելավորում են ստորակարգման կառուցվածք ունեցող ներհակորեն կառավարվող համակարգերը: Այդպիսի կառուցվածքը որոշվում է որոշակի գերակայության կարգով իրար հաջորդող կառավարման մակարդակների հաջորդականությամբ: Ստորակարգ խաղերը մաթեմատիկորեն դասակարգվում են ըստ մակարդակների թվի և ուղղահայաց կապերի բնույթի: Դրանցից պարզագույնը երկմակարդակ համակարգն է:



Գծ. 5

4.1 Ներհակորեն կառավարվող երկմակարդակ համակարգը գործում է հետևյալ կերպ: Կառավարող (կոորդինացնող) A_0 կենտրոնը գտնվում է ստորակարգության առաջին մակարդակում, U կառավարումների տրված բազմությունից ընտրում է $u=(u_1,\ldots,u_n)$ վեկտորը, որտեղ u_i-ն կենտրոնի կառավարող ազդեցությունն է իրեն ենթակա B_i, $i=1,2,\ldots,n$ ստորաբաժանումների վրա, որոնք գտնվում են ստորակարգության երկրորդ մակարդակում: Իրենց հերթին, B_i-ները, $i=1,2,\ldots,n$ ընտրում են $v_i\in V_i(u_i)$, կառավարումները, որտեղ $V_i(u_i)$-ն՝ B_i-ների ստորաբաժանման կառավարումների բազմություններն են՝ A_0 կենտրոնի U կառավարումով կանխորոշված: Այդպիսով, կառավարող կենտրոնն ունի առաջին քայլի իրավունք և կարող է սահմանափակել իրեն ենթակա ստորաբաժանումների հնարավորությունները՝ անհրաժեշտ հունի մեջ դնելով նրանց գործողությունները: A_0 կենտրոնի նպատակն է հետագայում մաքսիմացնել $K_0(u,v_1,\ldots,v_n)$ ֆունկցիոնալը ըստ u_i-ների, իսկ B_i, $i=1,2,\ldots,n$ ստորաբաժանումները, ունենալով սեփական նպատակներ, ձգտում են մաքսիմացնել $K_i(u_i,v_i)$ ֆունկցիոնալները ըստ v_i-ի:

4.2 Այս խնդիրը ձևայնացնենք որպես (n+1) անձի (A_0 վարչական կենտրոնի և $B_1,\ldots,B_n$ արտադրական ստորաբաժանումների) Г բնականոն տեսքի անդաշինք խաղ: Դիցուք՝ A_0 խաղացողն ընտրում է $u\in U$ վեկտորը, որտեղ՝

$$U=\{u=(u_1,\ldots,u_n)|\ u_i\geq 0\ u_i\in R^{\ell},\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}u_i=b\},\ b\geq 0:$$

A_0-ն խաղացողի վարվելակերպերի բազմությունն է Г խաղում: u_i վեկտորը մեկնաբանենք որպես ℓ անվանումների պաշարների հավաքածի, որոնք A_0 կենտրոնը հատկացնում է i-րդ արտադրական ստորաբաժանմանը:

Դիցուք՝ B_i խաղացողներից յուրաքանչյուրը, իմանալով A_0-ի ընտրության մասին, ընտրում է $v_i\in V_i(u_i)$ վեկտորը, որտեղ

$$V_i(u_i)=\{v_i\in R^m : v_iA_i\leq u_i+\alpha_i,\ v_i\geq 0\}: \qquad (4.1.)$$

v_i վեկտորը մեկնաբանվում է որպես i-րդ արտադրական ստորաբաժանման տարբեր արտադրատեսակների արտադրության ծրագիր; A_i-ն ($A_i\geq 0$) i-րդ արտադրական ստորաբաժանման արտադրական կամ տեխնոլոգիական մատրիցն է; α_i-ն ($\alpha_i\geq 0$) i-րդ արտադրական ստորաբաժանման առկա պաշարների վեկտորը:

Г խաղում B_i խաղացողի վարվելակերպեր ասելով, հասկանում ենք այն $v_i(\cdot)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք յուրաքանչյուր u_i տարրին, $(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n)\in U$, համապատասխանեցնում են $v_i(u_i)\in V_i(u_i)$ վեկտորը: Այդպիսի ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք V_i, $i=1,2,\ldots,n$: Որոշենք Г խաղում խաղացողների շահումների ֆունկցիաները: A_0 խաղացողի համար շահումի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$K_0(u,v_1(\cdot),\ldots,v_n(\cdot))=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ v_i(u_i),$$

որտեղ $\alpha_i\geq 0$, $\alpha_i\in R^m$ սևեռյալ վեկտոր է, $i=1,\ldots,n$; $\alpha_i v_i(u_i)$-ն α_i և $v_i(u_i)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Ենթադրում ենք, որ B_i խաղացողի շահումի ֆունկցիան հավասար է՝ $K_0(u,v_1(\cdot),\ldots,v_n(\cdot))=c_iv_i(u_i)$, որտեղ $c_i\geq 0$, $c_i\in R^m$, $i=1,\ldots,n$՝ սևեռյալ վեկտոր է:

Այսպիսով, Γ խաղն ունի $\Gamma=(U,V_1,V_2,\ldots,V_n,K_0,K,\ldots,K_n)$ տեսքը:

4.3 Γ խաղում կառուցենք Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ:

Դիցուք՝ $v_i^*(u_i)\in V_i(u_i)$ վեկտորը

$$\max_{v_i\in V_i(u_i)} c_iv_i=c_i v_i^*(u_i),\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (4.2)$$

պարամետրական գծային ծրագրման խնդրի լուծումն է (պարամետրը u_i վեկտորն է), իսկ $u^*\in U$ -ն

$$\max_{u\in U} K_0(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot)) \qquad (4.3)$$

խնդրի լուծումն է:

Պարզության համար ենթադրենք, որ (4.2)-ում և (4.3)-ում մաքսիմումները հասանելի են: Նկատենք, որ (4.3)-ը էապես խզվող նպատակային ֆունկցիայով ոչ գծային ծրագրման խնդիր է (մաքսիմացումը կատարվում է ըստ u-ի, իսկ $v_i^*(u_i)$, ընդհանուր առմամբ, u_i պարամետրի խզվող ֆունկցիաներ են: Ցույց տանք, որ Γ խաղում $(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot))$ կետը հավասարակշռության իրավիճակ է: Իրոք՝

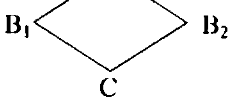
$$K_0(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot))\geq K_0(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot)),\ u\in U:$$

Այնուհետև, բոլոր $i=1,\ldots,n$ թվերի համար՝

$$K_i(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot)) = c_iv_i^*(u_i^*)\geq C_iv_i(u_i^*) =$$
$$= K(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_{i-1}^*(\cdot), v_i^*(\cdot), v_{i+1}^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot))$$

հավասարությունը ճիշտ է ցանկացած $v_i(\cdot)\in V_i$-ի համար: Այսպիսով $A_0,B_1,\ldots,B_n$ խաղացողներից ոչ մեկին ձեռնտու չէ միակողմանիորեն շեղվել $(u^*, v_1^*(\cdot),\ldots, v_n^*(\cdot))$ իրավիճակից, ուրեմն այն հավասարակշիռ է: Նկատենք որ տվյալ իրավիճակը կայուն է նաև դրանից շեղված $S\subset\{B_1,\ldots,B_n\}$ ցանկացած դաշնախմբի նկատմամբ, քանի որ i-րդ խաղացողի K_i շահումը կախված չէ $v_j(\cdot)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $j\neq i$ փոփոխականներից:

4.4 Կրկնակի ենթակայության ստորաբաժանումներ ունեցող ստորակարգ համակարգերը կոչվում են շեղանկյունաձև (Գծ.6):



Գծ. 6

Կրկնակի ենթակայության C ստորաբաժանման կառավարումը կախված է B_1-ի կառավարումից և B_2-ի կառավարումից: Կարելի է պատկերացնել այնպիսի իրավիճակ, որում բնագավառի շահերը ներկայացնում է B_1 կենտրոնը, իսկ տարածաշրջանի շահերը, ներառյալ շրջակա միջավայրի պահպանության խնդիրները, B_2 կենտրոնը: Կառավարման պարզ շեղանկյունաձև համակարգը որոշումների ընդունման եռամակարդակ ստորակարգ համակարգի օրինակ է: Վարչական կենտրոնը գտնվում է ամենաբարձր մակարդակում և իր տրամադրության տակ ունի նյութական և աշխատանքային պաշարներ: Նա ազդում է իրեն ենթակա երկու կենտրոնների գործունեության վրա, որոնք պատկանում են հաջորդ մակարդակին: Այդ երկու կենտրոնների ընդունած որոշումներից է կախված այն ձեռնարկության արտադրության ծավալը, որ գտնվում է ստորակարգ համակարգի վերջին մակարդակում:

Որոշումների ընդունման այս գործընթացը դիտարկենք որպես չորս անձանց խաղ: Այն նշանակենք Γ-ով: Անցնելով խաղային դրվածքի, պայմանավորվենք, որ 1-ին քայլը կատարում է A_0 խաղացողը և ընտրում է $u=(u_1,u_2)$ տարրը (վարվելակերպը) որոշ U բազմությունից, որտեղ U-ն A_0 խաղացողի վարվելակերպերի բազմությունն է: $u\in U$ տարրը սահմանափակում է հաջորդ քայլում B_1 և B_2 խաղացողների կողմից ընտրություն կատարելու հնարավորությունները: Այլ կերպ, B_1 խաղացողի ընտրությունների բազմությունը հանդիսանում է u_1 պարամետրի ֆունկցիա (նշանակենք այն $B_1(u_1)$), և համանմանորեն, B_2 խաղացողի ընտրությունների բազմությունը հանդիսանում է u_2 պարամետրի ֆունկցիա (նշանակենք այն $B_2(u_2)$): w_1-ով ($w_1\in B_1(u_1)$) և w_2-ով ($w_2\in B_2(u_2)$) նշանակենք համապատասխանաբար B_1 և B_2 խաղացողների ընտրությունների բազմությունների տարրերը: B_1 և B_2 խաղացողների կողմից ընտրված w_1 և w_2 պարամետրերը C խաղացողի ընտրությունների բազմությունը սահմանափակում են խաղի երրորդ քայլին, այսինքն, այդ բազմությունը դառնում է w_1 և w_2 պարամետրերի ֆունկցիա: Նշանակենք այն $C(w_1,w_2)$, իսկ այդ բազմության տարրերը (արտադրական ծրագրերը)՝ v :

Դիցուք՝ A_0, B_1, B_2, C բոլոր խաղացողների շահումները կախված են v արտադրական ծրագրից, որն ընտրվում է C խաղացողի կողմից և համապատասխանաբար հավասար են $\ell_1(v)$, $\ell_2(v)$, $\ell_3(v)$, $\ell_4(v)$, որտեղ $\ell_i(v)\geq 0$:

Այդպիսի ստորակարգ խաղը կարելի է ներկայացնել որպես չորս անձանց բնականոն տեսքի անդաշինք խաղ, եթե համարենք, որ A_0 խաղացողի վարվելակերպերը $u=(u_1,u_2)\in U$ տարրեր են, իսկ B_1, B_2 և C խաղացողների վարվելակերպերը $w_1(u_1)$, $w_2(u_2)$ և $v(w_1,w_2)$ ֆունկցիաներն են, որոնց արժեքները համապատասխանաբար պատկանում են $B_1(u_1)$, $B_2(u_2)$ և $C(w_1,w_2)$ բազմություններին (այդպիսի ֆունկցիաների բազմությունները նշանակենք B_1, B_2, C), և որոնք առավել բարձր մակարդակում գտնվող խաղացողի (կամ խաղացողների) յուրաքանչյուր հնարավոր ընտրությանը համապատասխանեցնում են տվյալ խաղացողի ընտրությունը:

Ընդունելով՝

$$K_i(u,w_1(\cdot),w_2(\cdot),v(\cdot)) = \ell_i(v(w_1(u_1)w_2(u_2))), \quad i=1,2,3,4,$$

կստանանք Γ խաղի բնականոն տեսքը՝

$$\Gamma = (U,B_1,B_2,C,K_1,K_2,K_3,K_4):$$

4.5 Փնտրենք Γ խաղում Նեշի հավասարակշռության իրավիճակը: Դրա համար կատարենք օժանդակ կառուցումներ:

Յուրաքանչյուր (w_1,w_2), $(w_1,w_2)\in \bigcup_{u\in U} B_1(u_1)\times B_2(u_2)$ սևեռյալ զույգի համար $v^*(w_1,w_2)$-ով նշանակենք հետևյալ պարամետրական խնդրի լուծումը՝

$$\max_{v\in C(w_1,w_2)} \ell_4(v) = \ell_4(v^*(w_1,w_2)): \qquad (4.4)$$

(Համարում ենք, որ (4.4)-ում մաքսիմումը հասանելի է:) Պարզվում է, որ (4.4) խնդրի $v^*(\cdot)=v^*(w_1,w_2)$, լուծումը w_1, w_2 և $v^*(\cdot)\in C$ պարամետրերի ֆունկցիա է: Դիտարկենք պարամետրական (u_1, u_2 պարամետրերով) B_1 և B_2 երկու անձանց $\Gamma(u_1,u_2)=\{B_1(u_1),B_2(u_2),\ell_2,\ell_3\}$ անհակամարտ խաղը, որտեղ $\ell_2=\ell_2(v^*(w_1,w_2))$, $\ell_3=\ell_3(v^*(w_1,w_2))$: $\Gamma(u_1,u_2)$-ում B_1 խաղացողի վարվելակերպերը $w_1\in B_1(u_1)$ տարրերն են, B_2 խաղացողի վարվելակերպերը՝ $w_2\in B_2(u_2)$ տարրերը: Ենթադրենք, որ $\Gamma(u_1,u_2)$ խաղում գոյություն ունի Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ, որը նշանակենք $(w_1^*(u_1), w_2^*(u_2))$-ով: Նշենք, որ $w_i^*(\cdot)$-ն u_i պարամետրի ֆունկցիա է, և $w_i^*(\cdot)\in B_i$, $i=1,2$:

Դիցուք՝ այնուհետև $u^*=(u_1^*,u_2^*)$-ը հետևյալ էքստրեմալ խնդրի լուծումն է.

$$\max_{u\in U} \ell_1(v^*(w_1^*(u_1), w_2^*(u_2))): \qquad (4.5)$$

Լեմ: $(u^*, w_1^*(\cdot), w_2^*(\cdot), v^*(\cdot))$ իրավիճակը Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ է Γ խաղում:

Ապացուցում: Ըստ u^*-ի սահմանման, (4.5)-ից հետևում է՝

$$K_1(u^*, w_1^*(\cdot), w_2^*(\cdot), v^*(\cdot)) = \max_{u\in U} \ell_1(v^*(w_1^*(u_1), w_2^*(u_2))) \geq$$

$$\geq \ell_1(v^*(w_1^*(u_1), w_2^*(u_2))) = K_1(u, w_1^*(\cdot), w_2^*(\cdot), v^*(\cdot))$$

առնչությունը բոլոր $u\in U$-ի համար:

Քանի որ $w_1^*(u_1), w_2^*(u_2)$-երը $\Gamma'(u_1^*,u_2^*)$ օժանդակ խաղում ստեղծում են Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ, ցանկացած $w_1(\cdot)\in B_1$ $w_1(u_1^*)=$ $=\tilde{w}_1,\in B_1(u_2^*)$ ֆունկցիայի համար ճշմարիտ են հետևյալ առնչությունները՝

$$K_2(u^*, w_1^*(\cdot), w_2^*(\cdot), v^*(\cdot)) = \ell_2(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))) \geq \ell_2(u^*(\tilde{w}_1, w_2^*(u_2^*))) =$$

$$= K_2(u^*,w_1(\cdot), w_2^*(\cdot),v^*(\cdot)):$$

Համանման անհավասարությունը ճիշտ է նաև B_2 խաղացողի համար:

Ըստ v^* ֆունկցիայի սահմանումի (4.5)-ից ունենք՝

$$K_4(u^*, w_1^*(\cdot), w_2^*(\cdot), v^*(\cdot)) = \ell_4(v^*(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*))) =$$

$$= \max_{v\in C(w_1^*,(u_1^*),w_2^*(u_2^*))} \ell_4(v) \geq \ell_4(\tilde{v}) = K_4(u^*, w_1^*(\cdot), w_2^*(\cdot), v(\cdot))$$

ցանկացած $v(\cdot)\in C$ ֆունկցիայի համար,

$$v(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*)) = \tilde{v} \in C(w_1^*(u_1^*), w_2^*(u_2^*)):$$

Լեմը ապացուցված է:

5. Ոչ լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղեր

5.1 1-4 պարագրաֆներում դիտարկվեցին լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղերը՝ որոշված $\Gamma \doteq (X,F)$ վերջավոր ծառակերպ գրաֆի վրա, որոնցում խաղացողներից յուրաքանչյուրը իր քայլի կատարման պահին ստույգ գիտեր, թե որ դիրքում կամ ծառի որ գագաթում է գտնվում ինքը: Հենց այդ պատճառով հնարավոր եղավ մտցնել i-րդ խաղացողի վարվելակերպ հասկացությունը՝ որպես x_i հերթականության բազմության վրա որոշված միարժեք $u_i(x)$ ֆունկցիա, որի արժեքները F_x բազմությունում են:

Սակայն, եթե փորձենք հետազոտել այնպիսի բազմաքայլ խաղեր, երբ խաղացողներն իրենց ընտրությունը կատարելիս ստույգ չգիտեն իրենց դիրքը քայլը կատարելու պահին, կամ կարող են լոկ ենթադրել, որ այդ դիրքը պատկանում է X_i հերթականության բազմության որոշ A ենթաբազմությանը, ապա խաղացողի վարվելակերպի իրականացում, որպես $x\in X_i$ դիրքի ֆունկցիայի, անհնարին կդառնա:

Այսպիսով խաղի իրազեկային կառուցվածքը բարդացնելու ցանկությունը անխուսափելիորեն հանգեցնում է վարվելակերպ հասկացության փոփոխության: Ստույգ ձևակերպումների համար անհրաժեշտ է առաջին հերթին ձևայնացնել իրազեկում հասկացությունը խաղի համար: Այստեղ կարևոր դեր է խաղում իրազեկման բազմություն հասկացությունը:

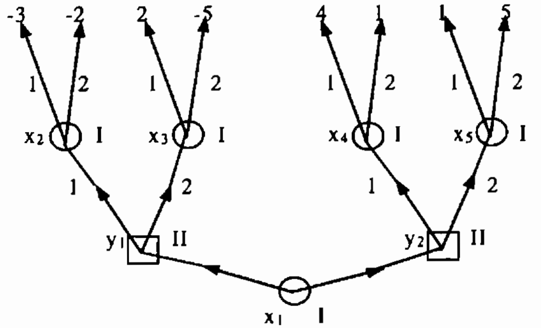
Ասվածը պարզաբանենք մի քանի պարզագույն օրինակներով, որոնք խաղերի տեսության ուսումնական գրականության մեջ դարձել են դասական:

Օրինակ 7: (Հակամարտ խաղ): Կատարելով առաջին քայլը՝ 1-ին խաղացողը {1,2} բազմությունից ընտրում է մի թիվ: Երկրորդ քայլը կատարում է 2-րդ խաղացողը: Գիտենալով 1-ին խաղացողի ընտրությունը, նա էլ է {1,2} բազմությունից ընտրում մի թիվ: Երրորդ քայլը կատարում է դարձյալ 1-ին խաղացողը: Գիտենալով 2-րդ խաղացողի ընտրությունը և հիշելով սեփական ընտրությունը, նա {1,2} բազմությունից ընտրում է մի թիվ:

Այստեղ խաղը դադարում է, և 1-ին խաղացողն ստանում է H շահում (2-րդ խաղացողը՝ –H շահում, այսինքն՝ խաղը հակամարտ է), որտեղ H ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\begin{array}{ll} H(1,1,1)=-3 & H(2,1,1)=4 \\ H(1,1,2)=-2 & H(2,1,2)=1 \\ H(1,2,1)=2 & H(2,2,1)=1 \\ H(1,2,2)=-5 & H(2,2,2)=5 \end{array} \tag{5.1}$$

Խաղի $\Gamma=(X,F)$ գրաֆը պատկերված է 10-րդ գծանկարում:

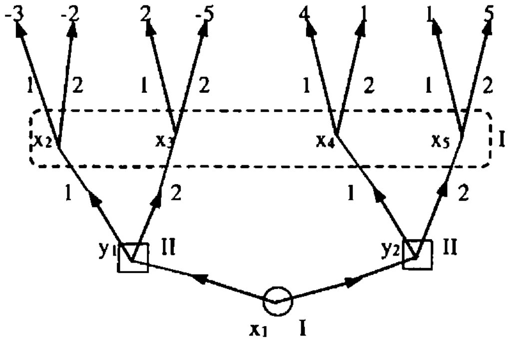


Գծ. 7

Գրաֆի վրա օղակներով պատկերված են այն դիրքերը, որոնցում քայլեր է կատարում 1-ին խաղացողը, իսկ քառակուսիներով՝ այն դիրքերը, որոնցում քայլեր է կատարում 2-րդ խաղացողը: Եթե X_1 բազմությունը նշանակենք X-ով, X_2 բազմությունը՝ Y-ով և այդ բազմությունների տարրերը համապատասխանաբար, $x\in X$, $y\in Y$, ապա 1-ին խաղացողի $u_1(\cdot)$ վարվելակերպը տրվում է $u_1(\cdot)=\{u_1(x_1),\ u_1(x_2),\ u_1(x_3),\ u_1(x_4),\ u_1(x_5)\}$ հնգաչափ վեկտորով, որը X բազմության յուրաքանչյուր դիրքում պահանջում է $\{1,2\}$ երկու թվերից մեկի ընտրությունը: 2-րդ խաղացողի $u_2(\cdot)$ վարվելակերպը համգունապես ներկայացնում է $u_2(\cdot)=\{u_2(y_1),\ u_2(y_2)\}$ երկչափ վեկտորը, որը պահանջում է $\{1,2\}$ երկու թվերից մեկի ընտրությունը Y բազմության յուրաքանչյուր դիրքում: Այսպիսով 1-ին խաղացողն այս խաղում ունի 32 վարվելակերպ, իսկ 2-րդ խաղացողը՝ 4 վարվելակերպ: Խաղին համապատասխանող բնականոն տեսքը՝ 32×4 չափի մատրից է, որը սակայն ունի հավասարակշռության իրավիճակ՝ մաքուր վարվելակերպերում: Կարելի է համոզվել, որ դիտարկվող խաղի արժեքը հավասար է 4-ի: 1-ին խաղացողն ունի չորս լավագույն մաքուր վարվելակերպ՝ (2,1,1,1,2), (2,1,2,1,2), (2,2,1,1,2), (2,2,2,1,2), իսկ 2-րդ խաղացողն ունի երկու լավագույն վարվելակերպ. (1,1), (2,1):

Օրինակ 8: Մի փոքր փոխենք 7-րդ օրինակի իրազեկման պայմանները: Խաղը հակամարտ է: Կատարելով առաջին քայլը, 1-ին խաղացողը $\{1,2\}$ բազմությունից ընտրում է մի թիվ: Երկրորդ քայլը կատարում է 2-րդ խաղացողը: Գիտենալով 1-ին խաղացողի ընտրությունը, նա էլ է $\{1,2\}$ բազմությունից ընտրում մի թիվ: Երրորդ քայլը կատարում է դարձյալ 1-ին խաղացողը: Չիմանալով 2-րդ խաղացողի ընտրությունը և մոռանալով սեփական ընտրությունը, նա մի թիվ է ընտրում {1,2} բազմությունից: Այստեղ խաղն ավարտվում է, իսկ շահումը որոշվում է (5.1) բանաձևով, ինչպես որ նախորդ օրինակում:

Խաղի $\Gamma=(X,F)$ գրաֆը չի փոխվում, սակայն, գտնվելով x_2, x_3, x_4, x_5 հանգույցներում, (խաղի երրորդ քայլին) 1-ին խաղացողը չի կարող որոշել, թե իրականում որ հանգույցում է գտնվում ինքը, բայց, գիտենալով քայլերի հերթականությունը (երրորդ քայլ), նա կարող է համոզված լինել, որ չի գտնվում x_1 հանգույցում: Γ գրաֆում x_2, x_3, x_4, x_5 հանգույցներն առնենք կետագիծ շրջանակի մեջ (գծ.8): Արդյունքում x_1 հանգույցը հայտնվեց



Գծ. 8

շրջանակի մեջ, ինչը կարելի է մեկնաբանել որպես 1-ին խաղացողի կողմից այդ հանգույցի ստույգ իմացությունը , երբ ինքը գտնվում էր այնտեղ: y_1,y_2 հանգույցներն առնված են քառակուսիների մեջ: Սա նույնպես նշանակում է, որ 2-րդ խաղացողն իր քայլը կատարելիս գտնվելով դրանցից մեկում, կարող է մեկ ուրիշից այն տարբերել: x_2, x_3, x_4, x_5 հանգույցները խմբավորելով մի բազմության մեջ. մենք ցույց ենք տալիս դրանց անզանազանելիության փաստը 1-ին խաղացողի համար: Այն բազմությունները, որոնցում խմբավորված են հանգույցները, կանվանենք իրազեկման բազմություններ:

Այժմ անցնենք վարվելակերպերի նկարագրությանը: 2-րդ խաղացողի իրազեկության վիճակը չի փոխվել, այդ պատճառով նրա վարվելակերպերի բազմությունը նույնն է, ինչ որ 7-րդ օրինակում, այսինքն՝ բաղկացած է չորս վեկտորներից՝ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2): 1-ին խաղացողի իրազեկության վիճակը փոխվել է: Խաղի երրորդ քայլում նա գիտե միայն այդ քայլի համարը, բայց չգիտե այն դիրքը, որում գտնվում է: Հետևաբար, նա չի կարող իրականացնել հաջորդ զագաթի ընտրությունը (կամ {1,2} բազմությունից թվի ընտրությունը)՝ կախված այն դիրքից, որում գտնվում է երրորդ քայլի ժամանակ: Այդ պատճառով երրորդ քայլում նա ստիպված է, անկախ իսկապես իրականացված դիրքից, ընտրել {1,2} երկու թվերից մեկը: Այդ պատճառով նրա վարվելակերպը իրենից ներկայացնում է (i,j), $i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,2\}$ թվերի զույգը, որտեղ i թիվն ընտրվում է x_1 դիրքում, իսկ j թիվը բոլոր

x_2, x_3, x_4, x_5 դիրքերում նույնն է երրորդ քայլի ժամանակ: Այսպիսով պարզվում է, որ j թվի ընտրությունը բազմության ֆունկցիա է և կարող է ունենալ $u\{x_2,x_3,x_4,x_5\}=j$ տեսքը: Տվյալ խաղում երկու խաղացողներն էլ ունեն չորսական վարվելակերպ, և խաղի մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

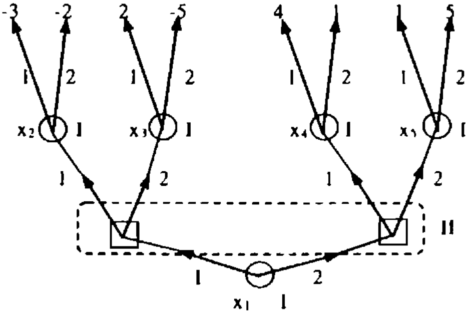
$$\begin{array}{c} \\ (1.1) \\ (1.2) \\ (2.1) \\ (2.2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1.1) & (1.2) & (2.1) & (2.2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Այս խաղում մաքուր վարվելակերպերում չկա հավասարակշռության իրավիճակ: Խաղի արժեքը հավասար է 19/7, 1-ին խաղացողի լավագույն խառը վարվելակերպը (0, 0, 4/7, 3/7) վեկտորն է, իսկ 2-րդ խաղացողի լավագույն խառը վարվելակերպը հավասար է (4/7, 3/7, 0, 0)-ի: 8-րդ օրինակի համեմատությամբ 1-ին խաղացողի երաշխավորված շահումը նվազում է: Դրա պատճառը նրա իրազեկության վիճակի վատթարացումն է:

Հետաքրքիր է, որ 9-րդ օրինակի խաղի մատրիցն ունի 4x4 չափ, մինչդեռ 8-րդ օրինակի խաղի մատրիցը 32x4 չափի է: Այսպիսով մատչելի իրազեկության նվազումը փոքրացնում է շահումների մատրիցի չափը, ուստի և հեշտացնում խաղի լուծումը, ինչը հակասում է լայն տարածում գտած այն կարծիքին, թե իրազեկության նվազումը բարդացնում է որոշումների ընդունումը:

Փոփոխելով իրազեկման պայմանները, կարելի է ստանալ 8-րդ օրինակում նկարագրված խաղի այլ տարբերակներ:

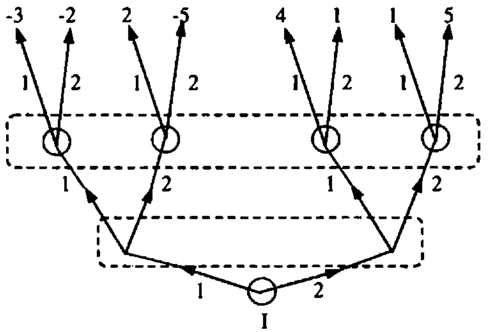
Օրինակ 9: Կատարելով առաջին քայլը, 1-ին խաղացողը {1,2} բազմությունից ընտրում է մի թիվ: Երկրորդ քայլը կատարում է 2-րդ խաղացողը, որը, չիմանալով 1-ին խաղացողի ընտրությունը, մի թիվ է ընտրում {1,2} բազմությունից: Այնուհետև կատարելով երրորդ քայլը, 1-ին խաղացողը {1,2} բազմությունից մի թիվ ընտրում է՝ իմանալով 2-րդ խաղացողի ընտրությունը և հիշելով առաջին քայլում իր կատարած ընտրությունը: Շահումը որոշվում է նույն ձևով, ինչպես որ 8-րդ օրինակում (տե՛ս. գծ.9)



Գծ. 9

Քանի որ երրորդ քայլը կատարելիս խաղացողը գիտե այն դիրքը, որում ինքը գտնվում է, երրորդ մակարդակի դիրքերն առնված են շրջանակների մեջ, երկու հանգույցները, որոնցում իր քայլն է կատարում 2-րդ խաղացողը, նշել ենք կետագծով՝ դրանք ներառելով մեկ իրազեկման բազմության մեջ:

Օրինակ 10: Կատարելով առաջին քայլը, 1-ին խաղացողը {1,2} բազմությունից ընտրում է մի թիվ: Երկրորդ քայլը կատարում է 2-րդ խաղացողը՝ չիմանալով 1-ին խաղացողի ընտրությունը: Այնուհետև կատարելով երրորդ քայլը, 1-ին խաղացողը մի թիվ է ընտրում {1,2} բազմությունից՝ չիմանալով 2-րդ խաղացողի ընտրությունը և չհիշելով առաջին քայլում իր կատարած ընտրությունը: Շահումը որոշվում է նույն ձևով, ինչպես որ 8-րդ օրինակի խաղում (Գծ.10):



Գծ. 10

Այստեղ 1-ին խաղացողի վարվելակերպը բաղկացած է (i, j) թվերի զույգից, որտեղ i-ն առաջին քայլում կատարած ընտրությունն է, իսկ j-ն՝ երրորդ քայլում: 2-րդ խաղացողի վարվելակերպը խաղի երկրորդ քայլում j թվի ընտրությունն է: Այսպիսով, 1-ին խաղացողն ունի չորս վարվելակերպ, իսկ 2-րդ խաղացողը՝ երկու վարվելակերպ: Բնականոն տեսքի խաղի մատրիցը 4x2 չափի է՝

$$\begin{array}{c} \\ (1.1) \\ (1.2) \\ (2.1) \\ (2.2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -5 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} :$$

Խաղի արժեքը հավասար է 19/7-ի, 1-ին խաղացողի լավագույն խառը վարվելակերպը (0,0,4/7,3/7) է, 2-րդ խաղացողի լավագույն վարվելակերպը՝ (4/7, 3/7) է:

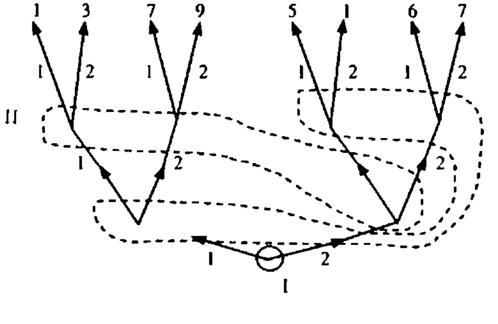
Այս խաղում արժեքը նույնն է, ինչ որ 9-րդ օրինակի խաղում, այսինքն՝ պարզվեց, որ 2-րդ խաղացողի իրազեկման պայմանների վատանալը չլավացրեց 1-ին խաղացողի վիճակը: Տվյալ դեպքում այս հանգամանքը պատահական բնույթ է կրում, և պատճառը շահումի ֆունկցիայի յուրահատկությունն է:

Օրինակ 11: Նախորդ օրինակում խաղացողները չեն տարբերում խաղի ծառի նույն մակարդակում գտնվող դիրքերը, սակայն, այնուամենայնիվ, նրանք գիտեն, թե որ քայլն են կատարում: Կարելի է կառուցել այնպիսի խաղ, որում խաղացողները հանդես են բերում առավել անգիտություն:

Դիտարկենք երկու անձանց այնպիսի հակամարտ խաղ, որում առաջին խաղացողը մեկ մարդ է իսկ երկրորդ խաղացողը՝ A և B երկու մարդուց բաղկացած թիմ: Երեքն էլ մեկուսացված են մեկը մյուսից (գտնվում են տարբեր սենյակներում) և չեն կարող հաղորդակցվել միմյանց հետ: Խաղի սկզբում միջնորդը մտնում է այն սենյակը, որտեղ գտնվում է առաջին խաղացողը և նրան առաջարկում է {1,2} բազմությունից ընտրել մի թիվ: Եթե առաջին խաղացողն ընտրում է 1 թիվը, ապա միջնորդը նախ մտնում է այն սենյակը, որտեղ գտնվում է A-ն և առաջարկում {1,2} բազմությունից ընտրել մի թիվ, այնուհետև մտնում է B-ի մոտ և առաջարկում ընտրություն կատարել {1,2} բազմությունից: Իսկ եթե 1-ին խաղացողն ընտրում է 2 թիվն, ապա միջնորդը B խաղացողին է առաջարկում առաջինը ընտրություն կատարել: Երբ երեք թվերն ընտրվում են, 1-ին խաղացողը շահում է K(x,y,z) մեծությունը, որտեղ x, y, z-ը՝ 1-ին խաղացողի և 2-րդ թիմի անդամների՝ համապատասխանաբար A-ի և B-ի, ընտրություններն են: K(x,y,z) ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ կերպ.

K(1,1,1) =1, K(1,1,2) =3, K(1,2,1) =7, K(1,2,2) =9,
K(2,1,1) =5, K(2,1,2) =1, K(2,2,1) =6, K(2,2,2) =7:

Խաղի կանոններից երևում է, որ երբ թիմի անդամներից որևէ մեկին՝ A-ին կամ B-ին, առաջարկվում է ընտրություն կատարել, նա չգիտե, թե իր ընտրությունը խաղի 2-րդ, թե 3-րդ քայլում է կատարում: Խաղի կառուցվածքը պատկերված է 11-րդ գծանկարում:



Գծ. 11

Այսպիսով, 2-րդ խաղացողի իրազեկման բազմությունները պարունակում են տարբեր մակարդակի գագաթներ, ինչը համապատասխանում է խաղի ընթացքում քայլի համարը չիմանալուն: Այստեղ 1-ին խաղացողն ունի երկու վարվելակերպ: 2-րդ խաղացողն ունի չորս վարվելակերպ, դրանք բաղկացած են իր քիմի A և B անդամների ընտրությունների բոլոր հնարավոր համակցություններից, այսինքն՝ նրա վարվելակերպերը (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) զույգերն են:

Հասկանալու համար, թե ինչպես են որոշվում շահումների մատրիցի տարրերը, դիտարկենք {2,(2,1)} իրավիճակը: Քանի որ 1-ին խաղացողն ընտրել է 2-ը, միջնորդը գնում է B-ի մոտ, որը (2,1) վարվելակերպի համաձայն, ընտրում է 1-ը: Այնուհետև նա գնում է A-ի մոտ, որն ընտրում է 2-ը: Այսպիսով {2,(2,1)} իրավիճակում շահումը հավասար է K(2,1,2)=1-ի: Բնականոն տեսքի խաղի համար շահումների մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1.1) & (1.2) & (2.1) & (2.2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \end{array};$$

Խաղի արժեքը հավասար է 17/5-ի, և 1-ին ու 2-րդ խաղացողների լավագույն խառը վարվելակերպերը համապատասխանաբար հավասար են (2/5, 3/5), (3/5, 0, 2/5, 0)-ի:

Նկատենք, որ լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղերում գոյություն ունի Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր վարվելակերպերի դասում, իսկ լրիվ իրազեկմամբ հակամարտ բազմաքայլ խաղերի դեպքում՝ պարզապես հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր վարվելակերպերում: Ընդսմին, ոչ լրիվ իրազեկմամբ բոլոր խաղերում դիտարկված 8-11-րդ օրինակներում, հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր վարվելակերպերում գոյություն չունի:

5.2 Այժմ տանք բազմաքայլ դիրքային խաղի սահմանումը:

Սահմանում: n անձանց Γ բազմաքայլ դիրքային խաղը որոշված է, եթե՝

1) Տրված է Γ=(X, F) ծառակերպ գրաֆը՝ սկզբնական x_0 գագաթով, որը կոչվում է խաղի սկզբնական դիրք:

2) Բոլոր X գագաթների բազմությունները տրոհված են n+1 $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ բազմությունների, որտեղ X_i բազմությունը կոչվում է i-րդ խաղացողի ($i=1,2,\ldots,n$) հերթականության բազմություն, իսկ $X_{n+1}=\{x : F_x=\varnothing\}$ բազմությունը կոչվում է վերջնական դիրքերի բազմություն:

3) $x\in X_{n+1}$ վերջնական դիրքերի բազմության վրա տրված է $K(x)= =(K_1(x),\ldots,K_n(x))$ վեկտոր ֆունկցիան; $K_i(x)$ ֆունկցիան կոչվում է i-րդ խաղացողի շահում:

4) Յուրաքանչյուր X_i, $i=1,\ldots,n$ բազմություն ենթատրոհված է չհատվող X_i^j ենթաբազմությունների, որոնք կոչվում են i-րդ խաղացողի իրազեկման բազմություններ: Ընդ որում իրազեկման միևնույն բազմության ցանկացած դիրքերի համար նրանց հաջորդող գագաթների բազմությունը պետք է պարունակի միևնույն քանակի գագաթներ, այսինքն՝ ցանկացած $x,y\in X_i^j$ համար $|F_x|=|F_y|$, ($|F_x|$-ը F_x բազմության տարրերի քանակն է), և իրազեկման

բազմության ոչ մի գագաթ չպետք է հաջորդի այն նույն բազմության որևէ այլ գագաթի, այսինքն՝ եթե $x \in X_i^j$, ապա գոյություն չունի մեկ այլ $y \in X_i^j$ գագաթ այնպիսին, որ $y \in \hat{F}_x$:

Լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղի սահմանումը այստեղ ներկայացվածից տարբերվում է միայն 4-րդ պայմանով, որի մեջ մտցվում են X_i խաղացողների հերթականության բազմությունների օժանդակ տրոհումները իրազեկման բազմությունների: Ինչպես երևում է օրինակներից, այդպիսի տրոհման բովանդակության իմաստն այն է, որ $x \in X_i$ դիրքում իր քայլը կատարելիս, i-րդ խաղացողը, ոչ լիրվ իրազեկման պայմաններում չգիտե բուն x դիրքը, այլ գիտե միայն, որ այդ դիրքը գտնվում է որոշ $X_i^j \subset X_i$ բազմության մեջ ($x \in X_i^j$): 4-րդ պայմանը որոշակի սահմանափակումներ է դնում խաղացողի իրազեկման բազմությունների վրա: Իրազեկման մեկ բազմության ցանկացած երկու գագաթների համար $|F_z|=|F_y|$ պահանջը դրվում է որպեսզի, $x,y \in X_i^j$ գագաթները լինեն չտարբերվող: Իսկապես, $|F_z| \neq |F_y|$-ի դեպքում i-րդ խաղացողը կարող էր $x,y \in X_i^j$ գագաթները իրարից տարբերել նրանցից դուրս եկող աղեղների քանակով: Եթե իրազեկման մեկ բազմության մեջ գոյություն ունենային երկու այնպիսի x, y գագաթներ, որ $y \in \hat{F}_x$ ապա դա կնշանակեր, որ խաղի պարտիան կարող էր երկիցս հատել մեկ իրազեկման բազմությունը, իսկ դա իր հերթին հավասարազոր կլիներ նրան, որ j-րդ խաղացողը չի հիշում քայլի համարը տվյալ պարտիայում, ինչը դժվար է պատկերացնել իրական խաղում:

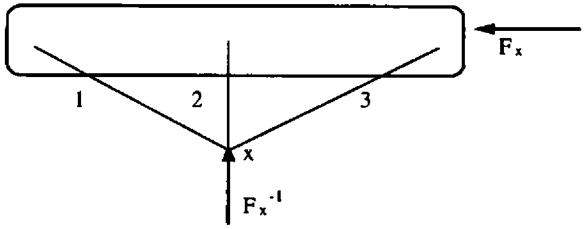
6. Վարքի վարվելակերպ

Շարունակենք ոչ լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղի ուսումնասիրությունը և ցույց տանք, որ բոլոր խաղացողների լիակատար հիշողության դեպքում այդպիսի խաղը ունի հավասարակշռության իրավիճակ վարքագծի վարվելակերպում:

6.1 Հետագա ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ է ներմուծել մի շարք լրացուցիչ հասկացություններ:

Սահմանում: $x \in X$ գագաթում այլընտրանքներ են կոչվում այն աղեղները, որոնք պատկանելի են x գագաթին, այն է՝ $\{(x, y): y \in F_x\}$:

Եթե $|F_x|=k$, ապա x գագաթն ունի k թվով այլընտրանք: Համարենք, որ եթե x գագաթում գոյություն ունի k թվով այլընտանք,ապա դրանք համարակալվում են 1,...,k ամբողջ թվերով, ընդորում x գագաթը շրջանցվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ: x_0 գագաթի առաջին այլըն տրանքը կարող է նշվել կամայականորեն: Եթե որևէ $x \neq x_0$ գագաթ շրջանցվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, ապա x դիրքում առաջին այլընտրանքը համարվում է այն որը հետևում է x-ի մեջ մտնող (F_x^{-1},x) միակ աղեղին (գծ.12).



Գծ.12

Համարենք, որ Γ խաղում բոլոր այլընտրանքները համարակալված են հիշյալ եղանակով: Դիցուք՝ A_k-ն բոլոր $x \in X$ գագաթների բազմությունն է, որոնք ունեն ճիշտ k այլընտրանք, այսինքն՝ $A_k=\{x:|F_x|=K\}$: Դիցուք՝ $I_i=\{X_i^j : X_i^j \subset X_i\}$ բազմությունը i-րդ խաղացողի իրազեկման բոլոր բազմությունների բազմությունն է: i-րդ խաղացողի մաքուր վարվելակերպ անելով կհասկանանք u_i ֆունկցիան, որը I_i-ն դրական թվերի բազմության մեջ արտապատկերում է այնպես, որ $u_i(X_i^j) \le k$, եթե $X_i^j \subset A_k$: Կասենք, որ u_i վարվելակերպն ընտրում է ℓ այլընտրանքը $x \in X_i^j$ դիրքում, եթե $u_i(X_i^j)=\ell$, որտեղ ℓ-ը այլընտրանքի համարն է:

Ինչպես որ 1-ին պարագրաֆում՝ կարելի է ցույց տալ, որ $u(\cdot)=(u_1(\cdot),\ldots,u_n(\cdot))$ իրավիճակին միակ ձևով համապատասխանում է w պարտիան, ուստի և՝ այդ պարտիայի վերջնական դիրքի շահումը:

Դիցուք՝ $x \in X_{n+1}$-ը որոշ վերջնական դիրք է և w-ն x_0-ից դեպի x տանող միակ ուղին (F-ը ծառն է): y դիրքի պատկանելության պայմանը w ուղուն կներկայացնենք $y \in w$ կամ $y<x$ տեսքով:

Սահմանում: $x \in X$ դիրքը կոչվում է $u_i(\cdot)$-ի համար հնարավոր, եթե գոյություն ունի $u_j(\cdot)$ պարունակող այնպիսի $u_i(\cdot)$ իրավիճակ, որ $u(\cdot)$ իրավիճակում իրագործվում է w ուղին, որը պարունակում է x դիրքը, այն է՝ $x \in w$: X_i^j իրազեկման բազմությունը կոչվում է $u_i(\cdot)$-ի համար էական, եթե որոշ $x \in X_i^j$ դիրքը հնարավոր է $u_i(\cdot)$-ի համար:

$u_i(\cdot)$-ի համար հնարավոր դիրքերի բազմությունը նշանակենք $\mathrm{Possu}_i(\cdot)$-ով, իսկ $u_i(\cdot)$-ի համար իրազեկման էական բազմությունների ընտանիքը՝ $\mathrm{Relu}_i(\cdot)$-ով:

6.2 Ոչ լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ Γ խաղերում խառը վարվելակերպը սահմանվում են նույն կերպ, ինչպես կ. 3-ում՝ վերջավոր խաղերի համար:

Սահամնում: i-րդ խաղացողի μ խառը վարվելակերպ է կոչվում i-րդ խաղացողի մաքուր վարվելակերպերի բազմության վրա հավանականային բաշխումը, որը յուրաքանչյուր $u_i(\cdot)$ մաքուր վարվելակերպին համապատասխանեցնում է $q_{u_i}(\cdot)$ հավանականությունը (պարզության համար հետագայում ուղղակի q_{u_i}):

$\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ իրավիճակը խառը վարվելակերպերում որոշում է հավանականությունների բաշխումը բոլոր w պարտիաների վրա (հետևաբար, և x_{n+1} վերջնական դիրքերի վրա) ըստ

$$P_\mu(w)=\sum_u q_{u_1}\ldots q_{u_n}P_u(w)$$

բանաձևի, որտեղ $P_u(w)=1$, եթե w պարտիան իրագործվում է $u(\cdot)$ իրավիճակում և $P_u(w)=0$ հակառակ դեպքում:

Լեմ: $P_\mu(x)$-ով նշանակենք x դիրքի իրականացման հավանականությունը μ իրավիճակում: Այդ դեպքում տեղի ունի

$$P_\mu(x)=\sum_{\{u(\cdot):x\in \mathrm{Poss}\,u_i(\cdot),\, i=\overline{1,n}\}} q_{u_1},\ldots,q_{u_n}=\prod_{i=1}^{n}\sum_{\{u_i\in \mathrm{Poss}\,u_i\}} q_{u_i} \tag{6.1}$$

բանաձևը:

μ իրավիճակում i-րդ խաղացողի $E_i(\mu)$ շահումի մաթեմատիկական սպասելին հավասար է

$$E_i(\mu)=\sum_{x\in X_{n+1}} K_i(x)P_\mu(x), \tag{6.2}$$

որտեղ $P_\mu(x)$-ը հաշվարկվում է (6.1) բանաձևով:

Սահմանում: $x\in X$ դիրքը կոչվում է հնարավոր μ_i-ի համար, եթե խառը վարվելակերպերում գոյություն ունի μ_i պարունակող μ իրավիճակ, այնպիսին, որ $p_\mu(x)>0$: i-րդ խաղացողի X_i^j իրազեկման բազմությունը կոչվում է էական μ_i-ի համար, եթե որևէ $x\in X_i^j$ հնարավոր է μ_i-ի համար:

μ_i-ի հնարավոր դիրքերի բազմությունը նշանակենք Poss μ_i-ով, իսկ μ_i-ի էական իրազեկման բազմությունների բազմությունը՝ Rel μ_i-ով:

6.3 Ուսումնասիրելով լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղերը, ցույց տվեցինք, որ վարվելակերպի ընտրությունը կարող է կայանալ խաղի համապատասխան դիրքի յուրաքանչյուր քայլում, իսկ կոնկրետ խնդիրների լուծման դեպքում պարտադիր չէ (գործնականում հնարավոր էլ չէ) նախապես որոշել վարվելակերպը, այսինքն, հանձնարարվող վարքագծի լրիվ հավաքածուն բոլոր դիրքերում (իրազեկման բազմություններում), քանի որ նման կանոնը «տառապում է մեծ հավելուրդով»: Կարելի՞ է արդյոք, համանման պարզեցում կատարել ոչ լրիվ իրազեկմամբ խաղերում, այսինքն՝ վարվելակերպը կառուցել ոչ թե՝ որպես ընտրության նախապես (որոշ) հաստատագրված կանոն իրազեկման բոլոր բազմություններում, այլ այն ձևավորել իրազեկման՝ համապատասխան բազմության մեջ ընկնելուն զուգընթաց: Պարզվում է, որ ընդհանուր դեպքում դա հնարավոր չէ: Սակայն, գոյություն ունի ոչ լրիվ իրազեկմամբ խաղերի դաս, որտեղ նման պարզեցումը հնարավոր է: Մտցնենք վարքագծի վարվելակերպ հասկացությանը:

Սահմանում: i-րդ խաղացողի β_i վարքագծի վարվելակերպ ասելով կհասկանանք այնպիսի կանոնը, որը իրազեկման i-րդ խաղացողի յուրաքանչյուր $X_i^j \subset A_k$ բազմության համապատասխանեցնում է k թվով $b(X_i^j, \nu) \geq 0$, $\nu = 1, \ldots, k$ թվերի համակարգ այնպիսիք, որ

$$\sum_{\nu} b(X_i^j, \nu) = 1,$$

որտեղ՝ $A_k = \{x : |F_x| = k\}$:

$b(X_i^j, \nu)$ թվերը կարող են մեկնաբանվել որպես v այլընտրանքի ընտրության հավանականություններ $X_i^j \subset A_k$ իրազեկման բազմության մեջ, որի յուրաքանչյուր դիրքը պարունակում է ճիշտ k այլընտրանք:

n խաղացողների համար վարքագծի վարվելակերպերի ցանկացած $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ հավաքածուն որոշում է խաղի պարտիաների և վերջնական դիրքերի վրա հավանականությունների բաշխումը հետևյալ կերպ.

$$P_\beta(w) = \prod_{\substack{X_i^j \cap w \neq \varnothing \\ \nu \in w}} b(X_i^j, \nu): \tag{6.3}$$

Այստեղ արտադրյալը վերցվում է ըստ բոլոր այնպիսի X_i^j, ν-երի, որ $X_i^j \cap w \neq \varnothing$, և v համարն այլընտրանքի ընտրությունը $X_i^j \cap w$ կետում հանգեցնում է w ուղուն պատկանող դիրքի:

Հետագայում "ուղի" հասկացությունը հարմար է հասկանալ ոչ միայն որպես այն կազմող դիրքերի հավաքածի, այլև համապատասխան այլընտրանքների (աղեղների) հավաքածի:

Վարքի վարվելակերպերում $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ իրավիճակում սպասվող $E_i(\beta)$ շահումը սահմանվում է, որպես

$$E_i(\beta) = \sum_{x \in X_{n+1}} K_i(x) P_\beta(w_x), \ i = 1, \ldots, n,$$

մաթեմաթիկական սպասելի, որտեղ w_x-ը $x \in X_{n+1}$-ին վերջնական դիրք ունեցող պարտիա է:

6.4 Յուրաքանչյուր μ_i խառը վարվելակերպին կարելի է համադրել β_i վարքագծի որևէ վարվելակերպին:

Սահմանում: i-րդ խաղացողի $\mu_i = \{q_{u_i}\}$ խառը վարվելակերպին համապատասխանող վարքագծի վարվելակերպ կոչվում է β_i վարքի վարվելակերպ, որը սահմանված է հետևյալ կերպ:

Եթե $X_i^j \in \mathrm{Rel}\,\mu_i$, ապա

$$b(X_i^j) = \frac{\sum\limits_{\{u_i : X_i^j \in \mathrm{Rel}\,u_i,\ u_i(X_i^j) = \nu\}} q_{u_i}}{\sum\limits_{\{u_i : X_i^j \in \mathrm{Rel}\,u_i\}} q_{u_i}}: \tag{6.4}$$

Եթե $X_i^j \notin \mathrm{Rel}\mu_i$, ապա X_i^j բազմության β_i վարվելակերպը կարելի է որոշել կամայական, (6.4)-ից տարբեր ձևով: ($X_i^j \notin \mathrm{Rel}\mu_i$-ի դեպքում (6.4) արտահայտության հայտարարը վերածվում է զրոյի): Որոշակիության համար ենթադրենք՝

$$b(X_i^j, v) = \sum_{\{u_i : u_i(X_i^j) = v\}} q_{u_i} v : \qquad (6.5)$$

Սահմանում: Г խաղը կոչվում է i-րդ խաղացողի համար լրիվ հիշողությամբ խաղ, եթե ցանկացած $u_i(\cdot)$, X_i^j, x-երի համար $X_i^j \in \mathrm{Rel}\mu_i$ և $x \in X_i^j$ պայմաններից հետևում է, որ $x \in \mathrm{Poss}\ u_i$:

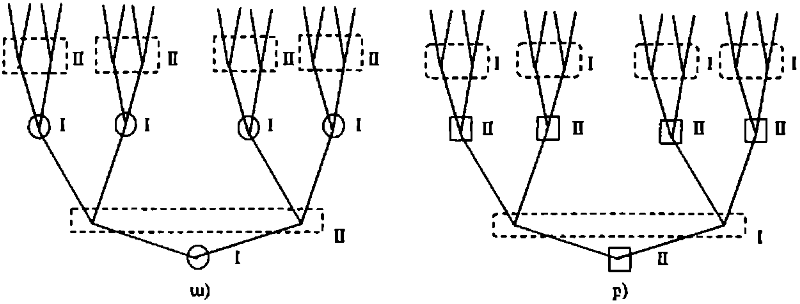
Սահմանումից հետևում է, որ i-րդ խաղացողի համար լրիվ հիշողությամբ խաղում՝ $u_i(\cdot)$-ի իրագեկման բազմության համար էական ցանկացած դիրք հնարավոր է $u_i(\cdot)$-ի համար: «Լրիվ հիշողություն» տերմինն ընդգծում է այն հանգամանքը, որ հայտնվելով ցանկացած իրագեկման բազմությունում i-րդ խաղացողը կարող է ճշտորեն վերականգնել, թե ինքը ով այլընտրանքները (այն է համարները) է ընտրել իր բոլոր նախորդ քայլերում (միարժեք համապատասխանության շնորհիվ): Լրիվ հիշողությամբ խաղը բոլոր խաղացողների համար վերածվում է լրիվ իրագեկմամբ խաղի, եթե դրա իրագեկման բոլոր բազմությունները պարունակում են մեկական գագաթ:

Թեորեմ: Դիցուք՝ վարքագծի վարվելակերպերում β իրավիճակը համապատասխանում է Г խաղում (որում բոլոր դիրքերն ունեն առնվազն երկու այլընտրանք) μ խառը վարվելակերպերի իրավիճակին: Այդ դեպքում, որպեսզի $E_i(\beta)=E_i(\mu)$, i=1,2,…,n, անհրաժեշտ է և բավարար, որ Г-ն բոլոր խաղացողների համար լրիվ հիշողությամբ խաղ:

7. Ֆունկցիոնալ հավասարումներ միաժամանակյա բազմաքայլ խաղերի համար:

Վարքի վարվելակերպերի թեորեմը ընդհանուր դեպքում հնարավորություն չի ընձեռում անմիջականորեն լուծելու լրիվ հիշողությամբ բազմաքայլ խաղերը, սակայն իրագեկման բազմությունների պարզ կառուցվածքի դեպքում այդ թեորեմը հիմնավորում է խաղի արժեքի համար ֆունկցիոնալ հավասարումների արտածումը և այդ հավասարումների վրա հիմնված լավագույն վարվելակերպեր գտնելու եղանակները: Լրիվ հիշողությամբ առավել պարզ խաղերը, նկատի չունենալով լրիվ իրագեկմամբ խաղերը, այսպես կոչված, միաժամանակյա բազմաքայլ խաղերն են: Արտածենք այդպիսի խաղերի արժեքների համար ֆունկցիոնալ հավասարումը և դիտարկենք մի քանի հանրահայտ օրինակներ, որոնցում այդ հավասարումները լուծելի են:

7.1 Բովանդակային առումով միաժամանակյա բազմաքայլ խաղը մի այնպիսի հակամարտ բազմաքայլ խաղ է, որում խաղի յուրաքանչյուր քայլին 1-ին և 2-րդ խաղացողները միաժամանակ են ընտրում իրենց գործողությունները, այսինքն՝ իրազեկ չլինելով այդ պահին իրենց հակառակորդի ընտրության մասին: Երբ ընտրությունները կայացած են, դրանք հայտնի են դառնում երկու խաղացողներին էլ, և մասնակիցները կրկին միաժամանակյա ընտրություն են կատարում և այլն: Պայմանականորեն այդպիսի խաղը կպատկերենք գրաֆի տեսքով, որն ունի երկու պատկերներից մեկը (գծ. 13):



Գծ. 13

Գրաֆը պատկերում է զույգ թվով քայլերի հերթովի խաղ, որում առաջին քայլն անող խաղացողի իրազեկման բազմությունները մի տարրանի են, իսկ մյուսինը՝ երկտարրանի: Այդպիսի Γ խաղում երկու խաղացողներն էլ ունեն լրիվ հիշողություն, հետևաբար, ըստ 15.4 կետի թեորեմի, հավասարակշիռ իրավիճակ որոնելիս կարելի է սահմանափակվել վարքագծի վարվելակերպերի դասով:

Դիցուք՝ որոշակիության համար, Γ-ում առաջինը քայլն անում է 1-ին խաղացողը, յուրաքանչյուր $x \in X_1$-ի հետ կապվում է Γ խաղի իրազեկման կառուցվածքով Γ_x ենթախաղը: Թերի իրազեկմամբ հակամարտ վերջնաքայլավոր ցանկացած խաղի բնականոն տեսքը իրենից ներկայացնում է մատրիցային խաղ, այսինքն վերջավոր թվով վարվելակերպեր ունեցող հակամարտ խաղ, այդ իսկ պատճառով բոլոր Γ_x, $x \in X_1$ ենթախաղերում (ներառյալ $\Gamma = \Gamma_{x_0}$ խաղը) գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ խառը վարվելակերպերի դասում: Ըստ 15.4 կետի թեորեմի, այդպիսի հավասարակշռության իրավիճակ գոյություն ունի նաև վարքագծի վարվելակերպերի դասում, և խաղի արժեքները (այսինքն՝ շահումի ֆունկցիայի արժեքները խառը վարվելակերպերի դասում և վարքագծի վարվելակերպերի դասում հավասարակշռության իրավիճակում) իրար հավասար են:

Նշանակենք Γ_x խաղի արժեքը $v(x)$-ով, $x \in X_1$-ին, և կազմենք ֆունկցիոնալ հավասարումներ $v(x)$-ի համար:

Յուրաքանչյուր $x \in X_1$-ի համար x' հաջորդ դիրքը (եթե այդպիսին ընդհանրապես գոյություն ունի), որտեղ քայլ է կատարում առաջին խաղացողը, պատկանում է F_x^2 բազմությանը: x' դիրքը իրագործվում է երկու հաջորդական ընտրությունների արդյունքում. 1-ին խաղացողի կողմից այն աղեղի, որը պատկանելի է x գագաթին, և 2-րդ խաղացողի կողմից այն աղեղի, որը գտնվում է 2-րդ խաղացողի իրազեկման բազմությունները կազմող $y \in F_x$ դիրքերում: Ուստի, կարելի է համարել, որ x' դիրքն ստացվում է T_x-ի արտապատկերումից, որը կախված է 1-ին և 2-րդ խաղացողների α, β ընտրություններից, այն է` $x'=T_x(\alpha, \beta)$:

Քանի որ α և β տարբեր այլընտրանքների թիվը վերջավոր է, ապա յուրաքանչյուր $x \in X_1$-ի համար կարելի է դիտարկել $A_x=\{v[T_x(\alpha,\beta)]\}$ շահումների մատրիցայով մատրիցային խաղ: Դիցուք` $\beta_I^*(x)=\{b_I^*(x,\alpha)\}$, $\beta_{II}^*(x)=\{b_{II}^*(x,\beta)\}$-ները լավագույն խառը վարվելակերպերն են A_x մատրիցով ունեցող խաղում: Այդ դեպքում տեղի ունի Γ_x խաղում լավագույն վարվելակերպերի կառուցվածքի մասին հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Γ խաղում 1-ին խաղացողի վարքագծի լավագույն վարվելակերպը x կետում (1-ին խաղացողի յուրաքանչյուր իրազեկման բազմությունը Γ խաղում բաղկացած է $x \in X_1$ միակ դիրքից) յուրաքանչյուր α այլընտրանքին պարտադրում է հավանականություն` $A_x$ մատրիցով խաղում 1-ին խաղացողի խառը լավագույն վարվելակերպին համապատասխան, այսինքն`

$$b_I(x,\alpha) = b_I^*(x,\alpha):$$

Γ խաղում 2-րդ խաղացողի $\{b_2(X_2^j,\beta)\}$ վարքագծի լավագույն վարվելակերպը յուրաքանչյուր β այլընտրանքին պարտադրում է հավանականություն` $A_x$ մատրիցով խաղում 2-րդ խաղացողի խառը լավագույն վարվելակերպին համապատասխան, այսինքն`

$$b_2(X_2^j,\beta) = b_{II}^*(x,\beta):$$

որտեղ` $x=F_y^{-1}$ եթե $y \in X_2^j$:

Խաղի արժեքը բավարարում է հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարմանը

$$v(x) = \mathrm{Val}\{v[T_x(\alpha, \beta)]\},\ x \in X_1, \qquad (7.1)$$

հետևյալ սահմանային պայմանով

$$v(x)\Big|_{x \in X_3} = H(x): \qquad (7.2)$$

(Այստեղ ValA-ն A մատրիցով խաղի արժեքն է):

Թեորեմը ապացուցվում է ինդուկցիայի եղանակով:

7.2 Օրինակ 12: (Տեսչական ստուգման խաղ:) E խաղացողը (կարգազանցը) ուզում է կատարել որևէ արգելված գործողություն: Գոյություն ունեն N ժամանակահատվածներ, որոնց ընթացքում այդ գործողությունը կարող է իրականացվել: P խաղացողը (տեսուչը), որը ցանկանում է կանխել այդ գործողությունը, կարող է միայն մեկ տեսչական ստուգում կատարել այդ ժամանակահատվածներից ցանկացածի ընթացքում: E խաղացողի շահումը հավասար է 1-ի, եթե արգելված գործողությունը տեղի է ունեցել ու մնացել չհայտնաբերված, և հավասար է (–1)-ի, եթե խաղացողը բռնված է (դա կլինի այն դեպքում, երբ գործողությունը կատարելու համար նա ընտրում է այն նույն ժամանակահատվածը, որը տեսուչն ընտրում է ստուգման համար). շահումը հավասար է զրոյի, եթե խախտողն ընդհանրապես չի գործում: Այդպիսի N-քայլանի խաղը նշանակենք Γ_N-ով:

Առաջին ժամանակահատվածում (առաջին քայլին) յուրաքանչյուր խաղացող ունի երկու այլընտրանք: E խաղացողը կարող է գործողությունը ձեռնարկել կամ չձեռնարկել, P խաղացողը կարող է ստուգել կամ չստուգել: Եթե E խաղացողը գործում է, իսկ P խաղացողը՝ ստուգում, ապա խաղն ավարտվում է, և շահումը հավասար է (–1)-ի: Եթե E խաղացողը չի գործում, իսկ P խաղացողը կատարում է տեսչական ստուգում, ապա E խաղացողը կարող է գործողությունը ձեռնարկել հաջորդ ժամանակահատվածում (ենթադրվում է, որ N>1), և շահումը դարձյալ հավասար է 1-ի: Եթե E խաղացողը չի գործում և P խաղացողը ստուգում չի կատարում, ապա անցնում են խաղի հաջորդ քայլին, որը նախորդից տարբերվում է միայն նրանով, որ մինչև խաղի վերջը մնում է ավելի քիչ թվով ժամանակահատված, այսինքն՝ հայտնվում է են Γ_{N-1} ենթախաղում: Հետևաբար, խաղի առաջին քայլի մատրիցը պատկերվում է այսպես՝

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix}: \tag{7.3}$$

Այս դեպքում (16.1) հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$v_N=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix}: \tag{7.4}$$

Այստեղ v(x)-ը նույնն է միևնույն մակարդակի խաղի բոլոր դիրքերի համար, այդ պատճառով էլ կախված է միայն՝ մինչև խաղի ավարտը եղած ժամանակահատվածների թվից: Այդ պատճառով v(x)-ի փոխարեն գրված է v_N: Հետագայում ցույց կտրվի, որ $v_{N-1}<1$, հետևաբար (7.4)-ի մատրիցը չունի թամբակետ, այսինքն՝ (7.4) մատրիցով խաղը լիովին խառն է: Այստեղից ստանում ենք

$$v_N=\frac{v_{N-1}+1}{-v_{N-1}+3} \tag{7.5}$$

անդրադարձ հավասարումը, որը

$$v_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0 \tag{7.6}$$

սկզբնական պայմանի հետ որոշում է v_N-ը:

Ձևափոխենք (7.5) հավասարումը $t_N=1/v_{N-1}$ տեղադրության օգնությամբ: Կստանանք $t_N=t_{N-1}-1/2$, $t_1=-1$ նոր անդրադարձ հավասարումը: Այս հավասարումն ունի $t_N=-(N+1)/2$ ակնհայտ լուծումը, որտեղից ունենք

$$V_N=\frac{N-1}{N+1}: \qquad (7.7)$$

Այժմ խաղի յուրաքանչյուր քայլին կարելի է հաշվել վարքագծի լավագույն վարվելակերպերը: Իսկապես, (7.4) խաղի մատրիցն ընդունում է $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & (N-2)/N \end{pmatrix}$ տեսքը, վարքագծի լավագույն վարվելակերպերը այսպիսիք են.

$$b_1^N=\left(\frac{1}{N+1},\frac{N}{N+1}\right), b_0^N=\left(\frac{1}{N+1},\frac{N}{N+1}\right):$$

Օրինակ 13: (Պաշարի լավագույն ծախսի տեսական խաղային առանձնահատկությունները): Դիցուք, սկզբնապես 1-ին և 2-րդ խաղացողներն ունեն որոշ պաշարի համապատասխանաբար r և R միավոր, ինչպես նաև երկուական մաքուր վարվելակերպ: Ենթադրենք, որ եթե խաղացողներն ընտրեն նույն համարի մաքուր վարվելակերպեր, ապա 2-րդ խաղացողի պաշարը կնվազի 1 միավորով: Իսկ եթե խաղացողներն ընտրեն տարբեր համարի մաքուր վարվելակերպեր, ապա 1-ին խաղացողի պաշարը կնվազի 1 միավորով: Խաղն ավարտվում է, երբ խաղացողներից մեկի պաշարը հավասարվում է զրոյի: Ընդ որում 1-ին խաղացողի շահումը հավասար է 1-ի եթե 2-րդ խաղացողի պաշարը հավասար է զրոյի, և հավասար է −1-ի, եթե իր սեփական պաշարը հավասարվի զրոյի:

$\Gamma_{k,\ell}$-ով նշանակենք բազմաքայլ խաղը, որում 1-ին խաղացողն ունի պաշարի $k(k=1,2,\ldots,r)$ միավոր, իսկ 2-րդ խաղացողը՝ $\ell(\ell=1,2,\ldots,R-r)$ միավոր:

Այդ դեպքում՝

$$\mathrm{Val}\Gamma_{k,\ell}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} \mathrm{Val}\Gamma_{k,\ell-1}, & \mathrm{Val}\Gamma_{k-1,\ell} \\ \mathrm{Val}\Gamma_{k-1,\ell}, & \mathrm{Val}\Gamma_{k,\ell-1} \end{pmatrix},$$

որտեղ $\mathrm{Val}\Gamma_{k,0}=1$, $\mathrm{Val}\Gamma_{0,1}=-1$:

Դիտարկենք վերջից հաշված առաջին քայլը, այսինքն՝ երբ երկու խաղացողներին էլ մնացել է պաշարի մեկական միավոր: Ակնհայտ է, որ այդ քայլում խաղարկվում է մատրից հետևյալ խաղը.

$$\Gamma_{1,1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_{1,1}$ խաղը համաչափ է, նրա արժեքը, որը մենք կնշանակենք $v_{1,1}$-ով, հավասար է զրոյի, իսկ խաղացողների լավագույն վարվելակերպերը համընկնում են և հավասար են (1/2, 1/2):

Վերջից հաշված երկրորդ քայլում, այսինքն՝ երբ խաղացողներին մնացել է պաշարների երեք միավոր, խաղարկվում է մատրիցի $\Gamma_{1,2}$, կամ $\Gamma_{2,1}$ խաղերից մեկը:

Ընդ որում՝

$$v_{1,2}=\mathrm{Val}\Gamma_{1,2}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} v_{1,1} & -1 \\ -1 & v_{1,1} \end{pmatrix}=\frac{v_{1,1}-1}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$v_{2,1}=\mathrm{Val}\Gamma_{2,1}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & v_{1,1} \\ v_{1,1} & 1 \end{pmatrix}=\frac{v_{1,1}+1}{2}=\frac{1}{2}:$$

Վերջից հաշված երրորդ քայլում (այսինքն՝ երբ խաղացողներն ընդհանուր առմամբ ունեն պաշարի չորս միավոր) խաղարկվում է հետևյալ խաղերից մեկը՝ $\Gamma_{1,3}$, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{3,1}$: Ընդ որում՝

$$v_{1,3}=\mathrm{Val}\Gamma_{1,3}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} v_{1,2} & -1 \\ -1 & v_{1,2} \end{pmatrix}=\frac{v_{1,2}-1}{2}=-\frac{3}{4},$$

$$v_{2,2}=\mathrm{Val}\Gamma_{2,2}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} v_{2,1} & v_{1,2} \\ v_{1,2} & v_{2,1} \end{pmatrix}=\frac{v_{2,1}+v_{1,2}}{2}=0,$$

$$v_{3,1}=\mathrm{Val}\Gamma_{3,1}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} 1 & v_{2,1} \\ v_{2,1} & 1 \end{pmatrix}=\frac{v_{2,1}+1}{2}=\frac{3}{4}:$$

Այնուհետև, շարունակելով համանման հաշվումները մինչև վերջից հաշված N-րդ քայլը, սկզբնական խաղի արժեքի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$v_{r,R-r}=\mathrm{Val}\Gamma_{r,R-r}=\mathrm{Val}\begin{pmatrix} v_{r,R-r-1} & v_{r-1,R-r} \\ v_{r-1,R-r} & v_{r,R-r-1} \end{pmatrix}:$$

$\Gamma_{r,R-r}$ խաղի շահումների մատրիցի համաչափության պատճառով ունենք

$$v_{r,R-r}=\tfrac{1}{2}\,(v_{r,R-r-1}-v_{r-1,R-r}),$$

խաղացողների վարքագծի լավագույն վարվելակերպերը յուրաքանչյուր քայլում համընկնում են և հավասար են (1/2, 1/2):

Օրինակ 14: Կատակախաղում 1-ին խաղացողն է՝ m_1 կին և m_2 կատու, 2-րդ խաղացողը՝ n_1 մուկ և n_2 տղամարդ: Յուրաքանչյուր քայլում խաղացողներից յուրաքանչյուրն ընտրում է իր ներկայացուցչին: Ընտրված երկու ներկայացուցչից մեկը «հեռացվում է» հետևյալ կանոնների համաձայն. կինը «հեռացնում է» տղամարդուն, տղամարդը «հեռացնում է» կատվին, կատուն «հեռացնում է» մկանը, մուկը «հեռացնում է» կնոջը: Խաղը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև որ խմբերից մեկում կմնան միայն մեկ տեսակի խաղացողներ: Երբ մի խումբը այլևս ընտրություն չունի, մյուս խումբը ակնհայտորեն շահում է:

Սկզբնական խաղի արժեքը նշանակենք $v(m_1,m_2,n_1,n_2)$-ով: Ենթադրենք, որ

$$v(m_1,m_2,n_1,0) = v(m_1,m_2,0,n_2) = 1, \text{ եթե } m_1,m_2>0,$$
$$v(m_1,0,n_1,n_2) = v(0,m_2,n_1,n_2) = -1, \text{ եթե } n_1,n_2>0: \qquad (7.8)$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$v(m_1-1) = v(m_1-1,m_2,n_1,n_2)$, $v(m_2-1) = v(m_1,m_2-1,n_1,n_2)$,

$v(n_1-1) = v(m_1,m_2,n_1-1,n_2)$, $v(n_2-1) = v(m_1,m_2,n_1,n_2-1)$:

7.1 կետի թեորեմի համաձայն ճիշտ է

$$v(m_1,m_2,n_1,n_2) = Val\begin{pmatrix} v(m_1-1) & v(n_2-1) \\ v(n_1-1) & v(m_2-1) \end{pmatrix}$$

առնչությունը: Կարելի է ցույց տալ, որ դիտարկվող խաղը լիովին խառն է և

$$v(m_1,m_2,n_1,n_2) = \frac{v(m_1-1)v(m_2-1) - v(n_1-1)v(n_2-1)}{v(m_1-1) + v(m_2-1) - v(n_1-1) - v(n_2-1)}:$$

Հաշվի առնելով (16.8) սահմանային պայմանները, այստեղից ստանում ենք, որ

$$v(m_1,1,1,1) = \frac{v(m_1-1)+1}{-v(m_1-1)+3}$$

և $v(1,1,1,1)=0$: Բայց այս հավասարումները համընկնում են (16.5), (16.6) հավասարումների հետ, հետևաբար՝

$v(m,1,1,1) = (m-1)/(m+1)$

և լավագույն վարվելակերպերը այս դեպքում նույնպես համընկնում են 27-րդ օրինակում բերվածների հետ:

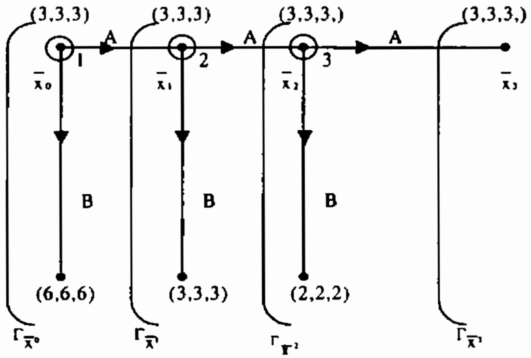
8. Կոոպերատիվ դինամիկ խաղեր և դինամիկ կայունություն

Հիմք ընդունելով Γ բազմաքայլ խաղը, այժմ սահմանենք կոոպերատիվ խաղը: Կոոպերատիվ խաղում ենթադրվում է, որ խաղացողները գործում են այնպես, որ մաքսիմացնեն գումարային շահումը: Այսինքն խաղացողները միասին ընտրում են այնպիսի $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_i,\ldots,\bar{u}_n)$ իրավիճակ, որի դեպքում ճշմարիտ է

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_i,\ldots,\bar{u}_n) = \max_{(u_1,u_2,\ldots,u_n)} \sum_{i=1}^{n} K_i(u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

հավասարությունը: $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_i,\ldots,\bar{u}_n)$ իրավիճակը միարժեքորեն ստեղծում է $\bar{x} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_i,\ldots,\bar{x}_\ell)$ պարտիան: $\bar{x}$ պարտիան կոչվում է լավագույն հետագիծ Γ կոոպերատիվ խաղում: Այսպիսով, խաղացողների կոոպերացման և որպես հետևանք $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_i,\ldots,\bar{u}_n)$ իրավիճակի դիրքում խաղը զարգանում է $\bar{x} = (\bar{x}_0,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_i,\ldots,\bar{x}_\ell)$ պարտիայի երկայնությամբ:

Օրինակ 15: Դիտարկենք 14-րդ գծանկարում պատկերված երեք անձանց Γ խաղը:



Գծ. 14

Այստեղ գրաֆի յուրաքանչյուր հանգույցում 1,2,3 խաղացողների շահումները նշված են փակագծերում: N={1,2,3}: $X_1=X_2=X_3=\{A,B\}$ խաղացողների վարվելակերպերի բազմությունները բաղկացած են A և B երկու տարրերից: Խաղացողների շահումները հավասար են

$H_1(A,A,A)=H_2(A,A,A)=H_3(A,A,A)=(12,12,12)$

$H_1(B,x_2,x_3)=H_2(B,x_2,x_3)=H_3(B,x_2,x_3)=(9,9,9)$ ցանկացած $x_2\in X_2$, $x_3\in X_3$ համար և

$H_1(A,B,x_3)=H_2(A,B,x_3)=H_3(A,B,x_3)=(9,9,9)$ ցանկացած $x_3\in X_3$ համար

$H_1(A,A,B)=H_2(A,A,B)=H_3(A,A,B)=(11,11,11)$

Շահումները հաշվելու կանոններին կարելի է հետևել՝ օգտագործելով 14-րդ գծանկարը: A,A,A հաջորդականության իրացման դեպքում խաղացողի շահումը հավասար է գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթում նրա շահումների գումարին, եթե իրագործված ուղին խաղացողներից մեկի կողմից ներառում է B ընտրությունը, ապա յուրաքանչյուր խաղացողի շահումը հավասար է շահումների գումարին այն ուղու երկայնությամբ, որ ավարտվում է B վարվելակերպի առաջին ընտրությամբ:

Հաշվենք բնութագրիչ ֆունկցիայի արժեքները: Այստեղ հնարավոր են հետևյալ դաշնախմբերը {1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2}, {3}:

v({1,2,3})=36, քանի որ ընտրելով A-ն, յուրաքանչյուր խաղացող ստանում է 12 (իսկ դաշնախումբն ամբողջությամբ՝ 12x3=36):

v({1,2})=22, քանի որ 1-ին, 2-րդ խաղացողները, ընտրելով A-ն, վատագույն դեպքում կարող են իրենց համար ապահովել 22-ը: Վատագույն դեպքը կլինի, եթե 3-րդ խաղացողն ընտրի B-ն:

v({1,3})=18, քանի որ 1-ին խաղացողը, ընտրելով A-ն, իր և 3-րդ խաղացողի համար վատագույն դեպքում կարող է ապահովել 18 շահում: Վատագույն դեպքը կլինի, եթե 2-րդ խաղացողն ընտրի B-ն:

v{2,3}=18, քանի որ 1-ին խաղացողը, ընտրելով B-ն, միշտ կարող է այնպես անել, որ {2,3} խաղացողների շահումը չգերազանցի 18-ը: 1-ին խաղացողի մեկ այլ ընտրության դեպքում {2,3} խաղացողներն ակնհայտորեն ավելի մեծ շահում կունենան:

v({1})=9, այս շահումն ստանում 1-ին խաղացողը՝ ընտրելով B-ն, և 2-րդ խաղացողը՝ ընտրելով B-ն: Ակնհայտ է, որ B-ի ընտրությամբ 2-րդ խաղացողը 1-ին խաղացողի շահումը սահմանափակում է 3 թվով:

v({2})=9, այստեղ 1-ին խաղացողը, ընտրելով B-ն, 2-րդ խաղացողի շահումը սահմանափակում է 9 թվով: 1-ին խաղացողի կողմից մեկ այլ ընտրության դեպքում 2-րդ խաղացողի շահումը կարող է ավելին լինել:

v({3})=9, այս դեպքը նման է նախորդին:

Հաշվենք Շեպլիի վեկտորը՝

$$Sh_1=76/6,\ Sh_2=76/6,\ Sh_3=64/6:$$

Այսինքն, Շեպլիի վեկտորը 1-ին և 2-րդ խաղացողներին պարտադրում է միանման զագաքներ:

Օրինակ 16: Գտնենք բնութագրիչ ֆունկցիան 4-րդ գծանկարում պատկերված օրինակի համար (այստեղ խաղացողների շահումները նկարագրվում են այնպես, ինչպես 4-րդ օրինակում, այսինքն՝ վերջնական դիրքերում):

Բնութագրիչ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$V(\{1,2,3\})=6,\ V(\{1,2\})=2,\ V(\{1,3\})=2,\ V(\{2,3\})=2,$$
$$V(\{1\})=1,\ V(\{2\})=1/2,\ V(\{3\})=1/2$$

Շեպլիի վեկտորի համար ստանում ենք

$$Sh_1=2,\ Sh_2=2,\ Sh_3=2$$

արտահայտությունը:

Տվյալ օրինակը մենք կօգտագործենք հետագա արդյունքների պարզաբանման համար:

Դիտարկենք Γ խաղի դիրքերը $\bar{x}$-ի երկայնությամբ, այսինքն՝ $\Gamma=\Gamma_{\bar{x}},\Gamma_{\bar{x}_2},\dots,\Gamma_{\bar{x}_l}$ ենթախաղերը: Ակնհայտ է, որ $\bar{x}^k=(\bar{x}_k,\dots,\bar{x}_i,\dots,\bar{x}_l)$ տեսքի $\bar{x}$ հետագծի հատվածը, որը դիտարկվել է $\Gamma_{\bar{x}_k}$ ենթախաղում, հանդիսանում է այդ ենթախաղի լավագույն հետագիծ (Բելմանի օպտիմացման սկզբունքը): V(S,K)-ով, S⊂N-ին նշանակենք բնութագրիչ ֆունկցիան $\Gamma_{\bar{x}_k}$ ենթախաղում: Մասնավորապես V(S,0)=V(S), S⊂N-ին Γ խաղի բնութագրիչ ֆունկցիան է: Գիտենալով ենթախաղի բնութագրիչ ֆունկցիաները, կարելի է կառուցել Շեպլիի վեկտորը $\Gamma_{\bar{x}_k}$ ենթախաղի համար: Այն նշանակենք $Sh(k)=\{Sh_i(k),i=1,\dots,n\}$: Ենթադրենք, որ $\Gamma_{k_0}=\Gamma$ կոոպերատիվ խաղում որպես օպտիմացման սկզբունք ընտրված է Շեպլիի վեկտորը: Դա նշանակում է, որ խաղացողները պայմանավորվելով $\bar{u}=(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_i,\dots,\bar{u}_n)$ վարվելակերպերի հավաքանիի ընտրության շուրջը, որը երաշխավորում է խաղացողների առավելագույն գումարային շահումը, ակնկալում են ստանալ այնպիսի շահումներ, որոնք Շեպլիի վեկտորով որոշվում են Γ_{x_0} խաղի համար: Հենց դա էլ հիմք է ծառայում նրանց կոոպերացման համար: $\bar{u}$ իրավիճակում խաղը զարգանում է $\bar{x}=(\bar{x}_0,\bar{x}_1,...,\bar{x}_\ell)$ լավագույն հետագծի երկայնությամբ: Առաջին քայլից հետո խաղը տեղափոխվում է $\bar{x}_1$ գագաթ, և խաղացողները փաստորեն խաղում են $\Gamma_{\bar{x}_1}$ նոր խաղը, որը Γ_{x_0} խաղի ենթախաղն է: Այս ենթախաղում Sh(1) Շեպլիի վեկտորը տարբերվում է Sh(0)=Sh Շեպլիի վեկտորից՝ Γ_{x_0} խաղում: Այս պատճառով, եթե ցանկանում ենք Γ_{x_0}-ում վճարումները կատարել ըստ Sh(0)-ի, որը կոոպերացման հիմքն էր Γ_{x_0}-ում, ապա $\Gamma_{\bar{x}_1}$-ում կոոպերացումը պահպանելու համար խաղացողները պետք է ակնկալեն շահումներ՝ Sh(1)-ին – Շեպլիի վեկտորին համապատասխան, որը հաշվարկված է $\Gamma_{\bar{x}_1}$-ի համար: Հարցն այն է, թե արդյո՞ք հնարավոր է, խաղի յուրաքանչյուր քայլում վճարումներ կատարելով, հասնել այն բանին, որ մնացած վճարումները իրենցից ներկայացնեն Շեպլիի վեկտորի բաղադրիչներ՝ տվյալ քայլից սկսվող ենթախաղի համար:

Սահմանում: $\beta^i=(\beta_0^i,\beta_1^i,...,\beta_{\ell-1}^i,\beta_\ell^i)$, i=1,...,n վեկտորը կոչվում է Շեպլիի վեկտորի բաշխման ընթացակարգ (ՇՎԲԸ), եթե՝

$$1)\ \sum_{k=0}^{n}\beta_k^i=Sh_i(0)=Sh_i, \tag{8.1}$$

$$2)\ \beta^i(k)=Sh_i(k)=Sh_i(0), \tag{8.2}$$

որտեղ՝ $\beta^i(k)=\sum_{m=0}^{k-1}\beta_m^i$:

Սահմանում: Շեպլիի վեկտորը Γ խաղում կոչվում է դինամիկ կայուն (ժամանակի մեջ կայացած), եթե գոյություն ունի Շեպլիի վեկտորի բաշխման ոչ բացասական ընթացակարգ:

Այսպիսով, եթե Շեպլիի վեկտորը դինամիկորեն կայուն է, ապա հետագծի յուրաքանչյուր քայլում խաղացողներին վճարումներ կատարելով՝ Շեպլիի վեկտորի բաշխման ընթացակարգին համապատասխան (այն է՝ k քայլում i-րդ խաղացողին վճարելով β_k^i մեծությունը), կարելի է հասնել այն բանին, որ Շեպլիի վեկտորը $\Gamma_{\bar{x}_k}$ ենթախաղի համար համապատասխանի այն շահումներին, որ խաղացողներին մնացել է ստանալու $\Gamma_{\bar{x}_k}$ ենթախաղում:

Եթե չպահանջվի β_k^i, i=1,...,n, k=1,...,ℓ-ի ոչ բացասական լինելը, ապա (17.2)-ի առընչությունը միշտ էլ հնարավոր է իրագործել, սակայն բացասական β_k^i-երը տնտեսագիտական իմաստ չունեն, քանի որ խաղացողները հազիվ թե համաձայնեն իրենց միջոցները տալ հանուն կոոպերացման:

Օրինակ 17: 15-րդ օրինակից դիտարկենք Γ խաղը՝ որպես լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղ: Այստեղ V(N)=36, $\bar{u}$=(A,A,A) և լավագույն հետագիծն ունի $(x_0,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\bar{x}$ տեսք: $\Gamma=\Gamma_{x_0}$ խաղի համար բնութագրիչ ֆունկցիան գտել էինք 16-րդ. օրինակում.

V({1,2,3},0)=36, V({1,2},0)=22, V({1,3},0)=18,

V({2,3},0)=18, V({1},0)=9, V({2},0)=9, V({3},0)=9:

Շեպլիի վեկտորը ունի

$$Sh(0)=\{76/6,76/6,64/6\}$$

տեսքը: $\Gamma_{\bar{x}_1},\Gamma_{\bar{x}_2},\Gamma_{\bar{x}_3}$ խաղերի համար բնութագրական ֆունկցիաները հաշվվում են համանմանորեն և համապատասխանաբար հավասար են՝

v({1,2,3},1)=27, v({1,2},1)=14, v({1,3},1)=12,

v({2,3},1)=18, v({1},1)=6, v({2},1)=8, v({3},1)=6

$Sh(2)=\{5\frac{1}{2},5\frac{1}{2},7\}$, $Sh(3)=\{3,3,3\}$

$Sh(0)=(5\frac{2}{3},1\frac{2}{3},1\frac{2}{3})+Sh(1)$

$Sh(1)=(1\frac{1}{2},5\frac{1}{2},2)+Sh(2)$

$Sh(2)=(2\frac{1}{2},2\frac{1}{2},4)+Sh(3)$

$Sh(3)=(3,3,3)$:

Այսինքն՝ $\beta_k^i>0$, i=1,2,3, k=1,2,3 և Շեպլիի վեկտորը Γ խաղում դինամիկորեն կայուն է: Հաջորդ օրինակը ցույց է տալիս, որ դա ամենևին էլ միշտ չէ, որ տեղի ունի:

Օրինակ 18: 16-րդ օրինակի խաղը դիտարկենք որպես լրիվ իրազեկմամբ բազմաքայլ խաղ:

Այստեղ V(N)=6, $\bar{u}$=(A,A,A) և լավագույն հետագիծը, ինչպես որ նախորդ դեպքում, ունի $(x_0,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\bar{x}$ տեսք: $\Gamma=\Gamma_{x_0}$ խաղի համար բնութագրիչ ֆունկցիան գտել էինք 16-րդ օրինակում.

V({1,2,3},0)=6, V({1,2},0)=2, V({1,3},0)=2,

V({2,3},0)=2, V({1},0)=1, V({2},0)=1/2, V({3},0)=1/2

Շեպլիի վեկտորը ունի

$$Sh=\{2,2,2\}$$

տեսքը: $\Gamma_{\bar{x}_1},\Gamma_{\bar{x}_2},\Gamma_{\bar{x}_3}$ խաղերի համար բնութագրիչ ֆունկցիաները հաշվվում են համանմանորեն և համապատասխանաբար հավասար են

v({1,2,3},1)=6, v({1,2},1)=1, v({1,3},1)=1,

v({2,3},1)=4, v({1},1)=1/2, v({2},1)=1/2, v({3},1)=1/2

$Sh(2)=\{\frac{21}{18},\frac{21}{18},\frac{66}{18}\}$, $Sh(3)=\{2,2,2\}$,

$Sh(0)=(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+Sh(1)$, $Sh(1)=(-\frac{3}{18},\frac{24}{18},-\frac{21}{18})+Sh(2)$,

$Sh(2)=(-\frac{15}{18},-\frac{15}{18},\frac{30}{18})+Sh(3)$, $Sh(3)=(2,2,2)$:

Տվյալ օրինակում Շեպլիի վեկտորը դինամիկորեն անկայուն է, քանի որ β_k^i մեծությունների թվում կան բացասական մեծություններ: Հեշտ է նկատել, որ այս հանգամանքը բնորոշ է տերմինալ շահումներով խաղերին, այսինքն՝ երբ խաղացողները շահումն ստանում են խաղի միայն վերջնական դիրքում:

Դինամիկ կայունություն հասկացությունը կարող է տարածվել կոոպերատիվ տեսության օպտիմացման նաև այլ սկզբունքների վրա: Տվյալ պարագրաֆում հնարավոր չէ ընդգրկել օպտիմացման սկզբունքների դինամիկ կայունության հետ կապված բոլոր հարցերը: Միայն նկատենք, որ դինամիկ կայունություն հասկացությունը առաջին անգամ սահմանվել է՛ հեղինակիս կողմից: Ավելի ուշ և ըստ երևույթին, մեզանից անկախ, այն վերահայտնագործվել է արևմտյան մաթեմատիկոսների կողմից և անվանվել time-consistency (կայունություն ժամանակի մեջ): Շեպլիի վեկտորի դինամիկ կայունության չկատարումը անհնարին է դարձնում բաժանքի այդ սկզբունքի իրական կիրառումը դինամիկորեն կոոպերատիվ խաղում, քանի որ հնարավոր չէ կազմակերպել քայլ առ քայլ վճարումներ խաղացողներին այնպես, որ խաղացողները շահումների արդար բաշխման հույս ունենան (Շեպլիի վեկտորի համապատասխան բաշխման, որը նրանք ընտրել էին որպես օպտիմացման սկզբունք) յուրաքանչյուր ընթացիկ ենթախաղում: Ցավոք, դասական կոոպերատիվ տեսության օպտիմացման սկզբունքներից շատերը դինամիկորեն անկայուն են:

Դինամիկ խաղերի ժամանակակից տեսության կարևորագույնէ խնդիրը օպտիմացման դինամիկորեն կայուն նոր սկզբունքների ստեղծումն է և ուսումնասիրությունը:

Գրականություն

1. Л.А.Петросян, Н.А.Зенкевич,Е.А.Семина Теория игр. В.Ш. -:М. 1998.
2. Leon A.Petrosjan, Nikolay A.Zenkevich. World Scientific. Singapur • New Jersey • London • Hong Kong, 1996.

Հավելված 2.

Առաջին մասում նկատված վրիպակներ և անհրաժեշտ լրացումներ

Ստորև բերվում են դասագրքի I մասի գործածության ընթացքում նկատված վրիպակները և որոշ անհրաժեշտ լրացումներ*: Օգտագործվում է «փոխարինել» նշանը՝ «⇒»: Օրինակ՝ ա⇒ բ նշանակում է, որ տպագրված է ա, բայց պետք է լինի բ, ուրեմն՝ ա-ն փոխարինել բ-ով:

Լրացումներ

էջ 89. *Լեմ 3*: ⇒ Ենթադրենք p վեկտորի վերլուծության $\beta_1,\ldots,\beta_m$ գործակիցները ըստ (5.5) հենքի բացասական չեն և (5.12) վերլուծության մեջ $\beta_q\neq0$: Որպեսզի p վեկտորի վերլուծության $\beta_1',\ldots,\beta_m'$ գործակիցները ըստ (5.7) հենքի ևս բացասական չլինեն անհրաժեշտ է և բավարար, որ

ա) $\alpha_k>0$-ից, բ) $\min(\beta_i/\alpha_i)\geq(\beta_k/\alpha_k$:

Եթե β_k=0-ի, ապա ըստ լեմ 2՝ $\beta_i'\geq0$-ից i=1,…,m և լեմ 3-ը ճշմարիտ է, հետևաբար հետաքրքիր է $\beta_k>0$-ից պայմանի դեպքը. և $\beta_k\geq0\Rightarrow\beta_k>0$:

էջ 170. *Քայլ 4-րդ*: ⇒ Ստուգենք բավարար պայմանը:

Նշանակենք H^* Լագրանժի ֆունկցիայի ընդլայնված Հեսի մատրիցը՝

$$H^*=\begin{pmatrix}0 & \nabla g\\ \nabla g^T & L_{xx}\end{pmatrix},\ \text{որտեղ}\ \nabla g=(\nabla g_1,\nabla g_2,\ldots,\nabla g_m):$$

Հայտնի է որ, եթե $(\bar{X}^*,\bar{\lambda}^*)$ կետը Լագրանժի $L(\bar{x},\bar{\lambda})$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, ապա $\bar{X}^*$ հանդիսանում է՝

- մաքսիմումի կետ, եթե H^* մատրիցի (m+1)–րդ գլխավոր մինորից սկսած հաջորդ (n-m) գլխավոր մինորները կազմում են նշանափոխ թվային հաջորդականություն, որի առաջին անդամի նշանը որոշվում է $(-1)^{m+1}$ բազմապատկիչի նշանով:
- մինիմումի կետ, եթե H^* մատրիցի (m+1)-րդ գլխավոր մինորից սկսած հաջորդ (n-m) գլխավոր մինորների նշանները որոշվում են $(-1)^m$ բազմապատկիչի նշանով:

Մասնավոր դեպքում, երբ n-m = 1-ի պետք է ստուգել երկրորդ կարգի բավարար պայմանը՝ հաշվել H^* ընդլայնված Հեսի մատրիցի D^* որոշիչը՝

Եթե $D^*>0$, ապա $\bar{X}^*$ կետը (տեղային) մաքսիմումի կետ է, եթե $D^*<0$, $\bar{X}^*$-ը (տեղային) մինիմումի կետ: Եթե D^*= 0-ի, եզրակացություն անել չենք կարող:

Օրինակ 1: ⇒

$$f(x_1,x_2)=2x_1-3x_2\rightarrow\max,$$
$$g(x_1,x_2)=-x_1^2+2x_2-1=0:$$

---

* *Սպրդած վրիպակները նկատել և իրենց դիտողություններն ու առաջարկություններն են արել՝ դոցենտ Ռ.Ավետիսյանը (Ռ.Ա.), ԵՊՀ-ի տնտեսագիտական ֆակուլտետի և Իջևանի մասնաճյուղի տնտեսագիտական ֆակուլտետի ուսանողները, որի համար նրանց հայտնում եմ իմ խորին շնորհակալությունը: Մ. Սահակյան*

Լուծում:

Քայլ 1: Կառուցենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1 - 3x_2 + \lambda\,(1 - x_1^2 + 2x_2)$$

Քայլ 2: Հաշվենք առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները և հավասարեցնենք զրոյի.

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &= 2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ L'_{x_2} &= -3 + 2\lambda = 0 \\ L'_{\lambda} &= 1 - x_1^2 + 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

Քայլ 3: Ստացված հավասարումների համակարգի լուծումն է.

$\lambda = 3/2$, $x_1 = 2/3$, $x_2 = 13/18$:

Քայլ 4: Ստուգենք բավարար պայմանը:Կառուցենք H* մատրիցը

$$H^* = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 & 2 \\ -2x_1 & -2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4/3 & 2 \\ -4/3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^* = 12 \geq 0$ և $\overline{x}^* = (2/3.13/18)$ մաքսիմումի կետ է,:

<u>Առաջարկություն</u> *(Ռ.Ա.)*,. էջ 170. *Քայլ 3*- ից հետո.

Դիցուք՝ $(\overline{x}^*, \overline{\lambda}^*)$ -ը (2,8) համակարգի որևէ լուծում է: Այդ դեպքում, եթե

- $g_i(\overline{x})$ ֆունկցիայի գրադիենտները գծորեն անկախ են $\overline{x}^*$ կետում.
- $L(\overline{x}, \overline{\lambda})$ -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները անընդհատ են $\overline{x}^*$ կետում, իսկ $L(\overline{x})$ 2 անգամ դիֆերենցելի է $\overline{x}^*$-ի շրջակայքում.
- $(L_{xx}(\overline{x}, \overline{\lambda})h, h) > 0\ (< 0)$ բոլոր $h \neq 0$ վեկտորների համար, որոնք բավարարում են $(\nabla g_i(\overline{x}), h) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ պայմանին,

ապա $\overline{x}^*$ տեղային մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է f(x) ֆուկցիայի համար (2.2) սահմանափակումների առկայությամբ: (L_{xx}-ով նշանակված է Լագրանժի ֆունկցիայի Հեսի մատրիցը ըստ $\overline{x}$ փոփոխականի, իսկ ∇g_i-ին $g_i(\overline{x})$ ֆունկցիայի գրադիենտն է): Ասվածը մեկնաբանենք կոնկրետ օրինակով:

<u>Օրինակ</u>: $f(x_1 x_2) = 3x_1 + 4x_2 + 5 \to ext$

$g(x_1 x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 = 2$

Լագրանժի ֆունկցիան՝ $L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 + 4x_2 + 5 + \lambda(x_1^2 + 2x_1x_2 - 2)$

Գրենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$\begin{cases} L_{x_1} = 3 + 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ L_{x_2} = 4 + 2\lambda x_1 = 0 \\ L_{\varepsilon} = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Երկրորդ հավասարումից՝ $x_1 = -2/\lambda$, առաջինից՝ $x_2 = 1/2\lambda$, տեղադրելով երրորդի մեջ կստանանք՝ $(4/\lambda^2) - (2/\lambda^2) = 2 \to \lambda = \pm 1$:

Այսպիսով (2.4) համակարգի լուծումներն են՝

$(\lambda=1, x_1=-2, x_2=1/2)$ և $(\lambda=-1, x_1=2, x_2=-1/2)$

Պարզենք $(x_1=-2, x_2=1/2)$ և $(x_1=2, x_2=-1/2)$ կետերը էքստրեմումի կետեր են, թե ոչ:

$$L_{x_1x_1}=2\lambda,\ L_{x_1x_2}=L_{x_2x_1}=2\lambda,\ L_{x_2x_2}=0\to L_{xx}=\begin{pmatrix}2\lambda & 2\lambda\\ 2\lambda & 0\end{pmatrix},$$

ուստի

$$(L_{xx}h,h)=2\lambda h_1^2+4\lambda h_1h_2,\ (\text{այստեղ } h=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}), \qquad (2.5)$$

ընդ որում (2.5)-ում h_1-ը և h_2-ը պետք է բավարարեն են լրացուցիչ պայմանին՝

$$g_{x_1}h_1+g_{x_2}h_2=0,$$

որտեղ g_{x_1} և g_{x_2} ածանցյալները հաշված են քննարկվող կետում:

Մեր օրինակում՝ $g_{x_1}=2x_1+2x_2$, $g_{x_2}=2x_1$: Ուստի (-2, 1/2) կետում

$$g_{x_1}(-2,1/2)=2\cdot(-2)+2\cdot 1/2=-3,\ g_{x_2}(-2,1/2)=-4$$

$$-3h_1-4h_2=0;\ h_1=(-4/3)h_2$$

տեղադրելով h_1-ի ստացված արժեքը (2.5)-ում և հաշվի առնելով $\lambda=1$, կստանանք

$(L_{xx}h,h)=2\cdot(-\frac{4}{3}h_2)^2+4\cdot(-\frac{4}{3}h_2)h_2=-\frac{16}{9}h_2^2<0$ ցանկացած $h_2\neq 0$ դեպքում, ուստի $(x_1=-2;\ x_2=1/2)$ կետը լոկալ մաքսիմումի կետ է:

Նույն ձևով ցույց է տրվում, որ $(x_1=2;\ x_2=-1/2)$ կետը լոկալ մինիմումի կետ է:

<u>Վրիպակներ</u>

Էջ N , տող	Տպագրված է	Պետք է լինի
Էջ 30, վերևից 9-րդ	կորի $?b$ և cd մասերը	կորի cd մասը:
Էջ 70. վերևից 9-րդ	«եթե այն դատարկ չէ»	ավելորդ է՝ հանել
էջ 157. ներքևից 11-րդ	B= (1,2,…,n)	B= (1,2,…,m)
էջ 158. ներքևից 15-րդ	x_2	x_1+x_2
էջ 159. վերևից 5-րդ	x_2	x_1+x_2
էջ 166. ներքևից 11-րդ	$f(\bar{x})\to\min$	$f(\bar{x})\to\min\ (\max)$
Էջ 168 ներքևից 8-րդ	$\bar{\lambda}_i$	λ_i
Էջ 171, ներքևից 13-րդ	c_1x_2	c_1x_1
Էջ 171. ներքևից 17-րդ	c_1x_2	c_1x_1
էջ 173. վերևից 8-րդ	L'_{x_j}	L'_{x_i} :
էջ 173 վերևից 11-րդ	e-1-λ	$e^{-1-\lambda}$
Էջ 176, 14-րդ.	$\bar{x}_1$	x_1
էջ 179. 2-րդ	$x_j\ \geq\ 0$	$x_j^*\geq 0$

էջ 181, վերևից 2-րդ.	$L_{\lambda}^{'} = 0$	$L_{\lambda_i}^{'} = 0$
181. ներքևից 6-րդ	$\lambda_2 \geq 0$	$\lambda_i \geq 0$:
181. ներքևից 9-րդ.	$j = 1,\ldots,h$	$j = 1,\ldots,n$:
181. ներքևից 10-րդ.	$f_{x_j}^{'} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i)_{x_j}^{'} \cdot x_j$	$\left(f_{x_j}^{'} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i)_{x_j}^{'}\right) \cdot x_j$
էջ 182, ներքևից 8-րդ	$\min\limits_{x\in A}$ $\overline{L}(x,y)$	$\min\limits_{\overline{x}\in A}$, $L(x,y)$
էջ 185, վերևից՝ 3-րդ	$L_{x_j}^{'}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)x^*_j \geq 0$	$L_{x_j}^{'}(\overline{x}^*,\overline{\lambda}^*)x^*_j = 0$
էջ186 վերջին	$\lambda_j = 2\lambda_j^*$ և $\lambda_j = 0$	$\lambda_j > \lambda_j^*$-ից և $\lambda_j = \lambda_j^*$:
էջ 187. վերևից 1-ին	$\lambda = 0$	$\lambda_j = 0$
էջ 188.վերևից 2-րդ	$g_i(x^{(0)}) = b_i$	$g_i(x^{(0)}) > b_i$:
էջ 189. ներքևից՝ 2-րդ	(7. 12)	(7. 11)
էջ 190. վերևից 3-րդ	(8.8) - (8.9)	(7.13) - (7.14)
էջ 190. վերևից 2-րդ	$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i - g_i(\overline{x}^*)) \leq 0$	$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i - g_i(\overline{x}^*)) \leq 0$
էջ 190. վերևից 5-րդ	(7.12)	(7.10)
էջ 190. ներքևից 6-րդ	(x)	(-x),
էջ 190. վերջին	$x+\lambda x^2$	$- x+\lambda x^2$:
էջ 190. վերևից 4-րդ	$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i - g_i(\overline{x})) = 0$	$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i - g_i(\overline{x}^*)) = 0$
էջ 193.ներքևից 9-րդ	$\lambda = h_i(x)$	$\lambda_i h_i(\overline{x})$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ուսումնական ձեռնարկ

Մելս Սահակյան, Նորայր Բեկնազարյան,
Համլետ Հակոբյան, Խանիկ Քերոբյան

Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ

II

Գործույթների հետազոտումը տնտեսության կառավարման խնդիրներում

Ձեռնարկը գրել են՝

Մելս Սահակյան	VIII – XIV բաժիններ
Նորայր Բեկնազարյան	IX բաժին
Համլետ Հակոբյան	VIII բաժին
Խանիկ Քերոբյան	X – XIV բաժիններ
Լևոն Պետրոսյան	Հավելված. Խաղերի տեսություն

Մասնագիտական խմբագիրներ՝	Ռոմեն Շահբաղյան, Էդուարդ Դանիելյան
Շարադրանքի խմբագիր՝	Վրույր Ասլանյան
Համակարգչային շարվածք՝	Անահիտ Թադևոսյան

Ծավալը՝. 24,4 տպ. մամուլ.: Չափսը՝ 60×84 1/16:
Թուղթը օֆսեթ N1: Տպաքանակ՝ 1500:
ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչության տպարան
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան 24: