

**ՄԵԼՍ ՍԱՀԱԿՅԱՆ**

**ՏՆՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ  
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ**

**III**

**ԳՈՐԾՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ  
ՏՆՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ**

*ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ*

ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից  
թույլատրված է որպես բարձրագույն ուսումնական  
հաստատությունների խնդրագիրք

ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչություն  
Երևան 2001

MELS SAHAKYAN

OPERATIONS RESEARCH  
FOR MANAGEMENT

III

PROBLEMS & EXERCISES

Yerevan – 2001



МЕЛС СААКЯН

ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ  
В УПРАВЛЕНИИ ЭКОНОМИКОЙ

III

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Ереван 2001

ՂՏՀ 33  
ԳՄԴ 65  
Ս 150

Խմբագիր՝ տնտ. գիտ. թեկն.,  
պրոֆ. Սարգիս Սարգսյան

Ս 150 Սահակյան Մ. Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ. Գործությունների հետազոտումը տնտեսության կառավարման խնդիրներում. Խնդրագիրք, Մ. Սահակյան – Երևան., 2001, էջ 138:

Խնդրագիրքը նվիրված է գործությունների հետազոտման մաթեմատիկական եղանակներին՝ գծային, ոչ գծային ծրագրմանը, նախագծերի պլանավորման ու պաշարների կառավարման, ամորտիզությունների պայմաններում որոշումների կայացման, հերթերի և խաղերի տեսության:

Նախատեսված է ապագա տնտեսագետների, կառավարիչների, մաթեմատիկոսների, ճարտարագետների և այլ հարակից մասնագիտությամբ բակալավրիատի և մագիստրատուրայի ուսանողների համար: Կարելի է որպես խնդրագիրք օգտագործել «Գործությունների հետազոտում», «Մաթեմատիկական ծրագրում» և «Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ» դասընթացներն ուսումնասիրելիս:

Խնդրագիրքը գրվել և հրատարակվել է Ամերիկայի Միացյալ Նահանգների միջազգային զարգացման գործակալության Եվրասիա հիմնադրամի ֆինանսական աջակցությամբ:

Ս  $\frac{0601000000}{703(02)-2001}$  2001

ԳՄԴ 65

ISBN 5 – 8080 – 0481- 0

© «Գործարարների և գիտնականների միություն» ՀԿ

© Մ. Սահակյան

ՀՀ ԳԱԱ, «Գիտություն» հրատարակչություն, 2001

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. Գծային ծրագրման խնդիրներ</b>                        | <b>1</b>  |
| 1. Կազմել գծային ծրագրման մոդելը                          | 1         |
| 2. Լուծել գծապատկերի միջոցով                              | 21        |
| 3. Լուծել գծային ծրագրման խնդիրները<br>գծապատկերի միջոցով | 22        |
| 4. Ստուգել տրված վեկտորները<br>հենքային լուծում են, թե ոչ | 26        |
| 5. Գտնել թույլատրելի հենքային լուծումները                 | 28        |
| 6. ԳԾԽ-ի երկակի խնդիր                                     | 29        |
| 7. Ստուգել տրված X վեկտորը<br>լավագույն լուծում է, թե ոչ  | 34        |
| 8. Սիմպլեքս եղանակ                                        | 35        |
| 9. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը                            | 35        |
| 10. Ջանազան խնդիրներ                                      | 37        |
| 11. Ստուգողական տարբերակներ                               | 44        |
| 12. Պատասխանել Ալո կամ Ոչ                                 | 60        |
| <b>II. Ոչ գծային ծրագրման խնդիրներ</b>                    | <b>61</b> |
| 1. Լուծել հետևյալ խնդիրները                               | 61        |

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 2. Լուծել գծապատկերի միջոցով                       | 63  |
| 3. Լուծել մաթեմատիկական ծրագրման<br>դասական խնդիրը | 66  |
| 4. Կուն-Թակերի պայմանները                          | 68  |
| 5. Թամբակետ                                        | 70  |
| 6. Լուծել գրադիենտի եղանակով                       | 72  |
| 7. Ստուգողական տարբերակներ                         | 73  |
| <br>III. Որոշումների ընդունման տեսություն          | 87  |
| <br>IV. Ծրագրերի պլանավորում և<br>կառավարում       | 95  |
| <br>V Պաշարների կառավարման խնդիրներ                | 103 |
| <br>VI. Հերթերի տեսության խնդիրներ                 | 112 |
| <br>VII. Խաղերի տեսություն                         | 121 |
| <br>Գրականություն                                  | 129 |
| <br>Բովանդակություն                                | 131 |

# I. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

## 1. Կազմել գծային ծրագրման մոդելը:

Խնդիր 1: «Եղնիկ» փակ բաժնետիրական ընկերությունը արտադրում է երեք տեսակ շրթներկ՝ հեղուկ, սաղափե, փայլատ, օգտագործելով միանման խառնուրդ պատրաստող մեքենաներ և աշխատանք:

Ձեռնարկության գլխավոր հաշվապահին հանձնարարված է մշակել արտադրության ծրագիր՝ շաբաթական շրթներկ թողարկելու համար:

Աղյուսակում բերված են տեղեկություններ շրթներկի վաճառքի գների և փոփոխուն ծախսերի վերաբերյալ:

| Միավորը՝ պրծ                | Շրթներկ |        |        |
|-----------------------------|---------|--------|--------|
|                             | Հեղուկ  | Սաղափե | Փայլատ |
| Վաճառքի գինը                | 120     | 126    | 110    |
| Արտադ. ծախսերը 1լ. համար    |         |        |        |
| Հումքի արժեքը               | 11      | 25     | 20     |
| Աշխատանքի արժեքը            | 30      | 36     | 24     |
| Խառնուրդի պատրաստման արժեքը | 32      | 20     | 36     |
| Այլ ծախսեր                  | 12      | 15     | 10     |

Մեկ աշխատաժամի արժեքը կազմում է 300 դրամ, իսկ խառնուրդի պատրաստման մեքենայի 1 ժամը՝ 400 դրամ: Աշխատանքային ժամաքանակը սահմանափակված է շաբաթական 8000 աշխատաժամով, իսկ խառնուրդ պատրաստող մեքենաների աշխատաժամերը սահմանափակված են շաբաթական 5900 ժամով:

Ըստ պայմանագրի՝ ընկերությունը պետք է արտադրի շաբաթական 25000լ. փայլատ շրթներկ: Հեղուկ շրթներկի առավելագույն պահանջարկն է մեկ շաբաթվա համար՝ 35000լ., իսկ սաղափե շրթներկի՝ 29000 լ.:

Պահանջվում է.

ա) Ձևակերպել գծային ծրագրման խնդիրը, որը թույլ տա որոշել հեղուկ և սաղափե շրթներկի շաբաթական արտադրության ծավալները և առավելագույնի հասցնի սպասվելիք շահույթը:

բ) Լուծել այդ խնդիրը գծագրորեն: Որոշել մեկ շաբաթվա համար արտադրության լավագույն ծավալները և սպասվելիք շահույթը:

գ) Հաշվարկել, թե խնդրի այլ լուծում ստանալու համար ինչքանով պետք է փոխել հեղուկ շրթներկի վաճառքի գինը:

Խնդիր 2: Միջազգային բանկային կազմակերպության ներդրումների գծով կառավարիչն իր տրամադրության տակ ունի 550 մլն. պրծ:

Նա ուսումնասիրում է հնարավոր ներդրումների չորս տարբերակ.

➤ պետական արժեթղթեր,

- միությունների արժեքներ,
- սպասարկման ոլորտի ճյուղերի հասարակ բաժնետոմսեր,
- արտադրության ոլորտի ճյուղերի հասարակ բաժնետոմսեր:

Կառավարիչի նպատակն է ներդրումների վերադարձման չափի մաքսիմացումը: Տարեկան տոկոսադրույքը 1, 2, 3, և 4 տարբերակների համար կազմում է 8%, 9%, 10%, և 12% համապատասխանաբար: Չներդրված դրամական միջոցները մնում են բանկային հաշվում և բերում են տարեկան 4% շահ:

Կառավարիչը որոշել է՝ 50 մլն. դրամից ոչ պակաս ներդրել միությունների արժեքների մեջ, իսկ ռիսկի տարրերով ներդրումներ կատարել 300 մլն. դրամից ոչ ավելի: Բացի այդ, նա համարում է, որ դրամական միջոցների գոնե կեսը պետք է ներդրել հասարակ բաժնետոմսերի մեջ, իսկ ներդրումների ընդհանուր գումարի մեկ քառորդից ոչ ավելին՝ արտադրության ոլորտի ճյուղերի բաժնետոմսերի մեջ:

Խնդիր 3: Ձեռնարկությունը թողարկում է A և B երկու տեսակ արտադրանք: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է B արտադրանքի իրացման ծավալի 60%-ից ոչ պակաս: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 400 պղմ: A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 10, իսկ B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 20 պղմ մեկ միավորի համար: A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 40 և 70 պղմ-ի:

A և B արտադրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն բաշխումը:

Խնդիր 4: Ձեռնարկությունը թողարկում է A և B երկու տեսակ արտադրանք: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է ընդհանուր արտադրանքի իրացման ծավալի 40%-ից ոչ պակաս: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 400 պղմ: A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 10, իսկ B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 20 պղմ մեկ միավորի համար: A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 40 և 70 պղմ-ի:

A և B արտադրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն բաշխումը:

Խնդիր 5: ՄՊ ընկերությունը թողարկում է երկու ձևի գլխարկ: 1-ին ձևի գլխարկի արտադրման աշխատատարությունը երկու անգամ ավել է 2-րդ ձևի գլխարկի արտադրման աշխատատարությունից: Եթե ձեռնարկությունը թողարկեր միայն առաջին ձևի գլխարկներ, ապա մեկ օրվա ընթացքում կարտադրվեր 500 գլխարկ: Երկու գլխարկների իրացման օրական ծավալը կազմում է 150-ից -240 գլխարկ: Առաջին ձևի գլխարկի վաճառքից ստացված շահույթը հավասար է 10 պղմ, իսկ երկրորդ ձևինը՝ 5 պղմ-ի:

Առավելագույն շահույթ ստանալու համար յուրաքանչյուր ձևից քանի՞ գլխարկ պետք է թողարկել:

**Խնդիր 6:** Երկու նախագծերի իրականացման համար պահանջվում են որոշակի դրամական միջոցներ: Մեկ տարի անց A նախագիծը երաշխավորում է ներդրված 100 պղմ-ի դիմաց ստանալ 70 պղմ շահույթ: B նախագիծը երաշխավորում է յուրաքանչյուր ներդրված 100 պղմ-ի դիմաց 200 պղմ շահույթ ստանալ երկու տարի հետո: B նախագծի ֆինանսավորման դեպքում ներդրումների ժամանակահատվածը բազմապատիկ է երկու տարվան:

Ինչպե՞ս պետք է տնօրինել 100000 պղմ գումարը, որպեսզի մաքսիմացվի ներդրման սկզբից երեք տարի անց ստացված գումարային շահույթը:

**Խնդիր 7:** Օրվա  $i$ -րդ ժամին ավտոբուսների անհրաժեշտ նվազագույն քանակը հավասար է  $b_i$ ,  $i=1,2,\dots,24$ : Յուրաքանչյուր ավտոբուս երթուղում լինում է անընդմեջ 6 ժամ: Եթե  $i$ -րդ ժամանակահատվածում ավտոբուսների քանակը գերազանցում է  $b_i$  մեծությանը, ապա մեկ մեքենաժամի համար առաջանում են  $c_i$  չափով լրացուցիչ ծախսեր:

Տվյալ խնդիրը ձևակերպեք որպես լրացուցիչ ծախսերի մինիմացման ընդհանուր խնդիր:

**Խնդիր 8:** Էլեկտրոնային արդյունաբերության ձեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ ռադիոընդունիչ, ընդ որում, յուրաքանչյուր տեսակի համար պահանջվում է առանձին տեխնոլոգիական գիծ: Առաջին գծի արտադրության օրական ծավալը կազմում է 60 միավոր, երկրորդ գծի օրական ծավալը՝ 75 միավոր: Առաջին տեսակի ռադիոընդունիչի թողարկման համար անհրաժեշտ է 10, իսկ երկրորդ՝ 8 միասնական սխեմա: Օգտագործվող սխեմաների օրական առավելագույն պաշարի հավասար է 800 միավորի:

Առաջին և երկրորդ տեսակների մեկ ռադիոընդունիչի իրացման շահույթը համապատասխանաբար հավասար է 30 և 20 պղմ-ի:

Որոշել յուրաքանչյուր տեսակի ռադիոընդունիչների արտադրության օրական արդյունավետ ծավալը

**Խնդիր 9:** Մո ընկերության արտադրանքը հանրաճանաչ դարձնելու և արտադրության ծավալը մեծացնելու նպատակով կառավարիչը որոշել է գովազդել արտադրանքը: Ընկերության բյուջեյում գովազդի ծախսերին տրամադրված է ամսական 500000 պղմ: Ռադիոգովազդի յուրաքանչյուր լուպեն արժե 500 պղմ, իսկ հեռուստագովազդինը՝ 5000 պղմ: Այդ պատճառով ընկերության համար ձեռնտու է ռադիոյացանցը օգտագործել հեռուստացանցից գոնե երկու անգամ ավելի հաճախ: Սակայն նախորդ տարիների փորձը ցույց է տվել, որ հեռուստագովազդի յուրաքանչյուր լուպետով ապահովվող իրացման ծավալը 2,5անգամ ավելի է ռադիոգովազդի մեկ լուպետով ապահովվող իրացման ծավալից:

Ռադիո և հեռուստագովազդի ընդհանուր ժամաքանակը չպետք է գերազանցի 40: Որոշել ռադիո և հեռուստագովազդների համար տրամադրված դրամական միջոցների ամսական լավագույն բաշխումը:

**Խնդիր 10:** Երկու տեսակ արդյունաբերական արտադրանքից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար մշակվում է երեք տարբեր հաստոցներով: Հաստոցները կարելի է օգտագործել օրական 10 ժամ: Ստորև բերված աղյուսակում ներկայացված են յուրաքանչյուր տեսակի մեկ արտադրանքի մշակման ժամաքանակը և վաճառքից ստացված շահույթը: Գտեք յուրաքանչյուր տեսակի արտադրանքի թողարկման լավագույն ծավալը:

| Արտադրանք | Արտադրանքի մշակման ժամանակը (րոպե) |           |            | Շահույթ |
|-----------|------------------------------------|-----------|------------|---------|
|           | I հաստոց                           | II հաստոց | III հաստոց |         |
| 1         | 10                                 | 6         | 8          | 2 պղմ.  |
| 2         | 85                                 | 20        | 15         | 3 պղմ.  |

**Խնդիր 11.** Դրամական միջոցները կարելի է բաշխել չորս տարբերակով, ընդ որում խաղը ունի երեք ելք: Աղյուսակում բերված են երեք ելքից յուրաքանչյուրի համար համապատասխան տարբերակում ներդրված միավոր պղմ-ի դիմաց ստացված շահույթի (կորուստի) չափերը:

| Ելք | Մեկ միավոր պղմ-ի դիմաց ստացված շահույթը (կորուստը) |             |              |             |
|-----|----------------------------------------------------|-------------|--------------|-------------|
|     | I տարբերակ                                         | II տարբերակ | III տարբերակ | VI տարբերակ |
| 1   | -3                                                 | 4           | -7           | 15          |
| 2   | 5                                                  | -3          | 9            | 4           |
| 3   | 3                                                  | -9          | 10           | -8          |

Խաղացողը կարող է իր 500 պղմ-ը խաղի ընթացքում օգտագործել միայն մեկ անգամ: Խաղի ճշգրիտ ելքը նախապես անհայտ է: Խաղացողը բաշխում է դրամը այնպես, որ մաքսիմացնի ներդրված գումարից ստացվող նվազագույն գումարը:

(Ծանոթություն: Ներդրված միջոցներից ստացված գումարը կարող է լինել բացասական, զրոյական, կամ դրական:)

**Խնդիր 12:** Ընկերությունը արտադրում է X և Y տեսակ արտադրանք՝ օգտագործելով A, B և C տեսակ հումք: Դրանց պաշարը, մեկ միավոր արտադրանքի համար օգտագործվող հումքի քանակը, վաճառքի գները և փոփոխում ծախսերը բերված են ստորև:

Գտնել X և Y տեսակ արտադրանքի թողարկման այն ծավալը, որը մաքսիմացնում է ընկերություն շահույթը: Հետագոտել ԳԾԽ-ի զգայունությունը X և Y տեսակ արտադրանքի գների նկատմամբ:

| Արտադրանք | Հումք (կգ) |     |     |
|-----------|------------|-----|-----|
|           | A          | B   | C   |
| X         | 4          | 2   | 5   |
| Y         | 3          | 5   | 2   |
| Պաշար     | 220        | 250 | 300 |

| Արտադրանք | Վաճառքի գին<br>/պմդ 1 միավորի/ | Փոփոխական ծախսեր<br>/պմդ մեկ միավորի/ |
|-----------|--------------------------------|---------------------------------------|
| X         | 400                            | 200                                   |
| Y         | 500                            | 350                                   |

Գտնել X և Y տեսակ արտադրանքի թողարկման այն ծավալը, որը մաքսիմացնում է ընկերությունը շահույթը: Հետագուտել ԳԾԽ-ի զգայունությունը X և Y տեսակ արտադրանքի գների նկատմամբ:

Խնդիր 13: Ընկերությունը թողարկում է սահմանափակ քանակությամբ երկու տեսակ լվացքի հեղուկ X և Y բաղկացած երեք բաղադրիչներից՝ A, B և C: X և Y տեսակ լվացքի հեղուկ արտադրելու համար օգտագործվելիք A, B և C տեսակ բաղադրիչների պաշարը և հինգ փոքր արտադրանքի համար օգտագործվելիք քանակը բերված են ստորև:

|                            | X   | Y   | Պաշար / կգ./ |
|----------------------------|-----|-----|--------------|
| A / գրամ /                 | 200 | 500 | 20           |
| B / գրամ /                 | 500 | 100 | 25           |
| C / գրամ /                 | 250 | 300 | 30           |
| Ընդամենը<br>շահույթը /պմդ/ | 500 | 400 |              |

Պահանջվում է գտնել, թե X և Y տեսակ որքան հեղուկ պետք է արտադրել, որպեսզի ընկերության շահույթը լինի առավելագույնը:

Խնդիր 14: Ձեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է արտադրանքի իրացման ընդհանուր ծավալի 50%-ից ոչ պակաս: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 100 պղմ: A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 2 պղմ մեկ միավորի համար, B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 4 պղմ մեկ միավորի համար, իսկ փոփոխուն ծախսերն են՝ 10 և 20 պղմ համապատասխանաբար:

A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 20 և 40 պղմ-ի: A և B արտադրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն քաշխումը:

Խնդիր 15: «Կարպետ» ԲԲ ընկերությունն արտադրում է երկու տեսակ գորգ՝ «Սիրելի» և «Նազելի»: Դրանց արտադրության վերաբերյալ հայտնի է՝

|                                | Գորգ «Սիրելի» | Գորգ «Նազելի» | Պաշար |
|--------------------------------|---------------|---------------|-------|
| Վաճառքի գինը /պղմ/             | 500           | 350           |       |
| 1 գորգի փոփոխ. ծախս /պղմ/      | 250           | 150           | 6000  |
| 1 գորգին անհրաժեշտ մ / ժամ     | 50            | 30            | 600   |
| Լգ-ին անհրաժեշտ բրդյա թել /կգ/ | 10            | 6             | 120   |
| 1 գորգին անհրաժեշտ ներկ /կգ/   | 5             | 4             | 80    |

Պահանջվում է կազմել այնպիսի արտադրական ծրագիր, որ մաքսիմացվի սպասվելիք շահույթը:

**Խնդիր 16:** Ձեռնարկությունը թողարկում է երկու ձևի մարզական զգեստ: 1-ին ձևի մարզական զգեստի արտադրման աշխատատարությունը երեք անգամ ավելի է քան 2-րդ ձևի զգեստի արտադրման աշխատատարությունը: Եթե ձեռնարկությունը թողարկեր միայն առաջին ձևի մարզական զգեստ, ապա մեկ օրում կարտադրվեր 400 զգեստ: Երկու զգեստների իրացման օրական ծավալը կազմում է 350-ից - 500 զգեստ: Առաջին ձևի զգեստի վաճառքից ստացված շահույթը հավասար է 90 պրոմ-ի, իսկ երկրորդ ձևինը՝ 60 պրոմ-ի:

Առավելագույն շահույթ ստանալու համար յուրաքանչյուր ձևից քանի՞ մարզական զգեստ պետք է թողարկել:

**Խնդիր 18:** ՄՊ ընկերությունը արտադրում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A տեսակի մեկ արտադրանքի վաճառքից ընկերությունը ստանում է 75 պրոմ, իսկ B տեսակի մեկ արտադրանքի վաճառքից՝ 60 պրոմ:

A տեսակի մեկ արտադրանքի արտադրության համար անհրաժեշտ է 4 մարդ/ժամ և 60 պրոմ հումք, իսկ B տեսակի մեկ արտադրանքի համար 3 մարդ/ժամ և 70 պրոմ: Ընդհանուր մարդ/ժամի քանակը սահմանափակ է՝ 3500, իսկ մեկ շաբաթվա համար հումք գնելու ծախսը նախատեսված է ոչ ավելի, քան 80000 պրոմ:

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի ընկերության արտադրական ծրագիրը, որպեսզի նա սառնարանների վաճառքից առավելագույն շահույթ ստանա:

**Խնդիր 19:** Տիկին Քնքուշը մտադրվել է գնել երեք ձեռնարկությունների՝ A, B և C բաժնետոմսեր՝ ներդնելով 2 մլն. պրոմ: Բաժնետոմսերի գնման խորհրդատվական ծառայությունից նրան հայտնեցին, որ A, B և C բաժնետոմսերի եկամտաբերությունն և  $\beta$  գործակիցները համապատասխանաբար հավասար են՝ 0.11, 0.15, 0.08 և 1, 1.2 և 0.9: Տիկին Քնքուշը լսել է, որ  $\beta$  գործակիցը բնորոշում է ներդրման ռիսկի չափը և ցանկանում է, որ այն լինի ոչ ավելին քան 1.1: Կազմել ԳԾԽ-ը և տիկին Քնքուշի համար գտնել ներդրման լավագույն տարբերակը:

**Խնդիր 20:** Ընկերությունն օրական արտադրում է երկու տեսակ սալիկ՝ A և B, ընդ որում հումքի պակասի պատճառով B տեսակից կարող է արտադրել 110 միավորից ոչ ավել: Ընկերությունն օրական A և B տեսակ ինչքան սալիկ պետք է թողարկի, որպեսզի առավելագույն շահույթ ստանա:

Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ տվյալներն են.

| Արտադրամաս | Կարողություն  | Կարողության օգտագործումը (ժամ/միավոր) |     | Մեկ միավորի ծախս (պրոմ) |     |
|------------|---------------|---------------------------------------|-----|-------------------------|-----|
|            |               | A                                     | B   | A                       | B   |
| 1          | 600 մեքենաժամ | 2                                     | 5   | 800                     | 950 |
| 2          | 120 մեքենաժամ | 1                                     | 0.5 | 600                     | 700 |

**Խնդիր 21:** Ընկերակցությունը արտադրում է երկու տեսակ արտադրանք A և B: Ընկերակցության վերադիր ծախսերը՝ որակյալ և միջին որակի

աշխատողների համար կազմում է մեկ աշխատաժամի համար համապատասխանաբար 2 և 1 պղմ: Որակյալ աշխատողների աշխատաժամերի քանակը կազմում է ամսական 2000 ժամ, իսկ միջին որակի աշխատողներինը՝ 2500 ժամ: Առավելագույն պահանջարկը 1-ին տեսակի արտադրանքի համար ամսական 150, իսկ 2-րդ տեսակի արտադրանքի համար ամսական 120 միավոր է:

Պահանջվում է կազմել այնպիսի ծրագիր, որը առավելագույնի հասցնի ընկերակցության շահույթը: Մեկ միավոր արտադրանքի վերաբերյալ մանրամասները բերված են ստորև աղյուսակում.

| Միավորների քանակ                     | A տեսակ արտադրանք | B տեսակ արտադրանք | գնացուցակ                |
|--------------------------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|
| Վաճառքի գին, /պղմ/                   | 125               | 165               |                          |
| Հումք /կգ/                           | 6                 | 4                 | 5 պղմ/ կգ                |
| Աշխատաժամ՝<br>որակյալ<br>միջին որակի | 5<br>10           | 10<br>25          | 3 պղմ/ ժամ<br>2 պղմ/ ժամ |

Խնդիր 22: ՄՊ ընկերությունը արտադրում է երկու տեսակ փոշեհան՝ A և B: A տեսակի մեկ փոշեհանի վաճառքից ընկերությունը ստանում է 90 պղմ, իսկ B տեսակի մեկ փոշեհանի վաճառքից՝ 75 պղմ: A տեսակի մեկ փոշեհանի արտադրության համար անհրաժեշտ է 4 մարդ/ժամ և 40 պղմ հումք, իսկ B տեսակի մեկ սառնարանի համար 3 մարդ/ժամ և 60 պղմ:

Ընդհանուր մարդ/ժամերի քանակը սահմանափակ է՝ 4200, իսկ մեկ շաբաթվա համար հումք գնելու ծախսը նախատեսված է ոչ ավելի, քան 100000 պղմ:

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի ընկերության արտադրական ծրագիրը, որպեսզի նա փոշեհանների վաճառքից առավելագույն շահույթ ստանա:

Խնդիր 23: «ԳԳՄ» ՄՊ ընկերությունը ֆինանսների ոլորտում խորհրդրդատվական ծառայություններ է մատուցում ներդրման լավագույն փաթեթի ձևավորման վերաբերյալ: Հաճախորդը ցանկանում է 25 մլն. դրամ ներդնել A և B արդյունաբերական ձեռնարկությունների բաժնետոմսերի մեջ երկու տիպի բաժնետոմսերից զնելով ոչ ավելի քան 6000 հատ, ընդ որում որևէ ձեռնարկության բաժնետոմսերի քանակը չպետք է գերազանցի 5000-ից: A ձեռնարկության մեկ բաժնետոմսի արժեքը՝ 5000 դրամ է, իսկ B ձեռնարկության մեկ բաժնետոմսի արժեքը՝ 3000: «ԳԳՄ» ընկերության գնահատմամբ՝ հաջորդ տարում A և B ձեռնարկությունների մեկ բաժնետոմսից սպասվելիք շահույթը կազմելու է համապատասխանաբար 1000 և 750 դրամ:

Ինչպիսի՞ն կլինի խորհրդրդատվական ձեռնարկության պատասխանը իր հաճախորդին:

Խնդիր 24: ՄՊ ընկերությունը արտադրում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A և B տեսակի մեկ միավորի վաճառքից ընկերությունը ստանում է համապատասխանաբար 400 և 600 պղմ: A տեսակի մեկ միավորի ար-

տաղդության համար անհրաժեշտ է 5 աշխատաժամ և 500 պղմ հումք, իսկ B տեսակի մեկ միավորի համար 4 աշխատաժամ և 600 պղմ: Ընդհանուր աշխատաժամի քանակը սահմանափակ է՝ 2000, իսկ մեկ շաբաթվա համար հումք գնելու ծախսը նախատեսված է ոչ ավելի, քան 500000 պղմ:

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի ընկերության արտադրական ծրագիրը, որ նա արտադրանքի վաճառքից առավելագույն շահույթ ստանա:

Խնդիր 25: Ձեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է B արտադրանքի իրացման ծավալի 40%-ից ոչ պակաս: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 600 պղմ:

A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 15, իսկ B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 24 պղմ մեկ միավորի համար: A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 40 և 70 պղմ-ի: A և B ապրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն բաշխումը:

Խնդիր 26: Ձեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է իրացման ընդհանուր ծավալի 40%-ից ոչ ավել: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 2000 պղմ:

A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 50, իսկ B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 80 պղմ մեկ միավորի համար: A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 400 և 700 պղմ-ի: A և B արտադրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն բաշխումը:

Խնդիր 27: Էլեկտրոնային արդյունաբերության փոքր ձեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ ռադիոընդունիչ, ընդ որում, յուրաքանչյուր տեսակի համար պահանջվում է առանձին արտադրական գիծ: Առաջին գծի արտադրության օրական առավելագույն ծավալը կազմում է 60 միավոր, երկրորդ գծի օրական նվազագույն ծավալը՝ 80 միավոր: Առաջին տեսակի ռադիոընդունիչի թողարկման համար անհրաժեշտ է 10, իսկ երկրորդ՝ 8 միանման մանրամաս:

Օգտագործվող մանրամասերի օրական առավելագույն պաշարը հավասար է 800 միավորի: Առաջին և երկրորդ տեսակների մեկ ռադիոընդունիչի իրացման շահույթը համապատասխանաբար հավասար է 300 և 200 պղմ-ի:

Ռադիոընդունիչների նվազագույն պահանջարկը շուկայում 40 միավոր է:

Որոշել յուրաքանչյուր տեսակի ռադիոընդունիչների արդյունավետ արտադրության օրական ծավալը:

Խնդիր 28: Փոքր ձեռնարկությունը թողարկում է սահմանափակ քանակությամբ երկու տեսակ լվացքի հեղուկ X և Y բաղկացած երեք բաղադրիչներից՝ A, B և C: X և Y տեսակի մեկ լիտր լվացքի հեղուկ արտադրելու համար օգտագործվելիք A, B և C տեսակ բաղադրիչների պաշարը և մեկ լիտր արտադրանքի համար օգտագործվելիք քանակը բերված են աղյուսակում:

|                              | X     | Y   | Պաշարը |
|------------------------------|-------|-----|--------|
| A                            | 40    | 50  | 200    |
| B                            | 50    | 40  | 200    |
| C                            | 148,5 | 65  | 520    |
| 1-9 ստացվող շահույթը / պղմ / | 500   | 400 |        |

Պահանջվում է գտնել, թե X և Y տեսակ որքան հեղուկ պետք է արտադրել, որպեսզի ընկերության շահույթը լինի առավելագույնը:

Խնդիր 29: Երկու տեսակ արդյունաբերական արտադրանքից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար մշակվում է երեք տարբեր հաստոցներով: Հաստոցները կարելի է օգտագործել օրական համապատասխանաբար 16, 24 և 18 ժամ: Աղյուսակում ներկայացված են յուրաքանչյուր տեսակի մեկ արտադրանքի մշակման ժամանակը և վաճառքից ստացված շահույթը: Գտնեք յուրաքանչյուր տեսակի արտադրանքի թողարկման լավագույն ծավալը:

| Արտադրանք | Արտադրանքի մշակման ժամանակը (ժամ) |           |            | Շահույթ |
|-----------|-----------------------------------|-----------|------------|---------|
|           | I հաստոց                          | II հաստոց | III հաստոց |         |
| 1         | 8                                 | 8         | 12         | 200պղմ. |
| 2         | 10                                | 16        | 9          | 300պղմ. |

Խնդիր 30: Ընկերությունը արտադրում է X և Y տեսակ արտադրանք օգտագործելով A, B և C տեսակ հումք: Դրանց պաշարը և մեկ միավոր արտադրանքի համար օգտագործվող հումքի (կգ.) քանակը, վաճառքի գները և փոփոխվում ծախսերը բերված են ստորև:

| Արտադրանք | A   | B   | C   |
|-----------|-----|-----|-----|
| X         | 8   | 10  | 15  |
| Y         | 10  | 6.5 | 6   |
| Պաշար     | 800 | 650 | 900 |

| Արտադրանք | Վաճառքի գին /պնդ 1 միավորի/ | Փոփոխական ծախսեր /պնդ 1 միավորի/ |
|-----------|-----------------------------|----------------------------------|
| X         | 400                         | 250                              |
| Y         | 500                         | 300                              |

Գտնել X և Y տեսակ արտադրանքի թողարկման այն ծավալը, որը մաքսիմացնում է ընկերության շահույթը:

Վերը բերված խնդիրները՝

- լուծել գծապատկերի միջոցով
- կազմել ԳՄԽ-ի երկակի խնդիրը և տալ տնտեսագիտական մեկնաբանումը
- գտնել երկակի խնդրի որևէ հենքային լուծում
- կազմել այդ հենքային լուծման համար սիմպլեքս աղյուսակը և գտնել լավագույն լուծումը
- լուծել ուղիղ խնդիրը օժանդակ խնդրի օգնությամբ

- օգտվելով երկակիության 2-րդ թեորեմի արդյունքներից մեկնաբանել ստացված լուծումները
- գտնել երկակի խնդիրների ամբոխջաթիվ լուծումները:

**Խնդիր 31:** «Վան» ձեռնարկության խանութը իր տրամադրության տակ ունենալով  $5000 \text{ m}^2$  տարածք, 3600 մարդ-ժամ աշխատանքային ռեսուրսներ և 810 հազ. դրամ շրջանառու միջոցներ զբաղվում է 4 տեսակ ապրանքների վաճառքով: Յուրաքանչյուր տեսակի միավոր ապրանքի վաճառքից սպասվող շահույթները համապատասխանաբար կազմում է 90, 70, 60, և 40 դրամ: Ստորև բերված են յուրաքանչյուր տեսակի ապրանքի միավորի ապրանքաշրջանառության վրա ռեսուրսների ծախսերը (տես աղյուսակ):

| Ռեսուրսներ                 | Ապրանքի տեսակները |    |     |    |
|----------------------------|-------------------|----|-----|----|
|                            | I                 | II | III | IV |
| Առևտրական դահլիճի մակերեսը | 10                | 5  | 2   | 1  |
| Աշխատաժամերի պաշարը        | 6                 | 6  | 2   | 2  |
| Շրջանառության ծախսերը      | 4.5               | 13 | 1.5 | 6  |

Գտնել, թե որ ապրանքից ինչքան պետք է վաճառի «Վան» ձեռնարկության խանութը, որպեսզի ստանա առավելագույն շահույթ:

**Խնդիր 32:** Ձեռնարկությունը իր արտադրության բամբակի, արևածաղկի և առյուծի յուղերի խառնուրդով պատրաստում է չորս տեսակ մարգարին, որոնց բաղադրությունները և գները բերված են ստորև աղյուսակում:

Որոշել ընդհանուր արտադրանքի մեջ յուրաքանչյուր տեսակի մարգարինի բաժինը (%), որպեսզի հաստիքը լինի առավելագույնը, եթե հայտնի է, որ հումքի տեսակները հարաբերում են ինչպես 2 : 3 : 5-ին:

| Հումքի տեսակները | Բաղադրությունները (%) |          |          |          |
|------------------|-----------------------|----------|----------|----------|
|                  | Մ՝ տեսակ              | Բ՝ տեսակ | Գ՝ տեսակ | Դ՝ տեսակ |
| Բամբակ           | 10                    | 15       | 30       | 40       |
| Արևածաղիկ        | 10                    | 30       | 30       | 20       |
| Սոյա             | 80                    | 55       | 40       | 40       |
| Դինը (դրամ/կգ.)  | 400                   | 500      | 600      | 650      |

**Խնդիր 33:** Հաստոցաշինական գործարանը սեփական կարիքների համար յուրաքանչյուր ամիս օգտագործում է երեք տեսակ տափօղակներ համապատասխանաբար 1200, 2000, 4000 միավոր, որոնք ձեռք է բերում շուկայում մեկ միավորի համար վճարելով՝  $p_1=20$ ,  $p_2=16$ ,  $p_3=10$  դրամ: Գործարանը, ամսական ունենալով 16տ. մետաղի թափոն, որոշել է մամիչները երկրորդ հերթափոխ աշխատացնելով արտադրել այդ տափօղակներից, հատկացնելով 50000 դրամ ֆինանսական միջոցներ:

Որոշել, գործարանը որ տեսակ տափօղակներից ինչքան արտադրի, որպեսզի տափօղակների պահանջարկը բավարարվի նվազագույն ծախսով անհրաժեշտ տեղեկությունները տես ստորև բերված աղյուսակում:

| Ռեսուրսները        | Ռեսուրսների ծախսը     |                  |                 | Ռեսուրսների պաշարները |
|--------------------|-----------------------|------------------|-----------------|-----------------------|
|                    | Տափօղիկների տեսակները |                  |                 |                       |
|                    | Մեծ(հազ. հատ)         | Միջին (հազ. հատ) | Փոքր (հազ. հատ) |                       |
| Մետաղի թափոն (կգ.) | 22                    | 14               | 8               | 16000                 |
| Մամիչ (ժամ)        | 0,4                   | 0,3              | 0,1             | 96                    |
| Ֆին. միջոց((դրամ)  | 8                     | 6                | 4               | 50000                 |

Խնդիր 34: Ձեռնարկությունը թողարկում է «Ա», «Բ» և «Գ» տեսակ արտադրանք, որոնցից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար մշակվում է չորս խումբ սարքավորումների վրա:

| Սարքավորումների խմբերը               | Միավոր արտադրատեսակի սարքավորում/ժամ ծախսը |     |     | Ժամանակի պաշարը |
|--------------------------------------|--------------------------------------------|-----|-----|-----------------|
|                                      | «Ա»                                        | «Բ» | «Գ» |                 |
| I                                    | 2                                          | 3   | 1   | 15              |
| II                                   | 2                                          | 4   | 3   | 18              |
| III                                  | 4                                          | 0   | 2   | 16              |
| IV                                   | 1                                          | 2   | 0   | 8               |
| Միավորից սպասվող շահույթը (դր./ հատ) | 2                                          | 3   | 2   |                 |

Որոշել արտադրատեսակների այն քանակությունները, որը կապահովի առավելագույն շահույթի ստացումը, եթե հայտնի են սարքավորումների խմբերի ժամանակի պաշարները, միավոր արտադրատեսակների վրա յուրաքանչյուր խմբի սարքավորում/ժամ ծախսը ըստ արտադրատեսակների, և յուրաքանչյուր արտադրատեսակների մեկ միավորի դիմաց սպասվող շահույթի մեծությունը (տես վերը բերված աղյուսակը):

Ձեռնարկությունը կախալ է գնել որևէ խմբից մեկ սարքավորում ևս, որը հնարավորություն կտա այդ խմբի աշխատաժամի պաշարը մեծացնելու 3 միավորով:

Օգնեք ձեռնարկությանը կողմնորոշվելու սարքավորում գնելու հարցում:

Խնդիր 35: Ֆերմերը պետք է որոշի երկու կուլտուրաների ցանքի լավագույն համակցությունը, եթե նա իր տրամադրության տակ ունի 70 հա վարելահող, 94 տրակտոր/ժամ, 480 մարդ/օր աշխատանքային ռեսուրսներ:

|                                  | ցորեն (1 հա) | կարտոֆիլ (1 հա) |
|----------------------------------|--------------|-----------------|
| Բերքատվություն (ց)               | 20           | 100             |
| Տեխնիկայի ծախս (տր / ժ)          | 0.6          | 4.6             |
| Աշխ. ռես. ծախս (մարդ / օր)       | 2.0          | 22              |
| 1 ցենտների սպասվելիք գինը (դրամ) | 150          | 100             |

Մեկ սեզոնի համար յուրաքանչյուր կուլտուրայի վերաբերյալ տեղեկությունները բերված են ստորև աղյուսակում:

Փորձեք խնդիրը լուծել տրամաբանական վերլուծության միջոցով:

Խնդիրը լուծել առավելագույն եկամուտ ստանալու չափանիշներով:

Խնդիր 36: Պահանջվում է եգիպտացորենի և գարու խառնուրդով կազմել օրապահիկ խոզուկներին կերակրելու համար: Որպես խնդրի լուծման չափանիշ վերցնել նվազագույն ծախսը. հայտնի է, որ մեկ խոզուկի օրապահիկը պետք է պարունակի 2,3 կգ. կերային միավոր և 270 գ պրոտեին:

Նշված սննդամյութերի քանակը գարու և եգիպտացորենի մեջ, ինչպես նաև այդ մթերքների գները հայտնի են և բերված են ստորև աղյուսակում:

| Սննդամյութերը       | Եգիպտացորեն (1 կգ) | Գարի (1 կգ) |
|---------------------|--------------------|-------------|
| Կերային միավոր (կգ) | 0.45               | 1.2         |
| Պրոտեին (գ)         | 280                | 80          |
| Գինը (դրամ/կգ)      | 200                | 150         |

Խնդիր 37: Կաշվե իրերի արտադրության «Նաիրի» ձեռնարկությունը, որը մասնագիտացել է ձեռնոցների արտադրության մեջ, որոշել է իր ունեցած ռեսուրսների սահմաններում արտադրել նաև կանացի պայուսակներ:

Շուկայի ուսումնասիրությունից պարզվել է, որ ձեռնոցների պահանջարկը չի գերազանցի 500 զույգից, զինքն սպասվում է 4000 դրամ, իսկ պայուսակների համար՝ համապատասխանաբար 100 հատ և 10000 դրամ:

Ձեռնարկության ունեցած ռեսուրսների և նշված ապրանքների միավորի արտադրության համար ծախսերի վերաբերող տեղեկությունները բերված են ստորև աղյուսակում:

| Ռեսուրսների տեսակները  | Մեկ միավորի վրա ծախսը |          | Ռեսուրսների քանակը |
|------------------------|-----------------------|----------|--------------------|
|                        | Ձեռնոց (զույգ)        | Պայուսակ |                    |
| Կաշի (մ <sup>2</sup> ) | 0.4                   | 0.8      | 500                |
| Դրամ. ռես. (հազ դրամ)  | 0.6                   | 0.9      | 600                |
| Կարի մեքենա-ժամ        | 0.5                   | 1.0      | 500                |
| Պահանջարկ              | 500                   | 100      | -                  |
| Գին                    | 4000                  | 10000    | -                  |

Որոշել արտադրության լավագույն կառուցվածքը, իրացումից առավելագույն հասույթ ստանալու չափանիշից ելնելով:

Կփոփոխվեր արդյո՞ք խնդրի լուծումը, եթե

ա) կարի մեքենաների հզորությունը ավելանար 100 միավորով.

բ) պայուսակների գինը տատանվեր 8000 - 10000 դրամ.

Կատարել ստացված արդյունքների վերլուծություն:

Խնդիր 38: Սահմանափակ պատասխանատվության ընկերությունը իր տրամադրության տակ ունենալով երեք տեսակ ռեսուրսներ ցանկանում է արտադրել չորս տեսակ ապրանքներ: Հայտնի են յուրաքանչյուր արտադրատեսակի միավորի համար ռեսուրսների ծախսը, ռեսուրսների պաշարը և յուրաքանչյուր տեսակի ապրանքի միավորի դիմաց սպասվելիք շահույթը (տես ստորև բերված աղյուսակը):

Պահանջվում է որոշել շահույթը մաքսիմացնող արտադրատեսակներից յուրաքանչյուրի քանակությունը:

Խնդիրը լուծել, եթե

ա) պահանջվի, որ I-ին արտադրատեսակը լինի ոչ պակաս 40-ից, իսկ IV-ը ոչ ավելի 10-ից.

բ) I և IV արտադրատեսակների քանակությունները հարաբերեն ինչպես 1: 6-ին.

| Ռեսուրսներ         | Արտադրատեսակներ                  |    |     |    |                       |
|--------------------|----------------------------------|----|-----|----|-----------------------|
|                    | Միավոր արտադրանքի վրա ծախսումներ |    |     |    | Ռեսուրսների պաշարները |
|                    | I                                | II | III | IV |                       |
| «Ա» ռեսուրս        | 5                                | 1  | 9   | 12 | 1500                  |
| «Բ» ռեսուրս        | 2                                | 3  | 4   | 1  | 1000                  |
| «Գ» ռեսուրս        | 3                                | 2  | 5   | 10 | 800                   |
| Շահույթը (դր./հատ) | 12                               | 5  | 15  | 10 | -                     |

Խնդիր 39: Ձեռնարկությունը, որը առանձին տեխնոլոգիական գծերով թողարկում է երկու տեսակ ռադիոընդունիչներ, օգտագործում է միևնույն ռադիոսխեմայի մանրամասերը, I տեսակի համար՝ 10, իսկ երկրորդի համար 8 միավոր: Այդ էլեկտրոնային մանրամասերի օրական առավելագույն պաշարը 800 միավոր է: I-ին հոսքային գծի օրական արտադրողականությունը 60 ռադիոընդունիչ է, իսկ II-ինը՝ 75 ռադիոընդունիչ:

Էլեկտրոնային տարրերի օրական պաշարը այնպես բաշխել երկու հոսքային գծերի միջև, որպեսզի ռադիոընդունիչների իրացումից ստացվող ամսական շահույթը լինի առավելագույնը: Յուրաքանչյուր տեսակի ռադիոընդունիչի միավորի իրացումից ստացվող շահույթը համապատասխանաբար կազմում է 12000 և 8000 դրամ:

Այս խնդրի լավագույն լուծումը ցույց է տալիս, որ դեֆիցիտային են էլեկտրոնային մանրամասերի պաշարները և I տեխնոլոգիական գծի արտադրողականությունը: Հաշվի առնելով այդ, որոշել

1. I հոսքային գծի արտադրողականության մեծացման սահմանը, որից սկսած նպատակային ֆունկցիայի արժեքը չի աճի.
2. II հոսքային գծի արտադրողականության նվազման սահմանը, երբ ստացված լավագույն լուծումը չի փոխվի.
3. Էլեկտրոնային մանրամասերի օրական պաշարի մեծացման սահմանը, որից հետո նպատակային ֆունկցիայի արժեքը չի մեծանա:

Խնդիր 40: Անհատական պատվերների կահույքի ձեռնարկությունում պարբերաբար առաջանում են երեք տեսակ ռեսուրսների թափոններ  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  համապատասխան քանակություններով: Ձեռնարկության տնօրենը մտախոզվաց այդ փաստով համձնարարել է մշակել ռեսուրսների օգտագործման տարբերակներ:

Տնօրենին ներկայացվեցին հետևյալ երկու առաջարկները.

Տարբերակ 1. Կատարելով յուրաքանչյուր տեսակի միավորի համար  $c_1$ ,  $c_2$  լրացուցիչ ծախսեր կազմակերպել երկու տեսակ աթոռների արտադրություն, որոնց սպասվելիք զինը համապատասխանաբար  $p_1$  և  $p_2$  է և եթե ձեռնարկությունը արտադրի I տեսակից  $M_1$  հատ, իսկ II-ից՝  $M_2$ , ապա նա կստանա առավելագույն շահույթ: Այդ դեպքում թափոնների քանակը կկազմի  $\Delta b_i$  ( $i=1,2,3$ ), երբ յուրաքանչյուր տեսակի մեկ աթոռի վրա ռեսուրսների ծախսը  $b_{11}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{31}$  և  $b_{12}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{32}$  հայտնի մեծություններն են:

Առաջադրանք. Կազմել գծային ծրագրման այն խնդրի մոդելը, որի լուծման արդյունքում ստացվել են  $M_1$  և  $M_2$  մեծությունները: Այդ խնդիրը լուծել հետևյալ թվային օրինակով.

$$b_1 = 200, b_2 = 240, b_3 = 360,$$

$$b_{11} = 3, b_{21} = 2, b_{31} = 4, b_{12} = 2, b_{22} = 3, b_{32} = 5,$$

$$p_1 = 10000, p_2 = 8000, c_1 = 2500, c_2 = 2000:$$

Տարբերակ 2. Հարևան ձեռնարկությունը, որը զբաղվում է աթոռների արտադրությամբ առաջարկել է գնել այդ ռեսուրսները, յուրաքանչյուր տեսակի ռեսուրսի միավորի դիմաց վճարելով համապատասխանաբար  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  պղծ:

Անհատական պատվերների կահույքի ձեռնարկությունը մերժեց այդ գները և փոխարենը առաջարկեց  $y_1^*$ ,  $y_2^*$ ,  $y_3^*$  գները, հիմնավորելով, որ դրանք լավագույնն են երկու ձեռնարկությունների համար, իսկ դրանից ցածր գները առարկելի են: Միաժամանակ նշվեց, որ այդ գները հաստատուն չեն և թափոնների քանակների փոփոխությանը զուգընթաց դրանք պետք է վերանայվեն:

Առաջադրանք.

ա) Գրել այն խնդիրը, որի լուծումը կհիմնավորի առաջարկված գների լավագույն լինելը.

բ) Մեկնաբանել անհատական պատվերների կահույքի ձեռնարկության առաջարկած պայմանները.

գ) խնդիրը լուծել վերը տրված թվային օրինակով.

դ) Գտնել ռեսուրսների փոփոխման միջակայքերը, որի դեպքում առաջարկված գները չեն փոխվի:

## 2. Լուծել գծապատկերի միջոցով

1. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$
3. 
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$
4. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$
5. 
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$
6. 
$$\begin{aligned} -0.5x_1 + 3x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$
7. 
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 + 10x_2 &\geq 7 \\ -x_1 + x_2 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 0 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$
8. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 1 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$
9. 
$$\begin{aligned} -4 \leq x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq -2 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
10. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -1 \leq x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 0: \end{aligned}$$
11. 
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 8 \\ x_1 - x_2 &\geq -9 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
12. 
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 - x_2 &\leq -2 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
13. 
$$\begin{aligned} -4 \leq x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq -2 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
14. 
$$\begin{aligned} -2 \leq x_1 - x_2 &\leq 2 \\ 2 \leq x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -1 \leq x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & -2x_1 + x_2 \geq -2 \\
 & -3x_1 - x_2 \leq -5 \\
 & x_1 - x_2 \geq -1 \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
 & x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\
 & 3x_1 - 2x_2 \geq -9 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \quad & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
 & 5x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
 & x_1 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad & x_1 + x_2 \geq -1 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
 & x_1 + 5x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \geq 1, x_2 \geq -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad & 2x_1 + x_2 \geq -2 \\
 & x_1 - x_2 \leq 0 \\
 & x_1 + x_2 \geq -1 \\
 & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
 & x_1 \leq 1 :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad & 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\
 & 14x_1 + x_2 \leq 30 \\
 & x_1 + x_2 \geq -1 \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
 & x_1 - x_2 \geq 0 \\
 & -1 \leq x_1 \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20. \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \quad & x_1 + x_2 \geq 0 \\
 & x_1 - x_2 \geq 0 \\
 & x_1 - x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \geq 1, -1 \leq x_2 \leq 1
 \end{aligned}$$

### 3. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով

$$\begin{aligned}
 23. \quad & -2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & -1 \leq x_1 - x_2 \leq 1 :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25. \quad & x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\
 & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & -1 \leq x_2 \leq 10 \\
 & x_1 \leq 1 :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27. \quad & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & -1 \leq x_1 + 0.5x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq -1 \\
 & -0.5x_1 - x_2 \leq 3 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 3 :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24. \quad & 8x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 & -2 \leq x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & -1 \leq x_2 \leq 1 :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26. \quad & x_1 - 2x_2 \rightarrow \max \\
 & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 - x_2 \leq 8 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28. \quad & -x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \\
 & 4x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & 4x_1 - 8x_2 \geq 4 \\
 & -0.5x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
 & x_1 - 0.5x_2 \geq 2 :
 \end{aligned}$$

29. 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$
30. 
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2: \end{aligned}$$
31. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
32. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\geq 0.5 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
33. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \min \\ 0 &\leq x_1 \leq 1 \\ 0 &\leq x_2 \leq 1 \\ 0 &\leq x_1 + x_2 \leq 3 \\ -1 &\leq x_1 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$
34. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\rightarrow \max \\ 1 &\leq x_1 + x_2 \leq 2 \\ 1 &\leq 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2 &\leq x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
35. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ -1 &\leq -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq -1 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
36. 
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ -3x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
37. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\rightarrow \min \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 14x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + 14x_2 &\geq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 1 &\leq x_1 \leq 1 \end{aligned}$$
38. 
$$\begin{aligned} 5x_1 - 10x_2 &\rightarrow \min \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq -9 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 1 \end{aligned}$$
39. 
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\ 7x_1 + 6x_2 &\leq 42 \\ -x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
40. 
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ -x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41. \quad & x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 - x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 42. \quad & x_1 + x_2 \rightarrow \min \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
 & x_1 - 4x_2 \leq 2 \\
 & 5x_1 - 3x_2 \geq 4 \\
 & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43. \quad & 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\
 & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 44. \quad & x_1 - x_2 \rightarrow \min \\
 & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & 1 \leq x_1 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45. \quad & 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\
 & 2x_1 + 6x_2 \leq 40 \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 36 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46. \quad & 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 & x_1 - 2x_2 \geq 10 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 47. \quad & x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\
 & x_1 - x_2 \geq -2 \\
 & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1 - 3x_2 \leq 0 \\
 & 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\
 & x_1 \leq 5, 1 \leq x_2 \leq 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 48. \quad & x_1 + x_2 \rightarrow \min \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
 & x_1 - 4x_2 \leq 2 \\
 & 2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\
 & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 49. \quad & 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
 & 5x_1 + 6x_2 \leq 25 \\
 & 3x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 50. \quad & x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 51. \quad & x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \\
 & -x_1 + x_2 \geq 5 \\
 & 12x_1 + 9x_2 \geq 8 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 52. \quad & -x_1 - x_2 \rightarrow \min \\
 & x_1 \leq 15 \\
 & x_2 \geq 10 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Տված է սովորական տեսքի ԳՇԽ-ի  $x_0$  հենքային լուծումը:

$\lambda_1$  և  $\lambda_2$  պարամետրի  $n^{\circ}$ ր արժեքների դեպքում՝

- $x_0$ -ն լավագույն լուծում է
- խնդիրը լուծում չունի
- լուծումը կարելի է լավացնել:

53.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3\lambda_2 x_3 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x_4 &\rightarrow \max \\ x_1 - x_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 4, \quad x_0 = (1, 1, 0, 0): \end{aligned}$$

Տված է սովորական տեսքի ԳՇԽ-ի  $x_0$  հենքային լուծումը

$\lambda$  պարամետրի  $n^{\circ}$ ր արժեքների դեպքում՝

- $x_0$ -ն լավագույն լուծում է:
- խնդիրը լուծում չունի
- լուծումը կարելի է լավացնել:

54.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + (2\lambda - 3)x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + (\lambda - 2)x_3 &= 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_0 = (1, 1, 0), \quad 0 < \lambda < 2: \end{aligned}$$

55.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2\lambda x_2 - x_3 &= 0 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_0 = (1, 0, 1), \quad 0 < \lambda < 1/2 \end{aligned}$$

66.

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 - \lambda x_3 &\rightarrow \max \\ \lambda x_1 - x_2 + (1 - \lambda)x_3 &= \lambda \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_0 = (1, 1, 0), \quad \lambda \neq 1 \end{aligned}$$

$\lambda$  և  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , պարամետրերի  $n^{\circ}$ ր արժեքների դեպքում ԳՇԽ-ը

- ունի լավագույն լուծում
- լուծում չունի

67.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &\geq \mu_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &\geq \mu_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &\geq \mu_3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

68.

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 &\rightarrow \min \\ (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 &\geq \mu_1 \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 &\geq \mu_2 \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 &\geq \mu_3 \\ x_i &> 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$59. (\lambda^2 + 3\lambda)x_1 + (\lambda^3 + 3\lambda^2)x_2 + (\lambda^4 + 3\lambda^3)x_3$$

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geq \mu_1$$

$$x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \geq \mu_2$$

$$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \geq \mu_3:$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

#### 4. Ստուգել տրված վեկտորները հենքային լուծում են, քե ոչ

$$1. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{X} = (1, 0, 0, 0):$$

$$2. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_i \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\bar{X} = (0, 0, 0):$$

$$3. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\bar{X} = (0.5, 0, 0.5):$$

$$4. \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{X} = (1, 0, 0, 0):$$

$$5. \quad x_1 + x_2 + x_3 = a + b$$

$$x_1 - 2x_2 = a - 2b$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$\bar{X} = (a, b, 0):$$

$$6. \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$\bar{X} = (1, 2, 0):$$

$$7. \quad x_1 - x_2 - 2x_4 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{X} = (1, 0, 0, 0):$$

$$8. \quad 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$10x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$\bar{X} = (0, 1, 1):$$

$$9. \quad x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{X} = (1, 0, 1, 0):$$

$$10. \quad 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$7x_1 + x_2 - 2x_3 = -3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$\bar{X} = (1, 0, 1):$$

11. 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \\ \overline{X} &= (0, 1, 1, 0): \end{aligned}$$
12. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_4 &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \\ \overline{X} &= (1, 1, 1, 0): \end{aligned}$$
13. 
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_4 &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \\ \overline{X} &= (1, 0, 0, 0): \end{aligned}$$
14. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \\ \overline{X} &= (1, 0, 0, 0): \end{aligned}$$
15. 
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 + 2x_6 &= 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 6x_5 - 6x_6 &= -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_5 - 2x_6 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 - x_6 &= 4 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \\ \overline{X} &= (1, 2, 1, 2, 0, 0, ) \end{aligned}$$
16. 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 + 3x_6 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 - 4x_6 &= -6 \\ x_1 - x_2 + 3x_5 - 3x_6 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_5 - x_6 &= -3 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \\ \overline{X} &= (1, 0, 1, 1, 0, 1, ) \end{aligned}$$
17. 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 + 3x_6 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 - 4x_6 &= -6 \\ x_1 - x_2 + 3x_5 - 3x_6 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_5 - x_6 &= -3 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \\ \overline{X} &= (1, 0, 1, 1, 0, 1, ) \end{aligned}$$
18. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= 0 \\ x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 0 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ \overline{X} &= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

## 5. Գտնել թույլատրելի հենքային լուծումները

$$\begin{aligned} 1. \quad & 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max \\ & -2 \leq x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -2 \leq x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -1 \leq x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 4x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & -1 \leq x_1 \leq 10: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & x_1 - 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & x_1 - 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ & 10x_1 + x_3 \leq 10 \\ & 10x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & -x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \max \\ & 10x_1 + x_3 \leq 10 \\ & 10x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad & -x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad & 2x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad & 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max \\ & 10x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 10x_2 + x_3 \leq 8 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, 3: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 2 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \max \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \\ & x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \max \\
 & x_1 - x_2 + x_3 + \dots + (-1)^n x_n = n \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \max \\
 & x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n \\
 & \quad \quad x_2 + \dots + x_n \leq n \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad x_n \leq n \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n :
 \end{aligned}$$

## 6. ԳԾԽ-ի երկակի խնդիր

6.1 3-րդ և 5-րդ պարագրաֆներում բերված ԳԾԽ-ների համար կազմել երկակի խնդիրները:

6.2 Կազմել ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը:

- |                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min</math><br/> <math>\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, i=1, 2, \dots, m</math><br/> <math>x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n</math></p> | <p>2. <math>\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min</math><br/> <math>\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i=1, 2, \dots, m</math><br/> <math>x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n</math></p> |
| <p>3. <math>\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max</math><br/> <math>\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, i=1, 2, \dots, m</math><br/> <math>x_j \leq 0, j=1, 2, \dots, n</math></p> | <p>4. <math>\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max</math><br/> <math>\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i=1, 2, \dots, m</math><br/> <math>x_j \leq 0, j=1, 2, \dots, n</math></p> |
| <p>5. <math>\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min</math><br/> <math>\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, i=1, 2, \dots, m</math><br/> <math>x_j \leq 0, j=1, 2, \dots, n</math></p> | <p>6. <math>\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max</math><br/> <math>\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, i=1, 2, \dots, m</math><br/> <math>x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n</math></p>    |

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m_1, \quad m_1 \leq m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i=m_1+1, m_1+2, \dots, m \quad x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n_1, \quad n_1 \leq n:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m_1, \quad m_1 \leq m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i=m_1+1, m_1+2, \dots, m \quad x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n_1, \quad n_1 \leq n:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m_1 \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq b_i, \quad i=m_1+1, m_1+2, \dots, m_2, \quad m_2 < m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i=m_2+1, m_2+2, \dots, m \\
 & x_j \geq 0, \quad (j=1,2,\dots,n_1, \quad n_1 \leq n_2) \quad x_j \leq 0, \quad (j=n_1+1, n_1+2, \dots, n_2, \quad n_2 \leq n):
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m_1, \quad m_1 \leq m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq b_i, \quad i=m_1+1, m_1+2, \dots, m_2, \quad m_2 \leq m \\
 & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i=m_2+1, m_2+2, \dots, m \\
 & x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n_1, \quad n_1 \leq n_2 \\
 & x_j \leq 0, \quad j=n_1+1, n_1+2, \dots, n_2, \quad n_2 \leq n:
 \end{aligned}$$

**6.3 Տրված խնդիրներում գտնել նպատակային օգտագույն արժեքները՝ օգտվելով երկակի խնդրի գծապատկերի միջոցով ստացված լուծումից**

1. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1: \\ x_j &\geq 0, j=1,2,\dots,5 \end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4: \end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4: \end{aligned}$$
3. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4: \end{aligned}$$
4. 
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 - x_5 + 3x_6 &\rightarrow \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &\geq 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4,5,6: \end{aligned}$$
5. 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 - 2x_5 &\geq 1 \\ x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4,5: \end{aligned}$$
6. 
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 &\rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\geq 4 \\ x_j &\geq 0, j=1,2,3,4,5 \end{aligned}$$
7. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 10x_6 + 15x_7 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 - x_6 + x_7 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 - 3x_6 + 2x_7 &\geq 0 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4,5,6,7: \end{aligned}$$
8. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 &\rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= -3 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 &\leq 2 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,\dots,5: \end{aligned}$$
9. 
$$\begin{aligned} x_4 - x_5 &\rightarrow \max \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &\geq 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &\leq 0 \\ x_j &\geq 0, j=1,2,3,4,5: \end{aligned}$$

10.  $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$   
 $-x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$   
 $x_1 - x_2 + x_4 \geq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$
11.  $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$   
 $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \geq 4$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 5$
12.  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$   
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$   
 $12x_1 - 9x_2 + 9x_3 \geq 8$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$ :
13.  $5x_1 - 6x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$   
 $x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$ :
14.  $x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$   
 $2x_1 - x_2 = 4$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$ :
15.  $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$   
 $-x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$   
 $x_1 - x_2 + x_4 \geq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ :
16.  $10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$   
 $5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$   
 $2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 20$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$
17.  $10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$   
 $5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 30$   
 $x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 40$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$ :
18.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $2x_1 + 5x_3 + x_4 \leq -4$   
 $x_1 - 3x_3 \geq 6$   
 $x_2 + x_3 = 1$   
 $x_2 \geq 0, x_4 \leq 0$ :
19.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $2x_1 + 5x_3 + x_4 \leq -4$   
 $x_1 - 3x_3 \geq 6$   
 $x_2 + x_3 = 1$   
 $x_2 \geq 0, x_4 \leq 0$ :
20.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$   
 $-x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12$   
 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 12$   
 $x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0$ :
21.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 5$   
 $2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 1$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 5$ :
22.  $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12$   
 $x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_3 \leq 0$ :
23.  $x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow \min$   
 $x_1 - 2x_2 + x_4 = -3$   
 $x_3 - 2x_4 = 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_5 \geq 0$ :

24.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$   
 $-x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12$   
 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 12$   
 $x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0:$
25.  $-x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$   
 $10x_1 + x_3 \leq 10$   
 $10x_2 + x_3 \geq 10$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$
26.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $2x_1 + x_4 \leq -4$   
 $x_1 + x_2 - x_4 \leq 2$   
 $x_2 \geq 0, x_4 \leq 0:$
27.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$   
 $-x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12$   
 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 12$   
 $x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0:$
28.  $x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $-2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$   
 $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 3:$
29.  $x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3$   
 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 3$
30.  $5x_1 - 6x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$   
 $x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0:$
31.  $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$   
 $x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 4:$
32.  $x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$   
 $2x_1 - x_2 = 4$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3:$
33.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 3:$
34.  $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$   
 $3x_1 - x_2 = 5$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3:$
35.  $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$   
 $5x_1 - x_3 = 4$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$
36.  $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$   
 $x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 3:$
37.  $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$   
 $x_1 + 2x_2 - x_4 = 5$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 4$
38.  $-x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$   
 $2x_2 + x_4 \leq -4$   
 $x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 2$   
 $x_2 \geq 0, x_4 \leq 0:$
39.  $x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $-x_1 + x_3 \leq -3$   
 $x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$   
 $x_2 \geq 0, x_3 \leq 0:$

## 7. Ստուգել տրված X վեկտորը լավագույն լուծում է, քե ոչ:

1.  $x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$   
 $\bar{X} = (1, 1, 0):$
2.  $x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7$   
 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$   
 $\bar{X} = (1, 0, 1)$
3.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 17x_2 - 12x_3 = 1$   
 $x_1 - x_2 + 6x_3 = 1$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$   
 $\bar{X} = (1, 0, 0):$
4.  $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$   
 $\bar{X} = (1, 0, 0, 0):$
5.  $x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 - x_6 - 2x_7 + x_8 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 + x_7 + 7x_8 = 3$   
 $x_1 - x_2 - x_3 + 2x_5 + x_6 - x_7 + x_8 = 1$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 8$   
 $\bar{X} = (2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0):$
6.  $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 \rightarrow \max$   
 $8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 28x_4 + 13x_5 = 28$   
 $4x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 10x_5 = 11$   
 $3x_2 - x_3 + 5x_4 + 27x_5 = 5$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5$   
 $\bar{X} = (1, 2, 1, 0, 0):$
7.  $x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 - x_5 - x_6 - 2x_7 - 3x_8 \rightarrow \max$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 2x_8 = 15$   
 $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 + x_8 = 0$   
 $x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 2x_6 + 5x_7 + x_8 = 22$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 8$   
 $\bar{X} = (3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, 0):$
8.  $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + 7x_8 \rightarrow \max$   
 $x_1 + x_2 + (a+b)x_3 + (a-b)x_4 + (a+b)x_5 + (a-b)x_6 = 2$   
 $x_1 + 2x_2 + (a+2b)x_3 + (a-2b)x_4 + (a+2b)x_5 + (a-2b)x_6 = 3$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6$   
 $\bar{X} = (1, 1, 0, 0, 0, 0):$

## 8. Միմպլեքս եղանակ:

Լուծել՝ 1-ին, 3-րդ, 5-րդ և 6.3 պարագրաֆներում բերված ԳԾԽ-ը սիմպլեքս եղանակով:

## 9. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը

Տրանսպորտային խնդրի մաթեմատիկական մոդելը.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

1.  $b_1=10 \quad b_2=15 \quad b_3=20 \quad b_4=5 \quad b_5=20$

|          |            |            |            |            |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $a_1=15$ | $c_{11}=2$ | $c_{12}=3$ | $c_{13}=1$ | $c_{14}=5$ | $c_{15}=1$ |
| $a_2=25$ | $c_{21}=2$ | $c_{22}=1$ | $c_{23}=3$ | $c_{24}=4$ | $c_{25}=3$ |
| $a_3=30$ | $c_{31}=4$ | $c_{32}=1$ | $c_{33}=2$ | $c_{34}=5$ | $c_{35}=1$ |

2.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
|     | 100 | 150 | 200 | 300 |
| 300 | 10  | 15  | 5   | 20  |
| 200 | 15  | 10  | 20  | 10  |
| 250 | 5   | 25  | 10  | 15  |

3.

|     |    |     |     |     |
|-----|----|-----|-----|-----|
|     | 50 | 100 | 150 | 100 |
| 100 | 7  | 15  | 6   | 10  |
| 200 | 15 | 5   | 8   | 12  |
| 100 | 6  | 10  | 20  | 8   |

4.

|     |    |    |     |     |
|-----|----|----|-----|-----|
|     | 80 | 60 | 120 | 140 |
| 150 | 12 | 8  | 25  | 10  |
| 175 | 10 | 18 | 4   | 8   |
| 75  | 6  | 12 | 4   | 10  |

5.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
|     | 160 | 180 | 80  | 100 |
| 200 | 60  | 40  | 125 | 50  |
| 150 | 50  | 90  | 20  | 40  |
| 170 | 30  | 60  | 20  | 50  |

6.

|     |     |     |    |     |
|-----|-----|-----|----|-----|
|     | 100 | 120 | 80 | 150 |
| 160 | 5   | 15  | 20 | 8   |
| 90  | 10  | 16  | 6  | 12  |
| 200 | 8   | 10  | 14 | 8   |

7.

|     |    |    |    |     |
|-----|----|----|----|-----|
|     | 80 | 50 | 70 | 120 |
| 150 | 5  | 16 | 12 | 8   |
| 100 | 6  | 12 | 10 | 5   |
| 70  | 5  | 2  | 3  | 10  |

8.

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
|    | 20 | 30 | 50 | 40 |
| 60 | 3  | 2  | 10 | 5  |
| 30 | 6  | 8  | 5  | 6  |
| 50 | 4  | 1  | 1  | 3  |

9.

|     |     |     |    |     |
|-----|-----|-----|----|-----|
|     | 200 | 150 | 60 | 100 |
| 300 | 1   | 6   | 14 | 9   |
| 90  | 1   | 8   | 10 | 5   |
| 120 | 5   | 10  | 8  | 4   |

10.

|     |    |    |    |     |
|-----|----|----|----|-----|
|     | 50 | 20 | 80 | 110 |
| 100 | 10 | 5  | 6  | 12  |
| 70  | 6  | 8  | 5  | 8   |
| 90  | 10 | 6  | 8  | 10  |

11.

|     |     |    |     |     |
|-----|-----|----|-----|-----|
|     | 130 | 70 | 170 | 130 |
| 200 | 3   | 5  | 9   | 4   |
| 120 | 12  | 5  | 10  | 8   |
| 180 | 1   | 10 | 6   | 9   |

12.

|  |     |     |     |     |
|--|-----|-----|-----|-----|
|  | 170 | 130 | 250 | 150 |
|--|-----|-----|-----|-----|

13.

|  |    |     |    |    |
|--|----|-----|----|----|
|  | 50 | 120 | 80 | 60 |
|--|----|-----|----|----|

|     |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|
| 250 | 12 | 16 | 8  | 20 |
| 300 | 8  | 25 | 15 | 10 |
| 150 | 15 | 10 | 15 | 6  |

|     |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|
| 100 | 7  | 5  | 10 | 3  |
| 120 | 12 | 14 | 8  | 5  |
| 90  | 10 | 8  | 6  | 11 |

|     |     |    |     |     |
|-----|-----|----|-----|-----|
| 14. | 320 | 80 | 150 | 220 |
| 220 | 25  | 16 | 20  | 12  |
| 180 | 12  | 8  | 20  | 15  |
| 370 | 5   | 5  | 10  | 10  |

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 15. | 200 | 120 | 170 | 130 |
| 300 | 13  | 5   | 9   | 4   |
| 180 | 26  | 10  | 10  | 8   |
| 140 | 20  | 16  | 6   | 9   |

|     |    |    |     |    |
|-----|----|----|-----|----|
| 16. | 90 | 80 | 170 | 60 |
| 120 | 12 | 6  | 5   | 1  |
| 120 | 8  | 9  | 2   | 2  |
| 160 | 5  | 7  | 5   | 4  |

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 17. | 100 | 260 | 140 | 120 |
| 160 | 8   | 6   | 10  | 20  |
| 300 | 20  | 15  | 12  | 25  |
| 160 | 10  | 10  | 15  | 15  |

|     |    |    |    |     |
|-----|----|----|----|-----|
| 18. | 50 | 75 | 75 | 100 |
| 60  | 10 | 6  | 8  | 15  |
| 100 | 8  | 7  | 9  | 10  |
| 120 | 4  | 12 | 5  | 6   |

|     |    |     |     |     |
|-----|----|-----|-----|-----|
| 19. | 80 | 130 | 120 | 120 |
| 160 | 15 | 10  | 5   | 15  |
| 120 | 15 | 20  | 5   | 8   |
| 170 | 20 | 18  | 7   | 10  |

|     |     |    |    |     |
|-----|-----|----|----|-----|
| 20. | 125 | 65 | 85 | 105 |
| 90  | 8   | 4  | 5  | 5   |
| 140 | 6   | 9  | 8  | 2   |
| 150 | 5   | 5  | 5  | 4   |
| 100 | 4   | 6  | 3  | 2   |
| 70  | 8   | 7  | 4  | 7   |
| 130 | 4   | 2  | 7  | 9   |

|     |     |     |    |    |
|-----|-----|-----|----|----|
| 21. | 100 | 120 | 50 | 80 |
| 100 | 7   | 5   | 8  | 3  |
| 140 | 5   | 3   | 7  | 4  |
| 110 | 2   | 7   | 5  | 6  |
| 160 | 12  | 6   | 15 | 8  |
| 120 | 20  | 12  | 8  | 10 |
| 80  | 9   | 16  | 12 | 8  |

|     |    |     |     |    |
|-----|----|-----|-----|----|
| 23. | 70 | 130 | 120 | 80 |
| 135 | 3  | 7   | 6   | 4  |
| 165 | 2  | 5   | 4   | 2  |
| 100 | 1  | 4   | 3   | 5  |

|     |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|
| 24. | 95 | 35 | 40 | 40 |
| 80  | 5  | 2  | 4  | 3  |
| 45  | 3  | 4  | 2  | 6  |
| 75  | 4  | 7  | 6  | 7  |

|     |    |    |     |    |
|-----|----|----|-----|----|
| 25. | 90 | 60 | 110 | 70 |
| 65  | 1  | 5  | 5   | 2  |
| 180 | 2  | 5  | 4   | 7  |
| 85  | 2  | 4  | 2   | 4  |

|     |     |    |    |     |
|-----|-----|----|----|-----|
| 26. | 100 | 45 | 65 | 100 |
| 90  | 2   | 4  | 7  | 5   |
| 126 | 5   | 4  | 6  | 3   |
| 104 | 6   | 2  | 6  | 7   |

|     |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|
| 27. | 25 | 55 | 80 | 40 |
| 45  | 4  | 5  | 2  | 1  |
| 70  | 4  | 2  | 2  | 3  |
| 85  | 1  | 5  | 5  | 2  |

|     |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|
| 28. | 50 | 65 | 85 | 30 |
| 30  | 8  | 6  | 10 | 20 |
| 80  | 20 | 15 | 12 | 25 |
| 120 | 10 | 20 | 15 | 15 |

## 10. Չանազան խնդիրներ:

### 1. Դիցուք՝ տրված է

$$\begin{aligned}(cX) &\rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0:\end{aligned}$$

Արդյոք կգտնվի՞ միշտ այնպիսի  $c$  վեկտոր, որի դեպքում խնդիրը լուծելի է:

### 2. Դիցուք՝ նախորդ խնդրում $A$ մատրիցը և $c$ վեկտորը հաստատագրված են: Արդյոք կարելի՞ է միշտ գտնել այնպիսի $b$ վեկտոր, որի դեպքում խնդիրը լուծելի է:

3 - 8 -րդ խնդիրներում դիտարկվում է

$$\begin{aligned}(cX) &\rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0:\end{aligned} \quad (\alpha)$$

կանոնական տեսքի  $Q$ -ԾԽ, որտեղ  $x \in R^n$ ,  $c \in R^n$  և  $b \in R^m$  տարածության վեկտորներն են,  $A$ -ն՝  $m \times n$ -չափանի մատրից է:  $N_c$ -ով նշանակված է այն բազմությունը, որը բաղկացած է  $c \in R^n$  կետերից, որոնց դեպքում  $(\alpha)$  խնդիրը լուծում ունի (այդ դեպքում  $b$ -ն և  $A$ -ն սևեռում են):

Համանմանորեն սահմանվում են  $N_b \subset R^n$ -ը և  $N_A \subset R^{n \times m}$ -ը:

### 3. Ապացուցել, որ բազմությունը ուռուցիկ կոն է, որի գագաթը կտորդինատների սկզբնակետում է:

### 4. Ապացուցել, որ $N_c$ բազմությունը ուռուցիկ է:

### 5. Ապացուցել, որ $N_b$ բազմությունը ուռուցիկ կոն է, որի գագաթը կտորդինատների սկզբնակետն է (ենթադրվում է, որ $N_b$ բազմությունը դատարկ չէ):

### 6. Արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի $Q$ -ԾԽ, որի համար $N_b$ բազմությունը կազմված է $b_1$ և $b_2$ վեկտորներից ( $b_1 \neq b_2$ ):

### 7. Կարո՞ղ է $N_b$ բազմությունը բաղկացած լինել մեկ՝ $b_0$ վեկտորից:

### 8. Կարո՞ղ է $N_A \subset R^{n \times m}$ բազմությունը լինել ուռուցիկ:

Ստորև բերված  $*$ -ով խնդիրները հարաբերական բարդ խնդիրներ են:

### 9\* Ապացուցել, որ՝

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\alpha)$$

զծային հավասարումների համասեռ համակարգը ունի դրական լուծում, այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\beta)$$

( $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0$ , եթե. ա)  $z \geq 0$ , բ)  $z \neq 0$ )

անհավասարումների համակարգն անհամատեղելի է:

10\* Ապացուցել, որ՝

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\alpha)$$

զծային անհավասարումների համասեռ համակարգը լուծում ունի

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \geq 0$  այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i > 0, & j = 1, 2, \dots, n \\ y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (\beta)$$

համակարգն անհամատեղելի է:

11. Ապացուցել, որ, եթե  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ -ը սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի Լագրանժի ֆունկցիայի թամբակետն է, ապա ճիշտ է  $(\bar{x}, \bar{y}A - c) = (\bar{y}, b - A\bar{x}) = 0$  հարաբերակցությունը:

12. Դիցուք՝  $\bar{x}$ -ը՝ սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի լուծումն է, իսկ  $\bar{y}$ -ը՝ նրա երկակի խնդրի լուծումն է: Ապացուցել, որ  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ -ը սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի Լանգրանժի ֆունկցիայի թամբակետն է:

13. Օգտագործելով 9-րդ խնդրի պնդումը ապացուցել, որ եթե  $\bar{x}$ -ը և  $\bar{y}$ -ը համապատասխանաբար սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի և նրա երկակի խնդրի լավագույն լուծումներն են, ապա

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i$$

պայմանից կհետևի, որ  $\bar{y}_i = 0$ , իսկ

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i > c_j$$

պայմանից հետևում է  $\bar{x}_j = 0$ :

Լուծել հետևյալ ԳԾԽ-ները:

14.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \min$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &\geq i, i = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

$$15. \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}x_i + x_{i+1} &\geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_1 + x_n &\geq \alpha_n\end{aligned}$$

Որոշե՛  $\lambda$ ,  $\mu$  պարամետրերի որ արժեքների դեպքում ԳՄԽ-ը՝

ա) ունի լուծում, բ) չունի լուծում:

$$16* \quad x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 \geq \mu_1$$

$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 \geq \mu_2$$

$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 \geq \mu_3$$

$$17* \quad x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 \rightarrow \min$$

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geq \mu_1$$

$$x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \geq \mu_2$$

$$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \geq \mu_3:$$

$$18* \quad (\lambda^2 + 3\lambda)x_1 + (\lambda^3 + 3\lambda^2)x_2 + (\lambda^4 + 3\lambda^3)x_3 \rightarrow \min$$

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geq \mu_1$$

$$x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \geq \mu_2$$

$$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \geq \mu_3$$

$$19* \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$20*. \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \rightarrow \min$$

$$x_i + x_{i+1} \geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$x_1 + x_n \geq \alpha_n$$

21. Կառուցել այնպիսի մի օրինակ, որ երկակի գույգ խնդիրներից որևէ մեկը կարող է թույլատրելի լուծում ունենալ, իսկ մյուսը ոչ:

22. Կառուցել այնպիսի մի օրինակ, որ երկակի գույգի երկու խնդիրներն էլ կարող են լուծում չունենալ:

23. Ապացուցել, որ գոյություն չունի երկակի այնպիսի խնդիրների գույգ, որոնց նպատակային ֆունքցիաները համապատասխան թույլատրելի լուծումների բազմության վրա սահմանափակ չեն:

24. Ապացուցել, որ եթե գծային ծրագրման խնդիրը լուծելի է, ապա սահմանափակումների  $b$  վեկտորի փոփոխությունը չի կարող հանգեցնել գծային ծրագրման նպատակային ֆունկցիայի անսահմանափակության թույլատրելի լուծումների բազմության վրա:

25\* Դիտարկենք ԳԾԽ -ի երկու երկակի զույգ.

Սկզբնական խնդիր

$$\begin{cases} L(x) = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0: \end{cases} \quad (\alpha)$$

Երկակի խնդիր

$$\begin{cases} \tilde{L}(y) = (b, y) \rightarrow \min \\ yA \geq c \\ y \geq 0: \end{cases} \quad (\tilde{\alpha})$$

$$\begin{cases} L(x) = (c + \Delta c, x) \rightarrow \max \\ (A + \Delta A)x \leq b + \Delta b \\ x \geq 0: \end{cases} \quad (\beta)$$

$$\begin{cases} \tilde{L}(y) = (b + \Delta b, y) \rightarrow \min \\ y(A + \Delta A) \geq c + \Delta c \\ y \geq 0: \end{cases} \quad (\tilde{\beta})$$

Դիցուք՝  $(\alpha)$  և  $(\tilde{\alpha})$  խնդիրների լուծումներն են՝  $\bar{x}$ -ը և  $\bar{y}$ -ը, իսկ  $(\beta)$  և  $(\tilde{\beta})$  խնդիրների լուծումներն են  $\bar{\bar{x}}$ -ը և  $\bar{\bar{y}}$ -ը: Ապացուցել

$$\begin{aligned} 1) & - (\Delta c, \Delta \bar{x}) + (\bar{\bar{y}}, \Delta A \Delta \bar{x}) + (\Delta \bar{y}, A \Delta \bar{x}) \leq 0 \\ 2) & - (\Delta b, \Delta \bar{y}) + (\Delta \bar{y}, \Delta A \bar{x}) + (\Delta \bar{y}, A \Delta \bar{x}) \geq 0, \end{aligned}$$

հարաբերակցությունների ճշտությունը, որտեղ  $\Delta \bar{x} = \bar{\bar{x}} - \bar{x}$ ,  $\Delta \bar{y} = \bar{\bar{y}} - \bar{y}$

26\* Ապացուցել, որ եթե  $\bar{x}_1$ -ը և  $\bar{x}_2$ -ը  $(\alpha)$  խնդրի երկու լուծումներն են (նայիր խնդիր 25-ը), իսկ  $\bar{y}_1$ -ը և  $\bar{y}_2$ -ը  $(\tilde{\alpha})$  խնդրի երկու լուծումներն են, ապա ճիշտ է հետևյալ հարաբերակցությունը՝  $(\Delta \bar{y}, A \Delta \bar{x}) = 0$ , որտեղ

$$\Delta \bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1, \text{ իսկ } \Delta \bar{y} = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$$

27. Դիտարկենք գծային ծրագրման երկու լուծելի խնդիրներ, որոնք տարբերվում են միայն սահմանափակումների վեկտորներով՝

$$\begin{cases} L(x) = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0: \end{cases} \quad (\alpha)$$

$$\begin{cases} L(x) = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b + \Delta b \\ x \geq 0: \end{cases} \quad (\beta)$$

Նշանակենք  $(\alpha)$  և  $(\beta)$  խնդիրների նպատակային ֆունկցիաների առավելագույն արժեքները համապատասխանաբար՝  $v_0$  և  $v_0 + \Delta v_0$ :

Ապացուցել, որ  $\Delta v_0 \leq (\bar{y}, \Delta b)$ , որտեղ  $\bar{y}$ -ը  $(\alpha)$ -ի երկակի խնդրի լուծումն է:

28. Ապացուցել, որ  $\Delta v_0 \geq (\tilde{y}, \Delta b)$ , որտեղ  $\tilde{y}$ -ը  $(\beta)$  խնդրի երկակի խնդրի լուծումն է (այստեղ բոլոր նշանակումները ունեն 27-րդ խնդրի նշանակումների իմաստը):

29. Ապացուցել, որ՝

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n: \end{aligned}$$

գծային ծրագրման խնդիրը լուծելի է, եթե բոլոր  $b_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) և դրանց երկակի խնդրի պայմանների համակարգը համատեղելի է:

30. Ապացուցել, որ ստորև բերված գծային ծրագրման խնդիրը լուծելի է, եթե  $b_i > 0$ ,  $a_{ij} > 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

31. Արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի երկակի խնդիրների զույգ, որոնց համար  $M$  և  $\tilde{M}$  բազմությունները սահմանափակ չեն ( $M$ -ով և  $\tilde{M}$ -ով նշանակված են ուղիղ և երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումների ուռուցիկ բազմանիստ բազմությունները):

32. Արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի երկակի խնդիրների զույգ, որոնց համար  $M$  բազմությունը սահմանափակ է, իսկ  $\tilde{M}$  բազմությունը սահմանափակ չէ ( $M$  և  $\tilde{M}$  սահմանումները տես նախորդ խնդրում):

33. Ապացուցել, որ սովորական տեսքի գծային ծրագրման խնդիրը՝

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n:$$

լուծելի է, եթե բոլոր  $b_i \geq 0$  և որոշ  $i$ -ի համար  $a_{ij} > 0$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) դեպքում սահմանափակումների համակարգը ունի լուծում:

34. Արդյոք կապահպանվի՞ր նախորդ խնդրի պնդումը, եթե  $a_{ij} > 0$  պայմանը փոխարինվի առավել թույլ պայմանով. որոշ  $i$ -ի դեպքում, և բոլոր  $j=1, 2, \dots, n$ -երի համար տեղի ունի  $a_{ij} \geq 0$ :

35. Օգտագործելով երկակիության առաջին թեորեմը՝ ապացուցել, որ ստորև բերված սովորական տեսքի գծային ծրագրման խնդիրը լուծելի չէ, եթե բոլոր  $b_i < 0$  և գոյություն ունի այնպիսի  $i$ , որ  $a_{ij} > 0$  բոլոր  $j=1, 2, \dots, n$ -երի համար:

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

36. Ապացուցել, որ գծային ծրագրման

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

խնդիրը լուծելի է, եթե  $b_i \geq 0, a_{ij} \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ) և կամայական  $j$ -ի համար գոյություն ունի գոնե մեկ  $a_{ij} > 0$ :

37. Ապացուցել, որ գծային անհավասարումների

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

համակարգը համատեղելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

համակարգի կամայական ոչ բացասական լուծման համար տեղի ունի՝

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq 0.$$

38. Կառուցել երկու փոփոխականով մաքսիմացման սովորական տեսքի գծային ծրագրման խնդիր, որը ունի երկուսից ավելի լավագույն լուծում, սակային ոչ բոլոր թույլատրելի լուծումները լավագույնն են:

39\*. (Ֆարկաշի թեորեմ) Ապացուցել, որ գծային հավասարումների համակարգը

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ոչ բացասական լուծումներ չունի այն և միայն այն դեպքում, երբ համատեղելի է հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m b_i y_i > 0: \end{cases}$$

40\*. Դիտարկենք անհավասարումների համատեղելի համակարգը՝

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\alpha)$$

Ապացուցել, որ  $\sum_{i=1}^m b_i y_i = b$  հավասարումն  $(\alpha)$  համակարգի հետևությունն է այն և միայն այն դեպքում, երբ համատեղելի է հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j = b: \end{cases}$$

41. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m c_i x_i &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i &\geq \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Ցույց տալ, որ եթե  $a_{ij} \geq 0$  բոլոր  $i$ -երի և  $j$ -երի համար, ապա խնդիրը թույլատրելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $b_j \leq 0$  հենց որ  $a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{mj} = 0$ :

42. Գրել նախորդ խնդրի երկակին: Ենթադրելով, որ այդ խնդիրը թույլատրելի է և օգտվելով երկակիության թեորեմից, ցույց տալ, որ երկակի խնդիրները ունեն լավագույն լուծում, եթե  $c_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ):

43\* Ցույց տալ, որ  $(cx) \rightarrow \max$

$$Ax = b$$

խնդիրը ունի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ  $c$ -ն  $A$  մատրիցի սյու-մակների գծային կոմբինացիան է:

44. Հետևյալ կանոնական տեսքի խնդիրը՝

$$\begin{aligned} (cx) &\rightarrow \max \\ Ax &= b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

կրճատ նշանակենք  $(A, b, c)$ -ով, իսկ այդ խնդրի արժեքը՝  $w$ -ով:

Դիցուք՝  $c^{(k)}$  վեկտորների հաջորդականությունը ձգտում է  $c$ -ի: (Այսինքն, եթե  $c^k = (c_1^k, \dots, c_n^k)$  և  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , ապա

$$c_i^k \rightarrow c_i, (i = 1, \dots, n):$$

Ցույց տալ, որ եթե  $w_k$ -ն  $(A, b, c^k)$  խնդրի արժեքն է, ապա  $w_k \rightarrow w$ :

45. Ցույց տալ, որ եթե 44-րդ խնդրում  $c$ -ն սկեռած է և  $b^k \rightarrow b$ -ի,  $(b_i^k \rightarrow b_i, i = 1, m)$  ապա  $w_k \rightarrow w$ -ի: (Այս երկու խնդիրները ցույց են տալիս, որ ԳԾԽի արժեքը անընդհատորեն է կախված  $b$  և  $c$  վեկտորներից):

46. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \max \\ x &\leq 1, \alpha x \leq 0, x \geq 0, \end{aligned}$$

որտեղ  $\alpha$  ցանկացած ոչ բացասական թիվ է: Ցույց տալ, որ  $\alpha \rightarrow 0$  դեպքում այս խնդրի  $w$  արժեքը խզվում է: (Դա ցույց է տալիս, որ ԳԾ խնդրի արժեքը անընդհատորեն կախված չէ  $A$  մատրիցից):

47.  $x$  վեկտորից կախված  $f(x)$  ֆունկցիան կոչվում է սուբադիտիվ, եթե  $\forall x_1, x_2$  համար

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2):$$

Ապացուցել, որ մաքսիմիզացման սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի արժեքը սուբադիտիվ ֆունկցիա է  $c$  վեկտորի նկատմամբ՝

$$w(c_1 + c_2) \leq w(c_1) + w(c_2):$$

48. Ցույց տալ, որ որ մաքսիմիզացման սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի արժեքը բավարարում է նաև

$$w(b_1 + b_2) \geq w(b_1) + w(b_2):$$

49\*. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \max, \quad c = (c_1, \dots, c_m) \\ Ax &= b \\ d \leq x \leq d^*, \quad \text{որտեղ } d &= (d_1, \dots, d_m), \quad d^* = (d_1^*, \dots, d_m^*) \end{aligned}$$

Ցույց տալ, որ  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  վեկտորը լավագույնն է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\exists \bar{y}$  վեկտոր այնպես, որ

$$\text{եթե } a_i \bar{y} < c_i, \quad \text{ապա } \bar{x}_i = d_i^*$$

$$\text{եթե } a_i \bar{y} > c_i, \quad \text{ապա } \bar{x}_i = d_i$$

50. Ապացուցել, որ եթե  $A \geq 0$ ,  $b \geq 0$  և  $A$  մատրիցը չի պարունակում 0-ական սյունակներ, ապա

$$(cx) \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b, x \geq 0$$

խնդիրը ունի լուծում:

51. Ապացուցել, որ

$$(cx) \rightarrow \max$$

$$Ax \leq 0$$

խնդիրը ունի  $x = 0$  լուծումը կամ լուծում չունի:

52. Ապացուցել, որ եթե

$$(cx) \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b$$

խնդիրը ունի լուծում և  $b' \geq b$ , ապա

$$(cx) \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b'$$

խնդիրը նույնպես ունի լուծում:

53. Ապացուցել, որ

$$(cx) \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b, x \geq 0$$

խնդիրը ունի լուծում բոլոր  $b \in R^m$  և  $c \in R^n$  համար այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\exists x^0 \in R^n$  և  $p^0 \in R^m$ , որ

$$Ax^0 < 0, A^T p^0 > 0, p^0 \geq 0, x^0 \geq 0$$

( $A^T$ -ը  $A$ -ի տրանսպոնացված մատրիցն է):

54<sup>1</sup> Ապացուցել, որ եթե

$$(cx) \rightarrow \max$$

$$Ax = b$$

խնդիրը ունի լուծում, ապա բոլոր թույլատրելի լուծումները լավագույնն են:

## 11. Ստուգողական տարբերակներ

Տարբերակ 1.

1. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/  
ԳՇԽ-ի թույլատրելի հենքային լուծման դրական բաղադրիչների քանակը կարող է լինել.

ա)  $m$ -ից մեծ, բ)  $m$ -ից փոքր, գ) հավասար  $m$ -ի, ոլտել  $m$ -ը ԳՇԽ-ի սահմանափակումների քանակն է: /3 միավոր/

2. Լուծել ԳՇԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը: /3միավոր /

<sup>1</sup>41 – 54-րդ խնդիրներն առաարկել է դոցենտ Ռ. Ավետիսյանը:

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\
 x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0:
 \end{aligned}
 \quad (*)$$

3. Լուծել (\*) ԳԾԽ-ն օժանդակ խնդրի միջոցով: /3 միավոր/  
 4. Գտնել (\*) ամբողջաթվային լուծումը Հոմորիի հատույթների եղանակով: /3 միավոր/  
 5. Գտնել (\*) ամբողջաթվային լուծումը ճյուղերի և գնահատականների եղանակով: /3 միավոր/  
 6. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: /3 միավոր /

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 30 | 17 | 10 | 16 | 4  |
| 30 | 27 | 26 | 9  | 23 | 6  |
| 13 | 14 | 22 | 3  | 1  | 10 |
| 3  | 1  | 5  | 4  | 24 | 10 |
| 7  | 7  | 7  | 7  | 2  |    |

- 7 Ապացուցել երկակիության տեսության լեմ 1: /2 միավոր/  
 Տարբերակ 2.

1. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը: /3 միավոր /

$$\begin{aligned}
 Z &= -x_1 + x_2 \rightarrow \min \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\
 x_1 - 4x_2 &\leq 2 \\
 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\
 x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0:
 \end{aligned}$$

2. Նախորդ խնդրում նպատակային  $Z$  ֆունկցիան փոխարինել  $Z = \lambda x_1 + x_2$  - ով և գտնել, թե  $\lambda$  պարամետրի ո՞ր արժեքների դեպքում խնդիրը ունի՝ ա) միակ լուծում, բ) բազմակի լուծումներ, գ) լուծում չունի: / 3 միավոր/  
 3. Լուծել ԳԾԽ-ն՝ օգտվելով երկակիության տեսությունից: /3 միավոր/

$$\begin{aligned}
 Z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min \\
 -x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
 12x_1 - 9x_2 + 9x_3 &\geq 8 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\leq 0
 \end{aligned}$$

4. Ստուգել, թե տրված  $\bar{x}$  վեկտորը լավագույն լուծում է, թե ոչ: /3 միավոր/

$$\begin{aligned}
 Z &= -x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max \\
 x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\
 x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \\
 \bar{x} &= (1, 1, 0):
 \end{aligned}$$

5. Պատասխանել այո կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3 միավոր/

ա) ԳԾԽ-ի ուղիղ խնդիրը արդյո՞ք միշտ մաքսիմացման խնդիր է:

բ) ԳԾԽ-ի նպատակային ֆունկցիան կարող է միևնույն արժեքն ընդունել քույլատրելի բազմության տարբեր ծայրակետերում:

գ) Արդյոք ԳԾԽ-ի երկակի խնդրի երկակի խնդիրը սկզբնական խնդրի ուղիղ խնդիրն է:

6. Ապացուցել ԳԾԽ-ի հիմնական թեորեմը: /5 միավոր/

Տարբերակ 3.

1 Պատասխանել այո կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3 միավոր /

ա) Եթե ԳԾԽ-ն ունի լավագույն լուծում, ապա ունի նաև լավագույն հենքային լուծում:

բ) Սիմպլեքս եղանակի իրականացման ընթացքում իրար հաջորդող հենքերը կարող են տարբերվել մեկից ավելի վեկտորներով:

գ) ԱԳԾԽ-ի ամբողջաթիվ լավագույն լուծումը կարելի է ստանալ՝ անտեսելով ԳԾԽ-ի լավագույն լուծման կոտորակային մասը:

2. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը:

/3 միավոր /

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0: \quad (3)$$

3. Գտնել (1) - (3) խնդրի ամբողջաթվային լուծումը: /3 միավոր/

4. Հետազոտել ԳԾԽ-ն: /4 միավոր /

$$(\lambda^2 + 3\lambda)x_1 + (\lambda^3 + 3\lambda^2)x_2 + (\lambda^4 + 3\lambda^3)x_3 \rightarrow \min$$

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geq \mu_1$$

$$x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \geq \mu_2$$

$$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \geq \mu_3:$$

5. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: /3 միավոր /

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 5  | 15 | 3  | 6  | 10 | 9  |
| 23 | 8  | 13 | 27 | 12 | 11 |
| 30 | 1  | 5  | 24 | 25 | 14 |
| 8  | 26 | 7  | 28 | 9  | 16 |
| 8  | 9  | 13 | 8  | 12 |    |

6. Ապացուցել ԳԾ երկակիության տեսության 1-ին թեորեմը: /4 միավոր/

Տարբերակ 4.

1. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը:

/3 միավոր /

$$\begin{aligned}
 Z &= x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\
 x_1 - x_2 &\geq -2 \\
 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
 x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\
 x_1 &\geq 5, 1 \leq x_2 \leq 6:
 \end{aligned}$$

2. Նախորդ խնդրում նպատակային  $Z$  ֆունկցիան փոխարինել  $Z = \lambda x_1 + x_2$ -ով և գտնել, թե  $\lambda$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում խնդիրը ունի՝ ա) միակ լուծում, բ) բազմակի լուծումներ, գ) լուծում չունի: /3 միավոր/
3. Լուծել ԳԾԽ-ն՝ օգտվելով երկակիության տեսությունից: /3 միավոր/

$$\begin{aligned}
 Z &= 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max \\
 x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
 x_1 + 4x_2 + x_4 &= 8 \\
 x_j &\geq 0, j = 1, 4:
 \end{aligned}$$

4. Ստուգել՝ տրված  $\bar{x}$  վեկտորը լավագույն լուծում է, թե ոչ: /3 միավոր/

$$\begin{aligned}
 Z &= x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max \\
 4x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= 7 \\
 x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
 x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3 \quad \bar{x} = (1, 0, 1)
 \end{aligned}$$

5. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3 միավոր/
- ա) Գործնականում  $x_i$  փոփոխականները միշտ մեծ կամ հավասար են զրոյի:
- բ) Լրացուցիչ սահմանափակում ներմուծելով միշտ կարելի է մեծացնել կամ փոքրացնել նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը:

- գ)  $\bar{c}$  և  $\bar{b}$  վեկտորները փոփոխելով ԳԾԽ-ի լավագույն լուծումը կամ չի փոխվի, կամ կդառնա անթույլատրելի:

6. Ապացուցել ԳԾ երկակիության տեսության լեմ 3: /5 միավոր /
- Տարբերակ 5.

1. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3 միավոր/
- ա) ԳԾԽ-ի լավագույն լուծմանը համապատասխանող  $\Delta_j$  գնահատականների նշանները կախված չեն, թե ինչ տեսքի խնդիր է դիտարկվում:
- բ) ԳԾԽ-ում հարևան հենքերը տարբերվում են միայն մեկ վեկտոր սունյակով:
- գ) Հոմոթիի հատույթը կառուցելիս անհրաժեշտություն չկա լրացուցիչ փոփոխականի վրա դնել ամբողջաթիվ լինելու պայմանը:
2. Լուծել գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը: /3 միավոր /

$$\begin{aligned}
 4x_1 + x_2 &\rightarrow \max & (1) \\
 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 & (2) \\
 x_1 - x_2 &\leq 1 \\
 x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0: & (3)
 \end{aligned}$$

3. Գտնել (1) - (3) խնդրի ամբողջաթիվ լուծումը: /3 միավոր/

4. Գտնել, թե  $\lambda$  և  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  պարամետրերի որ արժեքների դեպքում խնդիրը ունի՝ ա) միակ լուծում, բ) բազմակի լուծումներ, գ) լուծում չունի: /4 միավոր/

$$x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 \rightarrow \min$$

$$(1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 \geq \mu_1$$

$$x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 \geq \mu_2$$

$$x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 \geq \mu_3$$

5. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: / 3 միավոր /

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 5  | 6  | 25 | 11 | 12 | 9  |
| 13 | 14 | 20 | 27 | 30 | 18 |
| 16 | 7  | 19 | 10 | 21 | 23 |
| 1  | 29 | 23 | 25 | 18 | 26 |
| 11 | 22 | 31 | 6  | 6  |    |

6. Ապացուցել երկակիության տեսության լեմ 4: /4 միավոր /  
Տարբերակ 6.

1. Լուծել ԳՄԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը: /3 միավոր /

$$Z = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 42$$

$$1 \leq x_1 \leq 4.5, \quad 0 \leq x_2 \leq 3.5:$$

2. Նախորդ խնդրում  $-2x_1 + 3x_2 \leq 6$  սահմանափակումը փոխարինել  $-2x_1 + 3x_2 \leq \lambda$ -ով և գտնել, թե  $\lambda$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում խնդիրը ունի ա) միակ լուծում, բ) բազմակի լուծումներ, գ) լուծում չունի: / 3 միավոր /

3. Լուծել ԳՄԽ-ն՝ օգտվելով երկակիության տեսությունից: /3 միավոր/

$$Z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4, \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3:$$

4. Ստուգել՝ տրված  $\bar{x}$  վեկտորը լավագույն լուծում է, թե ոչ: /3 միավոր/

$$Z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\bar{x} = (1, 1, 0)$$

5. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3 միավոր/

Արդյոք ճիշտ են հետևյալ պնդումները, եթե երկակի խնդիրներից մեկը ունի լավագույն լուծում, ապա՝

- ա) մյուսը նույալես ունի լավագույն լուծում,
  - բ) մյուսը կարող է լավագույն լուծում չունենալ,
  - գ) մյուսի նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է:
6. Ապացուցել երկակիության տեսության լեմ 3-ը: /5 միավոր/  
Տարբերակ 7.

1. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/  
ա) ԳԾԽ-ն կարող է ունենալ թույլատրելի լուծում, բայց չունենալ լավագույն լուծում:

բ) Եթե ԳԾԽ-ի հենքային լուծման համար բոլոր  $\Delta_j$  գնահատականները մեծ են զրոյից կամ հավասար են զրոյի, ապա նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կարող է լինել անսահմանափակ:

գ) Հոմոթիի հատույթների եղանակի կիրառման ընթացքում անհրաժեշտություն չկա օգտագործելու նախորդ քայլում կառուցած հատույթը:

2. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը: /3միավոր /

$$Z = 0.5x_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0: \quad (3)$$

3. (1) - (3) ԳԾԽ-ն լուծել օժանդակ խնդրի միջոցով: /3 միավոր/  
4. Լուծել (1)-(3) ԱԳԾԽ-ը Հոմոթիի եղանակով: /3 միավոր/  
5. Լուծել (1)-(3) ԱԳԾԽ-ը ճյուղերի և գնահատականների եղանակով: /3միավոր/  
6. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: /3 միավոր/

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 10 | 15 | 8  | 7  | 16 |
| 12 | 14 | 29 | 20 | 20 | 15 |
| 18 | 7  | 5  | 25 | 28 | 24 |
| 24 | 4  | 30 | 24 | 26 | 15 |
| 15 | 10 | 20 | 15 | 10 |    |

7. Ապացուցել հենքային լուծումների վերաբերյալ լեմ 1 և 2: /5միավոր/  
Տարբերակ 8.

1. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/  
ա) Եթե մինիմացման ԳԾԽ-ի համար սիմպլեքս աղյուսակում  $j$ -րդ սյան բոլոր բաղադրիչները մեծ կամ հավասար են զրոյի, ապա նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է:

բ) Եթե ԳԾԽ-ն ունի թույլատրելի հենքային լուծում, ապա ունի նաև լավագույն հենքային լուծում:

զ) Ճյուղերի և գնահատականների եղանակի կիրառման համար նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները պետք է լինեն ամբողջաթիվ:

2. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով, կազմել երկակի խնդիրը: /2 միավոր/

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max & (1) \\6x_1 + 5x_2 &\leq 30 & (2) \\-x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0: & (3)\end{aligned}$$

3. (1) - (3) ԳԾԽ-ն լուծել օժանդակ խնդրի միջոցով: /3 միավոր/

4. (1)-(3) ԱԳԾԽ-ի լուծումը գտնել Հոմորիի հատույթների եղանակով: /3 միավոր/

5. (1)-(3) ԱԳԾԽ-ի լուծումը գտնել ճյուղերի և գնահատականների եղանակով: /3 միավոր/

6. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: /3 միավոր/

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 17 | 29 | 2  | 8  | 18 | 32 |
| 14 | 8  | 25 | 15 | 21 | 8  |
| 29 | 11 | 15 | 13 | 20 | 13 |
| 27 | 15 | 19 | 8  | 14 | 27 |
| 15 | 20 | 25 | 5  | 15 |    |

7. Ապացուցել հենքային լուծումների վերաբերյալ լեմ 4: /3 միավոր/

Տարբերակ 9.

1. Լուծել գծապատկերի միջոցով. /2 միավոր/

$$\begin{aligned}Z &= x_1 - 3x_2 \rightarrow \max \\2 &\leq x_1 + x_2 \leq 8 \\-4 &\leq \frac{4}{3}x_1 + x_2 \leq 4 \\x_1 &\geq 0, 1 \leq x_2 \leq 5:\end{aligned}$$

2. Նախորդ խնդրում  $2 \leq x_1 + x_2 \leq 8$  սահմանափակումը փոխարինել  $2 \leq x_1 + x_2 \leq \lambda$ -ով և գտնել, թե  $\lambda$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում խնդիրը ունի միակ լուծում, բազմակի լուծումներ, լուծում չունի: /4 միավոր/

3. Կազմել ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը: /2 միավոր/

$$\begin{aligned}Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max \\-x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\leq 12 \\x_1 - 2x_2 + x_4 &\geq 4 \\x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

4. Լուծել ԳԾԽ-ն՝ օգտվելով երկակիության տեսությունից: /3 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &\leq 5 \\ x_j &\geq 0, j = 1, 5 \end{aligned}$$

5. Ստուգել՝ տրված  $\bar{x}$  վեկտորը լավագույն լուծում է, թե ոչ: /3 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 4; \quad \bar{x} = (1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

6. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/

ա) ԳԾԽ-ի լավագույն լուծումը կարելի է փոխել, եթե սահմանափակումների համակարգից արտաքսվեն այն սահմանափակումները, որոնք պարունակում են խիստ անհավասարում:

բ) Խիստ սահմանափակումը ( $<$  կամ  $>$ ), կարելի է անտեսել:

գ) Եթե  $c_k = \max_{j=1..n} \{c_j\} > 0$ , ապա  $x_k^* > 0$ , որտեղ  $x_k^*$ -ն լավագույն լուծման

k-րդ բաղադրիչն է,  $c_j$ -ը նպատակային ֆունկցիայի j-րդ գործակիցն է:

7 Ապացուցել ԳԾ երկակիության տեսության 2-րդ թեորեմը: /3միավոր/ Տարբերակ 10.

1. Պատասխանել այդ կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/

ա) Եթե երկու հենքային լուծումներին համապատասխանող հենքերը տարբերվում են զոնե մեկ վեկտոր-սյունակով, ապա դրանք հարևան հենքեր են:

բ) ԳԾԽ-ի օժանդակ խնդրի լավագույն լուծումը նաև ԳԾԽ-ի լավագույն հենքային լուծումն է:

գ) Հոմոթիի հատույթների եղանակի միջոցով հնարավոր է անջատել և արտաքսել ամբողջաթիվ թույլատրելի լուծումն, եթե այն գոյություն ունի:

2. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով: /2 միավոր/

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\ 7x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0: \end{aligned}$$

3. (1) - (3) ԳԾԽ-ն լուծել օժանդակ խնդրի միջոցով: /միավոր/

4. (1) (3) ԱԳԾԽ-ի լավագույն լուծումը գտնել Հոմոթիի հատույթների եղանակով: /3 միավոր/

5. (1) - (3) ԱԳԾԽ-ի լավագույն լուծումը գտնել ճյուղերի և գնահատականների եղանակով: /3 միավոր/

6. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: /3 միավոր/

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 5  | 8  | 4  | 12 | 10 |
| 5  | 16 | 12 | 10 | 15 | 20 |
| 15 | 8  | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 10 | 12 | 15 | 20 | 15 | 25 |
| 15 | 20 | 8  | 12 | 15 |    |

7. Ապացուցել լավագույն հենքային լուծման գոյության թեորեմը: /3 մ./  
Տարբերակ 11.

1. Պատասխանել այո կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3 միավոր/

ա) Եթե խնդիրներից մեկը լավագույն լուծում չունի, ապա մյուսը նույնպես լավագույն լուծում չունի:

բ) Եթե թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ չեն, ապա երկակի զույգ խնդիրները լուծում ունեն:

գ) Եթե երկակի զույգ խնդիրները լուծում չունեն, ապա դրանց թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ են: /3 միավոր/

2. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով: /2 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ -1 \leq x_1 + 0.5x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\geq -1 \\ 0 \leq x_2 &\leq 3: \end{aligned}$$

3. Նախորդ խնդրում  $Z$  ֆունկցիան փոխարինել  $Z = \lambda x_1 + x_2$ -ով և գտնել, թե  $\lambda$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում խնդիրը ունի՝ ա) միակ լուծում, բ) բազմակի լուծումներ, գ) լուծում չունի: /3 միավոր/

4. Կազմել տրված ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը: /3 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow \min \\ 3x_2 - x_4 + x_5 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + x_5 &\geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_5 \geq 0: \end{aligned}$$

5. Լուծել ԳԾԽ-ն՝ օգտվելով երկակիության տեսությունից: /3 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + x_5 &\geq 3 \\ x_j \geq 0, j &= 1, 5: \end{aligned}$$

6. Ստուգել՝ տրված  $\bar{x}$  վեկտորը լավագույն լուծում է, թե ոչ: /3 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_j \geq 0, j &= 1, 2, 3, \quad \bar{x} = (1, 1, 1) \end{aligned}$$

7 Ապացուցել ԳԾԽ-ի լուծման օպտիմալության հայտանիշը: /3 միավոր/  
Տարբերակ 12.

1. Պատասխանել այո կամ ոչ. հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/  
ԳԾԽ-ի հենքային լուծումների քանակը կարող է լինել.

ա) դատարկ,բ) սահմանափակ,գ) անսահմանափակ:

2. Լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով,կազմել երկակի խնդիրը:  
/3միավոր /

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$-1 \leq x_1 + 0.5x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq -1, \quad 0 \leq x_2 \leq 3$$

3. Z ֆունկցիան փոխարինել  $Z = \lambda x_1 + x_2$ -ով և գտնել, թե  $\lambda$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում խնդիրը ունի՝ ա) միակ լուծում, բ) բազմակի լուծումներ, գ) լուծում չունի. /3 միավոր/

4. ԱԳԾԽ-ի լուծումը գտնել Հոմդրիի հատույթների եղանակով: /3միավոր/

5 (1)- (3) ԱԳԾԽ-ի գտնել լուծումը ճյուղերի և զննահատականների եղանակով:  
/3 միավոր/

6. Լուծել տրանսպորտային խնդիրը: / 3միավոր/

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 5  | 3  | 24 | 10 | 25 | 24 |
| 30 | 2  | 22 | 16 | 7  | 15 |
| 30 | 24 | 27 | 29 | 10 | 16 |
| 15 | 17 | 21 | 2  | 3  | 24 |
| 12 | 13 | 14 | 31 | 9  |    |

7 Նկարագրել ԳԾԽ-ի լուծման սիմպլեքս եղանակը: /2 միավոր/

13 – 19 տարբերակներում բերված տեքստային խնդիրների համար՝

➤ կազմել ԳԾԽ-ի մոդելը: /1 միավոր /

➤ Բացատրել մոդելի փոփոխականների, նպատակային ֆունկցիայի և սահմանափակումների տնտեսագիտական իմաստը /1 միավոր /

➤ լուծել ԳԾԽ-ը գծապատկերի միջոցով: /1 միավոր /

➤ Գտնել նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների արժեքների փոփոխման այն միջակայքը որի դեպքում խնդրի լավագույն լուծումը չի փոխվում: /1 միավոր /

➤ Գտնել ԳԾԽ-ի որևէ հենքային լուծում /1 միավոր /

➤ կազմել ԳԾԽ-ի երկակի խնդիրը, բացատրել երկակի խնդրի կառուցման կանոնները: /1 միավոր /

➤ Բացատրել երկակի խնդրի փոփոխականների, նպատակային ֆունկցիայի և սահմանափակումների տնտեսագիտական իմաստը: /2 միավոր /

- լուծել երկակի խնդիրը սիմպլեքս ալգորիթմի օգնությամբ: /1 միավոր /
  - Հաշվել  $Q^D$  ուղիղ խնդրի նպատակային ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ  $b_i$ -ի  $i=1,2,\dots,m$ , որտեղ  $b_i$ -ն տարրերակներում բերված  $Q^D$ -ի սահմանափակումների համակարգի ազատ գործակիցներն են: /1 միավոր/
  - վերլուծել ստացված լուծումները երկակիության 2-րդ թեորեմի օգնությամբ՝ տալ տնտեսագիտական մեկնաբանումը: /1 միավոր /
  - գտնել խնդրի ամբողջաթվային լավագույն լուծումը: /1 միավոր /
- Տարբերակ 13.

1. Խնդիր: ՄՊ ընկերությունը արտադրում է երկու տեսակի արտադրանք՝ A և B: A և B տեսակի մեկ միավորի վաճառքից ընկերությունը ստանում է 4000 պղմ: A տեսակի մեկ միավորի արտադրության համար անհրաժեշտ է 4 աշխատաժամ և 600 պղմ հումք, իսկ B տեսակի մեկ միավորի համար 3 աշխատաժամ և 700 պղմ: Ընդհանուր աշխատաժամի քանակը սահմանափակ է՝ 3500, իսկ մեկ շաբաթվա համար հումք գնելու ծախսը նախատեսված է ոչ ավելի, քան 800000 պղմ:

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի ընկերության արտադրական ծրագիրը, որ նա արտադրանքի վաճառքից առավելագույն շահույթ ստանա:

2. Պատասխանել  $U$ -ը կամ  $N$ -ը և հիմնավորել պատասխանը: /2միավոր/

$Q^D$ -ի թույլատրելի հենքային լուծման դրական բաղադրիչների քանակը կարող է լինել.

ա)  $m$ -ից մեծ, բ)  $m$ -ից փոքր, գ)  $m$ -ի հավասար, որտեղ  $m$ -ը  $Q^D$ -ի սահմանափակումների քանակն է: / 3 միավոր /

3. Եթե  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ -ը սովորական տեսքի  $Q^D$ -ի  $L$  ագրանժի ֆունկցիայի թամբակետն է, ապա ճշմարիտ է՝  $(\bar{y}A - c, \bar{x}) = (\bar{y}, b - A\bar{x}) = 0$ : / 3 միավոր /

4. Ապացուցել, եթե  $Q^D$ -ն ունի լավագույն լուծում, ապա ունի նաև լավագույն հենքային լուծում: / 2 միավոր /

Տարբերակ 14.

1. Խնդիր: Չեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է B արտադրանքի իրացման ծավալի 40%-ից ոչ պակաս: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 200 պղմ: A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 5, իսկ B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 8 պղմ մեկ միավորի համար: A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 40 և 70 պղմ-ի: A և B ապրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն բաշխումը:

2. Ցույց տալ օրինակի վրա, որ երկակի գույգի երկու խնդիրներն էլ կարող են լուծում ունենալ:

Ցույց տալ օրինակի վրա, որ երկակի գույգից որևէ մեկը կարող է լուծում ունենալ, իսկ մյուսը լինել հակասող, այսինքն՝ լուծում չունենալ:

Յույց տալ օրինակի վրա, որ երկակի գույզի երկու խնդիրներն էլ կարող են լուծում չունենալ: / 3 միավոր /

3. Ապացուցել ԳԾԽ-ի երկակիության տեսության առաջին թեորեմը: / 2 միավոր /

4. Դիտարկենք գծային ծրագրման երկու լուծելի խնդիրներ, որոնք տարբերվում են միայն սահմանափակումների վեկտորներով՝

$$\begin{cases} L(x) = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0: \end{cases} \quad (\alpha)$$

$$\begin{cases} L(x) = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b + \Delta b \\ x \geq 0: \end{cases} \quad (\beta)$$

Նշանակենք  $(\alpha)$  և  $(\beta)$  գծային տեսքի առավելագույն արժեքները համապատասխանաբար  $v_0$  և  $v_0 + \Delta v_0$ :

Ապացուցել, որ  $\Delta v_0 \leq (\bar{y}, \Delta b)$ , որտեղ  $\bar{y}$ -ը՝  $(\alpha)$ -ի երկակի խնդրի լուծումն է: / 3 միավոր /

Տարբերակ 15.

1. Խնդիր: Ձեռնարկությունը թողարկում է երկու տեսակ արտադրանք՝ A և B: A արտադրանքի իրացման ծավալը կազմում է իրացման ընդհանուր ծավալի 40%-ից ոչ պակաս: Երկու տեսակ արտադրանքների թողարկման համար պահանջվող հումքի մեկ օրվա պաշարը կազմում է 2000 պղմ: A արտադրանքի հումքի ծախսը կազմում է 50, իսկ B արտադրանքի հումքի ծախսը՝ 80 պղմ մեկ միավորի համար: A և B արտադրանքների գները համապատասխանաբար հավասար են 400 և 700 պղմ-ի:

A և B արտադրանքների թողարկման համար որոշել հումքի լավագույն բաշխումը:

2. ա) Լրացուցիչ սահմանափակում ներմուծելով՝ կարելի է լավացնել նպատակային ֆունկցիայի արժեքը.

բ)  $\bar{c}$  և  $\bar{b}$  վեկտորները փոփոխելուց լավագույն լուծումը կամ չի փոխվի, կամ կդառնա անթույլատրելի:

գ) Նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների փոփոխությունը միշտ ազդում է տվյալ խնդրի լավագույն լուծման վրա: / 3 միավոր /

3. Դիցուք՝  $\bar{x}$ -ը՝ սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի լուծումն է, իսկ  $\bar{y}$ -ը՝ նրա երկակի խնդրի լուծումն է: Ապացուցել, որ  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  գույզը սովորական տեսքի ԳԾԽ-ի Լանգրանժի ֆունկցիայի թամբակետն է: / 3 միավոր /

4. Ապացուցել  $Q\delta\delta$ -ի երկակիության տեսության երկրորդ բեռերնի անհր-  
մաժեշտ պայմանը: / 2 միավոր /

Տարբերակ 16.

1. Խնդիր: Երկու տեսակ արդյունաբերական արտադրանքից յուրաքան-  
չյուրը հաջորդաբար մշակվում է երեք տարբեր հաստոցներով: Հաստոցները  
կարելի է օգտագործել օրական համապատասխանաբար 14, 22 և 16 ժամ:

| Արտադրանք | Արտադրանքի մշակման ժամանակը<br>(ժամ) |           |            | Շահույթ  |
|-----------|--------------------------------------|-----------|------------|----------|
|           | I հաստոց                             | II հաստոց | III հաստոց |          |
| 1         | 8                                    | 8         | 12         | 200 պղմ. |
| 2         | 10                                   | 16        | 8          | 300 պղմ. |

Վերը բերված աղյուսակում ներկայացված են յուրաքանչյուր տեսակի  
մեկ արտադրանքի մշակման ժամանակը և վաճառքից ստացված շահույթը:  
Գտեք յուրաքանչյուր տեսակի արտադրանքի թողարկման լավագույն  
ծավալը:

2. Պատասխանել Այն կամ Ոչ և հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/  
Երկակի խնդիրների գույզի համար այսպիսի ճիշտ են հետևյալ պնդումները.

ա) Եթե խնդիրներից մեկը լավագույն լուծում չունի, ապա մյուսը նույն-  
պես լավագույն լուծում չունի;

բ) Եթե թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ չեն, ապա  
երկակի խնդիրները ունեն լավագույն լուծում;

գ) Եթե խնդիրներից մեկը լավագույն լուծում չունի, ապա մյուսը կարող է  
ունենալ լավագույն լուծում: / 3 միավոր /

3. Ապացուցել, որ՝

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n:$$

գծային ծրագրման խնդիրը լուծելի է, եթե բոլոր  $b_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) և դրանց  
երկակի խնդրի սահմանափակումների համակարգը համատեղելի է: /3  
միավոր/

4. Ապացուցել  $Q\delta\delta$ -ի երկակիության տեսության լեմ 3-ը: /2 միավոր/

Տարբերակ 17.

1. Խնդիր. Էլեկտրոնային արդյունաբերության փոքր ձեռնարկությունը թո-  
ղարկում է երկու տեսակի ռադիոընդունիչ, ընդ որում, յուրաքանչյուր տե-  
սակի համար պահանջվում է առանձին արտադրական գիծ: Առաջին գծի  
արտադրության օրական առավելագույն ծավալը կազմում է 60 միավոր,

երկրորդ գծի օրական նվազագույն ծավալը՝ 80 միավոր: Առաջին տեսակի ռադիոընդունիչի թողարկման համար անհրաժեշտ է 10, իսկ երկրորդ՝ 8 մի-  
անման մանրամաս: Օգտագործվող մանրամասերի օրական առավելա-  
գույն պաշարը հավասար է 800 միավորի: Առաջին և երկրորդ տեսակների  
մեկ ռադիոընդունիչի իրացման շահույթը համապատասխանաբար հավա-  
սար է 300 և 200 պրմ-ի:

Ռադիոընդունիչների նվազագույն պահանջարկը շուկայում 40 միավոր  
է: Որոշել յուրաքանչյուր տեսակի ռադիոընդունիչների արտադրության  
օրական արդյունավետ ծավալը:

2. Պատասխանել  $U$ -ը կամ  $N$ -ը և հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/

Եթե երկակի խնդիրներից մեկը ունի թույլատրելի լուծում, ապա

ա) մյուսը նույնպես ունի թույլատրելի լուծում,

բ) մյուսը չունի թույլատրելի լուծում,

գ) մյուսի նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է: /3 միավոր /

3. Ապացուցել, որ եթե սովորական տեսքի  $Q$ -ԾԽ-ի սահմանափակումների  
համակարգի  $A = \{a_{ij}\}$  մատրիցի տարրերը՝  $a_{ij} \geq 0$  և  $b_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, m$ , ապա  
երկակի խնդիրների գույզը ունի լուծում: /3 միավոր/

4. Հենքային լուծում. ապացուցել հենքային լուծման օպտիմալության  
հայտանիշը: /2 միավոր/

Տարբերակ 18.

1. Խնդիր: Ընկերությունը արտադրում է  $X$  և  $Y$  տեսակի արտադրանք՝  
օգտագործելով  $A, B$  և  $C$  տեսակի հումք: Դրանց պաշարը և մեկ միավոր ար-  
տա դրանքի համար օգտագործվող հումքի (կգ.) քանակը, վաճառքի գները  
և փոփոխում ծախսերը բերված են ստորև:

| Արտադրանք | A   | B   | C   |
|-----------|-----|-----|-----|
| X         | 8   | 10  | 15  |
| Y         | 10  | 6.5 | 6   |
| Պաշար     | 800 | 650 | 900 |

  

| Արտադրանք | Վաճառքի գին<br>/պմդ 1 միավորի/ | Փոփոխում ծախսեր<br>/պմդ 1 միավորի/ |
|-----------|--------------------------------|------------------------------------|
| X         | 400                            | 250                                |
| Y         | 500                            | 300                                |

Գտնել  $X$  և  $Y$  տեսակի արտադրանքի թողարկման այն ծավալը, որը  
մաքսիմացնում է ընկերության շահույթը:

2. Պատասխանել  $U$ -ը կամ  $N$ -ը և հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/

Գծային ծրագրման խնդրի համար՝

ա) Նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների փոփոխությունը միշտ  
ազդում է խնդրի լավագույն լուծման վրա:

բ) Ուղիղ խնդրի նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները չեն ազդում երկակի խնդրի լավագույն լուծման վրա:

գ) Եթե ուղիղ խնդրի  $j$ -րդ փոփոխականի գործակիցը փոքր է զրոյից, ապա երկակի խնդրի  $j$ -րդ սահմանափակումը կարող է լինել անհամատեղելի է: / 3 միավոր /

3. Ապացուցել, որ եթե գծային ծրագրման խնդիրը լուծելի է, ապա սահմանափակումների  $b$  վեկտորի փոփոխությունը լուծումների բազմության վրա չի կարող հանգեցնել գծային ծրագրման նպատակային ֆունկցիայի անսահմանափակության: / 3 միավոր /

4. Ապացուցել հենքային լուծման վերաբերյալ լեմ 3: /3 միավոր/  
Տարբերակ 19.

1. Խնդիր: Փոքր ձեռնարկությունը թողարկում է սահմանափակ քանակությամբ երկու տեսակի վացքի հեղուկ  $X$  և  $Y$  բաղկացած երեք բաղադրիչներից՝  $A$ ,  $B$  և  $C$ :  $X$  և  $Y$  տեսակի մեկ լիտր վացքի հեղուկ արտադրելու համար օգտագործվելիք  $A$ ,  $B$  և  $C$  տեսակի բաղադրիչների պաշարը և մեկ լիտր արտադրանքի համար օգտագործվելիք քանակը բերված են ստորև:

|                             | $X$   | $Y$ | Պաշարը |
|-----------------------------|-------|-----|--------|
| $A$                         | 40    | 50  | 200    |
| $B$                         | 50    | 40  | 200    |
| $C$                         | 148,5 | 65  | 520    |
| Ընդամենը<br>շահույթը /պղծ / | 500   | 400 |        |

Պահանջվում է գտնել, թե  $X$  և  $Y$  տեսակի որքան հեղուկ պետք է արտադրել, որպեսզի ընկերության շահույթը լինի առավելագույնը:

2. Պատասխանե՛ք  $U_j$  կամ  $N_j$  և հիմնավորել պատասխանը: /3միավոր/

ա) Եթե երկու հենքային լուծումներին համապատասխանող հենքերը տարբերվում են գոնե մեկ վեկտորով, ապա դրանք հարևան հենքեր են:

բ)  $Q$ -մ կարող է ունենալ թույլատրելի հենք, բայց չունենալ լավագույն լուծում:

գ)  $Q$ -մ-ի թույլատրելի հենքային լուծման դրական բաղադրիչների քանակը մեծ կամ հավասար է  $m$ -ի, որտեղ  $m$ -ը  $Q$ -մ-ի սահմանափակումների քանակն է: / 3 միավոր /

3. Ապացուցել, որ սովորական տեսքի գծային ծրագրման մաքսիմացման խնդիրը լուծելի է, եթե  $b_i \geq 0$  և  $a_{ij} > 0, (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ : / 3 միավոր /

4. Ապացուցել  $Q$ -մ-ի երկակիության տեսության երկրորդ թեորեմի բավարար պայմանը: / 2 միավոր /

## 12. Պատասխանել Այո կամ Ոչ

Ստորև, եթե այլ բան չի նշված, դիտարկվում է սովորական տեսքի գծային ծրագրման խնդիրը (ԳԾԽ-ը)՝

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

որտեղ  $A = \|a_{ij}\|$   $i=1, \dots, m$   $j=1, \dots, n$ ,  $m \times n$  չափանի մատրից է,

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in R^m, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

1. ԳԾԽ-ի ուղիղ խնդիրը արդյո՞ք միշտ մաքսիմացման խնդիր է:
2. ԳԾԽ-ի նպատակային ֆունկցիան կարող է արժեքն ընդունել միևնույն թույլատրելի լուծումների բազմության տարբեր կետերում:
3. Եթե ուղիղ խնդիրը լավագույն լուծում չունի, ապա երկակի խնդիրը անհամատեղելի է:
4. Երկակի խնդիրներից մեկի լավագույն լուծում ունենալու դեպքում, մյուսը նույնպես ունի լավագույն լուծում:
5. Եթե երկակի խնդիրներից մեկը ունի թույլատրելի լուծում, ապա մյուսը՝
  - ա) նույնպես ունի թույլատրելի լուծում,
  - բ) կարող է չունենալ թույլատրելի լուծում:
6. Եթե երկակի խնդիրներից մեկը ունի լավագույն լուծում, ապա մյուսը՝
  - ա) ունի թույլատրելի լուծում,
  - բ) կարող է չունենալ թույլատրելի լուծում:
7. Երկակի խնդիրների գույզի համար արդյո՞ք ճիշտ են հետևյալ պնդումները
  - ա) Եթե խնդիրներից մեկը լավագույն լուծում չունի, ապա մյուսը նույնպես լավագույն լուծում չունի;
  - բ) Եթե թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ չեն, ապա երկակի խնդիրները ունեն լավագույն լուծում;
  - գ) Եթե երկակի գույզ խնդիրները լավագույն լուծում չունեն, ապա դրանց թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ են:
8. ԳԾԽ-ի լավագույն լուծումը արդյո՞ք կփոխվի<sup>6</sup>, եթե սահմանափակումների համակարգից արտաքսվեն այն սահմանափակումները, որոնք պարունակում են խիստ անհավասարում:
9. ԳԾ մաքսիմացման խնդրում լրացուցիչ սահմանափակում ներմուծելով միշտ կարելի է՝
  - ա) մեծացնել նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը,
  - բ) փոքրացնել նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը:
10. ԳԾ մինիմացման խնդրում լրացուցիչ սահմանափակում ներմուծելով միշտ կարելի է՝
  - ա) մեծացնել նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը,

բ) փոքրացնել նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը:

11. ԳԾԽ-ի լավագույն լուծումը միշտ զգալուն է նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների փոփոխությունից:
12. ԳԾԽ-ի երկակի խնդրի լավագույն լուծումը կախված չէ ուղիղ խնդրի նպատակային ֆունկցիայի գործակիցներից:
13. ԳԾԽ-ի երկակի խնդրի լավագույն լուծումը կախված չէ ուղիղ խնդրի սահմանափակումների A մատրիցի գործակիցներից:
14. Եթե ԳԾԽ-ի լավագույն լուծման  $j$ -րդ բաղադրիչը՝  $x_j^*$   $>$  0-ից, ապա երկակի խնդրի  $j$ -րդ սահմանափակումը՝
  - ա) մեծ է գրոյից,
  - բ) կարող է հավասար լինել գրոյի,
  - գ) հավասար է գրոյի,
  - դ) փոքր է գրոյից:
15. ԳԾԽ-ի թույլատրելի հենքային լուծման դրական բաղադրիչների քանակը կարող է լինել.
  - ա)  $m$ -ից մեծ,
  - բ)  $m$ -ից փոքր,
  - գ)  $m$ -ի հավասար, որտեղ  $m$ -ը այդ խնդրի սահմանափակումների քանակն է:
16. ԳԾԽ-ի հենքային լուծումների քանակը՝
  - ա) անսահմանափակ է,
  - բ) սահմանափակ է:
17. ԳԾԽ-ի թույլատրելի լուծումների քանակը՝
  - ա) անսահմանափակ է,
  - բ) սահմանափակ է:
18. ԳԾԽ-ն կարող է ունենալ թույլատրելի լուծում, բայց չունենալ
  - ա) հենքային լուծում,
  - բ) լավագույն լուծում:
19. Եթե ԳԾ մաքսիմացման խնդրի հենքային լուծման համար բոլոր  $\Delta_j$  գնահատականները մեծ կամ հավասար են գրոյի, ապա նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կարող է լինել՝
  - ա) անսահմանափակ,
  - բ) սահմանափակ:
20. Հոմոթիի հատույթների եղանակի կիրառման ընթացքում անհրաժեշտությամբ չկա օգտագործելու նախորդ քայլում կառուցած հատույթը:
21. Հոմոթիի հատույթների եղանակի միջոցով հնարավոր է արտաքսել՝
  - ա) ամբողջաթիվ թույլատրելի լուծումը,
  - բ) ամբողջաթիվ թույլատրելի լուծումն, եթե այն լավագույնը չէ,:
22. ԳԾԽ-ի թույլատրելի լուծումների քանակը կարող է լինել.
  - ա) դատարկ,

- բ) սահմանափակ,  
գ) անսահմանափակ:
23. ԳԾԽ-ի հենքային լուծումների քանակը կարող է լինել.  
ա) դատարկ,  
բ) սահմանափակ,  
գ) անսահմանափակ:
24. ԳԾԽ-ի լավագույն լուծումների քանակը կարող է լինել.  
ա) դատարկ,  
բ) սահմանափակ,  
գ) անսահմանափակ:
25. Եթե մինիմացման ԳԾԽ-ի համար սիմպլեքս աղյուսակում  $j$ -րդ սունյակի բոլոր բաղադրիչները մեծ կամ հավասար են զրոյի, ապա նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է:
26. Եթե ԳԾԽ-ն ունի թույլատրելի հենքային լուծում, ապա ունի նաև լավագույն հենքային լուծում:
27. Ճյուղերի և գնահատականների եղանակի կիրառման համար նպատակային ֆունկցիայի գործակիցները պետք է լինեն ամբողջաթիվ:
28. ԳԾԽ-ում հարևան հենքերը տարբերվում են միայն մեկ վեկտորով:
29. Հոմոլոգիի հատույթը կառուցելիս անհրաժեշտություն չկա լրացուցիչ փոփոխականի վրա դնելու ամբողջաթիվ լինելու պայմանը:
30. Եթե ԳԾԽ-ն ունի լավագույն լուծում, ապա ունի նաև լավագույն հենքային լուծում:
31. Սիմպլեքս եղանակի իրականացման ընթացքում իրար հաջորդող հենքերը կարող են տարբերվել մեկից ավելի վեկտորներով:
32. ԱԳԾԽ-ի ամբողջաթիվ լավագույն լուծումը կարելի է ստանալ անտեսելով ԳԾԽ-ի լուծումն անկոտորակային մասը:
33. ԱԳԾԽ-ի նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքը կարող է լինել համապատասխան մաքսիմացման (մինիմացման) ԳԾԽ-ի նպատակային ֆունկցիայի լավագույն արժեքից մեծ (փոքր):



## II. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

### 1. Լուծել հետևյալ խնդիրները

**Խնդիր 1:** «Շուշան» ընկերության շուկայի հետազոտման բաժինը արձանագրել է, որ եթե ձեռնարկությունը նոր թողարկվող արտադրանքը վաճառի մեկ միավորը 20000 պղծ-ով, ապա մեկ ամսվա ընթացքում կվաճառվի 200 միավոր արտադրանք, իսկ եթե վաճառի 10000 պղծ-ով, ապա նույն ժամկետում կվաճառի 600 միավոր: Գլխավոր հաշվապահի ծառայությունը հաշվարկել է մեկ միավոր արտադրանքի փոփոխումն ծախսերը՝ 3500 պղծ և մեկ ամսվա հաստատումն ծախսերը՝ 5000 պղծ:

Պահանջվում է.

ա) Դուրս բերել համապատասխան բանաձևերն ընդհանուր ծախսերի, հասույթի և շահույթի համար, եթե արտադրանքի պահանջարկի ֆունկցիան գծային է,

բ) Գտնել, թե ինչպիսի՞նք պիտի լինեն վաճառքի քանակը և գինը, որպեսզի ընկերության ամսական շահույթը լինի առավելագույնը:

**Խնդիր 2:** Ձեռնարկության 1000 միավոր արտադրանքի խմբաքանակը արժե  $p$  պղծ: Շուկան ամսական սպառում է  $q$  քանակությամբ խմբաքանակ: Հայտնի է  $p$ -ի և  $q$ -ի միջև եղած ֆունկցիոնալ կապը՝

$$p = 6000 + 54000/q^2:$$

Ձեռնարկության ֆինանսական կառավարիչին անհրաժեշտ է իմանալ, թե արտադրանքի ի՞նչ քանակության դեպքում ձեռնարկությունը կունենա մվազագույն ամսական հասույթ:

**Խնդիր 3:** Ինչ-որ ապրանքի արտադրության համար կատարված ընդհանուր ծախսը և ստացված հասույթը համապատասխանաբար նկարագրվում են հետևյալ բանաձևերով

$$TC = 150q + 10000 \text{ պղծ},$$

$$TR = 550q - 4q^2 \text{ պղծ},$$

որտեղ  $TC$ -ն ընդհանուր ծախսն է,  $TR$ -ը՝ հասույթը,  $q$ -ն՝ թողարկված և վաճառված ապրանքի քանակը: Պահանջվում է գտնել  $q$ -ի այն արժեքը, որի դեպքում ստացվում է առավելագույն շահույթը:

**Խնդիր 4:** Պաղպաղակի պահանջարկի ֆունկցիան է՝  $p = (300 - x)$  պղծ, որտեղ  $p$ -ն մեկ պաղպաղակի գինն է, իսկ  $x$ -ը վաճառված քանակը: Ինչքա՞ն և ի՞նչ գնով պետք է վաճառել պաղպաղակը, որպեսզի հասույթը լինի առավելագույնը:

Խնդիր 5: Ինչ-որ ապրանքի պահանջարկի ֆունկցիան տրվում է

$$p = (x^2 - 24x + 117) \text{ պղմ}$$

ֆունկցիայի տեսքով, որտեղ  $p$ -ն արտադրանքի քանակն է, իսկ  $x$ -ը՝ միավոր արտադրանքի գինը:

Ինչքա՞ն արտադրանք պետք է թողարկել և ի՞նչ գնով վաճառել, որպեսզի հասույթը լինի առավելագույնը:

Խնդիր 6: Ձեռնարկության ամսական հաստատուն ծախսը 720000 պղմ է, իսկ փոփոխուն ծախսը՝  $(20000x + x^2)$  պղմ, որտեղ  $x$ -ը թողարկված և իրացված արտադրանքի ծավալն է: Ձեռնարկության ամսական հասույթի ֆունկցիան՝ վիճակագրական տվյալների համաձայն նկարագրվում է՝  $(120000x - x^2)$  պղմ բանաձևով: Ձեռնարկության արտադրական կարողությունները հնարավորություն են տալիս ամսական թողարկել ոչ ավելի քան 1000 միավոր արտադրանք:

Ձեռնարկությունն ինչքա՞ն արտադրանք պետք է թողարկի, որպեսզի սպասվելիք շահույթը լինի առավելագույնը:

Խնդիր 7: Քաղաքի ծայրամասում գտնվող փոքրիկ փողոցում լավաշի հատը 50 դրամ է. օրական պահանջարկը՝ 1000 լավաշ: Եթե լավաշի գինը բարձրանա 60 դրամի, ապա պահանջարկը կնվազի և կդառնա օրական 800 լավաշ: Փռան հաստատուն ծախսը 2500 դրամ է, իսկ մեկ լավաշի բխման փոփոխուն ծախսը 20 դրամ է: Հայտնի է, որ լավաշի սպառման ֆունկցիան գծային է և ներկայացնում է լավաշի գնի ու թխված քանակի միջև եղած կապը:

Ինչքա՞ն և ի՞նչ գնով պետք է թխել լավաշը, որպեսզի փռան շահույթը լինի առավելագույնը:

Խնդիր 8: Ընկերության գործադիր տնօրենի աշխատակազմի ղեկավարը համարում է, որ աշխատակիցների թվի և աշխատանքային օրվա ընթացքում նրանց ազատ ժամաքանակի /պարապուրդի/ միջև գոյություն ունի որոշակի կապ՝  $t = 3/2(q-4) + 24q$ , որտեղ  $q$ -ն աշխատակիցների թիվն է:

Եթե աշխատակազմի ղեկավարը իրավացի է, ապա որքա՞ն պետք է լինի աշխատակիցների թիվը, որպեսզի նա փոխի իր կարծիքը:

## 2. Լուծել գծապատկերի միջոցով

1.  $(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + x_2 \leq 5$   
 $x_1 + 5x_2 \leq 10$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ :
2.  $2x_1 + x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $4x_1 + 3x_2 \leq 6$   
 $4x_1^2 - x_2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
3.  $x_1^2 + x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 = 9$   
 $x_1 + x_2 \geq 2$ :
4.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 9$   
 $x_1 + x_2 \leq 2$ :
5.  $-(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 1)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $5x_1 + 2x_2 \geq 20$   
 $-2x_1 + x_2 = 5$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ :
6.  $2x_1 + x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $8x_1 - 8x_2 \leq -1$   
 $x_1^2 + 3x_2 \leq 3$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
7.  $x_1^2 + x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 = 9$   
 $x_1 + x_2^2 \leq 1$   
 $x_1 + x_2 \leq 1$ :
8.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$   
 $x_1 + x_2^2 \leq 4$   
 $x_1 + x_2 \leq 1$
9.  $x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1^2 + x_2 \leq 1$   
 $8x_1 - 8x_2 \leq 1$
10.  $x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + 4x_2 \leq 1$   
 $x_1 + x_2^2 \leq 6$   
 $-x_1 + 4x_2^2 \leq 2$
11.  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1 + 5x_2 \geq 20$   
 $x_1 - 2x_2 = 5$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ :
12.  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 4$   
 $9x_1 + x_2 \leq 9$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ :
13.  $x_1^2 + x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 25$   
 $2x_1 - x_2 = 15$
14.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2 \leq 5$   
 $3x_1 + 2x_2 \leq 7$
15.  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 16$   
 $x_1 + x_2 \leq 4$ :
16.  $x_1 + x_2^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 = 9$   
 $x_1 + x_2 \leq 2$ :

17.  $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1 + 5x_2 \leq 20$   
 $x_1 - 2x_2 \leq 5$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
18.  $x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$   
 $x_1 + x_2 \geq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
19.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1 + 3x_2 \leq 8$   
 $4x_1 + x_2 \leq 10$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
20.  $-2x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 - 2x_1x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 3x_2 \leq 9$   
 $3x_1 + x_2 \leq 9$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
21.  $2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 10x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $4x_1 + 3x_2 \leq 24$   
 $x_1 + 3x_2 \leq 15$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
22.  $-x_1^2 - x_2^2 + 8x_1 - 6x_2 + 10 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + 2x_2 \leq 6$   
 $x_1 - x_2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
23.  $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 24 \rightarrow \text{ext}$   
 $4x_1 + x_2 \leq 12$   
 $x_1 - x_2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
24.  $x_1 - 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 5x_2 \leq 9$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
25.  $-2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + x_2 \leq 9$   
 $-4x_1 + 7x_2 \leq 4, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
26.  $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $4x_1 + x_2 \leq 4$   
 $x_1 + x_2 \leq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$

27.  $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + 2x_2 \leq 8$   
 $x_1 + 4x_2 \leq 10$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
28.  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 10x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + 4x_2 \leq 24$   
 $3x_1 + x_2 \leq 15$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
29.  $-0.5x_1^2 - 0.5x_2^2 + 6x_1 + 8x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1 + 3x_2 \leq 9$   
 $x_1 - 7x_2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
30.  $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 + 32 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 4x_2 \leq 6$   
 $x_1 - 2x_2^2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
31.  $x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2 - 8x_1 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 4$   
 $x_1 + x_2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
32.  $0.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 4$   
 $x_1 + x_2 \geq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
33.  $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1 + x_2 \leq 4$   
 $x_1 - x_2 \geq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

## 3. Լուծել մաթեմատիկական ծրագրման դասական խնդիրը

1.  $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$   
 $4x_1 + x_2 = 8:$
2.  $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 10:$
3.  $3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext},$   
 $x_1 - x_2^2 + 2x_2 = 12$
4.  $2x_1 + x_2 + 3x_1x_2 \rightarrow \text{ext},$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 5$   
 $x_1 + 4x_2 = 9:$
5.  $x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_1 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + x_2^2 + 4x_2 = 10$
6.  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 5:$
7.  $2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + x_3 \rightarrow \text{max}$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 12$   
 $x_1 - 2x_2 = 8$
8.  $2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + x_2 + x_3^2 = 12$   
 $2x_2 + 4x_3 = 3:$
9.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{max}$   
 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$   
 $x_1^2 - x_2 + x_3 = 10:$
10.  $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 - x_1 + 2x_2 = 12$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$
11.  $2x_1^2 - x_2^2 + 8x_1x_2 + 8x_1 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 10:$
12.  $2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + x_2 + x_3^2 = 12:$
13.  $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 \rightarrow \text{max}$   
 $x_1 + 2x_2^2 - x_3 = 4$   
 $2x_1 - x_2 + x_3 = 2:$
14.  $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1 + x_2 + 3x_3 = 13$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6:$
15.  $(x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$   
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14:$
16.  $x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1x_2 + 6x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + 4x_2 - 3x_1 = 8$   
 $x_1^2 + 2x_2 - 3x_1 = 6:$
19.  $2x_1^2 - x_2^2 - 5x_1x_2 - 4x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 = 8:$
20.  $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + 8x_1 \rightarrow \text{ext}$   
 $3x_1^2 + x_2 - 5x_1 = 12$
21.  $x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 + 2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1 - 4x_2 + 3x_2 = 8$   
 $x_1 + 3x_2 - 2x_2 = 7:$
22.  $2x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 = 8$

23.  $(x_1+3)^2+2(x_2-3)^2+x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+2x_2+2x_3=10$   
 $x_1-2x_2=6$
24.  $2(x_1+1)^2+3(x_2+1)^2+x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1+2x_2+x_3=10$   
 $4x_2+2x_3=5$
25.  $x_1+2x_2+x_1x_2+x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+2x_2+x_3=5$   
 $4x_1+x_2=7$
26.  $x_1^2+2x_2^2+x_3^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+2x_2+x_3=8$   
 $2x_1+x_2+3x_3=10$
27.  $(x_1-1)^2+(x_2-3)^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+x_2=10$   
 $2x_1-3x_2=8$
28.  $3(x_1+1)^2+2(x_2+3)^2+x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1-x_2+x_3=12$   
 $x_1+x_2+x_3=10$
29.  $x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-2x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+3x_3=2$   
 $x_1-x_2+2x_3=8$
30.  $x_1^2-2x_1x_2-2x_2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+3x_2+3x_3=10$   
 $2x_1-2x_2+2x_3=3$
31.  $x_1^2+2x_2^2+x_3^2 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+2x_2+x_3=5$   
 $4x_1+x_2=7$
32.  $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2+4x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+3x_2-5x_3=8$   
 $x_2+x_3=10$
- 33\*  $3x_1+4x_2+x \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2+2x_1x_2=2$
- 34\*  $3x_1-4x_2+8 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2-2x_1x_2+2x_1-2x_2=2$
- 35\*  $6x_1+4x_2+1 \rightarrow \text{ext}$   
 $2x_1^2+2x_1x_2-2x_1=1$
- 36\*  $9x_1+4x_2+9 \rightarrow \text{ext}$   
 $9x_1^2+6x_1x_2+6x_1=2$
- 37\*  $6x_1+4x_2+8 \rightarrow \text{ext}$   
 $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1+2x_2=1$
- 38\*  $3x_1^2+2x_2^2-3x_1+1 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2+x_2^2=4$
- 39\*  $x_1x_2x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$   
 $x_1+x_2+x_3=0$
- 40\*  $x_1+x_2+x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$
- 41\*  $x_1x_2x_3 \rightarrow \text{ext}$   
 $x_1+x_2+x_3=0$   
 $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=12$
- 42\*  $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} \rightarrow \text{ext}$   
 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$

#### 4. Կուն-Թակերի պայմանները

Ստուգել Կուն-Թակերի անհրաժեշտ պայմանները տրված  $Z$  կետի համար

1.  $-x_1^2 + x_1 - 3x_2^2 + 7x_3 \rightarrow \max$  2.  $-3x_1^2 + x_2 - x_2^2 + 7x_3 \rightarrow \max$   
 $x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 5$   $4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5$   
 $2x_1 + x_3 \leq 4$   $2x_2 + x_3 \leq 4$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (1, 0, 0, 2, 0):$   $Z = (0, 1, 0, 2, 0):$
3.  $-3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 + 6x_2 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$   
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$   
 $2x_1 + x_2^2 \leq 3$   
 $3x_1 + x_2 \leq 6$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad Z = (0, 2, 1, 0, 0):$
4.  $-x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 32 \rightarrow \min$   
 $x_1^2 - x_2 - x_3 \leq 4$   
 $x_1 - 4x_2 + x_2^2 \leq 6$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (2, 1, 2, 0):$
5.  $10x_1^2 + 8x_2^2 - 80x_1 - 50x_2 + 10x_1x_2 \rightarrow \min$   
 $x_1^2 + x_2 \leq 3$   
 $x_1 + x_2 \leq 2$   
 $x_1 + 4x_2 \leq 0$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z = (1, 0, 4, 0, 0):$
6.  $x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4 \rightarrow \max$   
 $2x_1 + x_2 \leq 5$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (1, 2, 1):$
7.  $-x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 6 \rightarrow \max$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (1, 1, 1, 0, 0):$

8.  $-x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 32 \rightarrow \min$   
 $x_1^2 - x_1 - x_3 \leq 4$   
 $x_1 - 4x_2 + x_2^2 \leq 6$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (2, 1, 2, 0)$
9.  $10x_1^2 - 80x_1 + 8x_2^2 + 50x_2 + 10x_1x_2 \rightarrow \min$   
 $x_1 + x_2 \leq 2$   
 $x_1 + 4x_2 \leq 0$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z = (1, 0, 4, 0, 0):$
10.  $x_1^2 - 7x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 5 \rightarrow \min$   
 $5x_1 - 7x_2 + 10x_3 \leq 9$   
 $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 0$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (0, 3, 1, 0, 2):$
11.  $-x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 2x_3 + 6 \rightarrow \max$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (1, 1, 1, 0, 0):$
12.  $x_1^2 - 7x_1 - 6x_3 + 7x_2 + 5 \rightarrow \min$   
 $5x_1 - 7x_2 + 10x_3 \leq 9$   
 $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 0$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (0, 3, 1, 0, 2):$
13.  $6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max$   
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$   
 $2x_1 + 3x_2 \leq 6$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z = (2, 0, 1, 0):$
14.  $-3x_1^2 - x_2^2 + x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$   
 $4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5$   
 $2x_2 + x_3 \leq 4$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z = (0, 1, 0, 2, 0):$

## 5. Թամբակետ<sup>(1)</sup>

### 5.1 Ստուգել տրված Z կետի թամբակետ լինելը

$$\begin{aligned} 1. \quad & -4x_1 - 2x_2^2 - 2x_2 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max \\ & -3x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -3 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$Z_0 = (4, 0, 2, 6, 1):$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & -4x_1 - 2x_2^2 - 2x_2 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max \\ & -3x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & Z_0 = (6, 0, 3, 0, 1): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & x_1^2 + 5x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \min \\ & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & Z_0 = (1, 0, 4,) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max \\ & x_2^2 - 4x_1 - 7x_2 \leq 12 \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & Z = (2, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \min \\ & x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & Z_0 = (3, 1, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & 4x_1 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8 \rightarrow \min \\ & -3x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & (1) \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ & Z_0 = (4, 0, 7, 0, 1): \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> 5.2 - 5.4 խնդիրներն առաջարկել է դոցենտ Ռ. Ավետիսյանը:

7.  $-11x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 + x_3 \rightarrow \min$   
 $-7x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7$   
 $2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 1, 2, 3, 0):$
8.  $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 14 \rightarrow \min$   
 $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \leq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 0, 1,)$
9.  $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 3x_3 - 4x_1x_2 \rightarrow \max$   
 $8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 40$   
 $-2x_1 + x_2 - x_3 = -3$   
 $x_2 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 4, 2, 6, -1)$
10.  $-2x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_1 + 3x_3 \rightarrow \max$   
 $8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 10$   
 $-2x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 6, 3, 0, 1)$
11.  $-5x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 \rightarrow \max$   
 $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \leq 4$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 1, -4,)$
12.  $-2x_1^2 - 4x_2 - 2x_1 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max$   
 $8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 40$   
 $-2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 1, 6, 0, 1)$
13.  $-8x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_2 - 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \max$   
 $8x_1^2 + x_2^2 \leq 2$   
 $x_1 + x_2 \leq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$   
 $Z_0 = (0, 1, 1, 0)$

5.2 Օգտվելով թամբակետի սահմանումից ցույց տալ, որ նշված երկու փոփոխականի ֆունկցիան թամբակետ չունի:

1.  $F(x, y) = -x + yx^2$ , եթե  $x \geq 0, y \geq 0$
2.  $F(x, y) = 4x^2y - 4xy - 2x + y^2 + 1$ , եթե  $x \geq 1/2, y \geq 0$
3.  $F(x, y) = x^2y + 2xy - x + y - 1$ , եթե  $x \geq -1, y \geq -1$
4.  $F(x, y) = x^2y - x^2 + x$ , եթե  $x \leq 0, y \geq 1$
5.  $F(x, y) = -y x^2 + 2xy + x^2 - x - y$ , եթե  $x \leq 1, y \leq 1$ :

5.3 Գտնել նշված ֆունկցիայի թամբակետը՝

6.  $F(x, y) = x^3 + y(-x^3 - 1)$ , եթե  $x \leq 1$
7.  $F(x, y) = -8x^3y - y - 1$ , եթե  $y \geq 0$
8.  $F(x, y) = 16x^3 - 8x^3y - y + 1$ , եթե  $x \leq 1/2, y \geq 1$
9.  $F(x, y) = -yx^3/8 + 3x^3/8 - y + 2$ , եթե  $x \leq 2, y \geq 2$ :

5.4 Հաշվել  $\max_x \min_y F(x, y)$  և  $\min_x \max_y F(x, y)$

10.  $F(x, y) = (x - y)^2$ , եթե  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
11.  $F(x, y) = 0.5x^2 - 2xy + y^2 + 10$ , եթե  $-1 \leq x \leq 1, -0.5 \leq y \leq 0.5$
12.  $F(x, y) = -[x - y(1 - y^2)]^2$ , եթե  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$
13.  $F(x, y) = 3x + 2y^2x - 4y^2 - 10$ , եթե  $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ :

## 6. Լուծել գրադիենտի եղանակով

(Վերցնել  $x_0 = (1, 1)$ ,  $\varepsilon = 0,01$ )

1.  $-2x_1^2 - x_2^2 + 8x_2 + 6x_2 - 25 \rightarrow \max$
2.  $3x_1^2 + x_2^2 + 11x_2 + 3x_1 + \rightarrow \min$
3.  $-3x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 + 6x_2 - 15 \rightarrow \max$
4.  $2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2 + 6x_1 - 2x_1x_2 \rightarrow \min$
5.  $3x_1^2 + x_2^2 + 11x_2 + 3x_1 + \rightarrow \min$
6.  $-3x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 + 6x_2 - 15 \rightarrow \max$
7.  $x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 + 6x_1 - 2x_1x_2 \rightarrow \min$
8.  $4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \max$

9.  $-4x_1^2 - x_2^2 - 6x_2 + 2x_1 \rightarrow \max$
10.  $-6x_2 + 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \min$
11.  $-x_1 - 6x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min$
12.  $-2x_1 - 5x_2 + 4x_1x_2 + x_1^2 \rightarrow \min$
13.  $-3x_1 + 6x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \rightarrow \min$
14.  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2 \rightarrow \min$
15.  $-2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + x_1 \rightarrow \min$
16.  $4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \max$
17.  $-4x_1^2 - x_2^2 - 6x_2 + 2x_1 \rightarrow \max$
18.  $-6x_2 + 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$
19.  $-2x_1^2 - x_2^2 + 8x_2 + 6x_2 - 25 \rightarrow \max$
20.  $-x_1^3 - 6x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min$
21.  $-2x_1 - 5x_2 + 4x_1x_2 + x_1^2 \rightarrow \min$

### Ստուգողական տարբերակներ

#### Տարբերակ 1.

1. Խնդիր: «Լիություն» ընկերության շուկայի հետազոտման բաժինը արձանագրել է, որ եթե ձեռնարկությունը նոր թողարկվող արտադրանքը վաճառի մեկ միավորը 25000 պղն-ով, ապա մեկ ամսվա ընթացքում կվաճառվի 700 միավոր արտադրանք, իսկ եթե վաճառի 20000 պղն-ով, ապա նույն ժամկետում կվաճառի 900 միավոր: Գլխավոր հաշվապահի ծառայությունը հաշվարկել է մեկ միավոր արտադրանքի փոփոխում ծախսերը՝ 2500 պղն և մեկ ամսվա հաստատում՝ 8000 պղն: Պահանջվում է.

ա) Գրել բանաձևերն ընդհանուր ծախսերի, հասույթի և շահույթի համար,  
բ) Գտնել, թե ինչպիսի՞ն պիտի լինեն վաճառքի քանակը և գինը, որպեսզի ընկերության ամսական շահույթը լինի առավելագույնը: /2միավոր/

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր/

$$Z = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \text{ext}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: /3 միավոր/

$$Z = x_1^2 + 2x_2 + 3x_1x_2 \rightarrow \text{ext}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$4x_1 + x_2 = 8:$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: /2 միավոր/

$$f(x) = -4x_1 - 2x_2^2 - 2x_2 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 10,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, Z = (4, 0, 2, 6, 1):$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $\epsilon = 0,01$ ):

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_2 \rightarrow \min$$

/2 միավոր/

$$x_0 = (0, 1):$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դինամիկ ծրագրման եղանակով:

(☛ [1], բաժին VII) /3 միավոր/

| K=5      | I մասնաճյուղ |       | II մասնաճյուղ |       | III մասնաճյուղ |       |
|----------|--------------|-------|---------------|-------|----------------|-------|
| Տարբերակ | $C_1$        | $R_1$ | $C_2$         | $R_2$ | $C_3$          | $R_3$ |
| 1        | 0            | 0     | 0             | 0     | 0              | 0     |
| 2        | 1            | 2     | 1             | 3     | 1              | 2     |
| 3        | 2            | 3     | 2             | 4     | 2              | 4     |
| 4        | -            | -     | 4             | 7     | -              | -     |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ, գերակայող տող, սյունակ
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար գցային ծրագրման խնդիրները.
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: /4միավոր/

8. Մաքեմատիկական ծրագրման դասական խնդրի լուծումը Լագրանժի եղանակով: /2միավոր/

Տարբերակ 2.

1. Խնդիր: Զեռնարկության 1000 միավոր արտադրանքի խմբաքանակը արժե  $y$  պղծ: Շուկան ամսական սպառում է  $x$  թվով խմբաքանակ: Հայտնի է  $y$ -ի և  $x$ -ի միջև եղած ֆունկցիոնալ կապը՝

$$y = 8000 + 45000/x^2:$$

Ձեռնարկության ֆինանսական կառավարիչին անհրաժեշտ է իմանալ, թե արտադրանքի ինչպիսի ծավալի դեպքում ձեռնարկությունը կունենա նվազագույն ամսական հատույթ: / 2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: /2 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{ext} \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 &\leq 2: \end{aligned}$$

3. Լուծել հետևյալ դասական խնդիրը: /3 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + x_3 \rightarrow \text{ext} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 12: \end{aligned}$$

4 Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով,  $\varepsilon = 0,01$ ):

$$\begin{aligned} -6x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_2 &\rightarrow \max \\ x_0 &= (0,1): \varepsilon = 0,01 \end{aligned} \quad /2 \text{ միավոր} /$$

5.Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: /2 միավոր /

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max \\ -3x_1 + 8x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad Z &= (6,0,3,0,1): \end{aligned}$$

6. Կառուցել ցանցը և գտնել կառնագույն ուղին: / 3 միավոր /

|          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (i,j)    | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (2,5) | (2,6) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (4,6) | (4,7) |
| $l_{ij}$ | 3     | 2     | 4     | 4     | 5     | 7     | 6     | 3     | 5     | 8     |

  

|          |       |       |       |       |        |        |        |         |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| (i,j)    | (5,8) | (5,9) | (6,8) | (6,9) | (6,10) | (8,11) | (9,11) | (10,11) |
| $l_{ij}$ | 4     | 6     | 5     | 8     | 3      | 4      | 2      | 7       |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 8 \\ -5 & 8 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & -4 & 1 \\ -8 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ, գերակայող տող (սյունակ)
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար գցային ծրագրման խնդիրները.
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: /4միավոր/

8. Լագրանժի բազմապատիկների մեկնաբանումը: /2 միավոր /

Տարբերակ 3.

1. Որոշակի ապրանքի արտադրության համար կատարված ընդհանուր ծախսը և ստացված հատույթը բավարարում են հետևյալ բանաձևերին.

$$TC = 200q + 10000 \text{ պղմ},$$

$$TR = 450q - 4q^2 \text{ պղմ},$$

որտեղ TC-ն ընդհանուր ծախսն է, TR-ը՝ հասույթը, q-ն՝ քողարկված և վաճառված ապրանքի քանակը: Պահանջվում է գտնել q-ի այն արժեքը, որի դեպքում ստացվում է առավելագույն շահույթ: /2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: /2 միավոր /

$$Z = x_1^2 + x_2 \rightarrow \text{ext}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 9$$

$$x_1 + x_2 \geq 1:$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: /3 միավոր /

$$Z = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow \text{ext}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10:$$

4. Ստուգել տրված Z կետի թամբակետ լինելը: /2 միավոր /

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, Z = (1, 0, -4):$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել մեկ քայլ): /2 միավոր /

$$6x_1 - 2x_2^2 + 4x_2 - 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$x_0 = (0, 1):$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դինամիկ ծրագրման եղանակով:

(☛ [1], բաժին VII) /3 միավոր/

| K= 5     | I ձեռն.        |                | II ձեռն.       |                | III ձեռն.      |                |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Տարբերակ | C <sub>1</sub> | R <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> | R <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> | R <sub>3</sub> |
| 1        | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              |
| 2        | 2              | 3              | 1              | 2              | 1              | 2              |
| 3        | 3              | 4              | 2              | 3              | 2              | 4              |
| 4        |                |                |                |                | 3              | 5              |

Տրված  $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ -8 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ, գերակայող տող, սյունակ
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար գցային ծրագրման խնդիրները
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: /4միավոր/

8. Ապացուցել  $\max f(\bar{x}), \bar{x} \geq 0$  խնդրի լուծման անհրաժեշտ պայմանները:

/2 միավոր /

## Տարբերակ 4.

1. Խնդիր: Պաղպաղակի պահանջարկի ֆունկցիան է  $p = (450 - x)$  պղմ, որտեղ  $p$ -ն մեկ պաղպաղակի գինն է, իսկ  $x$ -ը վաճառված քանակը:

Ինչքա՞ն և ի՞նչ գնով պետք է պաղպաղակ վաճառել, որպեսզի հասույթը լինի առավելագույնը: / 2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր /

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{ext}$$

$$4x_1^2 - x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: / 3 միավոր /

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext}$$

$$x_1 - x_2^2 + 2x_2 = 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: / 3 միավոր /

$$f(x) = 4x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8 \rightarrow \min$$

$$-3x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, Z = (4, 0, 7, 0, 1):$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել մեկ քայլ): / 2 միավոր /

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$x_0 = (1, -1):$$

6. Կառուցել ցանցը և գտնել կառճագույն ուղին: / 3 միավոր /

| (i,j)    | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (2,5) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (4,6) | (4,7) |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $l_{ij}$ | 4     | 7     | 3     | 5     | 2     | 5     | 4     | 8     | 7     |

| (i,j)    | (5,8) | (5,10) | (6,8) | (6,9) | (7,9) | (7,10) | (8,11) | (9,11) | (10,11) |
|----------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| $l_{ij}$ | 5     | 4      | 3     | 8     | 1     | 5      | 4      | 2      | 5       |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ, գերակայող տող, սյունակ
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար զցային ծրագրման խնդիրները
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: / 4 միավոր /

8. Ապացուցել թամբակետի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները: / 2 միավոր /

## Տարբերակ 5.

1. Խնդիր: ՍՊԸ ամսական հաստատուն ծախսը 10000 պոմ է, իսկ փոփոխուն ծախսը ( $x^2 + 300x$ ) պոմ, որտեղ  $x$ -ը թողարկված և իրացված արտադրանքի ծավալն է: Ընկերության ամսական հասույթի ֆունկցիան՝ փոխկազմակերպողի տվյալների համաձայն մեկարագրվում է՝  $(1500x - x^2)$  պոմ բանաձևով: ՍՊԸ արտադրական կարողությունները հնարավորություն են տալիս ամսական թողարկել ոչ ավելի քան 150 միավոր արտադրանք:

Ձեռնարկությունն ինչքա՞ն արտադրանք պետք է թողարկի, որպեսզի սպասվելիք շահույթը լինի առավելագույնը: / 2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր /

$$Z = -(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 1)^2 \rightarrow \text{ext}$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$-2x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: / 3 միավոր /

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 \rightarrow \text{ext}$$

$$x_1 + x_2^2 + 4x_2 = 10:$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: /3 միավոր /

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 14 \rightarrow \min$$

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + 2x_1 - 4x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad Z = (4, 0, 7, 0, 1):$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $\varepsilon = 0,01$ ):

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + x_1x_2 \rightarrow \min$$

$$x_0 = (1, 2):$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դինամիկ ծրագրման եղանակով:

(●[1], բաժին VII, 3 միավոր)

| K= 5     | I ձեռն. |       | II ձեռն. |       | III ձեռն. |       |
|----------|---------|-------|----------|-------|-----------|-------|
| Տարբերակ | $C_1$   | $R_1$ | $C_2$    | $R_2$ | $C_3$     | $R_3$ |
| 1        | 0       | 0     | 0        | 0     | 0         | 0     |
| 2        | 1       | 2     | 2        | 3     | 1         | 3     |
| 3        | 2       | 4     | 4        | 6     | 2         | 5     |
| 4        | 3       | 5     |          |       |           |       |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

գտնել թամբակետ, գերակայող տող (սյունակ)

գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար զգային ծրագրման խնդիրները

- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
  - լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: /4միավոր/
8. Ապացուցել Կուն-Թակերի անհրաժեշտ պայմանները: /2 միավոր/  
Տարբերակ 6.

1. Խնդիր: Ուսանողական թաղամասում գտնվող սրճարանում գաթայի հատը 60 դրամ է. օրական պահանջարկը՝ 500 գափա: Եթե գաթայի գինը բարձրանա 80 դրամի, ապա պահանջարկը կդառնա օրական 750 գաթա: Սրճարանի հաստատումն ծախսը 3000 դրամ է, իսկ մեկ գաթայի թխման փոփոխումն ծախսը 40 դրամ է: Հայտնի է, որ գաթայի սպառման ֆունկցիան գծային է:

Ինչքա՞ն և ի՞նչ գնով պետք է թխել գաթա, որպեսզի սրճարանի շահույթը լինի առավելագույնը: / 2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{ext} \\ x_1^2 - 3x_2 &\leq 3 \\ 8x_1 - 8x_2 &\leq -1 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: / 3 միավոր /

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \rightarrow \text{ext} \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5: \end{aligned}$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: / 2 միավոր /

$$\begin{aligned} f(x) &= -11x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 + x_3 + 27 \rightarrow \min \\ -7x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad Z &= (0, 1, 2, 3, 0): \end{aligned}$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $\varepsilon=0.0$ ):

$$\begin{aligned} / 2 \text{ միավոր} / \quad x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_2 + 2x_1x_2 &\rightarrow \min \\ x_0 &= (1, -1): \end{aligned}$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դինամիկ ծրագրման եղանակով:

(☛[1], բաժին VII, 3 միավոր )

| Տարբերակ | I ձեռն. |       | II ձեռն. |       | III ձեռն. |       |
|----------|---------|-------|----------|-------|-----------|-------|
| K=5      | $C_1$   | $R_1$ | $C_2$    | $R_2$ | $C_3$     | $R_3$ |
| 1        | 0       | 0     | 0        | 0     | 0         | 0     |
| 2        | 2       | 3     | 1        | 2     | 2         | 4     |
| 3        | 3       | 4     | 2        | 3.5   | 3         | 5     |
| 4        |         |       | 3        | 4     |           |       |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 & 8 \\ -5 & 8 & 4 & 5 \\ -6 & 7 & -6 & 1 \\ -8 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ, գերակայող տող և սյունակ
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար զցային ծրագրման խնդիրները.
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը: / 4 միավոր /

8. Ապացուցել Կոմ-Թակերի թեորեմի բավարար պայմանը: /2 միավոր /  
Տարբերակ 7.

1. Խնդիր: «Լիություն» ընկերության շուկայի հետազոտման բաժինը արձանագրել է, որ եթե ձեռնարկությունը նոր թողարկվող արտադրանքը վաճառի մեկ միավորը 300 պղծով, ապա մեկ ամսվա ընթացքում կվաճառվի 600 միավոր արտադրանք, իսկ եթե վաճառի 200 պղծով, ապա նույն ժամկետում կվաճառի 1000 միավոր: Գլխավոր հաշվապահի ծառայությունը հաշվարկել է մեկ միավոր արտադրանքի փոփոխում ծախսերը՝ 100 պղծ և մեկ ամսվա հաստատում՝ 500 պղծ: Պահանջվում է.

ա) Դուրս բերել համապատասխան բանաձևերն ընդհանուր ծախսերի, հասույթի և շահույթի համար,

բ) Գտնել, թե ինչպիսի՞ն պլանի լինեն վաճառքի քանակը և գինը, որպեսզի ընկերությունը գտնվի անկորուստ կետում՝ ամսական շահույթը լինի հավասար զրոյի: /2 միավոր/

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \text{ext} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0: \end{aligned}$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: /3 միավոր/

$$\begin{aligned} Z &= x_1^2 + 2x_2 + 3x_1x_2 \rightarrow \text{ext} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 &= 8: \end{aligned}$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: /2 միավոր/

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x_1 - 2x_2^2 - 2x_2 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq 10, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad Z = (1, 4, 3, 0, 1): \end{aligned}$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $x = (1, 1)$ ,  $\varepsilon = 0.0$ ): /2 միավոր/

$$2x_1 - 5x_2^2 + x_2 - x_1x_2 \rightarrow \max,$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դիմամիկ ծրագրման եղանակով  
(☛ [1], բաժին VII): / 3 միավոր /

| Տարբերակ | I ձեռն.        |                | II ձեռն.       |                | III ձեռն.      |                |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| K=5      | C <sub>1</sub> | R <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> | R <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> | R <sub>3</sub> |
| 1        | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              |
| 2        | 1              | 2              | 2              | 4              | 1              | 3              |
| 3        | 2              | 4              | 3              | 5              | 3              | 6              |
| 4        | -              | -              | 4              | 7              | -              | -              |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 1 & 8 \\ -5 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -6 & 1 \\ -8 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար

- գտնել թամբակետ, գերակայող տող 7 սյունակ
  - գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար գցային ծրագրման խնդիրները.
  - ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
  - լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: /4միավոր/
8. Լագրանժի ֆունկցիան և գծային ծրագրման երկակի խնդիրները:

Տարբերակ 8.

1. Խնդիր: Ձեռնարկության 300 միավոր արտադրանքի խմբաքանակը արժե  $y$  պղծ: Շուկան ամսական սպառում է  $x$  թվով խմբաքանակ: Հայտնի է  $y$ -ի և  $x$ -ի միջև եղած ֆունկցիոնալ կապը՝

$$y = -40x + 4000:$$

Ձեռնարկության ֆինանսական կառավարիչին անհրաժեշտ է իմանալ, թե արտադրանքի ինչպիսի քանակության դեպքում ձեռնարկությունը կունենա նվազագույն ամսական հատույթ: /2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: /2 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext} \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 &\leq 16 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0: \end{aligned}$$

3. Լուծել հետևյալ դասական խնդիրը: /3 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 \rightarrow \text{ext} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 12: \end{aligned}$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: / 2 միավոր /

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3 + 3x_3 + 8 \rightarrow \max \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, Z &= (1, 4, 3, 1, 1): \end{aligned}$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $\varepsilon = 0.01$ ):  
/ 2 միավոր /

$$-5x_1^4 - x_2^2 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$x_0 = (0, 1):$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դինամիկ ծրագրման եղանակով:  
(☛ [1], բաժին VII, 3 միավոր)

| Տարբերակ | I ձեռն.        |                | II ձեռն.       |                | III ձեռն.      |                |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| K=5      | C <sub>1</sub> | R <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> | R <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> | R <sub>3</sub> |
| 1        | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              |
| 2        | 2              | 3              | 1              | 2              | 1              | 2              |
| 3        | 3              | 5              | 3              | 5              | 3              | 5              |
| 4        | -              | -              | -              | -              | 4              | 7              |

- 7 Տրված  $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել քամբակետ, գերակայող տող և սյունակ
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար զգային ծրագրման խնդիրները
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը գծապատկերի միջոցով: /4 միավոր/

8. Լազրամժի բազմապատիկների մեկնաբանումը: /2 միավոր /

Տարբերակ 9.

Խնդիր 1. Ինչ-որ ապրանքի արտադրության համար կատարված ընդհանուր ծախսը և ստացված հասույթը բավարարում են հետևյալ բանաձևերին.

$$TC = 250q + 1000 \text{ (պղմ),}$$

$$TR = 600q - 3q^2 \text{ (պղմ),}$$

որտեղ TC-ն ընդհանուր ծախսն է, TR-ը՝ հասույթը, q-ն՝ թողարկված և վաճառված ապրանքի քանակը: Պահանջվում է գտնել q-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում ստացվում է առավելագույն հասույթ և առավելագույն շահույթ: / 2 միավոր /

1. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր /

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{ext}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2$$

2. Լուծել դասական խնդիրը: / 3 միավոր /

$$Z = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow \text{ext}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10:$$

3. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: /2 միավոր /

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \quad Z = (1, 2, 4): \end{aligned}$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $\varepsilon=0.01$ ): / 2 միավոր /

$$\begin{aligned} 3x_1^4 + 2x_2^2 + x_1^2 + 2x_2 &\rightarrow \min \\ x_0 &= (0, 1): \end{aligned}$$

6. Լուծել ներդրումների խնդիրը դինամիկ ծրագրման եղանակով:  
(☛ [1], բաժին VII, 3 միավոր)

| Տարբերակ | I ձեռն. |       | II ձեռն. |       | III ձեռն. |       |
|----------|---------|-------|----------|-------|-----------|-------|
| (K=5)    | $C_1$   | $R_1$ | $C_2$    | $R_2$ | $C_3$     | $R_3$ |
| 1        | 0       | 0     | 0        | 0     | 0         | 0     |
| 2        | 1       | 2     | 2        | 4     | 1         | 3     |
| 3        | 2       | 4     | 3        | 5     | 3         | 6     |
| 4        | -       | -     | 4        | 6     | -         | -     |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ գերակայող տող և սյունակ
- գրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար գցային ծրագրման խնդիրները.
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը: / 4 միավոր /

8. Ապացուցել  $\max f(x), x \geq 0$  խնդրի լուծման անհրաժեշտ պայմանները: /2/ Տարբերակ 10.

1. Խնդիր: Պաղպաղակի պահանջարկի ֆունկցիան է  $p = (300 - x)$  պղմ, որտեղ  $p$ -ն մեկ պաղպաղակի գինն է, իսկ  $x$ -ը վաճառված քանակը: Ինչքա՞ն և ի՞նչ գնով պետք է պաղպաղակ վաճառել, որպեսզի հասույթը լինի առավելագույնը: / 2 միավոր /

2. Լուծել գծապատկերի միջոցով: / 2 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{ext} \\ 4x_1^2 - x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

3. Լուծել դասական խնդիրը: / 3 միավոր /

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{ext} \\ x_1 + x_2^2 + 2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

4. Ստուգել տրված  $Z$  կետի թամբակետ լինելը: / 2 միավոր /

$$f(x) = x_1^2 + x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, Z = (1, 1, 2, 0, 1):$$

5. Լուծել գրադիենտի եղանակով (կատարել երկու քայլ, վերցնելով  $x_0 = (1, 1)$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ): / 2 միավոր /

$$-2x_1^2 - x_2^2 + 8x_2 + 6x_3 - 25 \rightarrow \max$$

6. Կառուցել ցանցը և գտնել կառճագույն ուղին: / 3 միավոր /

| (i,j)    | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (2,5) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (4,6) | (4,7) |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $l_{ij}$ | 4     | 7     | 3     | 5     | 2     | 5     | 4     | 8     | 7     |

| (i,j)    | (5,8) | (5,10) | (6,8) | (6,9) | (7,9) | (7,10) | (8,11) | (9,11) | (10,11) |
|----------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| $l_{ij}$ | 5     | 4      | 3     | 8     | 1     | 5      | 4      | 2      | 5       |

7. Տրված  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  մատրիցով խաղի համար՝

- գտնել թամբակետ գերակայող տող և սյունակ
- զրել 1-ին և 2-րդ խաղացողի համար գցային ծրագրման խնդիրները.
- ցույց տալ, որ դրանք երկակի խնդիրներ են
- լուծել տրված մատրիցային խաղը: / 4 միավոր /

8. Ապացուցել թամբակետի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները: / 2 միավոր /

**Պատասխանել Այժ կամ Ոչ, հիմնավորել պատասխանը**

Ոչ գծային ծրագրման խնդիրն է՝  
գտնել՝

$$z = f(x) \rightarrow \max$$

հետևյալ սահմանափակումների առկայությամբ՝

$$h_i(x) = g_i(x) - b_i \leq 0, i=1, 2, \dots, m,$$

$$x \geq 0:$$

որտեղ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

Ոչ գծային ծրագրման խնդիրի Լագրանժի ֆունկցիան է՝

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x):$$

## Նշանակումներ.

$f(x)$  – ոչ գծային ծրագրման խնդրի նպատակային ֆունկցիա է  
 $h_i(x) = g_i(x) - b_i$  – սահմանափակումների համակարգը բնութագրող  $i$ -րդ  
 $i=1,2,\dots,m$  ֆունկցիան է,

$L(x, \lambda)$  – դիտարկվող խնդրի Լագրանժի ֆունկցիան է,

$b_i$  – սահմանափակումների համակարգի աջ մասի  $i$ - րդ գործակիցը

$x^*$  – ոչ գծային ծրագրման խնդրի լավագույն լուծումն է

$\lambda_i$  – Լագրանժի ֆունկցիայի  $i$  – րդ բազմապատիկը

$\lambda_i^*$  – Լագրանժի ֆունկցիայի  $i$  – րդ բազմապատիկը լավագույն արժեքը:

1. Եթե որևէ կետում ֆունկցիայի գրադիենտը հավասար է զրոյի, ապա այդ կետում ֆունկցիան ընդունում է իր առավելագույն կամ նվազագույն արժեքը:
2. Գծային ֆունկցիան և ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիա է:
3. Եթե ստացիոնար կետում ֆունկցիայի Հեսի մատրիցը դրական (բացասական) որոշված է, ապա այդ կետը ֆունկցիայի համար մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է:
4. Եթե ստացիոնար կետում ֆունկցիայի Հեսի մատրիցը անորոշ է, ապա այդ կետում ֆունկցիան ունի թամբակետ:
5. Ուռուցիկ ֆունկցիաների գումարը ուռուցիկ ֆունկցիա է:
6. Գոգավոր ֆունկցիայից եթե հանենք ուռուցիկ ֆունկցիա կստանանք գոգավոր ֆունկցիա:
7. Անկախ նրանից, թե սահմանափակումների համակարգում ընդգրկված ֆունկցիաները կարող են լինել ուռուցիկ (գոգավոր) թե ոչ, ոչ գծային ծրագրման խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը կարող է լինել ուռուցիկ:
8. Ոչ գծային ծրագրման խնդրի լուծումը պետք է լինի որոշման տիրույթի՝
  - ա) եզրային կետ,
  - բ) ներքին կետ,
  - գ) ծայրակետ:
9. Լագրանժի բազմապատիկների եղանակով կարելի է լուծել՝
  - ա) ոչ ԳՃԽ-ը,
  - բ) ուռուցիկ ծրագրման խնդիրը,
  - գ) մաքեմատիկական ծրագրման դասական խնդիրը, եթե խնդրի նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումների համակարգը բնութագրող ֆունկցիաները դիֆերենցելի են:
10.  $f_{bi} = L'_{bi} = \lambda_i^*$  պայմանը ճշմարիտ է՝
  - ա) մաքեմատիկական ծրագրման դասական խնդրի համար,

բ) ոչ ԳԾԽ-ի համար,

գ) ուռուցիկ ծրագրման խնդրի համար:

11. Եթե նպատակային ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի  $x_0$  կետում, ապա  $x_0$ -ն՝

ա) ոչ ԳԾԽ-ի լուծումն է,

բ) մաքսիմալիկական ծրագրման դասական խնդրի լուծումն է,

գ) ուռուցիկ ծրագրման խնդրի լուծումն է:

12. Եթե  $x^*$  կետը բավարարում է Կուն-Թակերի պայմաններին, բայց չի բավարարում կանոնավորության պայմանին, ապա

ա)  $x^*$  ոչ ԳԾԽ-ի լուծումն է,

բ) դիտարկվող խնդրի թամբի կետ է,

գ) դիտարկվող խնդրի նպատակային ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է:



### III. ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՈՒՆՍԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Խնդիր 1: Հացի փուռը վաճառքի համար թխում է լավաշ: Մեկ լավաշի ինքնարժեքը կազմում է 20 դրամ, և վաճառվում է 30 դրամով: Աղյուսակում բերված են վերջին ամսվա ընթացքում լավաշի պահանջարկի տվյալները:

| Օրական պահանջարկը, (հազար հատ) | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|--------------------------------|----|----|----|----|----|
| Օրերի թիվը                     | 2  | 3  | 10 | 10 | 5  |

Եթե լավաշը չի վաճառվել, ապա փռան վնասը մեկ լավաշի համար կազմում է 15 դրամ: Օգտագործելով որոշումների ընդունման հետևյալ չափանիշները՝

- եկամուտների մաքսիմալիզացիա,
- եկամուտների մաքսիմիզացիա,
- հնարավոր կորուստների մինիմալիզացիա,
- Գուրվիցի փոխզույգումները և Սկիջի ափսոսանքները,

որոշել, թե փուռը օրական քանի լավաշ պետք է թխի:

Խնդիր 2: Թատրոնի վարչությունը պետք է որոշի թաթերաշրջանի ընթացքում տպագրվող ծալքաթերթերի քանակը: Տպագրության ընդհանուր արժեքը կազմում է 200000 դրամ, յուրաքանչյուր ծալքաթերթի համար՝ 100 դրամ: Մեկ ծալքաթերթի վաճառքի գինը 300 դրամ է: Ծալքաթերթում գետեղված գովազդերից ստացվող եկամուտը հավասար է 400000 դրամի: Նախորդ տարիների փորձից հայտնի է թատրոնի ներկայացումների հաճախելիությունը:

| Հաճախելիություն  | 4000 | 45000 | 5000 | 5500 | 6000 |
|------------------|------|-------|------|------|------|
| Հավանականություն | 0.1  | 0.3   | 0.3  | 0.2  | 0.1  |

Սպասվում է, որ հանդիսատեսների 40%-ը ծալքաթերթ կգնի:

1) Օգտագործելով որոշումների ընդունման տարբեր կանոններ և չափանիշներ, որոշել թատրոնի վարչության կողմից պատվիրվելիք ծալքաթերթի քանակը:

2) Ենթադրենք՝ գովազդից ստացվող եկամուտները կազմում են 500000 դրամ: Հանդիսատեսների թիվը 5250-ից ավելի է, իսկ ծալքաթերթերի պահանջարկը ամբողջությամբ բավարարվում է:

3) Այս իրավիճակը ինչպե՞ս կազդի առաջին կետում ընդունված որոշումների վրա:

4) Ենթադրենք՝ թատրոնի հաճախելիության յուրաքանչյուր տարբերակի հավանականությունը հավասար է 0.2-ի: Դա ինչպե՞ս կազդի սպասվող

եկամուտների մաքսիմացման կանոնի օգնությամբ ընդունված որոշման վրա: Հետագոտել ընդունված որոշման զգայունությունը:

Խնդիր 3: «Միս» ընկերությունը թողարկում է տեսակավոր գարեջուր, որն առաքվում է 20 լիտրանոց տակաոներով: Գարեջուրը պատրաստվում է հատուկ տեխնոլոգիաներով և պատվիրատուներին է առաքվում յուրաքանչյուր երկուշաբթի: Արտադրության մեջ օգտագործվող բաղադրիչների անորակության դեպքում խտտանվում է շաբաթվա ընթացքում արտադրված ամբողջ խմբաքանակը: Մեկ լիտր գարեջրի վաճառքի գինը 150 դրամ է, իսկ արտադրության փոփոխական ծախսերը կազմում են 80 դրամ: Քանի որ մատակարարումների ծախսերը կախող է հանգեցնել գնորդների ուղղ մասի կորստի, ապա, հաշվի առնելով շուկայական մրցակցությունը, «Միսը» ստիպված է 1լ. գարեջրի գինը իջեցնել 30 դրամով: Վերջին 50 շաբաթների ընթացքում գարեջրի պահանջարկը եղել է կայուն և կազմել է՝

| Գարեջրի պահանջարկը | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  |
|--------------------|---|----|----|----|----|
| Շաբաթների թիվը     | 5 | 10 | 15 | 10 | 10 |

ա) Օգտագործելով որոշումների ընդունման տարբեր կանոններ և չափանիշներ, որոշել, թե նման իրավիճակում ինչ պետք է ձեռնարկի «Միս» ընկերությունը:

բ) Հետագոտեք ընդունված որոշումների զգայունությունը: Արդեն ընդունված որոշումն արդյոք կփոխվի<sup>6</sup>, եթե 1լ. գարեջրի վաճառքի գինը հասնի 175 դրամի:

Խնդիր 4: Գրքի սպասվող պահանջարկի գնահատման համար հրատարակությունը դիմել է շուկայավարման բաժնին: Վերջինիս հետազոտության արդյունքները բերված են աղյուսակում:

| Առաջիկա 3 տարում գրքի պահանջարկը (հաա) | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|----------------------------------------|------|------|------|------|
| Հավանականություն                       | 0.1  | 0.5  | 0.2  | 0.2  |

Գրքի հրատարակման հիմնական ծախսերը և շահույթից կատարվող մուծումները կազմում են 900 դրամ/գիրք: Եթե գիրքը չի վաճառվում, ապա հրատարակչության ծախսերը կազմում են 400 դրամ/գիրք: Եթե հրատարակիչը չի բավարարում պահանջարկը, ապա դրանից առաջացող վնասը՝ հրատարակչության վարկի և ապագա պահանջարկի պահպանման հետ կապված ծախսերը, կազմում են 100 դրամ/գիրք:

Օգտագործելով որոշումների ընդունման տարբեր կանոններ և չափանիշներ, որոշել երեք տարվա ընթացքում հրատարակչության կողմից հրատարակելիք գրքերի թիվը:

Խնդիր 5: Համակարգիչների «Նոյ» ընկերության շուկայավարման բաժինը իր ղեկավարությանը ներկայացրել է գների երեք տարբերակների

դեպքում ծրագրերի փաթեթների սպասվելիք սպառման մասին հետևյալ տվյալները:

| Մեկ միավորի հնարավոր գինը (\$)                             | 8.00  | 8.60  | 8.80  |
|------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|
| Տրված գնի դեպքում վաճառքի ենթադրվող ծավալները (փաթեթ/տարի) |       |       |       |
| հնարավորից լավագույնը                                      | 16000 | 14000 | 12500 |
| Ամենահավանականը                                            | 14000 | 12500 | 12000 |
| Հնարավորից վատագույնը                                      | 10000 | 8000  | 6000  |

Ընկերության տարեկան հաստատում ծախսերը կազմում են 400000 դրամ, իսկ մեկ փաթեթի համար փոփոխում ծախսերը՝ 4000 դրամ:

Որոշել ծրագրերի փաթեթների համար լավագույն գինը:

Խնդիր 6: Ամռանը զբոսաշրջիկների թիվը Սևանա լճի հանգստյան գոտում կտրուկ աճում է: Հաշվի առնելով պահանջարկը, «Ախթամար» ընկերությունը ցանկանում է զբոսաշրջիկների սպասարկման համար հանգստյան գոտում կառուցել բազմահարկ հյուրանոց: Ընկերությունն ունի մախազձի իրականացման համար անհրաժեշտ գումարներ և պետք է որոշի կառուցվող հյուրանոցի համարների քանակը: Հարևան հյուրանոցների և զբոսաշրջիկության այլ ընկերությունների հարցումներից «Ախթամարի» տնօրինությունը պարզել է հյուրանոցի համարների տարեկան միջին պահանջարկի քվերը՝  $R = (0; 10; 20; 30; 40; 50)$ :

Ֆինանսական վերլուծությունից հետո տնօրինությունը որոշում է քըննարկման դնել կառուցվող հյուրանոցի համարների քանակի հետևյալ տարբերակները.  $S = (20; 30; 40; 50)$ :  $R$ -ի և  $S$ -ի տարբեր արժեքների դեպքում ֆիրմայի տարեկան եկամուտների արժեքները բերված են աղյուսակում:

|          | $R = 0$ | $R = 10$ | $R = 20$ | $R = 30$ | $R = 40$ | $R = 50$ |
|----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $S = 20$ | -121    | 62       | 245      | 245      | 245      | 245      |
| $S = 30$ | -168    | 14       | 197      | 380      | 380      | 380      |
| $S = 40$ | -216    | -33      | 149      | 332      | 515      | 515      |
| $S = 50$ | -264    | -81      | 101      | 284      | 467      | 650      |

Օգտագործելով որոշումների ընդունման տարբեր կանոններ և չափանիշներ՝ որոշել կառուցվող հյուրանոցի համարների լավագույն քանակը:

Հյուրանոցի համարների պահանջարկը և հավանականությունները բերված են աղյուսակում:

| Պահանջարկ        | 0    | 10   | 20  | 30  | 40  | 50  |
|------------------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| Հավանականություն | 0.01 | 0.09 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

Անհրաժեշտ է որոշել ամենահավանական եկամուտի և միջին եկամուտի չափանիշներով կառուցվող հյուրանոցի համարների լավագույն քանակը:

Խնդիր 7: 4-րդ խնդրում հրատարակչության շուկայավարման և ֆինանսների գծերով փոխտնօրենները զրքի հրատարակումից ստացվող ընդհանուր

եկամուտների օգտակարության վերաբերյալ ունեն հետևյալ գնահատումները՝

| Եկամուտները (հարյուր հազ. դր.) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50  |
|--------------------------------|---|----|----|----|----|-----|
| Օգտակարությունն ըստ՝           |   |    |    |    |    |     |
| ա) շուկայավարման փոխտնօրենի    | 0 | 10 | 20 | 35 | 55 | 100 |
| բ) ֆինանսական փոխտնօրենի       | 0 | 40 | 70 | 85 | 95 | 100 |

1) Կառուցել օգտակարության գծապատկերներն ըստ երկու փոխտնօրենների և որոշել ռիսկի նկատմամբ նրանց նախապատվությունը:

2) Ըստ յուրաքանչյուր փոխտնօրենի որոշել եկամուտների օգտակարությունը:

Օգտվելով սպասվող օգտակարության մաքսիմացման չափանիշից, վերանայեք գրքի տպաքանակը:

Ինչպիսի՞ն կլինի փոխտնօրեններից յուրաքանչյուրի առաջարկը:

Խնդիր 8: «Նոյյան տապան» հրատարակչությունը պատրաստվում է հաշվապահների վերապատրաստման դասընթացների համար հրատարակել նոր ձեռնարկ: Ըստ շուկայավարման բաժնի տվյալների՝ ձեռնարկի պահանջարկը միջին հաշվով կկազմի 10000 օրինակ: 50% հավանականությամբ կարելի է ասել, որ ձեռնարկի վաճառքի քանակը կկազմի 8000-ից 12000 օրինակ:

Մեկ ձեռնարկի վաճառքի գինը նախատեսվում է 1000 դրամ, որից հեղինակին տրվում է եկամտի 10%-ը, իսկ դասագրքի հրատարակման և գովազդի գումարը կազմում է 2.5 մլն. դրամ:

Տպագրական սարքերի օգտագործման դեպքում մեկ գրքի հրատարակման փոփոխում ծախսերը կազմում են 400 դրամ: Սակայն հրատարակչությունը կարող է մակ. 1.4 մլն. դրամով վարձակալել հատուկ սարքեր, որի շնորհիվ հնարավոր կլինի մեկ գրքի հրատարակման ծախսերն իջեցնել 250 դրամի: Պահանջվում է.

ա) Ցույց տալ, որ գրքի վաճառվող քանակի կանոնական շեղումը հավասար է մոտ 3000-ի:

բ) Օգտագործելով  $\sigma = 3000$ , որոշել հրատարակչության վնասներ չկրելու հավանականությունը, եթե՝

1) օգտագործվեն տպագրման սեփական սարքերը;

2) վարձակալվեն հատուկ սարքեր;

գ) Համեմատելով սպասվող եկամուտները՝ հիմնավորել հատուկ սարքերի վարձակալելու շահավետությունը:

Խնդիր 9: I մլն. դրամ ներդրելու տարբերակների քննարկման խնդրանքով ներդրողը դիմել է «Նեցուկ» խորհրդատվական ձեռնարկությանը: Շուկայավարման ուսումնասիրումից հետո սպասարկյալին առաջարկվել են ներդրման երկու՝ Ա և Բ տարբերակներ, որոնցից՝ Ա-ն ռիսկավոր է, իսկ Բ-ն՝ ռիսկազերծ: Ա տարբերակը նախատեսում է հնարավոր եկամտի տարբե-

րակներ՝ 8%, 10%, 12%, սակայն ներդրման ոլորտների յուրահատկությունների պատճառով առաջին և երկրորդ տարիների եկամուտների միջև գոյություն ունի որոշակի հարաբերակցություն, որի գործակիցները բերված է աղյուսակում:

| Առաջին տարի | Երկրորդ տարի |     |     |
|-------------|--------------|-----|-----|
|             | 8%           | 10% | 12% |
| 8%          | 0.6          | 0.3 | 0.1 |
| 10%         | 0.2          | 0.5 | 0.3 |
| 12%         | 0.1          | 0.2 | 0.7 |

Առաջին տարվա բոլոր երեք տարբերակները հավասարահավանական են: Բ տարբերակը նախատեսում է տարեկան 9.5% եկամուտ: Հաշվարկների ժամանակ կարելի է հարկերը անտեսել: Անկախ ընտրված տարբերակից, ներդրումը կատարվում է երկու տարով: Պահանջվում է.

ա) Կառուցել խնդրի որոշումների ծառը;

բ) Հիմնվելով սպասվող եկամուտների գումարային արժեքի վրա, ներդրողին առաջարկել լավագույն տարբերակը;

գ) Ինչպիսի՞ հավանականությամբ Բ տարբերակի շահույթը կլինի ավելի մեծ քան Ա-ինը:

Խնդիր 10: Ներդրման փաթեթը կազմված է երեք՝ A, B և C արժեթղթերից, որոնց միջին եկամտաբերությունները և կովարիացիայի մատրիցը համապատասխանորեն հավասար են՝

$$r_A=12\%, r_B=15\%, r_C=10\%, \text{Cov} = \begin{bmatrix} 459 & -211 & 112 \\ -211 & 312 & 215 \\ 112 & 215 & 179 \end{bmatrix}$$

Պահանջվում է.

ա) Հաշվել փաթեթի  $r_w$  միջին եկամտաբերությունը և  $\sigma_w$  ռիսկը, եթե

$$x_A = 0.5, x_B = 0.3, x_C = 0.2:$$

բ) Ինչի՞ է հավասար փաթեթի ռիսկը, եթե՝

$$x_A = 0.5, x_C = 0.5:$$

գ) Ինչի՞ են հավասար փաթեթի ռիսկը և միջին եկամտաբերությունը, եթե՝

$$x_A = x_B = x_C = y_3:$$

Խնդիր 11: Տրված են I և II ռիսկավոր արժեթղթեր, որոնց միջին եկամտաբերությունները և կովարիացիայի մատրիցը հավասար են համապատասխանաբար  $r_1=10\%$ -ի,  $r_2=5\%$ -ի և  $r_2=5\%$ -ի և

$$\text{Cov} = \begin{bmatrix} 50 & 5 \\ 5 & 40 \end{bmatrix}:$$

Պահանջվում է.

ա) Կառուցել այս արժեքներից բաղկացած թույլատրելի և արդյունավետ բազմությունները;

բ) Ներդրողի համար, որի անտաքերության կորը տրվում է  $r_{\text{ա}} = \sigma_{\text{ա}} 0.25$  պոմ, գտնել լավագույն փաթեթի եկամտաբերությունը, ռիսկը և կշռային վեկտորը;

գ) Կշռային վեկտորի աղյուսակում բերված արժեքների դեպքում հաշվել փաթեթներին  $r_{\text{ա}}$  եկամտաբերությունը և  $\sigma_{\text{ա}}$  ռիսկը:

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_1$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
| $x_2$ | 0.9 | 0.7 | 0.5 | 0.7 | 0.1 |

Խնդիր 12: Ենթադրենք՝ դուք ունեք 1 մլն դրամի արժեքուղթ և պետք է որոշում կայացնեք՝ պահել, թե վաճառել: Եթե վաճառել, ապա՝ բոլորը, թե՞ մի մասը, (ո՞ր մասը): Միգուցե գնել ևս 500 հազար դրամի նոր արժեքթեր:

Ինչպիսի՞ որոշում դուք կընդունեք, որպեսզի առավելագույնի հասցնեք ձեր շահույթը, եթե հայտնի է, որ արժեքթերի շուկայական գինը 0.6 հավանականությամբ աճելու է, իսկ 0.4 հավանականությամբ նվազելու է:

Խնդիր 13: Չեռնարկության շուկայի հետազոտման բաժնի վարիչը քննարկում է նոր արտադրանքի վաճառահամման հնարավորությունները:

Նա պետք է որոշի.

ա) Արտադրանքի վաճառքը երաշխավորել առանց շուկայի հետազոտման;

բ) Նախապես հետազոտել շուկան, հետո կայացնել որոշումը;

գ) Հրաժարվել նոր արտադրանքի թողարկման գաղափարից:

Շուկայի հետազոտման ծախսերը կկազմեն 1 մլն. դրամ, վաճառահամման ծախսերը՝ մոտ 2 մլն. դրամ: Արտադրությունից հրաժարվելու դեպքում կխնայվի մոտ 2.5 մլն. դրամ: Աղյուսակում բերված են վաճառքի ծավալի հավանականություններին վերաբերող տվյալներ:

| Վաճառքի<br>ծավալը | Շուկան<br>չի հետազոտվել | Դրական<br>պատասխան | Բացասական<br>պատասխան |
|-------------------|-------------------------|--------------------|-----------------------|
| Բարձր             | 0.2                     | 0.4                | 0.1                   |
| Միջին             | 0.4                     | 0.4                | 0.1                   |
| Ցածր              | 0.4                     | 0.2                | 0.8                   |

Բաժնի վարիչը համարում է, որ բարձր, միջին և ցածր ծավալի վաճառքի դեպքում ձեռնարկության համախառն եկամուտը կլինի համապատասխանաբար 10, 5 և 2 մլն. դրամ:

Ինչպե՞ս վարվի բաժնի վարիչը:

Խնդիր 14: Վաճառականը իր խանութի հաճախորդների վարքն ուսումնասիրելիս համգել է այն եզրակացությանը, որ նրանց 60%-ը գնում է տնային պայմաններում պատրաստված խմորեղեն, 20%-ը՝ "Համով սնունդ" ընկերության արտադրանք, իսկ մնացած հաճախորդները՝ արտասահմանից ներկրված անուշեղեն: Հաճախորդների ընդհանուր թվի 40%-ը հաջորդ շա-

բաթ նորից գալիս է գնումներ կատարելու, և նրանց 10%-ը բողոքում է տնային պայմաններում պատրաստված խմորեղենի, 5%-ը՝ "Համով սնունդ" ընկերության արտադրանքի և 20%-ը՝ արտասահմայան անուշեղենի որակից:

Կառուցել հավանականությունների ծառը և հաշվել հավանականությունը այն բանի, որ՝

ա) Հաճախորդը կգնի տնային պայմաններում պատրաստված խմորեղեն և հաջորդ ամիս կգա բողոքելու;

բ) Հաճախորդը կգնի "Համով սնունդ" ընկերության արտադրանքը և կհրաժարվի հետագա գնումներից;

գ) Հաճախորդը կգա միայն բողոքելու համար:

Խնդիր 15: Կազմակերպության տնօրինությունը քննարկում է նոր սարք գնելու հարցը: Ֆինանսական գծով փոխտնօրենն առաջարկում է 3 տարբերակ՝

ա) Գնել նոր սարք 10 մլն. դրամ արժողությամբ;

բ) Նորոգել հին սարքը ծախսելով՝ 4մլն. դրամ;

գ) Շարունակել շահագործել հին սարքը:

Նոր սարքը շահագործելու դեպքում սպասվելիք եկամուտը գնահատվում է մոտ 20 մլն. դրամ, սակայն վտանգ կա, որ անհրաժեշտ կլինի նորոգել, և դա կպահանջի ևս 2 մլն. դրամ: Նոր սարքի նորոգման հավանականությունը 0.25 է: Եթե նորոգվի հին սարքը, ապա 0.15 հավանականությամբ կպահանջվի 1 մլն. դրամ արժողությամբ լրացուցիչ աշխատանք: Հին սարքի նորոգումից հետո սպասվելիք եկամուտը գնահատվում է 15 մլն. դրամ: Եթե շարունակեն շահագործել հին սարքը, ապա կազմակերպության եկամուտը կլինի ընդամենը 6 մլն. դրամ:

Ինչպիսի՞ որոշում պետք է ընդունի տնօրինությունը:

Խնդիր 16: Փաստաթղթեր լրացնելիս սովորաբար սխալներ են լինում տվյալներն անփութորեն մուտքագրվելու պատճառով: Հայտնի է, որ 100 փաստաթղթից 6-ը այդպիսին է:

Պատահականորեն վերցված 3 փաստաթղթերի համար կազմել հավանականությունների ծառը, բոլոր հնարավոր ելքերն ու դրանց հավանականությունները:

Խնդիր 17: ՍՊ ընկերության վարչությունը քննարկում է նոր արտադրանքի թողարկման հարցը: Նոր արտադրանքի վերաբերյալ անհրաժեշտ է կայացնել հետևյալ որոշումներից մեկը՝

ա) Սկսել արտադրանքի թողարկումն ու առաքումը շուկա;

բ) Կատարել շուկայի նախնական հետազոտում;

գ) Հրաժարվել արտադրանքի թողարկումից և փակել արտադրությունը:

Շուկայի հետազոտման համար անհրաժեշտ է ծախսել \$50000 համարժեք դրամ:

Սպառումը կազմակերպելու համար պետք է գնվի լրացուցիչ սարքավորում և կատարվի լրացուցիչ աշխատանք՝ \$100000 համարժեք դրամ ար-

ժեքով: Արտադրանք թողարկելուց հրաժարվելիս արտադրության տեխնոլոգիան վաճառելու դեպքում ընկերությունը կվաստակի \$250000 համարժեք դրամ:

Շուկայի հետազոտումը կարող է դրական կամ բացասական գնահատական տալ արտադրանքի թողարկման մասին: Արտադրանքի վաճառքի ծավալի հավանականությունների գնահատումները, կախված նրանից, թե շուկայի հետազոտում կատարվել է, թե ոչ, ստորև բերված են աղյուսակում

| Վաճառքի ծավալը<br>և հատույթը<br>(համարժեք դրամ) | Շուկան չի հետազոտվել | Դրական<br>պատասխան | Բացասական<br>պատասխան |
|-------------------------------------------------|----------------------|--------------------|-----------------------|
| Բարձր \$1000000                                 | 0.2                  | 0.3                | 0.1                   |
| Միջին \$ 500000                                 | 0.3                  | 0.5                | 0.1                   |
| Ցածր \$ 200000                                  | 0.5                  | 0.2                | 0.8                   |

Ինչպիսի որոշում պետք է կայացնի վարչությունը:

Խնդիր 18: Ձեռնարկատերը նոր արտադրանք թողարկելու նպատակով արտադրանքի որոշ քանակություն հանում է շուկա: Հետազոտման արդյունքները ստորև բերված են աղյուսակում:

| Վաճառք | Եկամուտ(մլն.դրամ) | Հավանականություն |
|--------|-------------------|------------------|
| Բարձր  | 2.4               | 0.3,             |
| Միջին  | 0.6               | 0.4              |
| Ցածր   | -0.48             | 0.3              |

Պահանջվում է.

ա) Կառուցել հավանականությունների ծառը

բ) Գտնել ձեռնարկատիրոջ լավագույն վարվելակերպը:



## IV ԾՐԱԳՐԵՐԻ ՊԼԱՆԱՎՈՐՈՒՄ ԵՎ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄ:

Խնդիր 1: "Բուրգ" սահմանափակ պատասխանատվությամբ ընկերությունը մշակում է շինարարական մախագիծ: Աղյուսակում բերված են մախագծի կազմման հիմնական աշխատանքները, դրանց անմիջապես մախորդող աշխատանքները և կատարման ժամկետները:

| Աշխատանք | Անմիջապես մախորդող աշխատանք | Ժամկետ (շաբաթ) |
|----------|-----------------------------|----------------|
| Ա        | -                           | 4              |
| Բ        | -                           | 6              |
| Գ        | Ա, Բ                        | 7              |
| Դ        | Գ                           | 3              |
| Ե        | Դ                           | 4              |
| Զ        | Ե                           | 5              |
| Է        | Զ, Ե                        | 3              |

Պահանջվում է.

ա) Նախագիծը նկարագրել ցանցային գրաֆի միջոցով:

բ) Որոշել կրիտիկական աշխատանքները և մախագծի կատարման ժամկետը:

գ) Հիմնվելով 1-ին կետի արդյունքների վրա՝ որոշել մախագծի իրականացման ընթացքի փոփոխությունները, պայմանով, որ D-ի կատարման ժամկետը երկարացվի չորս շաբաթով:

Խնդիր 2: Հաշվապահության կենտրոնն, իր աշխատանքներին զուգընթաց, կազմակերպում է հաշվապահության ուսուցման ամենամյա սեմինար պարապմունքներ: Ընթացիկ տարվա աշնանից կենտրոնը պատրաստում է հաջորդ տարվա ծրագիրը: Ծրագիրը պարունակում է մանրակրկիտ տեղեկություններ կենտրոնի աշխատակիցների և ուսումնական գործընթացի վերաբերյալ:

Ստորև տրված աղյուսակում բերված են ծրագրի աշխատանքները և դրանց անմիջապես մախորդող աշխատանքները: Ծրագիրը մշակվում է կենտրոնի որոշակի թվով աշխատակիցների կողմից, և յուրաքանչյուր աշխատանք կատարվելու է աղյուսակում նշված որոշակի ժամանակահատվածում: Հաշվապահության կենտրոնի վարչությունն աշխատում է շաբաթական 5 օր: Սակայն, կենտրոնի տնօրենը հնարավորություն ունի աշխատակազմի գեր ծանրաբեռնվածության դեպքում լրացուցիչ ընդունել որոշակի թվով ժամանակավոր աշխատողների՝ որպես օգնություն հիմնական աշխատակիցներին: Աղյուսակում նաև նշված են այդ պայմաններում կատարված աշխատանքների կրիտիկական ժամկետները, ինչպես նաև այդ աշ-

խատանքների հետ կապված լրացուցիչ ծախքերի համապատասխան արժեքները: Հաշվարկների պարզության համար ենթադրվում է, որ բոլոր աշխատանքները կատարվում են կամ նորմատիվ կամ կրիտիկական ժամկետներում:

| Աշխատանք                                               | Ամսիջապես<br>նախորդող<br>աշխատանք(օր) | Նորմատիվ<br>ժամկետ<br>(օր) | Կրիտիկական<br>ժամկետ(օր) | Լրացուցիչ<br>ծախսեր<br>(դրամ) |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| Պարապմունքների<br>անցկացման ժամկետներ                  | -                                     | 5                          | 5                        | -                             |
| Դասախոսների<br>ընտրություն և թեմաների<br>համաձայնեցում | Ա                                     | 20                         | 10                       | 50000                         |
| Գովազդային նյութերի<br>պատրաստում                      | -                                     | 15                         | 10                       | 75000                         |
| Հեռակա ուսանողների<br>ցուցակի նորոգում                 | -                                     | 15                         | 5                        | 100000                        |
| Հիմնական աշխատա-<br>կիցների ցուցակի<br>պատրաստում      | Դ                                     | 30                         | 25                       | 25000                         |
| Ծրագրի և ցուցակների<br>տպագրում                        | Բ, Գ, Ե                               | 10                         | 5                        | 25000                         |
| Տպագրված ծրագրի և<br>ցուցակների ճշտում                 | Զ                                     | 10                         | 5                        | 50000                         |
| Ծրագրի տպագրում և<br>դասավորում ըստ օրի -<br>նակների   | Է                                     | 15                         | 10                       | 37500                         |
| Աշխատակիցների<br>հասցեների ցուցակի<br>տպագրում         | Ե                                     | 5                          | 2                        | 25000                         |
| Ծրագրի առաքում                                         | Ը, Թ                                  | 5                          | 2                        | 25000                         |

Պահանջվում է.

ա) Տվյալ նախագիծը պատկերել ցանցային գրաֆի միջոցով;

բ) Որոշել ծրագրի պատրաստման և առաքման համար պահանջված ժամանակը, եթե ծրագիրը կատարվել է առանց լրացուցիչ օգնության:

գ) Ինչպե՞ս կփոխվի նախագծի կատարման ժամկետը, եթե գովազդի նյութեր պատրաստելու համար անհրաժեշտ ժամանակը տրված է սխալ, և այդ աշխատանքը իրականում տևում է 30 օր:

դ) Գտնել ծրագրի պատրաստման և առաքման համար պահանջվող նվազագույն ժամկետը:

Խնդիր 3: Սահմանափակ պատասխանատվությամբ ընկերությունը կատարում է՝ իր սպասարկյալից ստացած, որոշակի պատվեր:

Ստորև բերված են անհրաժեշտ տվյալները:

| Աշխատանք | Անմիջապես<br>նախորդող<br>աշխատանք | Ժամկետ (օր)      |                |                  | Սպասվելիք<br>աշխատանքի<br>արժեքը (դր.) |
|----------|-----------------------------------|------------------|----------------|------------------|----------------------------------------|
|          |                                   | լավատե-<br>սական | հավանա-<br>կան | հոռետե-<br>սական |                                        |
| Ա        | -                                 | 3                | 4              | 5                | 10000                                  |
| Բ        |                                   | 4                | 7              | 10               | 14000                                  |
| Գ        | -                                 | 4                | 5              | 6                | 20000                                  |

Նախագծի կատարման հետ կապված կողմնակի ծախսերը կազմում են օրական 300 դր.: Սպասարկյալի հետ կնքված պարտավորագրում նշված է, որ, եթե պատվերը 15 օրվա ընթացքում չկատարվի, ուշացվածյուրաքանչյուր օրվա համար տուգանքի գումարը կկազմի 1000 դր.:

Պահանջվում է

ա) Կառուցել ցանցային գրաֆ: Ինչպիսի՞ն է նախագծի կատարման սպասվելիք ժամկետը: Ինչպիսի՞ն է նախագծի կատարման արժեքը:

բ) Գրաֆի մեջ ո՞ր ուղին է կրիտիկական: Մեկնաբանել ոչ կրիտիկական ուղիների տևողությունները

գ) Ի՞նչպիսի հավանականությամբ նախագիծը կավարտվի առանց տուգանք վճարելու:

Խնդիր 4: “Լույս” ընկերությունը մտադիր է հիմնադրել հրատարակչական դուստր ձեռնարկություն: Անհրաժեշտ աշխատանքները, դրանց փոխադարձ կապն ու տևողությունը բերված են աղյուսակում:

| Աշխատանք | Անմիջապես նախորդող աշխատանք | Տևողություն,(շ-աթ) |
|----------|-----------------------------|--------------------|
| Ա        |                             | 3                  |
| Բ        | Ա                           | 4                  |
| Գ        | Ա                           | 2                  |
| Դ        | Ա                           | 6                  |
| Ե        | Բ                           | 3                  |
| Զ        | Դ                           | 2                  |
| Է        | Դ                           | 4                  |
| Ը        | Է                           | 7                  |
| Թ        | Գ, Ե, Զ                     | 5                  |
| Ժ        | Է, Թ                        | 3                  |

Պահանջվում է.

ա) Որոշել նախագծի կատարման սպասվելիք ժամկետը

բ) Ենթադրելով, որ սահմանված ժամկետներում յուրաքանչյուր աշխատանքի կատարման համար պահանջվում է 1 մարդ, որոշել նախագծի ճշտված սպասվելիք տևողությունը այն պայմանի դեպքում, որ տվյալ աշխատանքի կատարման համար ընկերությունն իր տրամադրության տակ ունի երկու մարդ, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է կատարել այդ աշխատանքը:

Խնդիր 5: “Նորույթ” ընկերության վարչությունը նոր ապրանքի արտադրությունը ճիշտ կազմակերպելու նպատակով մտադիր է իրագործելու այդ ապրանքի հատկանիշների հետազոտման նախագիծ: Ստորև բերված են նախագծի իրականացման համար պահանջվող աշխատանքներին վերաբերող տվյալները:

| Աշխատանք | Նկարագրում                 | Անմիջապես<br>նախորդող<br>աշխատանք | Կատարման<br>Ժամկետ<br>(շաբաթ) | Անձնակազմի քանակը |
|----------|----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------|
| 1        | 2                          | 3                                 | 4                             | 5                 |
| Ա        | Նախնական մշակումներ        |                                   | 5                             | 3                 |
| Բ        | Շուկայի ուսումնասիրում     |                                   | 3                             | 2                 |
| Գ        | Տեխ. չափորոշիչների մշակում | Ա                                 | 2                             | 2                 |
| Դ        | Ապրանքի ձևավորում          | Ա                                 | 5                             | 5                 |
| Ե        | Շուկայական հենքի ստեղծում  | Ա                                 | 3                             | 3                 |
| Զ        | Արժեքի հաշվարկ             | Գ                                 | 2                             | 2                 |
| Է        | Ապրանքի գործառնություն     | Դ                                 | 4                             | 5                 |
| Ը        | Ընտրովի հսկողություն       | Բ, Ե                              | 6                             | 4                 |
| Թ        | Գնի սահմանում              | Ը                                 | 2                             | 1                 |
| Ժ        | Ամփոփիչ հաշվետվություն     | Զ, Է, Թ                           | 6                             | 2                 |

Պահանջվում է.

ա) Կառուցել ցանցային գրաֆ, որն արտացոլի նախագծի իրականացման աշխատանքները և դրանց փոխադարձ կապը: Որոշել կրիտիկական ուղին և նախագծի կատարման նվազագույն տևողությունը:

բ) Որպես նախագծի կատարման սկիզբ ընդունելով զրոյական պահը, իսկ յուրաքանչյուր գործողություն սկսելով առավել վաղ ժամկետից, ժամանակի յուրաքանչյուր պահի համար կառուցել անձնակազմի քանակին վե-պահանջարկի գծապատկերը:

գ) Ընկերության վարչությունը որոշում է ընդունել, որ վերոհիշյալ նախագծի իրականացման համար ժամանակի յուրաքանչյուր պահին անձնակազմի քանակը պետք է լինի 9 մարդուց ոչ ավելի: Նկարագրել, թե տվյալ պայմաններում անձնակարճ ժամկետներում ինչպես՝ իրականացնել նախագիծը:

Քանի՞ շաբաթվա ընթացքում անձնակազմի 9 անդամներն էլ միաժամանակ կմասնակցեն նախագծի իրականացմանը:

Խնդիր 6: Նախագիծը բաղկացած է 10 տեսակի աշխատանքից: Ստորև բերված են դրանց տևողությունը և փոխադարձ կապը: Ձ և Ը աշխատանքների հետ կապված որոշակի դժվարությունների պատճառով դրանց տևողությունը անորոշ է:

Պահանջվում է.

ա) Կառուցել համապատասխան ցանցային գրաֆ, որն արտացոլի աշխատանքների փոխադարձ կապը:

բ) Անտեսելով Ձ և Ը աշխատանքների ազդեցությունը՝ որոշել նախագծի իրականացման նվազագույն ժամանակը:

գ) Ինչպիսի՞ սահմանափակումներ կդրվեն Ձ և Ը աշխատանքների տևողության վրա, եթե անհրաժեշտ լինել նախագիծն ավարտել 19 օրում:

| Աշխատանք | Տևողություն (օր) | Անմիջապես նախորդող աշխատանք |
|----------|------------------|-----------------------------|
| Ա        | 6                |                             |
| Բ        | 1                | Ա                           |
| Գ        | 2                | Ա                           |
| Դ        | 1                | Բ                           |
| Ե        | 1                | Դ                           |
| Ձ        |                  | Բ                           |
| Է        | 1                | Գ                           |
| Ը        |                  | Ձ, Ը                        |
| Թ        | 4                | Ե, Ը                        |
| Ժ        | 3                | Թ                           |

դ) Հետագա ուսումնասիրություններից հայտնի է, որ Ձ և Ը աշխատանքների կատարման սպասվելիք ժամկետներն են համապատասխանաբար՝ 2 օր և 1 օր: Բացի այդ, ենթադրվում է, որ այդ երկու աշխատանքների տևողության անորոշությունը մոտարկվում է Պուասոնի բաշխման միջոցով: Գտնել հավանականությունը, որ նախագծի իրականացումը կտևի 19 օր և ավելի:

Ստորև բերված աղյուսակում տրված են Պուասոնի բաշխման համապատասխանող հավանականությունների արժեքները:

| Միջին արժեք | Հավանականություն |       |       |       |           |
|-------------|------------------|-------|-------|-------|-----------|
|             | 0                | 1     | 2     | 3     | 4 և ավելի |
| 1           | 0.368            | 0.368 | 0.184 | 0.061 | 0.019     |
| 2           | 0.135            | 0.271 | 0.271 | 0.180 | 0.143     |

Խնդիր 7: “Դիմակ” ձեռնարկությունը արտադրում է մագեթյալ հարդարելու և սափրվելու պարագաներ, ներառյալ ածելիներ: Նրա մրցակից ձեռնարկությունը վերջերս կազմակերպել է նոր տեսակի ածելիների արտադրու-

թյուն, որը վերջին վեց ամսվա ընթացքում գրավել է սպառողական շուկան և չափազանց վատ է ազդել “Դիմակ” ձեռնարկության վաճառքի ծավալների վրա: “Դիմակի” վարչությունը որոշել է շուտափույթ կարգով արտադրության մեջ ներդրել մրցունակ արտադրանք, գլխավոր հաշվապահին հանձնարարելով կազմել նոր արտադրանքը մշակելու և սպառողական շուկա հանելու ծրագիր:

|   | Աշխատանքի անվանումը                         | Ժամանակ (շաբաթ) | Նախորդող աշխատանքներ |
|---|---------------------------------------------|-----------------|----------------------|
| Ա | Նոր արտադրանքի ստեղծում                     | 8               | -                    |
| Բ | Փաթեթավորում և ձևավորում                    | 4               | -                    |
| Գ | Արտադրական հզորությունների նախապատրաստում   | 4               | Ա                    |
| Դ | Հումքի և նյութերի ձեռք բերում               | 2               | Ա                    |
| Ե | Արտադրանքի փորձնական խմբաքանակի թողարկում   | 3               | Գ, Դ                 |
| Զ | Փաթեթավորում                                | 2               | Բ                    |
| Է | Փորձնական շուկայի ընտրություն               | 1               | -                    |
| Ը | Փորձնական խմբաքանակի փաթեթավորում           | 2               | Ե, Զ                 |
| Թ | Արտադրանքի մատակարարում փորձնական շուկա     | 3               | Է, Ը                 |
| Ժ | Արտադրանքի վաճառք փորձնական շուկայում       | 4               | Թ                    |
| Ի | Արտադրանքի սպառման արդյունքների գնահատում   | 3               | Ժ                    |
| Լ | Ջանգվածային արտադրության թողարկման ծրագրում | 4               | Ի                    |

Նախագծի մշակման համար հաշվապահի ձեռնարկած առաջին քայլը այն աշխատանքների ձևակերպումն է, որոնք անհրաժեշտ են արտադրանքի ստեղծման գործընթացում: Հաշվապահը գնահատել է նաև յուրաքանչյուր աշխատանքի իրականացման համար պահանջվող ժամանակը և բացահայտել դրան նախորդող աշխատանքը: Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ տվյալները բերված են աղյուսակում:

Պահանջվում է.

ա) Կառուցել ցանցային գրաֆ, որն արտացոլի մշված խնդիրների լուծումների տրամաբանական հաջորդականությունը, և որոշել ծրագրի մշակման պահից մինչև արտադրանքի նոր զանգվածային թողարկումն ընկած ժամանակը (ենթադրվում է, որ նոր արտադրանքը թողարկվում է ծրագրի կազմումն ավարտելուն պես):

բ) Հաշվարկել ոչ կրիտիկական աշխատանքներից յուրաքանչյուրին համապատասխանող ժամանակի պաշարները: Բ, Դ, Ի, Լ աշխատանքների

համար պահանջվող ժամանակը անորոշ է, այդ պատճառով վերևում բերված աշխատանքների կատարման առավել հավանական ժամկետների համար մշակված են հոռետեսական և լավատեսական ժամկետների հետևյալ գնահատումները.

Ստորև բերված տվյալների հիման վրա որոշել սպասվելիք ժամանակը՝ սկսած արտադրանքի զանգվածային թողարկման պահից, և այն հավանականությունը, որ այդ ժամանակը կտևի 35 շաբաթից ավելի (հետևյալ նախապայմանի դեպքում՝ նախագծի տևողությունը մոտարկվում է կանոնավոր բաշխմամբ):

| Աշխատանք | Լավատեսական ժամկետ (շաբաթ) | Հոռետեսական ժամկետ (շաբաթ) |
|----------|----------------------------|----------------------------|
| Ա        | 5                          | 13                         |
| Բ        | 2                          | 6                          |
| Դ        | 1                          | 4                          |
| Ի        | 2                          | 6                          |
| Լ        | 2                          | 8                          |

Խնդիր 8: Սահմանափակ պատասխանատվությամբ ընկերության վարչությունը յուրաքանչյուր տարվա սեպտեմբերի 1-ին կազմում է հաջույտ տարվա բյուջեն:

Բյուջեի նախապատրաստման գործընթացը ներառում է որոշակի փուլեր: Դրանց նկարագրումը, անմիջապես նախորդող փուլերը և կատարման ժամանակը ներկայացված են խնդրի վերջում բերված աղյուսակում:

Բյուջեն պետք է պատրաստ լինի դեկտեմբերի վերջին, ուստի վարչությունը աշխատանքը կավարտի 17 շաբաթում:

Պահանջվում է

ա) Կառուցել ցանցային գրաֆ, որն արտացոլի բյուջեի նախապատրաստման համար պահանջվող փուլերի հաջորդականությունը:

բ) Եթե պահանջվել կրճատել բյուջեի նախապատրաստմանը հատկացված ժամանակը, ապա ո՞ր փուլերի վրա պետք է դարձնել ուշադրություն և ինչու՞:

գ) Բացատրել ժամանակի ընդհանուր, ազատ և անկախ պաշար հասկացությունների տարբերությունը: Ապացուցել, որ 1-ին փուլի ազատ ժամանակի պաշարը հավասար է երեք շաբաթի, ընդ որում, երկու շաբաթը ժամանակի անկախ պաշար է:

| Փուլ | Աշխատանք                                             | Նախորդ փուլերը   | Ժամանակ (շաբաթ) |
|------|------------------------------------------------------|------------------|-----------------|
| Ա    | Աշխատավարձի դրույքաչափ                               |                  | 2               |
| Բ    | Շուկայի ուսումնասիրություն                           | -                | 4               |
| Գ    | Վաճառքի գների սահմանում                              |                  | 3               |
| Դ    | Վաճառքի ծավալների բյուջեի կազմում                    | Բ                | 3               |
| Ե    | Վաճառքից ստացվելիք եկամուտի բյուջեի կազմում          | Գ, Դ             | 1               |
| Զ    | Վաճառքի հետ կապված ծախսերի բյուջեի կազմում           | Ա, Դ             | 3               |
| Է    | Արտադրության ծավալների բյուջեի կազմում               | Դ                | 6               |
| Ը    | Վերադիր ծախսերի բյուջեի կազմում                      | Ա                | 4               |
| Թ    | Աշխատակիցների վերապատրաստման բյուջեի կազմում         | Ա, Է             | 2               |
| Ժ    | Հումքի բյուջեի կազմում                               | Է                | 3               |
| Ի    | Արտադրական տարածքի և սարքավորումների բյուջեի կազմում | Է                | 5               |
| Լ    | Ընդհանուր շահույթի կանխատեսումների մշակում           | Ե, Զ, Ը, Թ, Ժ, Ի | 1               |



## V. ՊԱՇԱՐՆԵՐԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Խնդիր 1: Խանութի տարեկան վաճառքի ծավալը կազմում է 500 փաթեթ ծիրանի չիր: Տարվա ընթացքում պահանջարկը բաշխվում է հավասարաչափ: Մեկ փաթեթը գնվում է 1000 դրամով, իսկ յուրաքանչյուր պատվերի համար խանութը վճարում է 5000 դրամ: Պատվերի մատակարարման ժամկետը 12 աշխատանքային օր է (6-օրյա աշխատանքային շաբաթի դեպքում): Ըստ մասնագետների կարծիքի՝ պահպանման ծախսերը կազմում են պաշարների միջին տարեկան արժեքի 20%-ը:

Ամեն անգամ քանի՞ փաթեթ պետք է պատվիրել, որպեսզի պաշարների ընդհանուր արժեքը լինի նվազագույն: Ենթադրելով, որ խանութը աշխատում է տարեկան 300 օր, որոշել պատվերների հաճախությունը և կրկնվող պատվերների ծավալը:

Խնդիր 2: Ձեռնարկությունը թողարկում է մի քանի տեսակի կավե սրճաման: Արտադրական գործնթացը կազմակերպված է այնպես, որ, մեկ շաբաթում սրճամանների խմբաքանակի թողարկման ընդհանուր ծավալը հասնում է 500-ի: Առավել հանրամատչելի մոդելի պահանջարկը, որը նշանակում ենք  $x$ -ով, մեկ տարում կազմում է 2500 միավոր և տարվա ընթացքում բաշխվում է հավասարաչափ: Անկախ նրանից, թե ժամանակի որ՞պահին է անհրաժեշտ  $x$  տեսակի սրճամանի զանգվածի թողարկումը, արտադրական գործնթացի արժեքը կազմում է 100000 պլմ:

Ձեռնարկության մասնագետների գնահատումով սրճամանների պահպանության ծախսերը կազմում է 750 դր. մեկ միավորի համար:

Ինչպիսի՞նք պետք է լինի սրճամանների խմբաքանակի չափը, որպեսզի մինիմացվեն արտադրության և պահպանության ծախսերը, եթե ձեռնարկությունը տարեկան աշխատում է 50 շաբաթ: Ի՞նչ հաճախությամբ պետք է վերսկսել արտադրական ցիկլը և որքա՞ն կլինի դրա տևողությունը:

Խնդիր 3: Անդրադառնա՞մք 1-ին խնդրին, որտեղ խանութը պատվիրում է ծիրանի չիր: Մեծաքանակ գնումը կատարվում է խմբաքանակներով, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է 158 փաթեթ՝ մեկ փաթեթը 1000 դր..

Ներկայումս մատակարարողը իր ապրանքը վաճառում է գեղչով:

Արդյո՞ք խանութի տնօրենը պետք է օգտվի որևէ գեղչից:

| Պատվերի չափը | Ձեռչ, % | Փաթեթավորման գինը, դր. |
|--------------|---------|------------------------|
| 0 - 199      | 0       | 1000                   |
| 200 - 499    | 2       | 890                    |
| 500 և ավելին | 4       | 960                    |

Խնդիր 4: Որոշակի արտադրանքի ամենօրյա պահանջարկը կազմում է 100 միավոր: Անկախ խմբաքանակի ծավալից, նրա ձեռքբերման ծախսերը կազմում են 100000 դրամ, իսկ միավոր արտադրանքի օրական պահպանության ծախսերը՝ 20 դրամ:

Որոշել՝

ա. Տնտեսապես առավել նպատակահարմար խմբաքանակի ծավալը և մատակարարումների միջև ընկած ժամանակահատվածը:

բ. Խմբաքանակի լավագույն ծավալը և մատակարարումների միջև ընկած ժամկետը, եթե հնարավոր է պակասուրդի առաջացումը և հայտնի է, որ միավոր արտադրանքի պակասուրդի դեպքում վնասի չափը կազմում է օրական 30 դրամ:

Խնդիր 5: Ձեռնարկությունը համալրում է որոշակի արտադրանքի պաշարը՝ ելնելով մեկամսյա պահանջարկից, ընդ որում տարեկան պահանջարկը կազմում է 1500 միավոր: Յուրաքանչյուր պատվերի կատարման ծախսերը կազմում են 10000 դրամ: Միավոր արտադրանքի պահպանման ամսական ծախսերը կազմում են 1000 դրամ (ի դեպ՝ պակասորդը բացառվում է):

Որոշել՝

ա. Պատվերի լավագույն ծավալը և մատակարարումների միջև ընկած ժամանակահատվածը:

բ. Տարեկան պահպանության ծախսերի տարբերությունը՝ համեմատելով լավագույն և կիրառվող վարվելակերպերը, ընդ որում վերջինս նախատեսում է տարվա ընթացքում ամենամսյա պահանջարկի պատվերի բավարարում:

Խնդիր 6: Պահեստավորված ապրանքի մեկօրյա սպառումը կազմում է 50 միավոր: Պատվերի ձևակերպման ծախսերը կազմում են 12500 դրամ, ընդ որում միավոր ապրանքի պահպանման ծախսերը կազմում են շաբաթական 3500 դրամ: Որոշել պատվերների լավագույն քանակը (մոտարկելով մինչև մոտակա ամբողջ թիվը), որը ձեռնարկությունը պետք է ներկայացնի մեկ տարում, եթե պակասուրդը բացառվում է:

Խնդիր 7: Արտադրանքի օրական պահանջարկը կազմում է 30 միավոր:

Մեկ միավորի պահպանության ծախսը՝ 25 դրամ է, իսկ պատվերի կատարման ծախսը՝ 5000 դրամ: Ենթադրելով, որ պակասուրդը բացառվում է և մինչև 300 միավոր արտադրանք պատվիրելիս յուրաքանչյուր միավորը գնվում է 5000 դրամով, իսկ գերազանցման դեպքում՝ 4000 դրամով, որոշել պատվերի արդյունավետ ծավալը:

Խնդիր 8: Արտադրատեսակի վաճառքի գինը կազմում է 2000 դրամ, բայց, եթե պատվերի խմբաքանակը գերազանցում է 150 միավորից, տրվում է զեղչ՝ 10%: Ձեռնարկությունը օրական սպառում է 20 միավոր: Մեկ խմբաքանակ պատվերի կատարման ծախսերը կազմում են 2500 դրամ, իսկ միավոր արտադրատեսակի պահպանության ծախսը՝ 15 դրամ:

Ո՞րքանով է նպատակահարմար օգտվել տրվող գեղչից:

**Խնդիր 9:** Որոշակի տեսակի մանրամասերի տարեկան պահանջարկը հավաքման ձեռնարկությունում կազմում է 120000 միավոր, ի դեպ արտադրության ընթացքում տվյալ մանրամասերը գործածվում են անընդիատ և հավասարաչափ: Մանրամասերի պատվերը կատարվում է տարեկան մեկ անգամ և մատակարարվում է հաստատուն ծավալով՝ խմբաքանակներով:

Միավոր մանրամասի պահպանության օրական ծախսը կազմում են 20 դրամ, իսկ խմբաքանակի մատակարարման ծախսը՝ 50000 դրամ: Արտադրության ընդհատումը մանրամասերի բացակայության պատճառով անթույլատրելի է:

**Որոշել՝**

ա. Տնտեսապես առավել նպատակահարմար խմբաքանակի ծավալը և մատակարարումների միջև ընկած ժամանակահատվածը:

բ. Քանի %-ով կաճեն պաշարների ստեղծման և պահպանության ծախսերը նվազագույն գումարային ծախսումների համեմատ, եթե պատվիրվող խմբաքանակի ծավալը հավասար է 5000-ի:

գ. Խմբաքանակի լավագույն ծավալը և մատակարարումների միջև ընկած ժամանակահատվածը, եթե մանրամասերի պակասությունը թույլատրելի է, իսկ միավորի պակասությունից վնասը կազմում է օրական 20 դրամ է:

**Խնդիր 10:** Մեկ հաստոցով մեկ ամսում արտադրվում է 2000 միավոր մանրամաս, որոնք հետագայում մշակվում են մի այլ հաստոցով, որի արտադրողականությունը ամսական 500 միավոր է, իսկ մնացած մանրամասերը պահեստավորվում են: Ձեռնարկության մասնագետների գնահատումով պահպանության ծախսերը կազմում են տարեկան պաշարների միջին արժեքի 20%-ը: Մեկ մանրամասի արտադրման ծախսը կազմում է 1250 դր. .

ա. Որքա՞ն է առաջին հաստոցով թողարկվող մանրամասերի խմբաքանակը, և ինչ՞ հաճախությամբ պետք է կազմակերպել այդ մանրամասերի արտադրությունը:

բ. Ո՞րն է առաջին հարցի պատասխանը, եթե հնարավոր լինել արտադրական ծախսերը իջեցնել 250 դրամի:

գ. Ինչպե՞ս կփոխվեր առաջին հարցի պատասխանը, եթե արտադրության արժեքն իջեցվեր 1000 դրամի:

**Խնդիր 11:** “Մեղեդի” ձեռնարկությունը էլեկտրոնային սարքերի խոշոր հանրախանութ է: Առավել հանրամատչելի ապրանքը դա ռադիոընդունիչով ստերեոփոններն է: Այդ ապրանքի պահանջարկը տարվա ընթացքում բաշխվում է հավասարաչափ և կազմում է 2000 միավոր: Ստերեոփոնները արժեն 25000 դրամ, եթե անմիջականորեն գնվի արտադրողից: Այդ ապրանքի պատվերը արժեն 25000 դրամ, իսկ պահպանման ծախսերը կազմում են պաշարների միջին տարեկան արժեքի 15%-ը: Ձեռնարկության կառավարիչը ցանկանում է կրճատել տվյալ ապրանքի պաշարների ծավալը՝ կանխիկ

գումարի հոսքը լավացնելու նպատակով՝ պաշարների բացակայության պատճառով կորուստները, որոնք պայմանավորված են վաճառքի ծավալի նվազեցման և հաճախորդների վատախությունը կորցնելու հետ, մեկ միավորի համար կազմում են տարեկան 2500 դրամ: Պահանջվում է.

ա. Որոշել փլեյերների պաշարների ստեղծման հետ կապված ընդհանուր ծախսերի նվազագույն արժեքը, եթե պաշարների բացակայությունը անթույլատրելի է:

Ո՞րն է պատվերի արդյունավետ ծավալը:

բ. Գտնել խնայողության մեծությունը, որը հասանելի է պաշարների բացակայության պայմանավորման դեպքում, եթե ընդունվում է հետևյալ նախադրյալը՝ պակասուրդը ծածկվում է մոր մատակարարումներից:

Ո՞րն է պատվերի արդյունավետ ծավալը:

Խնդիր 12: ՍՊ ընկերությունը զբաղվում է էլեկտրասարքերի, այդ թվում նաև հաշվիչների, մանրածախ վաճառքով: Շաբաթվա ընթացքում պահանջարկը բաշխվում է հավասարաչափ և հավասար է 25-ի, որոնց հատն արժեն 4500 դրամ: Մեկ պատվերի արժեքը կազմում է 7500 դր., իսկ միավորի պահպանության ծախսը տարվա ընթացքում կազմում է 250 դր. գումարած պաշարների միջին տարեկան արժեքի 15%-ը: Ենթադրվում է, որ տարին ունի 50 շաբաթ: Պահանջվում է.

ա. Գտնել պատվերի լավագույն ծավալը:

բ. Ընկերության վարչությունը ներկայումս կատարում է 300 հաշվիչից բաղկացած խմբաքանակների պատվերներ:

Ինչպիսի՞ն է խնայողության մեծությունը, եթե պատվերները մատակարարվեն առաջին կետում գտած քանակին համապատասխան:

գ. Ինչպե՞ս կփոխվեն առաջին կետում որոշված պատվերի ծավալը, եթե մեկ պատվերի մատակարարման արժեքը իջեցվեր 2500 դրամի:

Խնդիր 13: Ձեռնարկությանը անհրաժեշտ է իր աշխատակազմում ունենալ 1000 ճարտարագետ: Աշխատանքից ազատվողների թիվը հաստատում է և կազմում է տարեկան 150 մարդ: Նախքան աշխատանքի անցնելը մոր ընդունված ճարտարագետները կազմում են խմբեր և ուսանում ձեռնարկության կազմակերպած հատուկ դասնաքանդակում: Ձեռնարկության համար ուսուցման յուրաքանչյուր փուլ արժեն 12500000 դր.: Եթե հնարավորություն չկա ճարտարագետներին անհապաղ աշխատանք տրամադրել, ապա յուրաքանչյուր մարդու համար մեկ ամսում ձեռնարկությունը կորցնում է 25000 դր.:

Պահանջվում է.

ա. Որոշել, թե ք՞անի ճարտարագետ պետք է հաճախի այդ դասընթացները:

բ. Ինչպիսի՞ն հաճախությամբ պետք է կազմակերպել այդպիսի դասընթացներ և որքա՞ն կլինեն ճարտարագետների ուսուցումը

գ. Բ. կետում ստացված լուծման վրա ինչպե՞ս կազդի հետևյալ պայմանը. մեկ փուլի ընթացքում սովորող ճարտարագետների թիվը չպետք է գերազանցի 25-ից:

**Խնդիր 14:** Ավտոմեքենաների ցուցադրման սրահի վաճառքի ծավալը կազմում է տարեկան 200 ավտոմեքենա: Յուրաքանչյուր պատվեր արժե 25000 դր., իսկ պահպանության ծախսերը հավասար են պաշարների միջին տարեկան արժեքի 30%-ին: Եթե պատվերի ծավալը 50 ավտոմեքենայից պակաս է, ապա մեկ ավտոմեքենայի վաճառքի գինը կազմում է 3000000 դր.: 50-ից մինչև 99-ը ավտոմեքենա տրվում է 1,5% զեղչ, իսկ 100 և ավելի ավտոմեքենա պատվիրելիս՝ 3%: Պահանջվում է.

ա. Որոշել պատվերի ծավալը:

բ. Ա. կետում ստացված պատասխանի վրա ինչպե՞ս կազդի այն փաստը, որ մատակարարողը զեղչի չափը 3%-ից բարձրացնի 5%-ի:

**Խնդիր 15:** Հաստոցների վաճառքով մասնագիտացած խանութը՝ վաճառում է շաբաթական 3 հաստոց: Կարելի է ընդունել, որ շաբաթական պահանջարկը բավարարում է Պուասոնի բաշխմանը: Պատվերի մատակարարման ժամանակը հաստատում է և կազմում է 2 շաբաթ: Խանութը հաստոցները գնում է հատը 250000 դրամով, իսկ մեկ պատվերի ձևակերպման ծախսը կազմում է 2500 դր.: Պահպանության ծախսերը կազմում են պաշարների միջին տարեկան արժեքի 30%-ը, իսկ կորուստները՝ կապված պաշարների պակասուրդի հետ, յուրաքանչյուր հաստոցի համար կազմում են 50000 դր.: Ենթադրվում է, որ տարին ունի 50 շաբաթ:

Որոշել, թե ինչպե՞ս պետք է գործի խանութի վարչությունը, եթե նրա նպատակն է նվազագույնի հասցնել ամբողջ տարվա համար տվյալ տեսակի հաստոցների պաշարների ստեղծման հետ կապված գումարային ծախսերը:

**Խնդիր 16:** “Կայծակ” ընկերությունը համակարգչային տեխնիկայի վաճառքի խոշոր ձեռնարկություն է: Համակարգչային ծրագրերի համար ձեռնարկությանը անհրաժեշտ են սկավառակներ: Սկավառակները գնվում են արտաքին մատակարարից և, ինչպես հաշվարկված է, մոտ ապագայում տարեկան անհրաժեշտ կլինի 2000 սկավառակ: Սկավառակների մեկ խմբաքանակի պատվերի արժեքը հավասար է 16000 դրամի: Ձեռնարկության մասնագետների կարծիքով մեկ սկավառակի պահպանման տարեկան ծախսերը կազմում են նրա արժեքի 1%-ը: Յուրաքանչյուր սկավառակ արժե 400 դր.: Ենթադրվում է, որ սկավառակների օգտագործման գործակիցը հաստատում է, իսկ պաշարների բացակայությունը՝ անթույլատրելի:

Պահանջվում է.

ա. Որոշել մեկ պատվերի լավագույն ծավալը և պատվերների թիվը:

բ. Գտնել պաշարների տարեկան գումարային ծախսումների արժեքը:

գ. Ենթադրենք, որ փաստացի պահանջարկը կազմում է տարեկան 24200 սկավառակ: Ա. կետում գտնված պատվերի ծավալի պահպանումը

խնդրի լուծման վրա ինչպե՞ս կազդի ներկա պայմաններում, երբ պատվերի լավագույն ծավալը այլ է:

դ. Օգտագործելով գ. կետի արդյունքները՝ ձևակերպեք ձեր եզրակացությունները տվյալ մոդելի գզայունության վերաբերյալ:

Խնդիր 17: “Արարատ” մարզական ապրանքների խոշոր խանութը աշխատում է տարեկան 50 շաբաթ: Խանութի պահեստում կուտակվել է թեմիսի բարձրորակ գնդակների որոշակի պաշար: Չնայած խանութը ստիպված է յուրաքանչյուր 12 գնդակի պահպանության համար գնել տուփեր, որոնց մեկ հատը արժե 4800 դր., նա մտադիր է թեմիսի գնդակները վաճառել հատով: Վերջին տարվա ընթացքում վաճառքի միջին ծավալը կազմում է շաբաթական 12 տուփ, ընդ որում, վաճառքի տվյալ ծավալը մոտ ապագայում ամենայն հավանականությամբ կպահպանվի: Ինչպես գնահատված էր, յուրաքանչյուր այդպիսի պատվերի արժեքը՝ ներառյալ հեռախոսային, վարչական և փոխադրամիջոցների ծախսերը, կազմում են ամսական 8000 դր.: Պաշարների պահպանման մեկ տարվա ծախսերը, ըստ համապատասխան գնահատումների, կազմում են տվյալ ապրանքի պաշարի ընդհանուր ծախսումների 20%-ը: Խանութի կառավարիչը մեկ միավոր ապրանքի գինը հաշվարկում է որպես մեկ միավոր արտադրանքի գնման արժեքի և պահպանության մոտավոր ծախսերի (պահեստային տարածքի և ապրանքի մատակարարման արժեքի) գումար, և այնուհետև, ստացված արժեքի 50%-ի չափով կատարում է առևտրային վերադիր:

Պահանջվում է.

1. Որոշել տարվա ընթացքում պատվերների լավագույն քանակը և թեմիսի գնդակների այն տուփերի քանակը, որոնցով կազմավորվում է մեկ խմբաքանակ: Ցույց տալ, որ մեկ գնդակի վաճառքի գինը, որը համապատասխանում է տվյալ լավագույն վարվելակերպին, կազմում է 620 դր.:

2. Պարզել, թե խանութի սահմանած գինը, արդյո՞ք ձեռնտու կլինի սպառողի համար, եթե մատակարարը 4% զեղչ հատկացնի 50 գնդակից ոչ պակաս պատվիրելու դեպքում:

3. Ինչպիսի՞ զեղչ պետք է հատկացնի 500 տուփի չափով պատվերի համար մատակարարը, որպեսզի այն լինի ձեռնտու խանութին՝ որպես սպառողի:

Խնդիր 18: “Փայտիկ” ընկերությունը ամեն տարի կատարում է լուսակարների փայտյա շրջանակների մեծաքանակ գնում: Վերջին երկու տարում միջին տարեկան պահանջարկը կազմում է 3000 շրջանակ, ընդ որում ենթադրվում է, որ պահանջարկը էապես չի փոխվի նաև այս տարի և կլինի համարյա միշտ հաստատուն: Պատվերի ձևակերպման ծախսը կազմում է 7500 դր: Պաշարների կառավարման վարվելակերպը նախատեսում է, որ մեկ միավոր արտադրանքի պահպանման ծախսերը կազմում են վաճառքի

գնի 18%-ը: Մեկ շրջանակի նվազագույն գինը, որը հաստատված է արտադրող ձեռնարկության կողմից, հավասար է 4000 դրամի: Պահանջվում է.

ա. Որոշել պատվերի լավագույն ծավալը և երկու հաջորդական պատվերների միջև եղած ժամանակահատվածը:

բ. Նկարագրել առաջին կետում ընդունված նախադրյալների համար. Նկարագրել առաջին կետում ընդունված նախադրյալների համակարգը և տվյալ հարցի շրջանակներում գնահատել դրանց հիմնավորությունը:

գ. Ցույց տալ որ 2000-ից ոչ պակաս շրջանակ պատվերի դեպքում, եթե արտադրողը տալիս է 3,125% զեղչ, ապա դա տնտեսապես ձեռնտու չէ ձեռնարկությանը:

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի զեղչի չափը, եթե նա պատվիրի 2000 կամ ավելի շրջանակ:

դ. Ա կետում նկարագրված պաշարների կառավարման վարկելակերպի վրա ինչպե՞ս կազդի այն փաստը, որ լուսանկարների շրջանակների մատակարարման ժամանակահատվածը դառնում է փոփոխական:

Խնդիր 19: Ձեռնարկության թողարկած ապրանքի տարեկան պահանջարկը հավասար է 4800 միավորի: Գնահատված է, որ պահպանության ծախսը կազմում է տարեկան 10000 դր. մեկ միավորի համար, իսկ մեկ պատվերը, անկախ իր չափից, արժե 15000 դր.: Մատակարարման ժամանակահատվածում պահանջարկը փոփոխական է, սակայն բավականին ստույգ կարելի է մոտարկել նորմալ բաշխման միջոցով, որի միջին արժեքը հավասար է 100 միավոր ապրանքի, իսկ ցրվածքը՝ 10 միավորի: Գնահատված է, որ մատակարարման ընթացքում պաշարի պակասի արժեքը ապրանքի մեկ միավորի համար կազմում է 5000 դր.:

Պահանջվում է.

ա. Որոշել պատվերի արդյունավետ չափը:

բ. Գտնել կրկնվող պատվերի չափը և պահուստային պաշարի չափերը, եթե ձեռնարկության վարչությունը մտադիր է պատվերի յուրաքանչյուր շրջափուլում ապահովել պաշարների պակասուրդի 3% հավանականություն:

գ. Ինչպիսի՞ն կլինի պաշարի պակասուրդի հավանականությունը պատվերի յուրաքանչյուր շրջափուլի ընթացքում, եթե ձեռնարկության կառավարիչը կրկնվող պատվերի ծավալը սահմանի 115 միավորի չափով:

դ. Որոշել կրկնվող պատվերի այն չափը, որի դեպքում սպասվելիք ծախսերը նվազագույնն են:

Խնդիր 20: Օգտագործված ավտոմեքենայի շուկայական գինը 2000 պղծ է: Սեփականատերը ակնկալում է ստանալ այդ գումարից ավելին, սակայն մտադիր է համաձայնել առաջին երեք հնարավոր գնորդների առաջարկած գնին (դա նշանակում է, որ նա պարտավոր է իր որոշումն ընդունել երկուրդ առաջարկի ստացման պահից ոչ ուշ): Ենթադրենք, որ հավասար հավանա-

կանություններով կառաջարկվեն հետևյալ գները՝ 2000, 2200 և 2400 պղմ: Բնական է, որ առաջարկված գներից որևէ մեկը ընդունելուց հետո, հետագա բոլոր առաջարկները կորցնում են իմաստը: Վաճառողի նպատակն է որոշել այն սահմանային գինը, որով ինքը կառաջնորդվի հետագա առաջարկները դիտարկելիս: Որպես այդպիսի արժեք կարելի է ընտրել 2000, 2200 և 2400 պղմ:

Գտնել սեփականատիրոջ լավագույն վարվելակերպը:

Խնդիր 21: Պաշարները վերցվում են պահեստավորվող արտադրանքի 80 միավոր պարունակող պահեստից ըստ հավանականությունների պուասոնյան բաշխման՝ մեկ օրում հինգ միավոր պաշար հաճախությամբ:

Պահանջվում է հաշվել.

ա. Հավանականությունը, որ առաջիկա երկու օրվա ընթացքում պահեստից կվերցվի 10 միավոր պաշար;

բ. Հավանականությունը, որ չորրորդ օրվա վերջում պահեստում չի մնա ոչ մի միավոր պաշար;

գ. Պաշարների ծավալի միջին արժեքը՝ 4-օրյա ժամանակահատվածում:

Խնդիր 22: Գնորդների պահանջարկը անհապաղ բավարարելու նպատակով էլեկտրասարքերի խանութը յուրաքանչյուր ամսվա սկզբում կարող է տեղաբաշխել սառնարանների պատվերները: Պատվերի յուրաքանչյուր տեղաբաշխման հաստատումն ծախսը կազմում է 100 պղմ: Ամսվա ընթացքում մեկ սառնարանի պահպանության ծախսը հավասար է 5 պղմ-ի: Սառնարանների բացակայության դեպքում խանութի կորուստները գնահատվում են յութաքանչյուր սառնարանի համար ամսական 150 պղմ.: Ամսական պահանջարկը տրվում է հավանականությունների հետևյալ բաշխումով.

|               |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|
| Պահանջարկ (x) | 0   | 1   | 2   |
| p(x)          | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

Խանութն իրագոծում է հետևյալ վարվելակերպը. յուրաքանչյուր ամսվա ընթացքում պաշարի առավելագույն մակարդակը չպետք է լինի երկու սառնարանից ավելի:

ա) Տվյալ խնդրի այլընտրանքային լուծումների դեպքում որոշել անցման հավանականությունները;

բ) Պաշարների պահպանության ամսական ծախսերը որոշել որպես համակարգի վիճակից և լուծման այլընտրանքից կախված ֆունկցիա;

գ) Հետագա երեք ամսվա համար որոշել պատվերների տեղաբաշխման լավագույն վարվելակերպը:

Խնդիր 23: «Համով խմորեղեն» ՍՊ ընկերությունը վաճառում է կայուն պահանջարկ ունեցող փախլավա՝ ամսական 600 հատ, հատը 60 պղմ-ով:

Պահպանության ամսական ծախսը կազմում է տարվա պաշարի արժեքի 20%-ը, իսկ մեկ պատվերի կատարման համար վճարում է 100 պղմ:

Ընկերության կառավարիչը ցանկանում է իմանալ տարվա կտրվածքով մեկ պատվերի լավագույն քանակը:

**Խնդիր 24:** Դեղատան տնօրենը ցանկանում է իմանալ ատամի մածուկի արդյունավետ պաշարը, որի պահանջարկը, ըստ իր գնահատման, շաբաթական շուրջ 500 տուփ է: Մածուկի մեկ տուփի գնման գինը 150 պղմ է, իսկ 100 միավոր մածուկը մեկ շաբաթ պահեստում պահպանելու գինը հավասար է 100 պղմ-ի: Մեկ պատվերի ձևակերպման ծախսը՝ 600 պղմ. է:

միավոր մածուկը մեկ շաբաթ պահեստում պահպանելու գինը հավասար է 100 պղմ-ի: Մեկ պատվերի ձևակերպման ծախսը՝ 600 պղմ. է:

Գտնել ատամի մածուկի պաշարի արդյունավետ ծավալը:

**Խնդիր 25:** Դեղատունը ամեն տարի գնում է 6000 տուփ ատամի մածուկ մեկ տուփի համար վճարելով 150 պղմ: Պատվերի ծախսը կազմում է 600 պղմ և կախված չէ պատվերի ծավալից: Պահպանության ծախսը հավասար է տարվա միջին պաշարի արժեքի 5%-ին: Պահանջվում է հաշվել՝

**Խնդիր 26:** Խանութը տա) Պաշարի լավագույն ծավալը;

բ) Մածուկի մատակարարը առաջարկում է հետևյալ գեղչերը՝

- 5%, եթե պատվիրվի 1000 տուփից ոչ պակաս
- 8%, եթե պատվիրվի 2000 տուփից ոչ պակաս:

Ելնելով նոր իրավիճակից, ինչպիսի՞ լուծում կառաջարկեիք դեղատան ղեկավարությանը: արեկան գնում է 30000 տուփ լվացքի փոշի մեկ տուփի համար վճարելով 200 պղմ: Մեկ պատվերի համար կատարված ծախսը հավասար է 1600 պղմ-ի, իսկ 100 տուփի պահպանության տարեկան ծախսը հավասար է 2500 պղմ-ի: Լվացքի փոշի մատակարարող միջնորդ ընկերությունը առաջարկել է 4,5% գեղչ, եթե պատվերի ծավալը լինի 5000 տուփից ոչ պակաս:

Ինչպե՞ս պետք է վարվի խանութի ղեկավարությունը:

**Խնդիր 27:** Ինչ-որ ապրանքի պահանջարկը բավարարում է համասեռ հավանականային բաշխման հետևյալ օրենքի՝

| Պահանջարկ        | 50  | 60  | 70  | 80  | 90  |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Հավանականություն | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի պատվերի տրման պահը /կետը/, որպեսզի պահանջարկի բավարարման հավանականությունը լինի 90%-ից ոչ պակաս:

**Խնդիր 28:** Ռոտչակի ապրանքի պահանջարկը բավարարում է աղյուսակում բերված համասեռ հավանականային բաշխման օրենքին:

| Պահանջարկ (x) | 50  | 60  | 70  | 80  | 90  |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| p(x)          | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի պատվերի տրման պահը (կետը), որպեսզի պահանջարկի բավարարման հավանականությունը լինի առնվազն 90%:

### Ստուգողական հարցեր

1. Ինչպիսի՞ ծախսերից են կազմվում պաշարների կառավարման համակարգի ընդհանուր ծախսերը:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում մատակարարվող արտադրանքի խմբաքանակների միջև ընկած լավագույն ժամանակահատվածը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում յուրաքանչյուր խմբաքանակի լավագույն ծավալը մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում պակասուրդի բացակայության դեպքում:
4. Ինչպե՞ս է որոշվում պատվերի լավագույն ծավալը պակասուրդով մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում:
5. Ինչպե՞ս են որոշվում գումարային ծախսերի նվազագույն մակարդակը պակասուրդի բացակայության և առկայության դեպքում:
6. Ինչպե՞ս են որոշվում պատվերների միջև ընկած լավագույն ժամանակի միջակայքը պակասուրդի բացակայության և առկայության դեպքում:
7. Ո՞ր մեծությունն է կոչվում չբավարարված պահանջարկների հետևանքով վնասների խտություն և դա ի՞նչ կարգավորիչ դեր է խաղում պակասուրդով ստատիկ մոդելում:
8. Նկարագրե՞ք պաշարների լավագույն ծավալի հաշվարկման քայլաշարը գնագեղչով մենարտադրանքային ստատիկ մոդելում:
9. Ինչպե՞ս է որոշվում արտադրանքների պաշարների լավագույն ծավալները սահմանափակ տարողությամբ պահեստային տարածքների դեպքում:
10. Ինչպիսի՞ տեսք ունի անդրադարձային հավասարումը մենարտադրանքային N փուլանոց դինամիկ մոդելում:
11. Պաշարների մակարդակի ո՞ր արժեքի դեպքում պետք է կատարել նոր պատվերի հայտ կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգում:
12. Ինչպիսի՞ն է ընդհանուր տարեկան ծախսերը կրկնվող պատվերի մակարդակային համակարգում:
13. Որո՞նք են հաստատագրված միջակայքի այն սահմանները, որի ներքո պետք է իրագործել պահանջարկի պատվերը:
14. Ի՞նչ ծավալով արտադրանք անհրաժեշտ է պատվիրել պարբերաշրջանային համակարգում:
15. Ինչպե՞ս է որոշվում պաշարների տրման լավագույն ժամանակահատվածը կրկնվող պատվերի պարբերաշրջանային համակարգում:



## VI. ՀԵՐԹԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Խնդիր 1. Հերթերի սպասարկման մոդելի տարրերի և բնութագրերի միջոցով նկարագրել իրական օբեկտները, գործընթացները և վիճակները (որոնց թվին են պատկանում սպասարկման հայտերը, սպասարկվող սարքերը, հերթերի կանոնակարգը, հայտերի սկզբնաղբյուրի և սպասման համակարգի տարողության քանակական ցուցանիշները), այն դեպքերում, ելք խոսքը վերաբերում է

- գնորդներին, որոնք հերթի են կանգնած խանութի մուծման կետում,
- ավտոմեքենաներին, որոնք սպասում են լուսագոյանալի կանաչ լույսին,
- հիվանդներին, որոնք ընդունելության հերթի են կանգնած,
- ինքնաթիռներին, որոնք սպասում են մեկնաթիչի հրամանին,
- ավտոմեքենաների հերթին մայրուղի դուրս գալու պահին,
- հաշվողական կենտրոնին,
- շուրջօրյա աշխատող բանկի բաժանմունքին:

Խնդիր 2: Ավտոմատ հեռախոսակայանը (ԱՀԿ-ը) ունի կապի հինգ գիծ:

ԱՀԿ-ի ծառայություններից բաժանորդներն օգտվում են միմյանցից անկախ, ժամանակի պատահական պահերի: Բաժանորդների հայտերը կազմում են պարզագույն խոսք մեկ լուպեում  $\lambda=2$  հաճախությամբ: Ցանկացած խոսակցության տևողությունը նույնպես պատահական մեծություն է և ենթարկվում է բաշխման ցուցային օրենքին (նկատենք, որ խոսակցության տևողության բաշխման ցանկացած օրենքի դեպքում կարելի է օգտվել Լոլանգի բանաձևերից): Յուրաքանչյուր խոսակցության համար անհրաժեշտ միջին ժամանակը հավասար է մեկ լուպեի:

Պահանջվում է գնահատել ԱՀԿ-ի գործունեությունը:

Խնդիր 3: Պահանջվում է նախագծել ԱՀԿ (մայրի 1-ին խնդիրը), որի համար բաժանորդի հայտը մերժելու հավանականությունը չգերազանցի 0.01-ից ( $P_n \leq 0.01$ ): ԱՀԿ-ը նախագծվում է այնպես, որ հայտերի խոսքը բնութագրվում է  $\lambda = 0.5$  հայտ մեկ լուպեում: Խոսակցության միջին տևողությունը հավասար է 2 լուպեի Որոշել կապի գծերի անհրաժեշտ քանակը:

Խնդիր 4: Տեղեկությունների անընդհատ խոսք ունեցող իրազեկման-տրամաբանական սարքավորման հիշողությունը միաժամանակ կարող է ընդունել  $N$  տեղեկություն: Եթե հիշողությունը զբաղված է, ապա մուտք գործող բոլոր տեղեկությունները համարվում են կորած:

Սարքավորման հիշողության մեջ գտնվող տեղեկությունների հաջորդաբար մշակվում են: Մեկ տեղեկության կորուստի հավանականությունը չի գերազանցում 0.25-ից, իսկ մշակման միջին ժամանակը հավասար է 1.6 վարկյանի: Տեղեկությունները մուտք են գործում  $\lambda = 1$  հաճախությամբ:

Անհրաժեշտ է որոշել իրազեկման-տրամաբանական սարքավորման հիշողության նվազագույն ծավալը:

Խնդիր 6: Ռադիոսարքերի նորոգման արհեստանոցում աշխատում է հինգ վարպետ: Վարպետներին ներկայացվում է օրական միջին հաշվով 10 հայտ: Բնակչության կողմից օգտագործվող ռադիոսարքերի քանակը չափազանց մեծ է, և դրանք բոլորն էլ միմյանցից անկախ այս կամ այն ժամանակ խափանվում են:

Սարքերի նորոգման հայտերի հոսքը պատահական՝ պոստոնյան է: Իր հերթին սարքերի նորոգման համար պահանջվող ժամանակը՝ կախված անսարքության բնույթից, վարպետի որակավորումից և բազմաթիվ այլ պատճառներից, նույնպես պատահական՝ ցուցչային է և ըստ վիճակագրական տվյալների օրական միջին հաշվով վարպետներից յուրաքանչյուրը նորոգում է ը 2.5 ռադիոսարք:

Գնահատեք ռադիոսարքերի նորոգման արհեստանոցի աշխատանքը:

Խնդիր 7: Երկաթուղու կայարանն ունի 5 կառամատույց: Կայարան է մտնում ամսական միջին հաշվով 20 բեռնատար գնացք: Գնացքները ժամանում են տարբեր կայարաններից, անցնում են տարբեր տարածություններ, և բազմաթիվ պատճառներով փոփոխվում է դրանց արագությունը:

Հետևաբար գնացքները կայարան են ժամանում պատահական պահերի, որոնք և կազմում է պոստոնյան հոսք: Յուրաքանչյուր գնացքի բեռնաթափման ժամանակը նույնպես պատահական մեծություն է, կախված է գնացքների բեռնատարողությունից, բեռների առանձնահատկություններից և շատ ուրիշ պատճառներից: Մեկ գնացքի բեռնաթափման վրա ծախսվում է միջին հաշվով 6 աշխատանքային օր:

Գնահատեք կայարանի աշխատանքը: Արդյոք կարո՞ղ է աճել կայարանի թողունակությունը, եթե կառուցվեն նոր կառամատույցներ:

Նպատակահարմար է արդյոք կայարանի ընդլայնումը:

Խնդիր 8. Սպառազինության 10 միավորի նորոգման համար գործում են զորամասերում տեղաբաշխված տարբեր տեսակի 10 արհեստանոցներ: Սպասարկումը կազմակերպվում է շրջիկ արհեստանոցների միջոցով կամ հենակետային արհեստանոցում:

Համապատասխանաբար սպառազինության տարբեր տեսակների նորոգման տևողությունը տարբեր է: Առաջին դեպքում այն կազմված է արհեստանոցի տեղափոխման վրա ծախսված ժամանակից, ինչպես նաև անսարքության ուսումնասիրման և նորոգման ժամանակից: Երկրորդ դեպքում այն բնորոշվում է անսարք զենքի տեղափոխումով, անսարքության ուսումնասիրությամբ և նորոգումով: Դիցուք՝ նորոգման տևողությունը պատահական մեծություն է՝ բաշխված ցուցչային օրենքով՝  $\mu$  պարամետրով, որտեղ

$$\bar{i} = \frac{1}{\bar{t}_h}, \bar{t}_h = \bar{t}_y + \bar{t}_{տ.} + \bar{t}_{ու} + \bar{t}_{աշ} + \bar{t}_q.$$

- $\bar{t}_y$  - արհեստանոցի կանչի համար անհրաժեշտ ժամանակը,  
 $\bar{t}_{տ.}$  - արհեստանոցի տեղափոխման միջին ժամանակը,  
 $\bar{t}_{ու}$  - ուսումնասիրության միջին ժամանակը,  
 $\bar{t}_{աշ}$  - արհեստանոցի աշխատանքի կազմակերպման միջին ժամանակը,  
 $\bar{t}_q$  - նորոգման միջին ժամանակը,  
 $\bar{t}_h$  - նորոգման միջին գումարային ժամանակը:

Վիճակագրական տվյալներից հայտնի է, որ ամսական սպասարկվում է 5 միավոր, իսկ արհեստանոցի կանչի և տեխնիկայի նորոգման համար պահանջվում է միջին հաշվով 6 օր: Նույն եղանակով որոշվում է հենակետային արհեստանոցների սպասարկման միջին ժամանակը:

Նորոգման հայտերի հոսքը սահմանափակված է գործարանների քանակով և համարվում է պուասոնյան:

Դիցուք՝ հոսքի խտությունը ամսական  $\lambda=1$  միավոր է: Ենթադրում ենք, որ եթե տրված է նորոգման հայտ, ապա արհեստանոցը տեղափոխվում է գործարան: Եթե բոլոր արհեստանոցները միաժամանակ զբաղված են, ապա շարքից դուրս եկած զենքը դրվում է նորոգման հերթի:

Պահանջվում է գնահատել արհեստանոցների աշխատանքը:

**Խնդիր 9:** Կոմիսիոն խանութի երկու ապրանքագետները բնակչությունից ընդունում տարբեր իրեր՝ որոշակի վարձատրությամբ հետագա վաճառքի նպատակով:

Նրանք ստուգում են ապրանքի վիճակը. գնահատում են ապրանքը և դուրս են գրում անդորրագրեր: Կախված իրերի քանակից, դրանց որակից և շատ այլ պատճառներից՝ յուրաքանչյուր հաճախորդի սպասարկման ժամանակը պատահական է և բավարարում է բաշխման ցուցային օրենքին՝  $\mu$  պարամետրով: Քանի որ ապրանքագետները ունեն տարբեր աստիճանի փորձառություն, ապա առաջինը հաճախորդներին սպասարկում է միջին հաշվով 1.5 անգամ արագ, քան երկրորդը:

Դիցուք՝ առաջին ապրանքագետը մեկ ժամում սպասարկում է միջին հաշվով 9 հաճախորդ, իսկ մյուսը՝ 6 հաճախորդի: Հաճախորդները խանութ են այցելում միմյանցից անկախ ու պատահականորեն՝ մեկ ժամում 12 հաճախորդ, և կազմում են պուասոնյան մոսք: Նրանց կողմից ապրանքագետների ընտրությունը հավասարահավանական է, այսինքն՝  $\varphi = 0.5$ :

Պահանջվում է գնահատել կոմիսիոն խանութի աշխատանքը:

Խնդիր 10: Նորակառույց թաղամասում բացվել է «Նազելի» գեղեցկության սրահ, որն սպասարկում է այդ թաղամասի բնակիչներին: Սրահի հաճախորդները վարսավիրանոց են այցելում միմյանցից անկախ, ժամանակի պատահական պահերին և կազմում են պուասոնյան հոսք:

Սակայն հաճախորդները լինում են երկու տեսակի: Ոմանք՝ վարպետների զբաղվածության պատճառով, կարող են հերթ կանգնել և սպասել, իսկ մյուսները շտապում են և հեռանում վարսավիրանոցից:

Դիցուք՝ առաջին տեսակի հաճախորդները կազմում են հոսք՝ ժամում  $\lambda_1 = 10$  հաճախությամբ, իսկ երկրորդ տեսակի հաճախորդները՝ ժամում  $\lambda_2 = 2$  հաճախությամբ:

Հաճախորդի սպասարկման համար անհրաժեշտ ժամանակը նույնպես պատահական է: Դա կախված է հաճախորդի սպասարկման տեսակից և շատ այլ պատճառներից: Յուրաքանչյուր հաճախորդի սպասարկման համար վարպետին անհրաժեշտ է միջին հաշվով 15 րոպե, այսինքն, յուրաքանչյուր վարպետ մեկ ժամում սպասարկում է միջին հաշվով չորս հաճախորդ  $\mu = 4$ : Վարսավիրանոցում աշխատում է ընդամենը 4 վարպետ:

Անհրաժեշտ է գնահատել վարսավիրանոցի աշխատանքը:

Խնդիր 11. Վիճակագրական տվյալները ցույց են տալիս, որ բերքահավաքի օրերին որոշակի թվով սարքին տրակտորներից 20-ը խափանվում է:

Յուրաքանչյուր տրակտորի նորոգման պատճառը կախված է անսարքության տեսակից և տևում է միջինը մեկ օր ( $\bar{t}_{\text{նորոգ}} = 1$  օր,  $\mu = 1$  տրակտոր):

Գնահատեք տրակտորների վիճակը բերքահավաքի ժամանակ:

Խնդիր 12: Ինքնասպասարկման համակարգում պահանջների մուտքի հոսքը պուասոնյան է՝ ժամում  $\lambda = 50$  հաճախությամբ: Սպասարկման միջին տևողությունները բաշխված են էքսպոնենցիալ՝ միջինը  $\mu = 5$  րոպե:

Պահանջվում է.

- Հաշվել կամայականորեն ընտրված ժամանակահատվածում սպասարկման փուլում գտնվող պահանջների միջին թիվը.
- Որոշել այն ժամանակահատվածը, երբ սպասարկող համակարգը պարապորդի մեջ է:

Խնդիր 13: Ավտոկայանում կա 10 տեղ՝ յուրաքանչյուրը մեկ մեքենայի համար: Ավտոմեքենաները կայան են ժամանում ըստ հավանականությունների պուասոնյան բաշխման՝ ժամում  $\lambda = 10$  ավտոմեքենա: Կայանում ավտոմեքենաների գտնվելու տևողությունները բաշխված են ցուցային՝ միջին հաշվով 10 րոպե:

Պահանջվում է հաշվել.

- Ազատ տեղերի միջին քանակը,
- Հավանականությունը, որ ավտոմեքենայի համար ազատ տեղ չի գտնվի,
- Ավտոմեքենաների կայան ժամանելու լավագույն հաճախությունը:

**Խնդիր 14.** Հիվանդները պոլիկլինիկա են հաճախում ըստ հավանականությունների պուասոնյան բաշխման օրենքի՝ ժամում  $\lambda = 30$  հիվանդ: Սպասարահը տեղավորում է 14 հիվանդ: Ընդունելության տևողությունը ենթադրվում է հավանականությունների բաշխման ցուցային օրենքի՝ միջին հաշվով ժամում  $\mu = 20$  հիվանդ:

Պահանջվում է որոշել.

- Հիվանդների այցելությունների լավագույն հաճախությունը;
- Հավանականությունը, որ հերթական հիվանդը չի սպասի;
- Հավանականությունը, որ հերթական հիվանդը կգտնի սպասարահում ազատ տեղ;
- Պոլիկլինիկայում հիվանդի գտնվելու միջին տևողությունը (մտնելու պահից մինչև ընդունելության վերջը):

**Խնդիր 15.** Սպասարկող համակարգի հաճախորդները մուտք են գործում համաձայն հավանականությունների պուասոնյան բաշխման օրենքի՝ ժամում երկու հաճախորդ:

Պահանջվում է հաշվել.

- Սպասարկող համակարգ մուտք գործող հաճախորդների միջին քանակը ութ ժամվա ընթացքում,
- Հավանականությունը, որ մեկ ժամվա ընթացքում սպասարկող համակարգ մուտք կգործի ռմկազմ մեկ հաճախորդ:

**Խնդիր 16:** Հաճախորդները ռեստորան են այցելում ըստ հավանականությունների պուասոնյան բաշխման՝ ժամում 20 հաճախորդ: Ռեստորանը բացվում է ժամը 11-ին: Պահանջվում է հաշվել՝

- Հավանականությունը, որ ժամը 11-ն անց 12-ին ռեստորանում կլինի 20 հաճախորդ պայմանով, որ 11-ն անց 07-ին ռեստորանում եղել է 18 հաճախորդ;
- Հավանականությունը, որ նոր հաճախորդը ռեստորան կայցելի 11.28-ի և 11-ն անց 30-ի միջև ընկած ժամանակահատվածում, եթե հայտնի է, որ նախորդ հաճախորդը ռեստորան է եկել 11-ն անց 25-ին:

**Խնդիր 17:** Ավտոմայրուղու մոտ գտնվող խորտկարանի վաճառատեղանին կարող է մոտենալ միայն մեկ ավտոմեքենա: Վիճակագրական տվյալների համաձայն ավտոմեքենաները խորտկարան մոտենում են ըստ հավանականությունների պուասոնյան բաշխման՝ իրենց թույլտվությունը ստանալուց միջին հաճախությամբ: Խորտկարան տանող ճանապարհը տեղավորում է տասը ավտոմեքենա (ակնհայտ է, որ եթե այդ ճանապարհը լիովին զբաղված է, ապա լրացուցիչ ավտոմեքենաները կարող են իրենց հերթին սպասել մոտակա ազատ տեղերում): Հաճախորդների պատվերների կատարման համար միջին հաշվով պահանջվում է 15 թույլ, սակայն ընդհանուր դեպքում սպասարկման տևողությունները բաշխված են ըստ ցուցային օրենքի: Պահանջվում է հաշվել.

- ա) Հավանականությունը, որ խորտկարանի մոտ չի հայտնվի և ոչ մի ավտոմեքենա,  
 բ) Սպասարկմանը սպասող (սակայն ընթացիկ պահին դեռևս չսպասարկվող) հաճախորդների միջին թիվը,  
 գ) Միջին ժամանակը հաճախորդի հայտնվելու պահից մինչև նրա սպասարկման սկիզբը,  
 դ) Հավանականությունը, որ խորտկարան ժամանած ավտոմեքենաների քանակը կգերազանցի խորտկարան տանող ճանապարհի «տարողությունը»:

Խնդիր 18: Հաճախորդները զովացուցիչ ըմպելիքի կրպակին մոտենում են ըստ հավանականությունների պուասոնյան բաշխման՝ ժամում տաս մարդ միջին հաճախությամբ: Հաճախորդների սպասարկման տևողությունները բաշխված են ցուցչային՝  $\mu = 5$  րոպե միջին արժեքով: Կրպակի մոտ կա սպասելու երեք տեղ, ներառյալ ավտոմեքենայի համար հատկացված մեկ տեղը: Կրպակին մոտեցող մյուս ավտոմեքենաները տեղավորվում են շրջակա ազատ տեղերում:

Պահանջվում է հաշվել.

- Հավանականությունը, որ մոտեցող հաճախորդը հնարավորություն ունի սպասելու համար հատկացված հարթակում տեղ գրավելու ;
- Հավանականությունը, որ ժամանած հաճախորդը ստիպված կլինի սպասել այդ հարթակից դուրս;
- Ժամանակահատվածի միջին տևողությունը, որի ընթացքում հաճախորդը ստիպված է սպասելու իր հերթին;
- Կրպակի մոտ գտնվող ավտոմեքենաների տեղերի քանակը, հաշվի առնելով, որ հերթում հաճախորդի կորցրած միջին ժամանակը կազմում է կորցրած ողջ ժամանակի առնվազն 20%-ը:

Խնդիր 19: Հաճախորդների հայտերը կենտրոնական համակարգի սպասարկման սարքը ընդունում է հետևյալ հաճախականությամբ.

| Ժամանակը մեկ հեռախոսազանգից մինչև մյուսը (րոպե) | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 |
|-------------------------------------------------|----|----|----|----|----|---|---|
| Չանգերի %                                       | 12 | 15 | 21 | 25 | 18 | 5 | 4 |

Այդ հայտերը փոխանցվում են չորս հիմնական բաժիններին՝ ստորև բերված տոկոսային հարաբերակցությամբ:

| Բաժիններ                      | 1  | 2  | 3  | 4  |
|-------------------------------|----|----|----|----|
| Չանգերի %-ը                   | 10 | 15 | 20 | 55 |
| Պատասխանի տևողությունը (րոպե) | 2  | 5  | 7  | 4  |

Մոդելավորել առաջին 25 հեռախոսազանգերի հոսքը դեպի սպասարկման համակարգ և գնահատել տարբեր բաժինների աշխատանքը հաճախորդներին սպասարկման գործում:

**Խնդիր 20:** Մաքսատունն կա բեռնատար մեքենաների ստուգման մեկ կետ: Մեքենաների հոսքը դեպի մաքսատուն պուասոնյան է՝ ժամում  $\lambda = 0.4$  հաճախությամբ: Մեկ մեքենայի մաքսաստուգման համար անհրաժեշտ է 2 ժամ: Պահանջվում է գտնել հավանականությունը, որ մաքսատան ստուգման կետը՝

ազատ է,  
զբաղված է,  
հերթում կա 1,2,...,5 բեռնատար մեքենա,  
հերթում կա ոչ ավելի քան 2,3,...5 բեռնատար մեքենա,  
հերթում կա առնվազն 2,3,...5 բեռնատար մեքենա:

Հաշվել հերթում մեկ մեքենայի սպասելու միջին ժամանակը և հերթում գտնվող մեքենաների միջին քանակը:

Պատասխանել *Այո* կամ *Ոչ*:

1. Պուասոնի բաշխման միջին արժեքն ու ցրվածքը հավասար լինել չեն կարող:
2. Եթե զանգվածային սպասարկման հայտերի մուտքային պահերը բաշխված են ըստ Պուասոնի օրենքի, ապա իրար հաջորդող հայտերի միջև ընկած ժամանակահատվածները բաշխված են ցուցչային:
3. Եթե մուտքի հոսքը պուասոնյան է, ապա ժամանակի անվերջ փոքր հատվածում համակարգ կարող է մուտք գործել երկու հայտ:
4. Պուասոնյան մուտքային հոսքի հայտերի միջին հաճախությունը հավասար է՝ ըստ ցուցչային օրենքի բաշխված, հաջորդական հայտերի միջև ընկած միջին ժամանակահատվածին:
5. Եթե համակարգում հայտերի մուտքի պահերը պուասոնյան բաշխում ունեն, ապա վերջին մուտքի պահից անցած ժամանակահատվածից է կախված հավանականությունն այն բանի, որ հետագա որոշակի ժամանակահատվածում տեղի կունենա սպասարկման հերթական հայտի մուտքը:
6. Եթե իրար հաջորդող հայտերի միջև ընկած ժամանակահատվածները բաշխված են ցուցչային, ապա ըստ հաշվի յուրաքանչյուր երրորդ (ընթացիկի համեմատությամբ) հայտերի մուտքի պահերը նույնպես բաշխված են ցուցչային:
7. Եթե իր հերթում սպասող հաճախորդը անհամբեր է, ապա նա կարող է իր հերթից անցնել մի այլ հերթ:
8. Որոշ ժամանակ հերթում սպասելով և համոզվելով, որ սպասարկումն իրականացվում է չափազանց դանդաղ, հաճախորդը կարող է իրաժարվել ապաստարկման տվյալ համակարգից:
9. Անհամբեր հաճախորդի հերթից հերթ անցնելը արդյո՞ք բացատրվում է նրանով, որ հաճախորդը հույս ունի կրճատել իր սպասման տևողությունը:

10. Սպասման տևողությունների բաշխումը կախված է այն բանից, թե հերթի որ կանոնակարգով է կատարվում սպասման համակարգի մեջ մուտք գործող հայտերը սպասարկման ընդունելու հերթականությունը:
11. Սպասման միջին տևողությունը ավելի կարճ է այն համակարգում, որտեղ սպասարկման համակարգ մուտք գործող պահանջների քանակը սահմանափակվում է:
12. Սպասարկման մեկ հայտին տրված սպասման միջին ժամանակը պատահական մուտքի հոսք ունեցող սպասարկման համակարգում ավելի քիչ է, քան կամայական ընտրված հայտի սպասման միջին ժամանակը յուրաքանչյուր հաճախորդի սպասարկման սկեռում ժամանակ ունեցող համակարգում:
13. Սպասարկման համակարգ մտնող հայտերի արդյունավետ հաճախությունը չի կարող գերազանցել սկզբնաղբյուրից սերվող պահանջների ստացման չվերահսկվող հաճախությանը:
14. Եթե հայտնի են ստացիոնար հավանականությունների արժեքները, որոնք համապատասխանում են համակարգում եղած հայտերին, կարելի է հաշվել զանգվածային սպասարկման համակարգի բոլոր հիմնական գործառական բնութագրերը՝ հաճախորդների մուտքի և ելքի բաշխման պահերի կամայական տեսակների համար:
15. Սպասարկման մեկ սարք ունեցող զանգվածային համակարգում ստացիոնար վիճակը երկարատև ժամանակահատվածում հասանելի է ,երբ մեկ միավոր ժամանակի ընթացքում մուտք գործող հաճախորդների միջին թիվը փոքր է մեկ միավոր ժամանակի ընթացքում սպասարկվող հաճախորդների միջին թվից և եթե հերթի երկարությունը սահմանափակ է:
16. Սպասարկող համանման սարքերի միավորումը չի կարող հանգեցնել մուտք գործող հայտերի սպասման միջին տևողության նվազեցմանը:
17. Այն փաստը, որ լցակայաններում ավտոմեքենաների վարորդները իրենք են միացնում և անջատում բենզապոմպը, հնարավորություն է տալիս լցակայանը դիտարկել որպես ինքնասպասարկման համակարգ:
18. Ավտոմեքենաների կայանմանը հատկացված տարածքը կարելի է դիտարկել որպես զանգվածային սպասարկման համակարգ, որում սպասարկման հանգույցների քանակը հավասար է այն տեղերի քանակին, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է ծառայել մեկ ավտոմեքենայի կայանման:
19. Գերակայությամբ համակարգի մեջ ավելի բարձր գերակայությամբ հայտի մուտք գործելու դեպքում սպասարկումը չի կարող ընդհատվել:
20. Պուասոնյան մուտքային հոսքի ելքային հոսքը մույպես պուասոնյան է:



## VII. ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

### 1. Մատրիցային խաղեր

1. Երկու խաղացողներից յուրաքանչյուրը իր ձեռքի  $n$  ( $1 \leq n \leq 5$ ) թվով մատ է ցույց տալիս մյուսին և միաժամանակ ասում է մատների այն թիվը, որ իր կարծիքով ցույց կտա հակառակորդը: Եթե խաղացողներից մեկը ճիշտ է գուշակել, իսկ մյուսը՝ ոչ, ապա այն խաղացողը, որ ճիշտ է գուշակել, ստանում է երկու խաղացողների ցույց տված մատների գումարին հավասար շահում: Մյուս բոլոր դեպքերում երկու խաղացողների շահումներն էլ համարվում են զրոյական:

ա) Բանի՞ վարվելակերպ ունի յուրաքանչյուր խաղացող  $n=3$  դեպքում:

բ) Գրել խաղի մատրիցը  $n=2$  դեպքում:

2. Որո՞նման ջանքերի բաշխում: Երկրորդ խաղացողը  $n$  բջիջներից մեկում որևէ առարկա է պահում: Առաջին խաղացողի տրամադրության տակ կան  $r$  փնտրողներ, որոնք, առարկան գտնելու համար պետք է բաշխվեն ըստ բջիջների: Օրինակ, դեպի առաջին բջիջ կարող են ուղղվել  $(r-1)$  փնտրող, երկրորդ բջիջ՝ մեկ փնտրող, իսկ մյուս բջիջներ՝ ոչ ոք, և այլն:

Ենթադրվում է, որ հայտնի է որո՞նման ընթացքում մեկ փնտրողի կողմից մեկ բջիջում առարկան գտնելու հավանականությունը (եթե առարկան այդտեղ է գտնվում): Տարբեր փնտրողների կողմից առարկան գտնելու անկախ պատահույթներ են:

Առաջին խաղացողի շահումը փնտրողների տրված բաշխման դեպքում առարկան գտնելու հավանականությունն է.

ա) Հաշվել առաջին խաղացողի մաքուր վարվելակերպերի թիվը:

բ) Գրել խաղի մատրիցը:

3. Բազմառարկա որոնում: Երկրորդ խաղացողը  $m$  սև գնդիկները պահում է  $n$  սափորներում:  $j$ -րդ սափորում պարունակվող գնդիկների ընդհանուր թիվը (սև և սպիտակ) հավասար է  $\ell_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ : Երկրորդ խաղացողը պետք է սև գնդիկները բաշխի  $n$  սափորների միջև, ընդ որում յուրաքանչյուր սափորի գնդիկների ընդհանուր քանակը հաստատուն է և հավասար է  $\ell_j$ ,  $\ell_j > m$ : Հակառակորդը (առաջին խաղացողը), հնարավորություն ունենալով ստուգելու սափորներից մեկը, ջանում է հայտնաբերել առավելագույն թվով սև գնդիկներ:  $i$ -րդ սափորը ստուգելիս առաջին խաղացողը պատահաբար (հավասար հնարավոր)  $m$  հատ գնդիկ է ընտրում  $\ell_i$ -ից և իր շահումը հավասար է  $m$  գնդիկներից կազմված ընտրանքում սև գնդիկների մաքեմատիկական սպասելիի թվին:

ա) Դիցուք՝  $i$ -րդ սափորում պահված է  $p_i$  հատ սև գնդիկ: Հաշվել  $\beta_{ij}$  հավանականությունը, որ  $i$ -րդ սափորից վերցրած  $r$  հատ գնդիկների խումբը պարունակում է ուղիղ  $j$  հատ սև գնդիկ:

բ) Գրել խաղի մատրիցը:

4. Հակաօդային պաշտպանություն: Հակաօդային պաշտպանության համակարգում կայող են կիրառվել օդային նշանակետերը խոցելու երեք տեսակի միջոցներ (1,2,3), որոնք պետք է բաշխվեն երկու մեկնարկային կայանքների միջև: Միջոցներից յուրաքանչյուրով ինքնաթիռ խոցելու հավանականությունները տրված են հետևյալ մատրիցում.

$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}:$$

Ենթադրվում է, որ հարձակումը հնարավոր է միայն մեկ ինքնաթիռով:

Առաջին խաղացողի շահումը հակաօդային պաշտպանության համակարգով ինքնաթիռ խոցելու հավանականությունն է:

ա) Գրել խաղի մատրիցը:

բ) Պարզել, թե արդյո՞ք գոյություն ունի՞ մաքուր վարվելակերպերով լուծում:

5. Գտնել հետևյալ խաղերի արժեքները և հավասարակշռության իրավիճակները.

$$\text{ա) } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ բ) } \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 7/2 \end{bmatrix}:$$

6. Ստուգել, թե արդյո՞ք

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

մատրիցով խաղում խաղի արժեքը՝  $v=2$  և  $(x^*, y^*)$  գույքը, որտեղ  $x^*=(0,0,1)$ ,  $y^*=(2/5, 3/5, 0)$ , հավասարակշռության իրավիճակն է:

7. Դիցուք՝  $A'(A'')$ -ը  $A$  մատրիցի ենթամատրից է, որն ստացվում է  $A$  մատրիցից մի շարք տողեր (սյունակներ) ջնջելով: Յույց տալ, որ ճիշտ են  $v_{A'} \leq v_A \leq v_{A''}$  անհավասարությունները, որտեղ  $v_{A'}$ -ը և  $v_{A''}$ -ը համապատասխանաբար  $\Gamma_{A'}$  և  $\Gamma_{A''}$  խաղերի արժեքներն են

8. Դիտարկվում է  $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  մատրիցով խաղը: Խաղի արժեքը՝  $v_A=1$ , և

առաջին խաղացողի լավագույն վարվելակերպը  $x^* = (1/3, 2/3, 0)$  վեկտորն է: Գտնել երկրորդ խաղացողի  $y^*$  լավագույն վարվելակերպը:

9. Ցույց տալ, որ գերակայվող վարվելակերպը չի կարող էական լինել:

10. Գծագրորեն լուծել տրված մատրիցով խաղը

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5-1 \\ 0 & -2 & -3-1 \end{bmatrix}:$$

11. Ցույց տալ, որ  $A$  մատրիցի 3-րդ տողը գերակայվող է, որտեղ՝

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}:$$

12. Ցույց տալ, եթե խաղի մատրիցն ունի բերված տեսքը ապա առաջին սյունակի ընտրությունը համարժեք է  $y = (0, 1/3, 2/3)$  խառը վարվելակերպին:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Օգտագործելով գերակայություն հասկացությունը, գտնել հետևյալ մատրիցով խաղի լուծումը.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

14. Լուծել մենափորձ որոնման խաղը: Երկրորդ խաղացողը մի առարկա է պահում  $n$  բջիջներից մեկում: Առաջին խաղացողը այն փնտրում է այդ բջիջներից մեկում, ընդ որում,  $i$ -րդ բջիջում առարկան գտնելու հավանականությունը հավասար է  $\beta_i > 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  (այն պայմանով, որ դա այնտեղ է): Ցույց տալ, որ դիտարկվող խաղը լիովին խառն է: Գտնել խաղի լուծումը:

15. Երկու առարկայի որոնման խաղ: Երկրորդ խաղացողը երկու առարկա է պահում  $n$  բջիջներում (կարելի է երկուսն էլ մեկ բջիջում): Առաջին խաղացողի նպատակն է հայտնաբերել գոնե մեկ առարկա, ընդ որում, նա հնարավորություն ունի ստուգելու մեկ բջիջ ( $i$ -րդ բջիջում մեկ առարկա հայտնաբերելու հավանականությունը հավասար է  $\beta_i > 0$ , (այն պայմանով, որ առարկան այնտեղ է): Եթե  $i$ -րդ բջիջում միաժամանակ երկու առարկա է գտնվում, ապա դրանց միաժամանակյա հայտնաբերման հավանականությունը հավասար է  $\beta_i^2$ : Այսպիսով  $A = \{\alpha_{ka}\}$  մատրիցը,  $a = (i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , ունի հետևյալ տեսքը.

$$\alpha_{ka} = 0, \quad i=j, \quad i \neq k,$$

$$\alpha_{ka} = \beta_i, \quad i=k, \quad i \neq j,$$

$$\alpha_{ka} = \beta_j, \quad j=k, \quad i \neq j,$$

$$\alpha_{ka} = \beta_i(2-\beta_i), \quad i=j=k:$$

Լուծել այս խաղը:

16. Լուծել բազմադարձաբար որոնման խաղը (տես 3-րդ վարժություն):

17. Փնտրողի երկփորձ որոնման խաղ:

Երկրորդ խաղացողը որևէ առարկա է պահում  $n$  բջիջներից մեկում, իսկ առաջին խաղացողը (փնտրողը) այդ առարկան փնտրում է՝ հնարավորություն ունենալով ստուգելու բջիջներից երկուսը (մույն բջիջ կրկնակի ստուգում չի թույլատրվում):

Առաջին խաղացողի մաքուր վարվելակերպերի բազմությունը բաղկացած է  $(i, j)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  չհամընկնող զույգերից և պարունակում է  $C_n^2$  տարր: Երկրորդ խաղացողի մաքուր վարվելակերպերի բազմությունը որոշվում է  $k$  ինդեքսով,  $k=1, 2, \dots, n$  և պարունակում է  $n$  տարր: Շահումների մատրիցն ունի  $\beta = \{\beta_{(i,j),k}\}$  տեսքը, որտեղ

$$\beta_{(i,j),k} = \begin{cases} \tau_k, & \text{եթե } i = k \text{ և } j = k, \\ 0, & \text{այլ դեպքում} \end{cases}$$

Լուծել  $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n > 0$  և  $1/\tau_1 + 1/\tau_2 + \dots + 1/\tau_n$  ենթադրությամբ խաղը:

20. Երկփորձ որոնման խաղում դիտարկենք այն դեպքը, երբ առաջին խաղացողի մաքուր վարվելակերպերի բազմությունը բաղկացած է բոլոր հնարավոր  $(i, j)$  զույգերից և պարունակում է  $n^2$  տարր:

Խաղը լուծել ենթադրելով, որ

$$\sum_{k=1}^{n-1} \tau_n / \tau_k < 1:$$

21. "Շեղվելու խաղում" (տես [3], 6.1 կետ), ցույց տալ, որ առաջին խաղացողը միշտ ունի միակ լավագույն վարվելակերպ:

## 2. Անհակամարտ խաղեր

1. Երկու միավորումներ օգտակար համաձայնության հետախուզման աշխատանքներ են կատարում  $n$  թվով հանքավայրերում: Առաջին և երկրորդ միավորումների հետախուզման հիմնական միջոցները կազմում են համապատասխանաբար  $\alpha$  և  $\beta$ :  $i$ -րդ հանքավայրում օգտակար համաձայնության ստացված շահույթը հավասար է  $\gamma_i > 0$ : Միավորումների միջև շահույթը բաշխվում է ներդրումների մասնաբաժիններին՝ համապատասխան: Ընդ որում, եթե  $i$ -րդ հանքավայրում միջոցներ ներդրված չեն, ապա  $i$ -րդ հանքավայրից միավորումների շահույթները հավասար են զրոյի:

ա) Նշված իրավիճակը նկարագրել խաղի տեսքով, յուրաքանչյուր միավորման շահումը համարելով բոլոր հանքավայրերի օգտակար հանույթից ստացված ընդհանուր շահույթը:

բ) Գտնել Նեշի հավասարակշռության իրավիճակը:

Ցուցում:  $H_1$  ֆունկցիայի գոգավորությունից օգտվել ըստ  $x$ -ի և  $H_2$ -ի՝ ըստ  $y$ -ի:

2. Բնապահպանության առումով նշանակալից շրջանում կա  $n$  թվով արդյունաբերական ձեռնարկություն, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի մեկ աղտոտման աղբյուր:  $i$ -րդ ձեռնարկության արտանետվող վնասակար նյութերի  $q_i$  խտության արժեքը համեմատական է այդ ձեռնարկության ամբողջ արտանետման  $0 \leq x_i \leq a_i$ ,  $i=1, \dots, n$  ծավալին:  $i$ -րդ ձեռնարկության կորուստները առաջանում են արտադրության թափոնների վերամշակման  $f_i(x_i)$  ծախսերից և աղտոտման հարկից, ինչն համեմատական է բոլոր ձեռնարկությունների վնասակար նյութերի գումարային  $\bar{q}$  խտությամբ:  $\bar{q}$  մեծությունը չի կարող գերազանցել  $\theta$ -նից՝ վնասակար նյութերի սահմանային թույլատրելի խտության արժեքից: Հակառակ դեպքում  $i$ -րդ ձեռնարկությունը լրացուցիչ  $s_i$  տուգանք է վճարում:

Նշված ներհակ իրադրությունը նկարագրել  $n$  անձանց անդաշինք խաղի տեսքով, յուրաքանչյուր ձեռնարկության կորուստն ընդունելով բնապահպանական միջոցառումների գումարային ծախսերին հավասար:

3. Գտնել Նեշի հավասարակշռության իրավիճակների (մաքուր վարվելակերպերում) բազմությունները հետևյալ՝  $A = \{a_{ij}\}$  և  $B = \{b_{ij}\}$  մատրիցներով ( $m \times n$ ) երկմատրից խաղերում:

ա)  $A$  և  $B$  մատրիցները անկյունագծային են և դրական, այսինքն՝

$m = n$ ,  $a_{ij} = b_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$  և  $a_{ii} > 0$ ,  $b_{ii} > 0$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ :

բ) 
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

գ) 
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Ցույց տալ, որ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցներով երկմատրից խաղում (2,2) իրավիճակը հավասարակշիռ է:

Արդյո՞ք այդ իրավիճակը խիստ հավասարակշիռ է:

5. Հետևյալ՝

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցներով երկմատրից խաղում գտնել մաքուր վարվելակերպերով

բոլոր Պարետո-լավագույն իրավիճակները: Այս խաղում արդյոք գոյություն ունե՞ն մաքուր վարվելակերպերով հավասարակշռության իրավիճակներ:

6.  $(H_1, H_2)$  կորդինատներում գրաֆիկորեն պատկերել "ընտանեկան վեճ" խաղը վարվելակերպերով խաղի բոլոր հնարավոր շահումների վեկտորները (տե՛ս [1], կետ 1.4):

Ցուցում: Առաջին և երկրորդ խաղացողների կամայական  $x$  և  $y$  խաղը վարվելակերպերը կարող են տրվել համապատասխանաբար՝  $x = (\xi, 1 - \xi)$ ,  $y = (\eta, 1 - \eta)$ ,  $\xi, \eta \in [0, 1]$  տեսքով: Գրելով խաղը վարվելակերպով  $H_1$  և  $H_2$  շահումների ֆունկցիաները և պարամետրերից արտաքսելով մեկը, ստանում ենք հատվածների մեկպարամետրանի ընտանիք, որոնց միավորումը հենց որոնելի բազմությունն է (տես գծ.9): Եզրի կորագիծ մասը այդ հատվածների ընտանիքի ընդգրկողն է և  $5H_1^2 + 5H_2^2 - 10H_1H_2 - 18(H_1 + H_2) + 45 = 0$  պարաբոլի մասը:

7.  $A$  և  $B$  մատրիցներով հետևյալ երկմատրից խաղում՝

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

գտնել Նեշի լիովին խաղը հավասարակշռության իրավիճակը: Այս խաղը արդյոք ունի՞ խաղը վարվելակերպերով հավասարակշռությանայլ իրավիճակներ:

Ցուցում: Նախ գտնել  $(x, y)$  լիովին խաղը հավասարակշռության իրավիճակը՝  $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , այնուհետև հավասարակշռության այնպիսի իրավիճակ, որի համար  $\xi_i = 0$  և այլն:

8. "Յուրօրինակ խաղ":

Դիտարկվում է  $n$  անձանց անդաշինք  $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$  խաղը, որտեղ  $X_i = \{0, 1\}$ ,  $H_i(0, \dots, 0 \parallel 1) = g_i > 0$ ,  $H_i(1, \dots, 1 \parallel 0) = h_i > 0$  և  $H_i(x) = 0$  մյուս

բոլոր դեպքերում: Այստեղ  $\parallel$  նշանը ցույց է տալիս, որ փոխարինումը կա-

տարում է  $i$ -րդ տեղում:

ա) Այս խաղը մեկնաբանել գովազդի բառապաշարով:

բ) գտնել հավասարակշռության լիովին խաղը իրավիճակ:

9. "Երաժշտական աթոռներ"

Կան երեք աթոռ, որոնք համարակալված են 1, 2, 3: Խաղում են երկու խաղացող, որոնց վարվելակերպն՝ աթոռի համարն ընտրելն է: Նույն աթոռն ընտրելու դեպքում խաղացողներից ոչ մեկը ոչինչ չի ստանում: Իսկ եթե նրանց ընտրած աթոռները տարբեր են, ապա այն խաղացողը, օրինակ  $i$ -րդը, որի ընտրած աթոռը անմիջապես հաջորդում է  $j$ -րդ խաղացողի աթոռին, շահում է երկու անգամ ավել, քան  $j$ -րդ խաղացողը (ենթադրվում է, որ

1-ին աթոռը հետևում է 3-րդ աթոռին): Ստանում ենք հետևյալ երկմատրից  $\Gamma(A,B)$  խաղը.

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (0,0) & (1,2) & (2,1) \\ (2,1) & (0,0) & (1,2) \\ (1,2) & (2,1) & (0,0) \end{bmatrix}:$$

ա) Յույց տալ, որ Նեշի միակ լիովին խառը հավասարակշռությունը յուրաքանչյուր խաղացողի կողմից աթոռների հավասար հնարավոր ընտրությունն է:

բ) Յույց տալ, որ համատեղ խառը վարվելակերպով հավասարակշռությունն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$L(i,j) = \begin{cases} 1/6, & \text{եթե } i \neq j, \\ 0, & \text{եթե } i = j: \end{cases}$$

գ) Յույց տալ, որ Նեշի հավասարակշռության իրավիճակներում շահումները լավագույնը չեն ըստ Պարետոյի, իսկ համատեղ խառը վարվելակերպերով հավասարակշռությունը հանգեցնում է  $(3/2, 3/2)$  շահումների, որոնք լավագույն են ըստ Պարետոյի:

10. Օգտագործելով Նեշի սխեման գտնել

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցներով երկմատրից խաղի միջնորդային լուծումը:

11. Դիտարկենք

$$(A, B) = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & (1,1) & (1,2) \\ \alpha_2 & (2,1) & (-5,0) \end{matrix}$$

մատրիցով երկմատրից  $2 \times 2$ -խաղը: Այս խաղը "խաչմերուկ" խաղի ձևափոխված տարբերակն է (տես [3], 263 էջ, 1.4 կետի 2-րդ օրինակը): Տարբերությունը միայն հետևյալն է. մարդատար (առաջին խաղացողը) և բեռնատար (երկրորդ խաղացող) մեքենաների վարորդները տարբեր կերպ են գնահատում վթարի հետևանքները  $(\alpha_2, \beta_2)$  իրավիճակ): Յույց տալ, որ սպառնալիքի վարվելակերպերի տեսակետից խաղի վերլուծությունը թելադրում է  $(\alpha_1, \beta_2)$  իրավիճակը, այսինքն՝ բեռնատարին շարունակել ճանապարհը, իսկ մարդատարին՝ կանգ առնել:

### 3. Դիրքային խաղեր

1. Ապացուցեք, որ երկու անձանց վերջնաքայլավոր անհակամարտ լրիվ իրազեկմամբ խաղում Նեշի բոլոր հավասարակշիռ բարյացակամ (ոչ բարյացակամ) իրավիճակներում շահումները միմյանց հավասար են:

2. Կառուցել երկու անձանց բազմաքայլ անհակամարտ խաղի օրինակ, որտեղ պատժի վարվելակերպերով հավասարակշռության իրավիճակում պատժող խաղացողն ինքն իրեն ավելի շատ է պատժում, քան ընտրված ուղուց շեղված հակառակորդին:

3. Կառուցել Պարետո լավագույն բազմությունները (տե՛ս [2], կետ 1.5 օրինակ 4)

4. Կառուցել բազմաքայլ անհակամարտ խաղի մի այնպիսի օրինակ, որտեղ Նեշի հավասարակշռության ոչ մի իրավիճակ Պարետո լավագույն լուծումների չի հանգեցնում:

5. Յույց տալ, որ եթե ոչ բացասական ( $H_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ ) բազմաքայլ անհակամարտ  $\Gamma$  խաղում  $v(\{i\}, Z) = 0$  բոլոր  $i = 1, \dots, n$  և  $Z \in \bigcup_{i=1}^n X_i$  համար,

ապա ցանկացած պարտիա կարող է իրագործվել պատժի վարվելակերպերով որևէ հավասարակշռության իրավիճակում:

6. Ձևականացնել կառավարման  $k$ -մակարդակային ծառակերպ համակարգը ստորակարգային խաղի տեսքով, որտեղ  $i$ -րդ ( $i=1, \dots, k-1$ ) մակարդակում գտնվող կառավարող կենտրոնը պաշարները  $i < k-1$  դեպքում բաշխում է իրեն ենթակա հաջորդ մակարդակի կառավարող կենտրոնների միջև, իսկ  $i = k-1$  դեպքում՝ իրեն ենթակա արտադրական ստորաբաժանումների միջև: Յուրաքանչյուր արտադրական ստորաբաժանման շահումը կախված է միայն սեփական արտադրությունից, իսկ կառավարող կենտրոնների շահումները՝ իրենց ենթակա արտադրական ստորաբաժանումների արտադրությունից:

7. Գտնել Նեշի հավասարակշռության իրավիճակը 12-րդ վարժությունում կառուցված  $k$ -մակարդակ ստորակարգային ծառակերպ խաղում:

8. Յույց տալ, որ  $\alpha = \{\bar{v}(N), 0, \dots, 0\}$  վեկտորը պատկանում է  $\bar{v}(S)$  բնութագրիչ ֆունկցիայով երկմակարդակ ստորակարգային ծառակերպ խաղի  $C$ -միջուկին:

9. Շեղանկյունաձև և ստորակարգային խաղում, օգտագործելով Նեշի հավասարակշռության իրավիճակը, կառուցել բնութագրիչ ֆունկցիան:

10. Նկարագրել Նեշի հավասարակշռության բոլոր իրավիճակների բազմությունը երկմակարդակ ծառակերպ ստորակարգային խաղում: Հաշվի առնել  $B_1, B_2, \dots, B_n$  խաղացողների կողմից  $A_0$  կենտրոնին "պատժելու" հնարավորությունը (օրինակ,  $i$ -րդ խաղացողը կարող է դադարեցնել արտադրությունը, եթե պաշարների բաշխվածությունը չի համապատասխանում իր շահերին):

11. Գտնել խաղի բոլոր բացարձակ հավասարակշիռ իրավիճակները ըստ Նեշի (տե՛ս [2], կետ 1.5, օրինակ 4):



## Գրականություն

1. Սահակյան Մ. Ա. և ուրիշներ. Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ Մաս 1.-Երևան, ԷԿԱԳՍԱՀԲ, 1997.
2. Սահակյան Մ. և ուրիշներ. Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ Մաս 2. -Երևան, Գիտություն 2001.
3. Սահակյան Մ.,Սարգսյան Ս.,Կարապետյան Ֆ. Մաթեմատիկական ծրագրավորում. -Երևան, ԵՊՀ, 1983.
4. Эддоус М., Стенсфилд П. Методы принятия решений
5. /Пер. с англ./ -М.:ЮНИТИ, 1997.
6. Петросян Л.А.,Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр.-М: ВШ,1998
7. Таха А. Введение в исследование операций.т.1,2, -М: Мир, 1985.
8. Интриллятор М. Математическая теория оптимизации и экономическая теория. -М: Прогресс,1975.
9. Вагнер Г. Основы исследования операций, т.т.1,2 /Пер. с англ./ -М: Мир, 1973.
- 10.Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. -М: Наука, 1969.
- 11.Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. -Л: ЛГУ, 1969.
- 12.Данцинг Дж.Б.Линейное программирование,его приложения и обобщения.-М:Прогресс, 1966.
- 13.Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике./Пер. с англ./ -М: Мир, 1966.

Խնդրագիրք

Մելս Սահակյան

Տնտեսության վերլուծության  
մաթեմատիկական եղանակներ

III

Գործույթների հետազոտումը  
տնտեսության կառավարման խնդիրներում

Խնդիրներ և վարժություններ

Խմբագիր՝  
Շարադրանքի խմբագիր՝  
Համակարգչային շարվածք՝

Սարգիս Սարգսյան  
Վրույր Ասլանյան  
Նաիրա Մուրադյան

Ցավալի՝ 8.6 տպ. մամուլ.: Չափսը՝ 60×84 1/16:  
Թուղթը օֆսեթ N1: Տպաքանակ՝ 1500:  
ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչության տպարան  
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան 24: