Ա. Գ. ԿՈՒՐՈՇ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Ա. Գ. ԿՈՒՐՈՇ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Թույլատրված է ՌՍՖՍՀ Բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես դասագիրք համալսարանների և մանկավարժական ինստիտուտների համար

«ԼՈՒՅՍ»
ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1965

Թարգմանիչներ՝ Վ. Ա. Հովհաննիսյան (I—VII գլուխները)
Ի. Ս. Սարգսյան (VIII—XIV գլուխները)

Թարգմ. խմբագիր՝ Վ. Վ. Սաղաթելյան

Թարգմանված է 1963 թ. ռուսերեն ութերորդ
հրատարակությունից

А. Г. КУРОШ
КУРС ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ
(на армянском языке)
Издательство „Луйс"
Ереван, 1965

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Այս գրքի առաջին հրատարակությունը լույս է տեսել 1946 թ., իսկ հետո այն վերահրատարակվել է 1950, 1952, 1955 և 1956 թթ.։ Երկրորդ և չորրորդ հրատարակություններից առաջ գիրքը ենթարկվել է զգալի վերամշակման, որը նպատակ է ունեցել արտացոլել Մոսկվայի համալսարանում հանրահաշվի դասավանդման փորձը։ Ներկա վեցերորդ հրատարակության նախապատրաստման ընթացքում գիրքը ենթարկվել է է՛լ ավելի լուրջ վերամշակման, այնքան լուրջ, որ բավականաչափ հիմնավորված կերպով կարելի է այն համարել նոր գիրք և ոչ թե հին գրքի վեցերորդ հրատարակությունը։

Այդ վերամշակումը պայմանավորվում էր երկու նպատակով։ Ամենից առաջ, բազմակի անգամ ցանկություններ են արտահայտվել գրքի ընդարձակման մասին, որպեսզի այն ապահովի բարձրագույն հանրահաշվի համալսարանական պարտադիր դասընթացը և ոչ թե նրա միայն առաջին երկու կիսամյակները, ինչպես այդ եղել է մինչև այժմ։ Այդ նպատակով ավելացվել են մի քանի նոր գլուխներ։ Դրանցից մեկը նվիրված է խմբերի տեսության հիմունքներին, իսկ մնացածը վերաբերում է գծային հանրահաշվին՝ գծային տարածությունների տեսությանը, էվկլիդեսյան տարածությունների տեսությանը, λ—մատրիցների տեսությանը և Ժորդանի նորմալ տեսքի մատրիցներին։

Իհարկե, սովետական հանրահաշվական գրականության մեջ ներկայումս կան գծային հանրահաշվի մի շարք լավ գրքեր, որոնք միմյանցից տարբերվում են ծավալով, բովանդակությամբ և շարադրման բնույթով։ Այս գիրքը, նրա մեջ գծային հանրահաշվի վերաբերյալ այնքան շատ նյութի ավելացումից հետո անգամ, չի կարող հավակնություն ունենալ փոխարինելու հիշյալ գրքերից որևէ մեկին։ Այնուհանդերձ, անվիճելի է այն, որ ուսանողների համար հարմար է ամբողջ պարտադիր դասընթացն ունենալ ամփոփված մի գրքի մեջ, շարադրված միասնական ոճով։

Մյուս կողմից, գլուխների այն դասավորությունը, որ ընդունված է գրքի նախորդ հրատարակություններում, արդեն վաղուց չէր համապատասխանում Մոսկվայի համալսարանում այդ նյութի փաստացի անցման հերթականությանը. վերջինս մեծ չափով պայմանավորված է նրանով, որ որոշակի ժամանակամիջոցում կատարվեն վերլուծական երկրաչափության և մաթեմատիկական անալիզի դասընթացների անհրաժեշտ պատվերները: Ավելին, երեք տարի սրանից առաջ, Մոսկվայի համալսարանում ընդունվեց բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի նոր ծրագիր: Այդ երեք տարիների ընթացքում այն հաջողությամբ ենթարկվեց ստուգման և դրա համար էլ նպատակահարմար համարվեց գրքի վերակառուցումը՝ նրա մեջ նյութի դասավորումը խստորեն համապատասխանեցնելով այդ նոր ծրագրին:

Այդ ծրագրին համապատասխանող դասագրքի հանդես գալը, հավանաբար կհեշտացնի նրանով դասավանդելը երկրի այլ համալսարաններում ևս:

Անկասկած, գրքի այդպիսի վերակառուցումը չի դժվարացնի, այլ, թերևս, անգամ կհեշտացնի նրա օգտագործումը մանկավարժական ինստիտուտներում:

Նշենք նյութի բաշխումն ըստ կիսամյակների. 1-ին կիսամյակ՝ 1—5 գլուխները, 2-րդ կիսամյակ՝ 6—9 գլուխները, 3-րդ կիսամյակ՝ 10, 11, 13, 14 գլուխները: Պետք է նկատի ունենալ, որ Մոսկվայի համալսարանի մեխանիկայի բաժնի ուսանողները բարձրագույն հանրահաշիվն ուսումնասիրում են միայն առաջին երկու կիսամյակների ծավալով:

Գրքի նախորդ վերամշակումները հաջողվում էր կատարել առանց նրա ծավալի մեծացման: Այս անգամ այդ, իհարկե, անհնար էր: Գրքի ծավալը որոշ չափով կրճատելու ցանկությունն ստիպեց գրքից հանել որոշ նյութ, մասնավորապես՝ Գուրվիցի թեորեմային, հանրահաշիվների տեսությանը և Ֆրոբենիուսի թեորեմային վերաբերող պարագրաֆները: Այնուհանդերձ, խելացի չէր լինի գիրքը շարադրելիս սահմանափակվել միայն այն նյութով, որն այժմ մտնում է պարտադիր ծրագրի մեջ, այսինքն՝ գիրքը դարձնել դասախոսությունների հասարակ կոնսպեկտ: Գրքում պահպանված ոչ պարտադիր նյութը (ամբողջապես դրան վերաբերող պարագրաֆները նշված են աստղիկով), որպես կանոն այնպիսին է, որ նա ժամանակին մտնում էր բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի պարտադիր ծրագրի մեջ, որոշ համալսարաններում կամ մանկավարժական ինստիտուտներում հիմա էլ մտնում է ծրագրի մեջ և, համենայն դեպս, կմտցվեր ծրագրի մեջ, եթե բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացին տրամադրվեին ավելի շատ ժամեր:

Գրքի վերամշակման ժամանակ փոփոխվել են նաև որոշ մանրամասներ, որոնց վրա, սակայն, մենք հիմա կանգ չենք առնելու:

Մոսկվա, 1958 թ. դեկտեմբեր

Ա. Կուրոշ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկոս-ուսանողի մաթեմատիկական կրթությունն սկսվում է երեք հիմնական առարկաների՝ մաթեմատիկական անալիզի, վերլուծական (անալիտիկ) երկրաչափության և բարձրագույն հանրահաշվի ուսումնասիրությամբ: Այդ առարկաները միմյանց հետ մի շարք հպման կետեր ունեն, տեղ-տեղ էլ իրար ծածկում են, և երեքը համատեղ կազմում են այն հիմքը, որի վրա կառուցվում է ժամանակակից մաթեմատիկական գիտության ողջ շենքը:

Բարձրագույն հանրահաշիվը, որի շարադրմանն է նվիրված սույն գիրքը, իրենից ներկայացնում է տարրական հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի հիմնական բովանդակության շատ հեռուն գնացող, սակայն՝ միանգամայն բնական ընդհանրացումը: Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում կենտրոնական հարցը, անկասկած, հավասարումների լուծման հարցն է: Ինչպես ընթերցողը հիշում է, հավասարումների ուսումնասիրությունն սկսվում է ամենապարզ դեպքից՝ մեկ անհայտով առաջին աստիճանի մեկ հավասարումից և, ապա, զարգացվում է երկու ուղղությամբ. մի կողմից՝ դիտարկվում են առաջին աստիճանի երկու և երեք հավասարումների սիստեմներ՝ համապատասխանորեն երկու կամ երեք անհայտներով. մյուս կողմից՝ ուսումնասիրվում է մեկ քառակուսի հավասարում մեկ անհայտով, ինչպես նաև ավելի բարձր աստիճանի հավասարումների մի քանի մասնավոր տեսակներ, որոնք հեշտությամբ բերվում են քառակուսի հավասարումների (օրինակ՝ երկքառակուսի հավասարումները):

Այդ երկու ուղղությունն էլ իրենց հետագա զարգացումն են ստանում բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում, որոշելով նրա տրոհումը երկու խոշոր բաժինների: Այդ բաժիններից մեկի, այն է՝ գծային հանրահաշվի հիմունքների, ելակետային խնդիրն է՝ առաջին աստիճանի կամ, ինչպես ընդունված է ասել, գծային հավասարումների կամայական սիստեմների ուսումնասիրությունը: Այդպիսի սիստեմների լուծման համար այն դեպքում, երբ հավասարումների թիվը հավասար է անհայտների թիվն, մշակվում է դետերմինանտների տեսության ապարատը: Սակայն, այդ ապարատն արդեն բավական չէ գծային հավասարումների այնպիսի սիստեմների ուսումնասիրության համար, որոնցում հավասարումների թիվը հավասար չէ անհայտների թվին՝ դեպք, որն անսովոր է տարրական հանրահաշվի տեսակետից, բայց շատ կարևոր է կիրառությունների համար: Անհրաժեշտություն է առաջացել, մասնավորապես, մշակելու մատրիցների տեսությունը, այսինքն՝ թվերի այնպիսի սիստեմի, որոնք դասավորված են մի քանի տողերից ու սյուներից բաղկացած քառակուսի կամ ուղղանկյուն աղյուսակներում: Այդ տեսությունը ստացվեց շատ խոր և կիրառություններ գտավ գծային հավասարումների սիստեմների տեսության սահմաններից դուրս շատ բնագավառներում: Մյուս կողմից, գծային հավասարումների սիստեմների ուսումնասիրումը պահանջ առաջացրեց մտցնելու և ուսումնասիրելու բազմաչափ (այսպես կոչված՝ վեկտորական կամ գծային) տարածությունները: Մաթեմատիկայից հեռու կանգնած մարդկանց մոտ բազմաչափ (առաջին հերթին՝ քառաչափ) տարածության վերաբերյալ մշուշապատ և, հաճախ, սխալ պատկերացումներ են առաջանում: Իրականում սակայն, այդ գաղափարը զուտ մաթեմատիկական, անգամ հիմնականում՝ հանրահաշվական գաղափար է և կարևոր զենք է ծառայում մաթեմատիկական շատ հետազոտությունների համար, ինչպես նաև ֆիզիկայում ու մեխանիկայում:

Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի երկրորդ բաժինը, որը բազմանդամների հանրահաշիվ է կոչվում, զբաղվում է մեկ անհայտով, բայց կամայական աստիճանի մեկ հավասարման ուսումնասիրությամբ: Հաշվի առնելով քառակուսի հավասարումների լուծման համար բանաձևի գոյությունը, բնական էր որոնել համանման բանաձևեր ավելի բարձր աստիճանի հավասարումների լուծման համար: Պատմականորեն հանրահաշվի այդ բաժինը հենց այդպես էլ զարգացել է, ընդ որում երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների լուծման բանաձևերը հայտնաբերվել են դեռևս XVI դարում: Դրանից հետո սկսվեցին անարդյունք որոնումներ այնպիսի բանաձևերի, որոնք հինգերորդ և ավելի բարձր աստիճանի հավասարումների արմատները կարողանային արտահայտել այդ հավասարումների գործակիցներով՝ արմատանշանների օգնությամբ, թեկուզ և շատ բազմահարկանի տեսքով: Այդ որոնումները շարունակվում էին մինչև XIX դարի սկիզբը, երբ, վերջապես, ապացուցվեց, որ այդպիսի բանաձևեր գտնվել չեն կարող և, որ բոլոր աստիճանների համար, սկսած հինգերորդից, գոյություն ունեն ամբողջ թիվ գործակիցներով հավասարումների նույնիսկ կոնկրետ օրինակներ, որոնց արմատները չեն կարող գրվել արմատանշանների օգնությամբ:

Բարձր աստիճանի հավասարումների լուծման համար բանաձևերի բացակայությունը շատ տխուր հանգամանք չպետք է համարել. ան-

գամ երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների դեպքում, երբ այդպիսի բանաձևեր կան, նրանք շատ մեծածավալ են և գործնականորեն համարյա անօգտակար: Մյուս կողմից, այն հավասարումների գործակիցները, որոնք ֆիզիկոսների կամ ինժեներների համար հարկավոր է լինում լուծել, սովորաբար չափումներով ստացված մեծություններ են լինում, այսինքն՝ հայտնի են լինում միայն որոշ մոտավորությամբ, ուստի հավասարման արմատները ևս պետք է իմանալ միայն մոտավորությամբ տրված ճշգրտությամբ: Այդ հանգեցրել է հավասարումների մոտավոր լուծման զանազան մեթոդների մշակմանը, որոնցից միայն պարզագույններն են շարադրվում բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում:

Բազմանդամների հանրահաշվում կենտրոնական հարցը, սակայն, ոչ թե հավասարումների արմատների գործնականորեն որոնման հարցն է, այլ նրանց գոյության հարցը: Հայտնի է, որ գոյություն ունեն նույնիսկ քառակուսի հավասարումներ իրական գործակիցներով, որոնք իրական արմատներ չունեն: Թվերի պաշարը լրացնելով մինչև բոլոր կոմպլեքս թվերի բազմությունը, մենք տեսնում ենք, որ քառակուսի հավասարումներն այդ բազմությունում արդեն արմատներ ունեն և, որ նույնն իրավացի է նաև երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների համար, ինչպես այդ բխում է նրանց լուծումների համար բանաձևերի գոյությունից: Սակայն, չե՞ գտնվի արդյոք հինգերորդ կամ ավելի բարձր աստիճանի այնպիսի հավասարում, որը ոչ մի արմատ չունի անգամ կոմպլեքս թվերի բազմության մեջ, և հարկավոր չե՞ լինի արդյոք նման հավասարումների արմատները որոնելու համար կոմպլեքս թվերից անցնել թվերի ավելի ընդարձակ պաշարի: Այս հարցին պատասխանում է մի շատ կարևոր թեորեմա, որը հաստատում է, որ յուրաքանչյուր հավասարում ցանկացած թվային գործակիցներով (ոչ միայն իրական, այլև կոմպլեքս գործակիցներով) ունի կոմպլեքս (կարող է, մասնավորապես, իրական) արմատներ, ընդ որում՝ այդ արմատների թիվը, ընդհանրապես ասած, այնքան է, որքան հավասարման աստիճանն է:

Այս է բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի հիմնական բովանդակության համառոտ ակնարկը: Հարկավոր է ընդգծել, որ բարձրագույն հանրահաշիվը լոկ սկիզբն է հանրահաշվական մեծ գիտության, որը առատ ճյուղավորված է, բովանդակությամբ հարուստ է և շարունակ զարգանում է: Փորձենք է՛լ ավելի թռուցիկ ակնարկով ծանոթացնել հանրահաշվի այն ճյուղերին, որոնք հիմնականում դուրս են մնում բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի սահմաններից:

Գծային հանրահաշիվը, որը հիմնականում մատրիցների տեսությունը և նրա հետ կապված վեկտորական տարածությունների գծային ձևափոխությունների տեսությունը նվիրված մեծ գիտություն է, իր մեջ ընդգրկում է նաև հանրահաշվական ձևերի տեսությունը, ինվարիանտների տեսությունը և տենզորական հանրահաշիվը, որը կարևոր դեր է կատարում դիֆերենցիալ երկրաչափությունում։ Վեկտորական տարածությունների տեսությունը իր հետագա զարգացումն ստանում է հանրահաշվից դուրս՝ ֆունկցիոնալ անալիզում (անվերջչափանի տարածություններ)։ Կիրառությունների բազմազանությամբ ու նշանակությամբ ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ մեխանիկայում, ֆիզիկայում և տեխնիկական գիտություններում, գծային հանրահաշիվն առայժմ մնում է առաջինը հանրահաշվի բազմաթիվ ճյուղերի թվում։

Բազմանդամների հանրահաշիվը, որը շատ տասնամյակների ընթացքում զարգանում էր որպես գիտություն մեկ անհայտով կամայական աստիճանի մեկ հավասարման վերաբերյալ, այժմ արդեն հիմնականում ավարտված է։ Իր հետագա զարգացումը նա ստացել է մասամբ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության որոշ բաժիններում, իսկ հիմնականում՝ վերածել է դաշտի տեսությանը, որի մասին կխոսենք ստորև։ Իսկ ինչ վերաբերում է մի քանի անհայտներով, բայց ոչ թե գծային, այլ ցանկացած աստիճանի հավասարումների սիստեմի վերաբերյալ շատ դժվարին հարցին (այդ հարցը, որը միավորում է բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում մշակվող երկու ուղղությունները, այդ նույն դասընթացում գրեթե չի շոշափվում), ապա այն ըստ էության վերաբերում է մաթեմատիկայի մի հատուկ ճյուղի, որը հանրահաշվական երկրաչափություն է կոչվում։

Այն պայմանների հարցի սպառիչ լուծումը, որոնց առկայության դեպքում հավասարումը կարող է արմատանշանների միջոցով լուծվել, տվել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Գալուան (1811—1832)։ Նրա հետազոտությունները նշանավորել են հանրահաշվի զարգացման նոր ուղղություններ, որոնք արդեն XX դարում, գերմանացի կին-հանրահաշվագետ Է. Նյոտերի (1882—1935) աշխատություններից հետո, հանգեցրին հանրահաշվական գիտության խնդիրների վերաբերյալ նոր տեսակետի ձևավորմանը։ Այժմ արդեն անվիճելի է, որ հանրահաշվի կենտրոնական հարցը բոլորովին էլ հավասարումների ուսումնասիրումը չէ։ Հանրահաշվական հետազոտության իսկական առարկան պետք է համարել հանրահաշվական գործողությունները, որոնք նման են գումարմանը կամ բազմապատկմանը, սակայն կատարվում են, թերևս, ոչ թվերի հետ։

Արդեն դպրոցականը հարկադրված է լինում ֆիզիկայի դասընթացում գործ ունենալու ուժերի գումարման գործողության հետ։ Համալսարանների ու մանկավարժական ինստիտուտների առաջին կուրսերում ուսումնասիրվող մաթեմատիկական առարկաները բերում են հանրահաշվական գործողությունների բազմաթիվ օրինակներ՝ մատրիցների, ֆունկցիաների գումարումն ու բազմապատկումը, տարածության ձևափոխությունների հետ, վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները

և այլն։ Այդ գործողությունները սովորաբար նման են թվերի հետ կատարվող գործողություններին և նույն անունները ունեն, սակայն որոշ հատկություններ, որոնք շատ սովորական են թվերի դեպքում, երբեմն չքանում են։ Այսպես, շատ հաճախ և շատ կարևոր դեպքերում պարզվում է, որ գործողությունը տեղափոխելի չէ (արտադրյալը կախված է արտադրիչների դասավորությունից), իսկ երբեմն էլ՝ նաև զուգորդելի չէ (երեք բազմապատկիչների արտադրյալը կախված է փակագծերի տեղերից)։

Հանրահաշվական սիստեմներից, այսինքն՝ մի ինչ-որ բնույթի էլեմենտներից բաղկացած բազմություններից, որոնց համար հանրահաշվական որոշ գործողություններ են սահմանված, առավել սիստեմատիկ ուսումնասիրության ենթարկվում են ոչ շատ, համեմատաբար ավելի կարևոր տեսակները։ Այդպիսին են, մասնավորապես, դաշտերը։ Դրանք հանրահաշվական այնպիսի սիստեմներ են, որոնցում, իրական թվերի սիստեմի և կոմպլեքս թվերի սիստեմի նմանությամբ, սահմանված են գումարման ու բազմապատկման գործողությունները, երկուսն էլ տեղափոխելի ու զուգորդելի են, կապված են բաշխելիության օրենքով (այսինքն՝ իրավացի է փակագծերը բացելու սովորական կանոնը) և օժտված են հակադարձ գործողություններով՝ հանումով ու բաժանումով։ Դաշտերի տեսությունը բնական ասպարեզ հանդիսացավ հավասարումների տեսության հետագա զարգացման համար, իսկ նրա հիմնական ճյուղերը՝ հանրահաշվական թվերի դաշտերի տեսությունը և հանրահաշվական ֆունկցիաների դաշտերի տեսությունը, նրան կապեցին համապատասխանաբար թվերի տեսության և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության հետ։ Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացն իր մեջ ընդգրկում է դաշտերի տեսության տարրական ներածությունը, իսկ դասընթացի որոշ բաժիններ՝ մի քանի անհայտներով բազմանդամների, մատրիցների նորմալ ձևերի բաժինները, միանգամից շարադրվում են կամայական հիմնական դաշտի դեպքի համար։

Դաշտի գաղափարից ավելի լայն գաղափար է օղակի գաղափարը։ Ի տարբերություն դաշտի դեպքի, այստեղ արդեն չի պահանջվում բաժանման իրականացնելիությունը և, բացի դրանից, բազմապատկումը կարող է անտեղափոխելի և նույնիսկ անզուգորդելի լինել։ Օղակի պարզագույն օրինակներ են՝ բոլոր ամբողջ (ներառյալ և բացասական) թվերի բազմությունը, մեկ անհայտով բազմանդամների սիստեմը, իրական փոփոխականի իրական ֆունկցիաների սիստեմը։ Օղակների տեսությունն իր մեջ ընդգրկում է հանրահաշվի այնպիսի հին ճյուղեր, ինչպիսիք են հիպերկոմպլեքս սիստեմների տեսությունը և իդեալների տեսությունը, այն կապված է մաթեմատիկական մի շարք գիտությունների հետ, մասնավորապես՝ ֆունկցիոնալ անալիզի հետ և արդեն մուտք է գործում ֆիզիկայում։ Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը, ըստ էության, պարունակում է միայն օղակի սահմանումը։

Կիրառությունների է՛լ ավելի մեծ ասպարեզ ունի խմբերի տեսությունը։ Խումբ կոչվում է մեկ հիմնական գործողությամբ հանրահաշվական սիստեմը, ընդ որում՝ այդ գործողությունը պետք է զուգորդելի լինի, թեկուզ և ոչ անպայման տեղափոխելի և պետք է օժտված լինի հակադարձ գործողությամբ՝ բաժանմամբ, եթե հիմնական գործողությունը բազմապատկում է անվանված։ Այդպիսին է, օրինակ, ամբողջ թվերի բազմությունը՝ գումարման գործողությամբ, ինչպես և դրական իրական թվերի բազմությունը՝ բազմապատկման գործողությամբ։ Խմբերը մեծ դեր են խաղացել դեռևս Գալուայի տեսության մեջ, հավասարումների՝ արմատանշանների միջոցով լուծելիության վերաբերյալ հարցում, իսկ ներկայումս նրանք կարևոր զենք են դաշտերի տեսության մեջ՝ երկրաչափության շատ բաժիններում, տոպոլոգիայում, ինչպես նաև մաթեմատիկայից դուրս՝ բյուրեղագիտությունում, տեսական ֆիզիկայում։ Ընդհանրապես, կիրառությունների ասպարեզի ընդարձակության տեսակետից, հանրահաշվի բոլոր ճյուղերի մեջ, գծային հանրահաշվից հետո, հաջորդ տեղը գրավում է խմբերի տեսությունը։ Մեր դասընթացը պարունակում է խմբերի տեսության հիմունքներին նվիրված մի գլուխ։

Ամենավերջին տասնամյակներում ծագել և արագ զարգանում է հանրահաշվի մի նոր բնագավառ՝ ստրուկտուրաների տեսությունը։ Ստրուկտուրա է կոչվում երկու գործողությամբ հանրահաշվական սիստեմը՝ գումարումով ու բազմապատկումով։ Այդ գործողությունները պետք է տեղափոխելի և զուգորդելի լինեն, ինչպես նաև բավարարեն հետևյալ պահանջներին. էլեմենտի և՛ գումարը, և՛ արտադրյալն՝ ինքն իր հետ, պետք է հավասարվեն այդ նույն էլեմենտին. եթե երկու էլեմենտների գումարը հավասար է նրանցից մեկին, ապա արտադրյալը հավասար է մյուսին և հակադարձը։ Ստրուկտուրայի օրինակ է ծառայում բնական թվերի սիստեմը՝ դիտարկված ընդհանուր ամենափոքր բազմապատիկը և ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը վերցնելու գործողությունների նկատմամբ։ Ստրուկտուրաների տեսությունը հետաքրքիր կապեր ունի խմբերի տեսության և օղակների տեսության հետ, ինչպես նաև բազմությունների տեսության հետ. երկրաչափության հին ճյուղերից մեկը՝ պրոյեկտիվ երկրաչափությունը, պարզվում է, որ ըստ էության ստրուկտուրաների տեսության մի մասն է. կարելի է նշել նաև ստրուկտուրաների տեսության մի մուտք էլեկտրական ցանցերի տեսության մեջ։

Խմբերի տեսության, օղակների տեսության և ստրուկտուրաների տեսության առանձին մասերի միջև գոյություն ունեցող որոշ զուգա-

հեռականությունը հանգեցրել է հանրահաշվական սիստեմների ընդհանուր տեսության (կամ՝ համընդհանուր (ունիվերսալ) հանրահաշիվների) ծագմանը։ Այդ տեսությունը դեռևս սոսկ ամենաառաջին քայլերն է արել, սակայն արդեն գծագրվում են նրա կոնտուրները, իսկ հայտնաբերված կապը մաթեմատիկական տրամաբանության հետ թույլ է տալիս հուսալու հետագա լուրջ զարգացում։

Անշուշտ, վերը շարադրված սխեմայում բոլորովին էլ չի տեղավորվում հանրահաշվական գիտության բազմազան բովանդակությունը։ Մասնավորապես, գոյություն ունեն հանրահաշվի մի շարք բաժիններ, որոնք սահմանակից են մաթեմատիկայի այլ բաժիններին։ Այդպիսին է տոպոլոգիական հանրահաշիվը, որն ուսումնասիրում է հանրահաշվական այնպիսի սիստեմներ, որոնցում գործողություններն անընդհատ են՝ այդ սիստեմների էլեմենտների համար սահմանված մի որոշ տեսակի զուգամիտության իմաստով. դրա օրինակ է իրական թվերի սիստեմը։ Տոպոլոգիական հանրահաշվին մոտ է անընդհատ (կամ Լիի) խմբերի տեսությունը, որը բազմաթիվ կիրառություններ ունի երկրաչափության տարբեր հարցերում, տեսական ֆիզիկայում, հիդրոդինամիկայում։ Ի դեպ, Լիի խմբերի տեսությունն աչքի է ընկնում հանրահաշվական, տոպոլոգիական, երկրաչափական և ֆունկցիոնալ-տեսաբանական մեթոդների այնպիսի միահյուսվածությամբ, որ ճիշտ կլիներ այն համարել մաթեմատիկայի առանձին ճյուղ։ Գոյություն ունի, այնուհետև, հանրահաշվական կարգավորյալ սիստեմների տեսությունը, որը ծագել է երկրաչափության հիմունքների գծով տարվող հետազոտությունների կապակցությամբ և կիրառություններ է գտել ֆունկցիոնալ անալիզում։ Վերջապես, սկսում է զարգանալ դիֆերենցիալ հանրահաշիվը, որը նոր կապեր է հաստատում հանրահաշվի և դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության միջև։

Ինքնին հասկանալի է, որ հանրահաշվական գիտության այն փայլուն զարգացումը, որը հասցրել է նրան այսօրվա վիճակին, պատահական չի եղել. այն հանդիսացել է մաթեմատիկայի ընդհանուր զարգացման մասը և նշանակալի չափով ծագել է մաթեմատիկական մյուս գիտությունների կողմից հանրահաշվին առաջադրվող հարցերին պատասխանելու անհրաժեշտությունից։ Մյուս կողմից էլ, հանրահաշվի զարգացումն ինքն ունեցել է և ունի շատ մեծ ազդեցություն գիտության հարակից ճյուղերի զարգացման վրա, որ առանձնապես ուժեղացել է շնորհիվ կիրառությունների այն զգալի ընդարձակման, որը բնորոշ է ժամանակակից հանրահաշվի համար. դրա շնորհիվ էլ երբեմն նույնիսկ խոսում են մաթեմատիկայի այժմ տեղի ունեցող «հանրահաշվականացման» մասին։

Հանրահաշվի վերաբերյալ մեր արած ակնարկը ոչ միայն չափազանց թռուցիկ է, այլև պատկերացում չի տալիս այդ գիտության զարգացման պատմության մասին։ Ուստի մենք այս ներածությունը կավարտենք հանրահաշվի պատմության շատ համառոտ ակնարկով։

Հանրահաշվի որոշ հարցերով, մասնավորապես՝ պարզագույն հավասարումների լուծումով, զբաղվել են դեռևս բաբելացի, ապա նաև հույն մաթեմատիկոսները։ Այդ ժամանակաշրջանի հանրահաշվական հետազոտությունների գագաթնակետ հանդիսանում են հույն (ալեքսանդրիացի) մաթեմատիկոս Դիոֆանտի (մ. թ. III դ.) ստեղծագործությունները։ Հետագայում այդ հետազոտությունները զարգացրել են հնդիկ մաթեմատիկոսները՝ Արիաբհաթան (VI դ.), Բրահմագուպտան (VII դ.), Բհասքարան (XII դ.)։ Հանրահաշվական հարցերի մշակումը շատ վաղ է սկսվել Չինաստանում՝ Չժան Ցանը (II դ. մ. թ. ա.), Ցզին Չուչանը (I դ.)։ Չին մեծ հանրահաշվագետ է եղել Ցին Ցզյու-շաոն (XIII դ.)։

Հանրահաշվի զարգացման մեջ մեծ ավանդ են մուծել միջնադարյան արևելքի մաթեմատիկոսները, որոնք գրել են արաբերեն, առանձնապես միջինասիացիներ ուզբեկ գիտնական Մուհամմեդ Ալ-Խորեզմին (IX դ.) և տաջիկ մաթեմատիկոս ու բանաստեղծ Օմար Խայամը (1040—1123)։ Մասնավորապես «ալգեբրա» բառն ինքը ծագել է Ալ-Խորեզմիի «Ալ-ջեբր ալ-մուկաբալա» գրքի անունից։

Բաբելացի, հույն, հնդիկ, չին և միջինասիացի հանրահաշվագետների այդ հետազոտությունները վերաբերում էին հանրահաշվի այն հարցերին, որոնք այժմ մտնում են տարրական հանրահաշվի դասընթացի ծրագրի մեջ, և միայն երբեմն շոշափել են երրորդ աստիճանի հավասարումները։ Հիմնականում այդ նույն հարցերի շրջանակներում էին մնացել նաև միջնադարյան արևմտաեվրոպական հանրահաշվագետների և Վերածնության դարաշրջանի հանրահաշվագետների հետազոտությունները. նշենք իտալացի մաթեմատիկոս Լեոնարդո Պիզանացուն (Ֆիբոնաչչի) (XII դ.) և ժամանակակից հանրահաշվական սիմվոլիկայի ստեղծող ֆրանսիացի Վիետին (1540—1603)։ Վերևում արդեն նշվել է, որ XVI դարում գտել էին երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների լուծման մեթոդներ. այստեղ հարկավոր է անվանել իտալացիներ Ֆերրոյին (1465—1526), Տարտալյային (1500—1557), Կարդանոյին (1501—1576) և Ֆերրարիին (1522—1565)։

XVII և XVIII դարերում տեղի էր ունենում հավասարումների ընդհանուր տեսության (այսինքն՝ բազմանդամների հանրահաշվի) ինտենսիվ մշակում, որին մասնակցում էին այն ժամանակվա խոշորագույն մաթեմատիկոսները՝ ֆրանսիացի Դեկարտը (1596—1650), անգլիացի Նյուտոնը (1643—1727), ֆրանսիացիներ Դալամբերը (1717—

1783) և Լագրանժը (1736—1813)։ XVIII դարում սկսվեց նաև դետերմինանտների տեսության կառուցումը՝ շվեյցարացի մաթեմատիկոս Կրամերը (1704—1752), ֆրանսիացի գիտնական Լապլասը (1749—1827)։ XVIII և XIX դարերի սահմանագլխին գերմանացի մաթեմատիկոս Գաուսը (1777—1855) ապացուցեց վերևում հիշատակված հիմնական թեորեման՝ թվային գործակիցներով հավասարումների արմատների գոյության վերաբերյալ։

XIX դարի առաջին երրորդը հանրահաշվի պատմության մեջ նշանավորվեց հավասարումների՝ արմատանշանների միջոցով լուծելիության պրոբլեմի լուծումով։ Հինգերորդ և ավելի բարձր աստիճանի հավասարումների լուծման համար բանաձևեր գտնելու անհնարինությունն ապացուցել է իտալացի մաթեմատիկոս Ռուֆֆինին (1765—1822) և, ավելի խիստ ձևով, նորվեգացի գիտնական Աբելը (1802—1829)։ Ինչպես արդեն նշվել է վերևում, այն հարցի սպառիչ լուծումը, թե ինչպիսի՞ պայմաններում հավասարումը կունենա արմատանշաններով արտահայտվող լուծում, պատկանում է Գալուային։

Գալուայի տեսությունը խթան հանդիսացավ հանրահաշվի լայն զարգացման համար XIX դարի կեսերին և երկրորդ կեսին, այդ թվում և նրա նոր ուղղություններով։ Այսպես, երևան եկան հանրահաշվական թվերի դաշտերի ու հանրահաշվական ֆունկցիաների դաշտերի տեսությունը և նրա հետ կապված՝ իդեալների տեսությունը։ Այստեղ պետք է նշել գերմանացի մաթեմատիկոսներ Կումմերին (1810—1893), Քրոնեկերին (1823—1891) ու Դեդեքինդին (1831—1916) և ռուս մաթեմատիկոսներ Ե. Ի. Զոլոտարյովին (1847—1878) ու Գ. Ֆ. Վորոնոյին (1868—1908)։ Մեծ զարգացում ստացավ վերջավոր խմբերի տեսությունը, որը գալիս է դեռևս Լագրանժից ու Գալուայից. այստեղ աշխատել են ֆրանսիացիներ Կոշին (1789—1857) և Ժորդանը (1838—1922), նորվեգացի մաթեմատիկոս Սիլովը (1832—1918), գերմանացի հանրահաշվագետներ Ֆրոբենիուսն (1849—1918) ու Հյոլդերը (1859—1937)։ Անընդհատ խմբերի տեսության հիմքը դրել են նորվեգացի մաթեմատիկոս Ս. Լիի (1842—1899) հետազոտությունները։

Անգլիացի գիտնական Համիլտոնի (1805—1865) և գերմանացի մաթեմատիկոս Գրասմանի (1809—1877) աշխատանքներով սկսվեց հիպերկոմպլեքս սիստեմների տեսությունը կամ, ինչպես այժմ անվանում են, հանրահաշիվների տեսությունը։ Հանրահաշվի այս ճյուղի հետագա զարգացման գործում խոշոր դեր են խաղացել ռուս մաթեմատիկոս Ֆ. Է. Մոլինի (1861—1941) անցյալ դարի վերջում կատարած աշխատանքները։

Գծային հանրահաշիվը XIX դարում ծաղկման բարձր աստիճանի համար ամենից առաջ անգլիացի մաթեմատիկոսներ Սիլվեստրի (1814—1897) և Քելիի (1821—1895) աշխատանքների շնորհիվ։ Շարունակվում էր նաև բազմանդամների հանրահաշվի մշակումը. Նշենք միայն հավասարումների մոտավոր լուծման մեթոդը, որը գտել է ռուս երկրաչափ Ն. Ի. Լոբաչևսկին (1792—1856) և գերմանացի մաթեմատիկոս Գուրվիցի (1859—1919) աշխատանքները։ Դարի երկրորդ կեսում սկսեց ստեղծվել, մասնավորապես գերմանացի մաթեմատիկոս Մ. Նյոտերի (1844—1922) աշխատանքներում, հանրահաշվական երկրաչափությունը։

XX դարում հանրահաշվական հետազոտությունները մեծապես ընդլայնվեցին և, ինչպես արդեն գիտենք, հանրահաշիվը մաթեմատիկայում շատ պատվավոր տեղ գրավեց։ Այդ ժամանակաշրջանում ծագում են հանրահաշվի նոր շատ ճյուղեր, այդ թվում՝ դաշտերի ընդհանուր տեսությունը (տասական թվականներին), օղակների տեսությունն ու խմբերի ընդհանուր տեսությունը (քսանական թվականներին), տոպոլոգիական հանրահաշիվն ու ստրուկտուրաների տեսությունը (երեսնական թվականներին). քառասնական և հիսնական թվականներին երևան եկան կիսախմբերի տեսությունն ու քվազիխմբերի տեսությունը, համընդհանուր հանրահաշիվների տեսությունը, հոմոլոգիական հանրահաշիվը, կատեգորիաների տեսությունը։ Հանրահաշվի բոլոր մասերի գծով աշխատում են խոշոր գիտնականներ, որոնք լուրջ ավանդ են մուծել գիտության մեջ, մի շարք երկրներում հանրահաշվական մեծ դպրոցներ են առաջանում։ Այդ վերաբերում է, մասնավորապես, Սովետական Միությանը։

Նախահեղափոխական շրջանի ռուս հանրահաշվագետներից, վերևում անվանվածներից բացի, հարկավոր է նշել նաև Ս. Օ. Շատունովսկուն (1859—1929) ու Դ. Ա. Գրավեին (1863—1939)։ Սակայն, հանրահաշվական հետազոտությունների իսկական ծաղկումը մեր երկրում սկսվում է միայն Հոկտեմբերյան մեծ հեղափոխությունից հետո։ Այդ հետազոտություններն ընդգրկում են ժամանակակից հանրահաշվական գիտության գրեթե բոլոր բաժինները, ընդ որում՝ որոշ բաժինների գծով սովետական հանրահաշվագետների աշխատանքները ղեկավար դեր են կատարում։ Անվանենք միայն երկու անուն՝ Ն. Գ. Չեբոտարյովին (1894—1947), որն աշխատել է դաշտերի տեսության ու Լիի խմբերի տեսության գծով և Օ. Յու. Շմիդտին (1891—1956)՝ հայտնի բևեռախույզին ու միաժամանակ խոշոր հանրահաշվագետին, սովետական խմբային-տեսաբանական դպրոցի ստեղծողին։

Ավարտելով հանրահաշվի արդի վիճակի ու զարգացման ուղիների վերաբերյալ մեր համառոտ ակնարկը, մենք պետք է մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ այստեղ դիտարկված հարցերը հիմնականում դուրս են գալիս բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի սահմաններից։ Ակնարկի նպատակն էր միայն օգնել ընթերցողին՝ ճիշտ պատկերացում կազմելու այն տեղի մասին, որ բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը գրավում է հանրահաշվական գիտության մեջ ամբողջությամբ վերցրած և մաթեմատիկայի ամբողջ մեծ շինության մեջ։

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ: ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏՆԵՐ

§ 1. Անհայտների հաջորդաբար արտաքսման մեթոդը

Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացը մենք սկսում ենք մի քանի անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարումների սիստեմների կամ, ինչպես սովորաբար ասում են, **գծային հավասարումների սիստեմների**[1] *ուսումնասիրությամբ։*

Գծային հավասարումների սիստեմների տեսությամբ զբաղվում է հանրահաշվի մի մեծ և կարևոր բաժին՝ գծային հանրահաշվի հիմքը, որին և հատկացված է մեր գրքի գլուխների մեծ մասը, մասնավորաբար՝ առաջին երեք գլուխները։ Այդ երեք գլուխներում դիտարկվող հավասարումների գործակիցները, անհայտների արժեքները և ընդհանրապես բոլոր թվերը, որոնց հետ մենք հանդիպելու ենք, համարվելու են իրական թվեր։ Ի միջի այլոց, այդ գլուխների ողջ բովանդակությունը կարելի է նույնությամբ շարադրել նաև կամայական կոմպլեքս թվերի դեպքում, որոնք ընթերցողին արդեն հայտնի են միջնակարգ դպրոցի դասընթացից։

Ի տարբերություն տարրական հանրահաշվի, մենք կուսումնասիրենք կամավոր թվով անհայտներով հավասարումների սիստեմներ, ընդ որում, երբեմն նույնիսկ չենք համարի, որ սիստեմի հավասարումների թիվը հավասար է անհայտների թվին։ Թող տված լինի n անհայտով s գծային հավասարումների սիստեմ։ Պայմանավորվենք օգտագործել հետևյալ նշանակումները՝ տարբեր անհայտները նշանակենք միևնույն x տառով, կցագրելով սրան տարբեր ինդեքսներ՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$։ Հավասարումները համարենք համարակալված՝ առաջին, երկրորդ, ..., s-րդ. i-րդ հավասարման մեջ x_j անհայտի գործակիցը նշանակենք a_{ij}[2]. վերջապես, i-րդ հավասարման ազատ անդամը նշանակենք b_i-ով։

[1] Այդ անվանումն առաջացել է նրանից, որ վերլուծական երկրաչափության մեջ երկու անհայտով մեկ հավասարումը որոշում է ուղիղ գիծ հարթության վրա։

[2] Մենք օգտագործում ենք երկու ինդեքս, որոնցից առաջինը ցույց է տալիս

Մեր սիստեմը այժմ կգրվի հետևյալ ընդհանուր տեսքով՝

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s: \end{array}\right\} \tag{1}$$

Անհայտների գործակիցները կազմում են

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ուղղանկյուն աղյուսակը, որը կոչվում է **s տողերով և n սյուներով մատրից**. a_{ij} թվերը կոչվում են մատրիցի **էլեմենտներ**[1]։ Եթե $s=n$ (այսինքն՝ տողերի քանակը հավասար է սյուների քանակին), ապա մատրիցը կոչվում է **n-րդ կարգի քառակուսի մատրից**։ Այդ մատրիցի այն անկյունագիծը, որը գնում է վերին ձախ անկյունից դեպի ստորին աջ անկյունը (այսինքն՝ կազմված է $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ էլեմենտներից), կոչվում է **գլխավոր անկյունագիծ**։ n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցը կոչվում է **n-րդ կարգի միավոր մատրից** այն դեպքում, երբ նրա գլխավոր անկյունագծի բոլոր էլեմենտները հավասար են մեկի, իսկ այդ անկյունագծից դուրս մնացած բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի։

Տված $k_1, k_2, \ldots, k_n$ թվերի այնպիսի սիստեմը, որը (1) սիստեմի յուրաքանչյուր հավասարում դարձնում է նույնություն, երբ նրանում x_i անհայտները համապատասխանաբար փոխարինվում են k_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ թվերով, կոչվում է (1) գծային հավասարումների սիստեմի **լուծում**[2]։

Գծային հավասարումների սիստեմը կարող է ոչ մի լուծում չունենալ. այդ դեպքում այն կոչվում է **անհամատեղ սիստեմ**։ Այդպիսին է, օրինակ՝

$$\left.\begin{array}{l} x_1+5x_2=1, \\ x_1+5x_2=7 \end{array}\right\}$$

սիստեմը. այս հավասարումների ձախ մասերը նույնն են, իսկ աջ մասերը՝ ոչ, հետևապես անհայտների արժեքների ոչ մի սիստեմ չի կարող բավարարել միաժամանակ այդ երկու հավասարումներին էլ։

հավասարման համարը, իսկ երկրորդը՝ անհայտի։ Կարճ գրելու համար այդ ինդեքսները ստորակետով բաժանված չեն. սակայն դրանից չի հետևում, որ a_{11}-ը փոխանակ «a մեկ-մեկ» կարդալու, կարդան «a տասնմեկ», կամ a_{34}-ը փոխանակ «a երեք-չորս» կարդալու, կարդան «a երեսունչորս»։

[1] Այսպիսով, եթե (2) մատրիցը դիտարկենք առանձին, չկապելով այն (1) սիստեմի հետ, ապա էլեմենտի առաջին ինդեքսը նշում է այն տողի համարը, իսկ երկրորդ ինդեքսը՝ այն սյան համարը, որոնց հատման կետում ընկած է այդ էլեմենտը։

[2] Ընդգծում ենք, որ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ թվերը կազմում են սիստեմի համար մեկ լուծում և ոչ թե n հատ լուծումներ։

Իսկ եթե գծային հավասարումների սիստեմը լուծում ունի, ապա այն կոչվում է համատեղ սիստեմ: Համատեղ սիստեմը կոչվում է որոշյալ, եթե նա ունի միայն մեկ լուծում (տարրական հանրահաշվում դիտարկվում են միայն այդպիսի սիստեմներ). սիստեմը կոչվում է անորոշ, եթե նա ունի մեկից ավելի լուծումներ. այդ դեպքում, ինչպես մենք հետագայում կտեսնենք, նրանց քանակը կլինի նույնիսկ անվերջ շատ: Այսպես՝

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7, \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

սիստեմը որոշյալ սիստեմ է. այն ունի $x_1=1$, $x_2=3$ լուծումը և, ինչպես հեշտ է անհայտների արտաքսման մեթոդով ստուգել, այդ լուծումը կլինի միակը: Մյուս կողմից,

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1, \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

սիստեմը անորոշ է, քանի որ ունի անթիվ բազմությամբ $x_1=k$, $x_2=3k-1$ տեսքի լուծումներ, ընդ որում այդ բանաձևով ստացվող լուծումներով սպառվում են մեր սիստեմի բոլոր լուծումները:

Գծային հավասարումների սիստեմների տեսության խնդիրն է՝ մշակել մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս իմանալ համատե՞ղ է արդյոք հավասարումների տվյալ սիստեմը, թե՞ ոչ, համատեղ լինելու դեպքում՝ պարզել լուծումների թիվը և նշել այդ բոլոր լուծումները գտնելու եղանակներ:

Մենք սկսենք թվային գործակիցներով սիստեմների լուծումները գործնականորեն որոնելու համար ամենահարմար մեթոդից, այն է՝ անհայտների հաջորդաբար արտաքսման կամ Գաուսի մեթոդից:

Սկզբում մի նախնական դիտողություն անենք: Հետագայում կարիք է լինելու գծային հավասարումների սիստեմի հետ կատարել այսպիսի ձևափոխություն՝ սիստեմի որևէ հավասարման աջ և ձախ մասերը կբազմապատկենք միևնույն թվով և դրանից հետո ստացած մասերը կհանենք սիստեմի մի այլ հավասարման համապատասխան մասերից: Դիցուք, պարզության համար, (1) սիստեմի առաջին հավասարման աջ և ձախ մասերը բազմապատկում ենք c թվով և հանում երկրորդ հավասարման համապատասխան մասերից. մենք, այդպիսով, ստանում ենք գծային հավասարումների մի նոր սիստեմ՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

որտեղ $a'_{2j}=a_{2j}-ca_{1j}$, երբ $j=1, 2, \dots, n$, $b'_2=b_2-cb_1$:

(1) և (4) հավասարումների սիստեմները համարժեք են, այսինքն՝ նրանք կամ երկուսն էլ անհամատեղ սիստեմներ են, կամ երկուսն էլ համատեղ սիստեմներ են և ունեն միևնույն լուծումները: Իրոք, թող $k_1, k_2, \dots, k_n$-ը լինի (1) սիստեմի որևէ լուծում: Այդ թվերը, ակներևորեն, բավարարում են (4) սիստեմի բոլոր հավասարումներին, թերևս բացի երկրորդից: Բայց նրանք բավարարում են նաև (4) սիստեմի երկրորդ հավասարմանը, բավական է հիշել, թե ինչպես է այդ հավասարումը արտահայտվում (1) սիստեմի առաջին և երկրորդ հավասարումների միջոցով: Հակադարձաբար, (4) սիստեմի ամեն մի լուծում կբավարարի նաև (1) սիստեմին: Իրոք, (1) սիստեմի երկրորդ հավասարումը ստացվում է (4) սիստեմի երկրորդ հավասարումից, երբ սրա աջ և ձախ մասերից համապատասխանաբար հանում ենք առաջին հավասարման աջ և ձախ մասերը՝ նախապես բազմապատկելով սրանք $(-c)$-ով:

Հասկանալի է, որ եթե (1) սիստեմի նկատմամբ մի քանի անգամ կիրառվեն դիտարկված տիպի ձևափոխություններ, ապա նոր ստացվող հավասարումների սիստեմը կլինի համարժեք (1) նախնական սիստեմին:

Կարող է պատահել, որ այդպիսի ձևափոխությունների կիրառումից հետո մեր սիստեմում առաջանա այնպիսի հավասարում, որի ձախ մասի բոլոր գործակիցները հավասար լինեն զրոյի: Եթե այդ հավասարման ազատ անդամը նույնպես հավասար է զրոյի, ապա անհայտների ցանկացած արժեքներով հավասարումը կբավարարվի. հետևապես, դեն գցելով այդ հավասարումը, մենք կստանանք մի նոր սիստեմ, որը համարժեք է սկզբնական սիստեմին: Իսկ եթե առաջացած հավասարման ազատ անդամը զրոյից տարբեր լինի, ապա այդ հավասարումը անհայտների ոչ մի արժեքներով չի կարող բավարարվել, հետևապես՝ մեր ստացած հավասարումների սիստեմը, ինչպես և նրան համարժեք սկզբնական սիստեմը, կլինի անհամատեղ սիստեմ:

Այժմ անցնենք Գաուսի մեթոդի շարադրմանը:

Դիցուք տված է գծային հավասարումների (1) կամայական սիստեմը: Որոշակիության համար համարենք a_{11} գործակիցը տարբեր զրոյից՝ $a_{11}\neq 0$, չնայած այն հավասար կարող է լինել նաև զրոյի. այսպիսի դեպքում մենք ստիպված կլինենք սկսելու սիստեմի առաջին հավասարման՝ զրոյից տարբեր որևէ այլ գործակցից:

Այժմ ձևափոխենք (1) սիստեմը՝ բացի առաջինից մնացած հավասարումներից արտաքսելով x_1 անհայտը: Դրա համար երկրորդ հավասարման աջ և ձախ մասերից հանենք առաջին հավասարման աջ և ձախ մասերը՝ նախապես բազմապատկելով սրանք $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ թվով, հետո երրորդ հավասարման աջ և ձախ մասերից հանենք առաջին հավասարման աջ և ձախ մասերը՝ նախապես բազմապատկելով դրանք $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ թվով, և այլն: Մենք այդ ճանապարհով կստանանք n հատ անհայտներով s հատ գծային հավասարումների մի նոր սիստեմ՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{s2}x_2 + a'_{s3}x_3 + \cdots + a'_{sn}x_n &= b'_s: \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Մեզ համար անհրաժեշտություն չէ նոր սիստեմի a'_{ij} գործակիցների և b'_i ազատ անդամների արտահայտությունները բացահայտ տեսքով գրել (1) նախնական սիստեմի գործակիցների և ազատ անդամների միջոցով:

Ինչպես մենք գիտենք, հավասարումների (5) սիստեմը համարժեք է (1) սիստեմին: Այժմ կձևափոխենք (5) սիստեմը, ըստ որում, առաջին հավասարմանն այլևս ձեռք չենք տա, ուստի ձևափոխման ենթակա կլինի (5) սիստեմի մի մասը՝ բոլոր հավասարումները, բացի առաջինից: Իհարկե, մենք այստեղ համարում ենք, որ այդ հավասարումների մեջ չկան այնպիսիք, որոնց ձախ մասերի գործակիցները հավասար են զրոյի. այդպիսի հավասարումները դեն կգցեինք, եթե միաժամանակ նրանց աջ մասերն էլ լինեին զրո, իսկ հակառակ դեպքում մենք արդեն ապացուցած կլինեինք մեր սիստեմի անհամատեղ լինելը: Այսպիսով, a'_{ij} գործակիցների մեջ կան զրոյից տարբերներ. որոշակիության համար համարենք, որ $a'_{22}\neq0$: Այժմ ձևափոխենք (5) սիստեմը, հանելով երրորդ հավասարման և նրանից հետո եկող ամեն մի հավասարման երկու մասերից երկրորդ հավասարման աջ և ձախ մասերը՝ նախապես բազմապատկելով դրանք համապատասխանաբար

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \quad \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \quad \ldots, \quad \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}$$

թվերով: Դրանով կարտաքսենք x_2 անհայտը բոլոր հավասարումներից, բացառությամբ առաջին և երկրորդ հավասարումների, և մենք կհանգենք հավասարումների հետևյալ սիստեմին՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a''_{t3}x_3 + \cdots + a''_{tn}x_n &= b''_t, \end{aligned}\right\}$$

որը համարժեք է (5), հետևապես և (1) սիստեմին: Մեր սիստեմը

այժմ պարունակում է t հավասարում, ըստ որում՝ $t\leqslant s$, քանի որ որոշ հավասարումներ, հնարավոր է, որ դեն նետված լինեն: Հասկանալի է, որ սիստեմի հավասարումների թիվը կարող էր պակասել արդեն x_1 անհայտի արտաքսման ժամանակ: Հետագա ձևափոխման ենթակա է ստացված սիստեմի այն մասը, որը պարունակում է բոլոր հավասարումները, բացի առաջին երկուսից:

Ե՞րբ կդադարի անհայտների հաջորդաբար արտաքսման այս պրոցեսը:

Եթե մենք հասնենք այնպիսի սիստեմի, որի մեջ որևէ հավասարման ձախ մասի բոլոր գործակիցները լինեն զրո, իսկ ազատ անդամը լինի զրոյից տարբեր, ապա, ինչպես մենք գիտենք, այդ դեպքում սկզբնական սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է:

Հակառակ դեպքում մենք կստանանք հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k + \cdots + a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n &= b^{(k-2)}_{k-1}, \\ a^{(k-1)}_{kk}x_k + \cdots + a^{(k-1)}_{kn}x_n &= b^{(k-1)}_k, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

որը համարժեք է (1)-ին: Այստեղ $a_{11}\neq0$, $a'_{22}\neq0, \ldots, a^{(k-1)}_{kk}\neq0$: Նշենք նաև, որ $k\leqslant s$ և $k\leqslant n$: Այս դեպքում (1) սիստեմը համատեղ սիստեմ է: Այն կլինի որոշյալ սիստեմ $k=n$ դեպքում և անորոշ, երբ $k<n$:

Իրոք, եթե $k=n$, ապա (6) սիստեմը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n: \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Վերջին հավասարումից x_n անհայտի համար մենք կստանանք միանգամայն որոշակի մի արժեք: Այն տեղադրելով նախավերջին հավասարման մեջ, x_{n-1}-ի համար մենք կստանանք դարձյալ միանգամայն որոշակի մի արժեք:

Շարունակելով այդ պրոցեսը, մենք կտեսնենք, որ (7) սիստեմը, հետևաբար և (1) սիստեմը ունի միակ լուծում, այսինքն՝ համատեղ և որոշյալ սիստեմներ են:

Իսկ եթե $k<n$, ապա $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ «ազատ» անհայտների համար մենք կվերցնենք կամայական թվային արժեքներ, որից հետո, շարժվելով (6) սիստեմով ներքևից վերև, մենք, ինչպես և վերևում,

$x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1$ անհայտների համար կգտնենք որոշակի արժեքներ։ Քանի որ ազատ անհայտների արժեքները կարելի է ընտրել անվերջ շատ եղանակներով, ապա մեր (6) սիստեմը, հետևապես և (1) սիստեմը կլինեն համատեղ, բայց անորոշ սիստեմներ։ Հեշտ է ստուգել, որ այստեղ նշված մեթոդով (ազատ անհայտների համար բոլոր հնարավոր արժեքների ընտրությամբ) կգտնվեն (1) սիստեմի բոլոր լուծումները։

Առաջին հայացքից թվում է, թե Գաուսի մեթոդով հնարավոր է, որ գծային հավասարումների սիստեմը բերվի մի այլ տեսքի ևս, այնպիսի տեսքի, երբ (7) սիստեմին կցագրվում են էլի՛ մի քանի այնպիսի հավասարումներ, որոնք պարունակում են միայն x_n անհայտը։ Բայց իրականում այդ նշանակում է, որ ձևափոխությունները պարզապես չեն հասցվել մինչև վերջ։ Քանի որ $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$, ապա $(n+1)$-երորդից սկսած բոլոր հավասարումներից x_n անհայտը կարելի է արտաքսել։

Հարկավոր է նկատել, որ (7) հավասարումների սիստեմի «եռանկյունաձև» տեսքը կամ (6) հավասարումների սիստեմի «սեղանաձև» տեսքը ($k<n$ դեպքում) ստացվեց, երբ ենթադրեցինք, որ $a_{11}, a'_{22}, \dots$ գործակիցները զրոյից տարբեր են։ Ընդհանուր դեպքում, հավասարումների այն սիստեմը, որին մենք կհանգենք անհայտների արտաքսման պրոցեսը մինչև վերջ տանելով, ընդունում է եռանկյունաձև կամ սեղանաձև տեսք միայն անհայտների համարակալումից հետո։

Վերը շարադրածը ի մի բերելով, մենք տեսնում ենք, որ Գաուսի մեթոդը կիրառելի է ցանկացած գծային հավասարումների սիստեմի նկատմամբ, ըստ որում, սիստեմը կլինի անհամատեղ, եթե ձևափոխումների ընթացքում մենք ստանանք հավասարում, որի մեջ բոլոր անհայտների գործակիցները հավասար են զրոյի, իսկ ազատ անդամը զրոյից տարբեր է։ Իսկ եթե մենք այդպիսի հավասարման չենք հանդիպում, ապա սիստեմը կլինի համատեղ։ Հավասարումների համատեղ սիստեմը կլինի որոշյալ, եթե այն բերվում է (7) եռանկյունաձև տեսքի, և՝ անորոշ, եթե բերվում է (6) սեղանաձև տեսքի $k<n$ դեպքում։

Ասածը կիրառենք համասեռ հավասարումների սիստեմի նկատմամբ, այսինքն՝ այնպիսի հավասարումների սիստեմի նկատմամբ, որոնց ազատ անդամները հավասար են զրոյի։ Այդպիսի սիստեմը միշտ համատեղ է, քանի որ ունի (0, 0, ..., 0) զրոյական լուծումը։ Թող դիտարկվող սիստեմում հավասարումների թիվը փոքր լինի անհայտների թվից։ Այն ժամանակ մեր սիստեմը չի կարող բերվել եռանկյունաձև տեսքի, քանի որ Գաուսի մեթոդով անհայտների արտաքսման ընթացքում հավասարումների թիվը սիստեմում պակասել կարող է, բայց ավելանալ չի կարող. հետևապես այն բերվում է սեղանաձև տեսքի, այսինքն՝ անորոշ է։

Այլ խոսքով, եթե համասեռ հավասարումների սիստեմում հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից, ապա այդ սիստեմը, բացի զրոյական լուծումից, ունի նաև ոչզրոյական լուծումներ, այսինքն՝ այնպիսի լուծումներ, որտեղ մի քանի (հնարավոր է և բոլոր) անհայտների արժեքները տարբեր են զրոյից։ Այդպիսի լուծումներ անվերջ շատ կլինեն։

Գաուսի մեթոդով գծային հավասարումների սիստեմը գործնականորեն լուծելիս, հարկավոր է գրել սիստեմի գործակիցների մատրիցը, ավելացնել նրան ազատ անդամների սյունակը (հարմարության համար անջատելով այն ուղղաձիգ գծիկով) և բոլոր ձևափոխությունները կատարել այդ «ընդլայնված» մատրիցի տողերի հետ։

Օրինակներ։ 1. Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25: \end{aligned}$$

Ձևափոխության ենթարկենք այդ սիստեմի ընդլայնված մատրիցը.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right):$$

Հետևապես, մենք կգանք

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9, \\ -3x_2 - 2x_3 &= 11, \\ -8x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

հավասարումների սիստեմին, որն ունի $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=-1$ միակ լուծումը։ Սկզբնական սիստեմը որոշյալ է։

2. Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1, \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 &= -5, \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2: \end{aligned}\right\}$$

Ձևափոխենք սիստեմի ընդլայնված մատրիցը.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right):$$

Մենք հանգեցինք այնպիսի սիստեմի, որը պարունակում է $0=2$ *հավասարումը: Հետևապես, սկզբնական սիստեմը անհամատեղ է:*

3. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0: \end{aligned}\right\}$$

Այս համասեռ հավասարումների սիստեմ է, ըստ որում հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից, այդ պատճառով էլ այն պետք է անորոշ սիստեմ լինի: Քանի որ բոլոր ազատ անդամները հավասար են զրոյի, ապա մենք ձևափոխության կենթարկենք սիստեմի գործակիցներից կազմված մատրիցը.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}:$$

Մենք հանգեցինք

$$\begin{aligned} 2x_2 \qquad\qquad - 2x_4 &= 0, \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

հավասարումների սիստեմին: Որպես ազատ անհայտ կարող ենք ընտրել x_2 *և* x_4 *անհայտներից յուրաքանչյուրը: Թող* $x_4=\alpha$*: Այդ դեպքում առաջին հավասարումից հետևում է, որ* $x_2=\alpha$*, որից հետո երկրորդ հավասարումից ստանում ենք՝* $x_3=\frac{4}{5}\alpha$ *և, վերջապես, երրորդ հավասարումից՝* $x_1=\frac{3}{5}\alpha$*: Այսպիսով,* $\frac{3}{5}\alpha$, α, $\frac{4}{5}\alpha$, α *կլինի տրված հավասարումների սիստեմի լուծման ընդհանուր տեսքը:*

§ 2. Երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտներ

Գծային հավասարումների սիստեմի լուծման նախորդ պարագրաֆում շարադրված մեթոդը չափազանց պարզ մեթոդ է և պահանջում է կատարել մի քանի միանման հաշվումներ, որոնք հեշտությամբ իրականացնելի են հաշվիչ մեքենաների վրա: Նրա էական թերությունը, սակայն, այն է, որ այդ մեթոդը հնարավորություն չի տալիս սիստեմի համատեղ կամ որոշյալ լինելու պայմանը այդ սիստեմի գործակիցների և ազատ անդամների միջոցով ձևակերպելու: Մյուս կողմից, անգամ որոշյալ սիստեմի դեպքում, այդ մեթոդը հնարավորություն չի տալիս ստանալու այնպիսի բանաձևեր, որոնք սիստեմի լուծումն արտահայտեին նրա գործակիցների և ազատ անդամների միջոցով: Սակայն այդ բոլորն անհրաժեշտ են զանազան տեսական հարցերում, մասնավորաբար՝ երկրաչափական ուսումնասիրություններում, դրա համար էլ գծային հավասարումների սիստեմների տեսությունը հարկավոր է զարգացնել

ուրիշ, ավելի խոր մեթոդներով: Ընդհանուր դեպքը կդիտարկվի հաջորդ գլխում; իսկ այս գլխի հետագա շարադրանքը նվիրված է հավասար թվով անհայտներ և հավասարումներ ունեցող որոշյալ սիստեմներին, ընդ որում մենք սկսելու ենք, տարրական հանրահաշվում արդեն ուսումնասիրված, երկու և երեք անհայտներով սիստեմներից:

Դիցուք տված է երկու անհայտով երկու հավասարումների գծային սիստեմ՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

որի գործակիցները կազմում են

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

երկրորդ կարգի քառակուսի մատրիցը: (1) սիստեմի համար կիրառելով գործակիցների հավասարեցման մեթոդը, մենք կստանանք՝

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}: \end{aligned}$$

Ընդունենք, որ $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$*: Այդ դեպքում՝*

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}: \tag{3}$$

Տեղադրելով անհայտների ստացված արժեքները (1) հավասարումների մեջ, հեշտությամբ կհամոզվենք, որ (3)-ը (1)-ի համար լուծում է: Այդ լուծման միակության հարցը կդիտարկվի § 7-ում:

Անհայտների (3) արժեքների ընդհանուր հայտարարը շատ պարզ կերպով է արտահայտվում (2) մատրիցի էլեմենտների միջոցով. այն հավասար է գլխավոր անկյունագծի էլեմենտների արտադրյալի և երկրորդ անկյունագծի էլեմենտների արտադրյալի տարբերությանը: Այդ թիվը կոչվում է (2) մատրիցի դետերմինանտ (որոշիչ), այն է՝ երկրորդ կարգի դետերմինանտ, *քանի որ (2) մատրիցը երկրորդ կարգի մատրից է: (2) մատրիցի դետերմինանտը նշանակում են այսպես. գրում են (2) մատրիցի էլեմենտները և, փոխանակ առնելու կլոր փակագծերի մեջ, առնում են ուղղաձիգ գծերի միջև. այսպիսով՝*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}: \tag{4}$$

Օրինակներ:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 7\cdot 1 = 5:$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-2)\cdot 3 = 11:$

Հարկավոր է մի անգամ ևս նշել, որ մատրիցը հանդիսանում է թվային աղյուսակ, իսկ դետերմինանտը թիվ է՝ որոշակի կերպով կապված քառակուսի մատրիցի հետ։ Նկատենք, որ $a_{11}a_{22}$ և $a_{12}a_{21}$ արտադրյալները կոչվում են երկրորդ կարգի դետերմինանտի անդամներ։

(3) արտահայտության մեջ համարիչները ունեն նույն տեսքը, ինչ որ հայտարարը, այսինքն՝ նույնպես հանդիսանում են երկրորդ կարգի դետերմինանտներ. x_1-ի արտահայտության համարիչը այն մատրիցի դետերմինանտն է, որն ստացվում է (2) մատրիցից՝ նրա առաջին սյունակը փոխարինելով (1) սիստեմի ազատ անդամների սյունակով. իսկ x_2-ի արտահայտության համարիչը այն մատրիցի դետերմինանտն է, որն ստացվում է (2) մատրիցից՝ նրա երկրորդ սյունակի նույնպիսի փոխարինմամբ։ (3) բանաձևերը այժմ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}: \tag{5}$$

Երկու անհայտներով երկու գծային հավասարումների սիստեմի լուծման այդ կանոնը (որ կոչվում է Կրամերի կանոն) բառերով ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Եթե (1) հավասարումների սիստեմի գործակիցներից կազմված (4) դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա մենք (1) սիստեմի լուծումը կստանանք, եթե որպես անհայտների արժեքներ վերցնենք այն կոտորակները, որոնց ընդհանուր հայտարարը (4) դետերմինանտն է, իսկ x_i ($i = 1, 2$) անհայտի համարիչն է այն դետերմինանտը, որն ստացվում է (4) դետերմինանտից, նրա i-րդ սյունակը (այսինքն՝ որոնելի անհայտի գործակիցներից կազմված սյունակը) ազատ անդամների սյունակով փոխարինելով[1]։

Օ ր ի ն ա կ։ Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$2x_1 + x_2 = 7,$$
$$x_1 - 3x_2 = -2:$$

Գործակիցներից կազմված դետերմինանտը կլինի՝

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

[1] Այս ձևակերպման մեջ մենք կարճության համար ասում ենք դետերմինանտի սյունակների փոխարինման մասին, նման ձևով էլ կվարվենք հետագայում, եթե, իհարկե, այդ հարմար լինի, ասելով դետերմինանտի տողերի, սյուների, էլեմենտների անկյունագծերի և այլնի մասին։

որը զրոյից տարբեր է, ուստի սիստեմի նկատմամբ կիրառելի է Կրամերի կանոնը։ Անհայտների համարիչները կլինեն հետևյալ դետերմինանտները.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19 \quad և \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11։$$

Այսպիսով, մեր սիստեմի համար լուծում կլինի հետևյալ թվերի սիստեմը.

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{19}{7}, \qquad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{11}{7}:$$

Երկրորդ կարգի դետերմինանտների մուծումը էական պարզեցում չի մտցնում երկու անհայտներով երկու հավասարումների սիստեմի, առանց այն էլ ոչ մի դժվարություն չներկայացնող լուծման մեջ։ Նման մեթոդը երեք անհայտներով երեք հավասարումների սիստեմի համար արդեն գործնականորեն օգտակար է։ Դիցուք տրված է

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

սիստեմը, գործակիցների հետևյալ մատրիցով.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}: \tag{7}$$

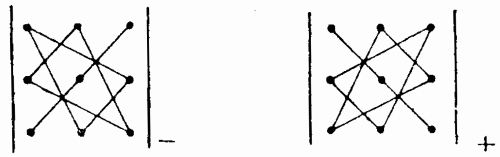
Եթե մենք (6) հավասարումներից առաջինի երկու մասն էլ բազմապատկենք $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ թվով, երկրորդի երկու մասն էլ՝ $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ թվով, իսկ երրորդի երկու մասն էլ՝ $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ թվով, և ապա գումարենք բոլոր երեք հավասարումները, ապա, ինչպես հեշտ է ստուգել, x_2 և x_3 անհայտների գործակիցները (գումարելուց հետո) կդառնան զրո, այսինքն՝ այդ անհայտները միաժամանակ կարտաքսվեն և մենք կստանանք հետևյալ հավասարությունը.

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = \\ = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}: \end{aligned} \tag{8}$$

Այս հավասարման մեջ x_1 անհայտի գործակիցը կոչվում է (7) մատրիցին համապատասխան երրորդ կարգի դետերմինանտ։ Այն գրելու համար օգտագործվում է նույնպիսի պայմանանշան, ինչպիսին երկրորդ կարգի դետերմինանտի համար էր, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}: \tag{9}$$

Չնայած երրորդ կարգի դետերմինանտի արտահայտությունը շատ բարդ է, սակայն նրա կազմումը (7) մատրիցի էլեմենտներով բավականոնն հեշտ է։ Իրոք, նրա (9) արտահայտության մեջ մտնող պլյուս նշան ունեցող անդամներից մեկը կլինի գլխավոր անկյունագծի վրայի էլեմենտների արտադրյալը, մյուս երկու գումարելիներից յուրաքանչյուրը կլինի գլխավոր անկյունագծին զուգահեռ ուղիղի վրա գտնվող երկու էլեմենտների արտադրյալը՝ բազմապատկած երրորդ արտադրիչով, որը վերցված է մատրիցի հակադիր անկյունից։ (9) արտահայտության մեջ մտնող մինուս նշանով անդամները կազմված են նույն եղանակով, սակայն երկրորդ անկյունագծի նկատմամբ։ Մենք ստանում ենք երրորդ կարգի դետերմինանտը հաշվելու մի եղանակ, որը (որոշ չափով



Գծ. 1.

վարժվելուց հետո) շատ արագ բերում է վերջնական արդյունքին։ Գծ. 1-ում ձախ կողմում ցույց է տրված երրորդ կարգի դետերմինանտի դրական անդամները կազմելու և հաշվելու սխեման, աջ կողմում՝ բացասական անդամները կազմելու և հաշվելու սխեման։

Օրինակներ։

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3- \\ -2\cdot3\cdot2-1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3= \\ =30+2-24-12+20-6=10:$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-2)\cdot(-2)- \\ -(-5)\cdot3\cdot1-0\cdot(-2)\cdot0-1\cdot2\cdot(-2)= \\ =-20+15+4=-1:$$

(8) հավասարության աջ մասը նույնպես երրորդ կարգի դետերմինանտ է՝ այն մատրիցի դետերմինանտը, որը ստացվում է (7) մատրիցից՝ նրա առաջին սյունը (6) հավասարումների սիստեմի ազատ անդամների սյունով փոխարինելով։ Եթե մենք (9) դետերմինանտը նշանակենք d տառով, իսկ նրա j-րդ սյունը ($j=1, 2, 3$) (6) սիստեմի ազատ անդամների սյունով փոխարինելուց առաջացած դետերմինանտը՝ d_j-ով, ապա (8) հավասարությունը կստանա $dx_1=d_1$ տեսքը, որտեղից $d\neq0$ դեպքում, հետևում է, որ

$$x_1=\frac{d_1}{d}: \qquad (10)$$

ճիշտ նույն ձևով, (6) սիստեմի հավասարումները համապատասխանաբար բազմապատկելով $a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$ թվերով, մենք x_2-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը (նորից $d\neq0$ դեպքում).

$$x_2=\frac{d_2}{d}: \qquad (11)$$

Եվ, վերջապես, այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար բազմապատկելով $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ թվերով, մենք x_3 անհայտի համար կստանանք՝

$$x_3=\frac{d_3}{d}: \qquad (12)$$

(10), (11), (12) արտահայտությունները տեղադրելով (6) հավասարումների մեջ (ենթադրվում է, որ d և բոլոր d_j դետերմինանտները գրված են բացազատված տեսքով), բավականին մեծածավալ, բայց ընթերցողին լրիվ հասկանալի հաշվումներից հետո, մենք կհամոզվենք, որ բոլոր այդ հավասարումները բավարարվում են, այսինքն՝ (10), (11) և (12) թվերը կազմում են (6) սիստեմի լուծումը։ Այսպիսով, եթե երեք անհայտով երեք գծային հավասարումների սիստեմի գործակիցներից կազմված դետերմինանտը տարբեր է զրոյից, ապա այդ սիստեմի լուծումը կարելի է ստանալ Կրամերի կանոնով, որը ձևակերպվում է այնպես, ինչպես երկու հավասարումների սիստեմի դեպքում։ Այդ պնդման մի այլ ապացույց (մեր բաց թողած հաշվումների վրա չհիմնվող), ինչպես նաև (6) սիստեմի (10), (11), (12) լուծման միակության ապացույցը, ընթերցողը կգտնի § 7-ում՝ ավելի ընդհանուր դեպքի համար։

Օրինակ։ Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1, \\ x_1+3x_2-2x_3&=4: \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի գործակիցներից կազմված

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28$$

դետերմինանտը զրոյից տարբեր է։ Այդ պատճառով սիստեմի նկատմամբ կիրառելի է Կրամերի կանոնը։ Անհայտների համար համարիչներ կլինեն հետևյալ դետերմինանտները.

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13, \quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47, \quad d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

այսինքն՝ սիստեմի համար լուծում կծառայի

$$x_1 = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

թվերի սիստեմը:

§ 3. Տեղափոխություններ և տեղադրություններ

Բարձր կարգի դետերմինանտների սահմանման և ուսումնասիրման համար մեզ պետք կգան որոշ գաղափարներ ու փաստեր, որոնք վերաբերում են վերջավոր բազմություններին: Դիցուք տրված է n էլեմենտներից բաղկացած որևէ M վերջավոր բազմություն: Այդ էլեմենտները կարող են համարակալված լինել առաջին n բնական թվերի՝ $1, 2, \ldots, n$ թվերի օգնությամբ և, քանի որ մեզ հետաքրքրող հարցերում այդ էլեմենտների անհատական հատկությունները ոչ մի դեր չեն խաղալու, ուստի մենք պարզապես կընդունենք, որ M բազմության էլեմենտներ են ծառայում հենց $1, 2, \ldots, n$ բնական թվերը:

Բացի $1, 2, \ldots, n$ թվերի բնական դասավորությունից, նրանց կարելի է դասավորել նաև բազմաթիվ այլ եղանակներով: Այսպես, 1, 2, 3, 4 թվերը կարելի է դասավորել նաև 3, 1, 2, 4 կամ 2, 4, 1, 3 և շատ այլ եղանակներով: $1, 2, \ldots, n$ թվերի ամեն մի որոշակի դասավորություն կոչվում է n թվերից (կամ սիմվոլներից) կազմված տեղափոխություն. n սիմվոլներից կազմված բոլոր տարբեր տեղափոխությունների թիվը հավասար է $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ արտադրյալին, որը նշանակում են $n!$ (կարդում են՝ «էն-ֆակտորյալ»): Իրոք, n սիմվոլներից կազմված տեղափոխության ընդհանուր տեսքը կլինի $i_1, i_2, \ldots, i_n$, որտեղ ամեն մի i_s հանդիսանում է $1, 2, \ldots, n$ թվերից որևէ մեկը, ըստ որում այդ թվերից ոչ մեկը չի հանդիպում երկու անգամ: Որպես i_1 կարող ենք վերցնել $1, 2, \ldots, n$ թվերից ցանկացածը, որի ընտրության համար կա n տարբեր հնարավորություն: i_1-ը ընտրելուց հետո, որպես i_2 կարելի է ընտրել մնացած $n-1$ թվերից յուրաքանչյուրը. ստացվում է, որ i_1-ը և i_2-ը ընտրելու հնարավորությունների քանակը հավասար է $n(n-1)$ արտադրյալին և այլն:

Այսպիսով, n սիմվոլներից կազմված տեղափոխությունների թիվը $n=2$ դեպքում հավասար է $2!=2$ (12 և 21 տեղափոխությունները. մենք $n \leqslant 9$ դեպքում տեղափոխելի սիմվոլները ստորակետով չենք բաժանի), $n=3$ դեպքում՝ $3!=6$, $n=4$ դեպքում՝ $4!=24$: Այնուհետև, n-ի աճման հետ զուգընթաց, տեղափոխությունների թիվը չափազանց արագ է աճում. այսպես, $n=5$ դեպքում այն հավասար է $5!=120$, իսկ $n=10$ համար՝ արդեն 3628800:

Եթե որևէ տեղափոխության մեջ մենք փոխենք երկու սիմվոլների տեղերը (ոչ անպայման իրար կողքի գտնվող), իսկ մնացած բոլոր սիմվոլները թողնենք տեղերում, ապա, ակներևորեն, կստանանք մի նոր տեղափոխություն: Տեղափոխության այդ ձևափոխությունը կոչվում է դիրքափոխություն (*տրանսպոզիցիա*): n սիմվոլներից կազմված բոլոր $n!$ տեղափոխությունները կարելի է դասավորել այնպիսի կարգով, որ ամեն մի հաջորդ տեղափոխություն ստացվի իր նախորդից՝ մեկ դիրքափոխությամբ, ըստ որում կարելի է սկսել ցանկացած տեղափոխությունից:

Այդ պնդումն իրավացի է $n=2$ դեպքում. եթե հարկավոր է սկսել 12 տեղափոխությունից, ապա որոնելի հերթականությունը կլինի 12, 21, իսկ եթե սկսելու լինեինք 21 տեղափոխությունից, ապա այդ կլիներ 21, 12 հերթականությունը: Համարենք մեր պնդումը արդեն ապացուցված $(n-1)$-ի համար և ապացուցենք այն n-ի համար: Դիցուք մենք սկսում ենք հետևյալ տեղափոխությունից.

$$i_1, i_2, \ldots, i_n. \tag{1}$$

Դիտարկենք n սիմվոլներից կազմված բոլոր այն տեղափոխությունները, որոնց մեջ առաջին տեղում գտնվում է i_1-ը: Այդպիսիների թիվը կլինի $(n-1)!$ և նրանց կարելի է դասավորել համաձայն թեորեմայի պահանջի, ըստ որում՝ սկսելով (1) տեղափոխությունից, քանի որ այդ փաստորեն հանգում է $(n-1)$ սիմվոլներից կազմված բոլոր տեղափոխությունների դասավորմանը, որը ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն, կարելի է սկսել ցանկացած տեղափոխությունից, մասնավորաբար՝ $i_2, i_3, \ldots, i_n$ տեղափոխությունից: Այս ճանապարհով ստացված վերջին տեղափոխության մեջ (n սիմվոլից կազմված) կատարենք դիրքափոխություն i_1-ի և ցանկացած մեկ ուրիշ սիմվոլի, օրինակ՝ i_2-ի միջև, և, սկսելով նոր ստացված տեղափոխությունից, դասավորենք պետք եղածին պես բոլոր այն տեղափոխությունները, որոնց մեջ առաջին տեղում գտնվում է i_2-ը և այլն: Այդ ճանապարհով, ակներևորեն, կարելի է սպառել n սիմվոլներից կազմած բոլոր տեղափոխությունները:

Այդ թեորեմայից բխում է, որ n սիմվոլներից կազմված որևէ տեղափոխությունից կարելի է անցնել այդ նույն սիմվոլներից կազմված ցանկացած տեղափոխությանը մի քանի դիրքափոխությունների միջոցով:

Ասում են, որ տվյալ տեղափոխության մեջ i և j թվերը կազմում են կարգի խախտում (ինվերսիա), եթե $i>j$ և i-ն այդ տեղափոխության մեջ գտնվում է j-ից առաջ: Տեղափոխությունը կոչվում է զույգ, եթե նրա սիմվոլները կազմում են զույգ թվով խախտումներ, և կենտ՝

հակառակ դեպքում։ Այսպես, 1, 2, ..., n տեղափոխությունը կլինի զույգ ամեն մի n-ի համար, քանի որ նրա մեջ խախտումների թիվը հավասար է զրոյի։ 4, 5, 1, 3, 6, 2 տեղափոխությունը ($n=6$) պարունակում է 8 խախտում և դրա համար էլ զույգ է, իսկ 38524671 ($n=8$) տեղափոխությունը պարունակում է 15 խախտում և դրա համար էլ կենտ է։

Ամեն մի դիրքափոխություն փոխում է տեղափոխության զույգությունը *(զույգը դարձնում է կենտ, կենտը՝ զույգ)*։ Այդ կարևոր թեորեման ապացուցելու համար նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ դիրքափոխվող i և j սիմվոլները կողք-կողքի են, այսինքն՝ տեղափոխությունը ունի..., i, j, ... տեսքը, որտեղ բազմակետերը փոխարինում են այն սիմվոլներին, որոնք դիրքափոխության չեն ենթարկվում։ Դիրքափոխությունը մեր տեղափոխությունը դարձնում է..., j, i, ... տեղափոխություն, ըստ որում, հասկանալի է, որ երկու տեղափոխությունների մեջ էլ i և j սիմվոլներից յուրաքանչյուրը կազմում է նույն խախտումները անշարժ մնացած սիմվոլների հետ։ Եթե i և j սիմվոլները առաջ խախտում չէին կազմում, ապա նոր տեղափոխության մեջ արդեն կազմում են, այսինքն՝ նոր տեղափոխության մեջ խախտումների թիվը մեկով ավելանում է. իսկ եթե նրանք առաջ խախտում կազմում էին, ապա հիմա այն վերանում է, այսինքն՝ խախտումների թիվը մեկով պակասում է։ Երկու դեպքում էլ տեղափոխության զույգությունը փոխվում է

Թող հիմա դիրքափոխության ենթակա i և j սիմվոլների միջև գտնվեն s սիմվոլներ, $s>0$, այսինքն՝ տեղափոխությունն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\ldots i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots \quad (2$$

i և j սիմվոլների դիրքափոխությունը կարելի է փոխարինել $2s+1$ հաջորդաբար կատարվող այնպիսի դիրքափոխություններով, որոնցից յուրաքանչյուրը կատարվում է երկու հարևան սիմվոլների միջև։ Այն է՝ նախ դիրքափոխությունը կատարվում է i և k_1 սիմվոլների միջև, այնուհետև՝ i-ի (որը արդեն k_1 սիմվոլի տեղն է գրավել) և k_2-ի միջև և այլն, մինչև i-ն կգրավի k_s-ի տեղը։ Այդ s դիրքափոխություններին հաջորդում է i և j սիմվոլների դիրքափոխությունը, որից հետո s դիրքափոխություններ j սիմվոլի և բոլոր k-երի հետ, որից հետո j սիմվոլը գրավում է i սիմվոլի տեղը, իսկ բոլոր k-երը վերադառնում են իրենց հին տեղերը։ Այսպիսով, մենք կենտ անգամ փոխեցինք տեղափոխության զույգությունը, այդ պատճառով էլ (2) տեղափոխությունը և

$$\ldots j, k_1, k_2, \ldots, k_s, i, \ldots \quad (3)$$

տեղափոխությունը հակառակ զույգություն ունեն։ Երբ $n \geqslant 2$, **n սիմվոլներից կազմված բոլոր զույգ տեղափոխությունների թիվը հավասար է կենտ տեղափոխությունների թվին, այսինքն՝ հավասար է** $\frac{n!}{2}$։

Իրոք, համաձայն նախորդ ապացուցած թեորեմայի, բոլոր տեղափոխությունները դասավորենք այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրն իր նախորդ տեղափոխությունից ստացվի միայն մեկ դիրքափոխությամբ։ Հարևան տեղափոխությունները կունենան հակառակ զույգություն, այսինքն՝ զույգ և կենտ տեղափոխությունները կդասավորվեն մեկ ընդ մեջ։ Մեր պնդումն այժմ բխում է այն փաստից, որ $n \geqslant 2$ դեպքում $n!$-ը զույգ թիվ է։

Այժմ սահմանենք մի նոր գաղափար, այն է՝ **n-րդ աստիճանի տեղադրության գաղափարը**։ Արտագրենք իրար տակ n սիմվոլներից կազմված երկու տեղափոխություններ՝ վերցնելով ստացված երկու տողերը փակագծերի մեջ. օրինակ, $n=5$-ի համար՝

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Այս օրինակում[1] 3-ի տակ գտնվում է 5-ը, 5-ի տակ՝ 2-ը և այլն։ Մենք կասենք, որ 3 թիվը **փոխվում է** 5-ի, 5-ը փոխվում է 2-ի, 1-ը փոխվում է 3-ի, 4-ը փոխվում է 4-ի (կամ **մնում է տեղում**) և, վերջապես, 2-ը փոխվում է 1-ի։ Այսպիսով, երկու տեղափոխությունները՝ գրված մեկը մյուսի տակ (4) տեսքով, որոշում են առաջին հինգ բնական թվերի բազմության մի փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա, այսինքն՝ այնպիսի արտապատկերում, որը 1, 2, 3, 4, 5 բնական թվերից ամեն մեկին դնում է համապատասխանության մեջ այդ իսկ թվերից որևէ մեկի հետ, ըստ որում՝ տարբեր թվերին համապատասխանության մեջ են դնում տարբեր թվեր։ Այդ ժամանակ, քանի որ թվերը ընդամենը հինգ հատ են, այսինքն՝ վերջավոր բազմություն է, ապա այդ հինգ թվերից ամեն մեկը կհամապատասխանի 1, 2, 3, 4, 5 թվերից որևէ մեկին, հենց նրան, որը փոխվում է այդ թվին։

Պարզ է, որ առաջին հինգ բնական թվերի բազմության այն փոխմիարժեք արտապատկերումը, որը մենք ստացանք (4)-ի օգնությամբ, կարելի էր ստանալ նաև նույն 5 սիմվոլներից կազմված մի զույգ այլ տեղափոխություններ մեկը մյուսի տակ գրելով։ Այդպիսիք ստացվում

[1] Արտաքուստ այն հիշեցնում է երկու տողերով և 5 սյուներով մատրից, բայց բոլորովին այլ իմաստ ունի։

են (4)-ից՝ նրա սյունակների մի քանի դիրքափոխությունների միջոցով. այդպիսիք են, օրինակ՝

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}: \tag{5}$$

Այս բոլորում 3-ը փոխվում է 5-ի, 5-ը՝ 2-ի և այլն:

Նման ձևով, n սիմվոլներից կազմված երկու տեղափոխություններ՝ գրված մեկը մյուսի տակ, որոշում են առաջին n բնական թվերի բազմության մի որոշ փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա: Առաջին n բնական թվերի բազմության ամեն մի A փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա, կոչվում է n-րդ աստիճանի տեղադրություն, ընդ որում, պարզ է, ամեն մի A տեղադրություն կարելի է գրի առնել որևէ երկու տեղափոխություններ մեկը մյուսի տակ գրելով՝

$$A = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_n, \\ \alpha_{i_1}, & \alpha_{i_2}, & \dots, & \alpha_{i_n}, \end{pmatrix}, \tag{6}$$

այստեղ α_i-ով նշանակված է այն թիվը, որին A տեղադրությամբ փոխվում է i-ն, $i=1, 2, \dots, n$:

A տեղադրությունը օժտված է (6) տեսքի բազմաթիվ այլ գրելաձևերով. այսպես (4)-ը և (5)-ը միևնույն 5-րդ աստիճանի տեղադրության տարբեր գրելաձևերն են:

A տեղադրության մի գրելաձևից մի այլ գրելաձևին կարելի է անցնել սյունակների մի քանի դիրքափոխությունների օգնությամբ: Ըստ որում, կարելի է ստանալ (6) տեսքի այնպիսի գրելաձև, որ վերին (կամ ստորին) տողում լինի գրված n սիմվոլներից կազմված նախապես տրված ցանկացած տեղափոխությունը: Մասնավորաբար, n-րդ աստիճանի ամեն մի A տեղափոխություն կարելի է գրել

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

տեսքով, այսինքն՝ վերին տողը թվերի բնական դասավորությամբ: Այսպիսի գրելաձևերում տարբեր տեղադրություններն իրարից տարբերվում են ստորին տողում եղած տեղափոխություններով, այդ պատճառով էլ բոլոր n-րդ աստիճանի տեղադրությունների թիվը հավասար է n սիմվոլներից կազմված բոլոր տեղափոխությունների թվին, այսինքն՝ $n!$-ի:

Իբրև n-րդ աստիճանի տեղադրության օրինակ է ծառայում նույնական տեղադրությունը

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ 1 & 2 \cdots & n \end{pmatrix},$$

որում բոլոր սիմվոլները մնում են իրենց տեղերում:

Հարկավոր է նկատել, որ A տեղադրության (6) գրելաձևում վերին և ստորին տողերը տարբեր դերեր են կատարում և, նրանց տեղերը փոխելով, մենք, ընդհանրապես, կստանանք այլ տեղադրություն: Այսպես, 4-րդ աստիճանի

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ և } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

տեղադրությունները տարբեր են. առաջինում 2-ը փոխվում է 4-ի, երկրորդում՝ 3-ի:

Վերցնենք n-րդ աստիճանի որևէ A տեղադրության մի կամայական գրելաձև (6) տեսքով: Նրա վերին և ստորին տողերը կազմող տեղափոխությունները կարող են լինել կամ միատեսակ, կամ հակառակ զույգությամբ տեղափոխություններ: A տեղադրության որևէ այլ գրելաձևին անցնելը, ինչպես գիտենք, կարելի է իրականացնել վերին տողում և ստորին տողում մի քանի իրար համապատասխանող դիրքափոխությունների օգնությամբ: Բայց, կատարելով որևէ դիրքափոխություն (6) գրելաձևի վերին տողում և համապատասխան էլեմենտների դիրքափոխությունը ստորին տողում, մենք միաժամանակ փոխում ենք երկու տեղափոխությունների զույգությունները և դրա համար էլ պահպանում ենք այդ տեղափոխությունների զույգությունների համընկնումը կամ հակառակ լինելը: Այստեղից հետևում է, որ A տեղադրության կամ բոլոր գրելաձևերում վերին ու ստորին տողերում զույգությունները համընկնում են, կամ բոլոր գրելաձևերում նրանք հակառակ են: Առաջին դեպքում A տեղադրությունը կոչվում է զույգ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ կենտ: Մասնավորաբար, նույնական տեղադրությունը կլինի զույգ:

Եթե A տեղադրությունը գրված է (7) տեսքով, այսինքն՝ վերին տողում գրված է $1, 2, \dots, n$ զույգ տեղափոխությունը, ապա A տեղադրության զույգությունը կորոշվի ստորին տողում գրված $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ տեղափոխության զույգությամբ: Այստեղից հետևում է, որ n-րդ աստիճանի զույգ տեղադրությունների թիվը հավասար է կենտ տեղադրությունների թվին, այսինքն՝ հավասար է $\frac{1}{2}n!$-ի:

A տեղադրության զույգության սահմանմանը կարելի է տալ հետևյալ, որոշ չափով փոփոխված, տեսքը: Եթե (6) գրելաձևում երկու տողերի զույգությունները համընկնում են, ապա կարգի խախտումների թիվը կամ երկու տողերում էլ զույգ է, կամ երկու տողերում էլ՝ կենտ, այսինքն՝ (6) գրելաձևի երկու տողերում խախտումների ընդհանուր թիվը կլինի զույգ: Իսկ եթե (6) գրելաձևի տողերի զույգությունները տարբեր են, ապա այդ երկու տողերում խախտումների ընդհանուր թիվը կլինի կենտ: Այսպիսով, A տեղադրությունը կլինի զույգ, եթե նրա ցանկացած գրելաձևում երկու տողերում խախտումների ընդհանուր թիվը զույգ է և կլինի կենտ՝ հակառակ դեպքում:

Օրինակ: Դիցուք տված է 5-րդ աստիճանի

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

տեղադրությունը: Նրա վերին տողում կարգի 4 խախտում կա, իսկ ստորին տողում՝ 7: Երկու տողերում խախտումների ընդհանուր թիվը 11 է, դրա համար էլ տեղադրությունը կենտ է:

Արտագրենք այդ տեղադրությունը

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

տեսքով: Խախտումների թիվը վերին տողում 0 է, իսկ ստորին տողում՝ 5, այսինքն՝ ընդհանուր քանակը նույնպես կենտ է: Մենք տեսնում ենք, որ տարբեր գրելաձևերում տեղադրությունը պահպանում է խախտումների ընդհանուր թվի զույգությունը, բայց ո՛չ այդ թիվը:

Այժմ մենք ցանկանում ենք նշել տեղադրության զույգության այլ ձևի սահմանումներ, որոնք համարժեք են վերը գրվածին[1]: Այդ նպատակով նախ սահմանենք տեղադրությունների բազմապատկումը, որն ինքնին էլ շատ հետաքրքրական է: n-րդ աստիճանի տեղադրությունը, ինչպես մենք գիտենք, հանդիսանում է 1, 2, . . ., n բազմության փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա: 1, 2, . . ., n բազմության ինքն իր վրա երկու փոխմիարժեք արտապատկերումների հաջորդաբար կիրառման արդյունքը, պարզ է, նույնպես կլինի այդ բազմության մի որոշ փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա, այսինքն՝ երկու n-րդ աստիճանի տեղադրությունների հաջորդաբար կիրառումը բերում է n-րդ աստիճանի մի երրորդ՝ լրիվ որոշակի տեղադրության, որը կոչվում է տված առաջին և երկրորդ տեղադրությունների արտադրյալ: Այսպես, եթե տված են 4-րդ աստիճանի

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

տեղադրությունները, ապա

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}:$$

1 Դրանք մեզ պետք կգան 14-րդ գլխում և դրա համար էլ այս նյութը կարելի է առաջին ընթերցման ժամանակ բաց թողնել:

Իրոք, A տեղադրությամբ 1 սիմվոլը փոխվում է 3-ի, իսկ B տեղադրությամբ 3-ը փոխվում է 4-ի, այդ պատճառով էլ՝ AB տեղադրությամբ 1 սիմվոլը փոխվում է 4-ի և այլն:

Կարելի է բազմապատկել միայն միևնույն աստիճանի տեղադրությունները. n-րդ աստիճանի տեղադրությունների բազմապատկումը $n\geqslant 3$ դեպքում տեղափոխելի (կոմուտատիվ) չէ: Իրոք, վերը դիտարկված A և B տեղադրությունների համար BA արտադրյալն ունի

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

տեսքը, այսինքն՝ BA տեղադրությունը տարբեր է AB տեղադրությունից: Այդպիսի օրինակներ կարելի է բերել ամեն մի $n\geqslant 3$ դեպքում, չնայած որոշ տեղադրությունների զույգերի համար տեղափոխական օրենքը պատահաբար կարող է տեղի ունենալ:

Տեղադրությունների բազմապատկումը զուգորդելի (ասոցիատիվ) է, այսինքն՝ կարելի է խոսել n-րդ աստիճանի ցանկացած վերջավոր թվով տեղադրությունների արտադրյալի մասին, պարզ է, վերցրած որոշակի կարգով (ոչկոմուտատիվության պատճառով): Իրոք, թող տված լինեն A, B և C տեղադրությունները և թող i_1 սիմվոլը ($1\leqslant i_1\leqslant n$) A տեղադրությամբ փոխվի i_2 սիմվոլին, i_2-ը B տեղադրությամբ՝ i_3 սիմվոլին, իսկ վերջինս C տեղադրությամբ՝ i_4-ին: Այդ դեպքում AB տեղադրությամբ i_1 սիմվոլը կփոխվի i_3 սիմվոլին, իսկ BC տեղադրությամբ i_2-ը կփոխվի i_4-ին, այդ պատճառով էլ, ինչպես (AB)C, այնպես էլ A(BC) տեղադրությամբ i_1 սիմվոլը կփոխվի i_4 սիմվոլին:

Պարզ է, որ ցանկացած A տեղադրության և E նույնական տեղադրության արտադրյալը, նույնպես և E-ի և A-ի արտադրյալը, հավասար է A-ի՝

$$AE=EA=A:$$

Վերջապես, անվանենք A-ի համար հակադարձ տեղադրություն նույն աստիճանի այնպիսի A^{-1} տեղադրությունը, որ՝

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Հեշտ է նկատել, որ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

տեղադրության համար հակադարձ տեղադրություն է

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

տեղադրությունը, որն ստացվում է A-ից՝ վերին և ստորին տողերի տեղերը փոխելով:

Այժմ դիտարկենք հատուկ տեսքի տեղադրություններ, որոնք ստացվում են E նույնական տեղադրությունից՝ նրա ստորին տողում որևէ մեկ դիրքափոխություն կատարելով: Այդպիսի տեղադրությունները կենտ են. դրանք կոչվում են **դիրքափոխություններ** (տրանսպոզիցիաներ) և ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{pmatrix} \cdots i \cdots j \cdots \\ \cdots j \cdots i \cdots \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

որտեղ բազմակետերով նշված են տեղերում մնացած սիմվոլները: Պայմանավորվենք նշանակել այդ դիրքափոխությունը (i, j) սիմվոլով. i և j սիմվոլների դիրքափոխությունը կիրառել A կամայական տեղադրության (7) գրելաձևի ստորին տողում համազոր է A տեղադրության բազմապատկմանը աջից (8) տեղադրությամբ, այսինքն՝ (i, j)-ով: Մենք գիտենք, որ n սիմվոլներից կազմված բոլոր տեղափոխությունները կարելի է ստանալ նրանցից մեկից, օրինակ՝ 1, 2, ..., n-ից՝ հաջորդաբար դիրքափոխություններ կատարելով. այդ պատճառով ամեն մի տեղադրություն կարելի է ստանալ նույնական տեղադրությունից՝ նրա ներքևի տողում հաջորդաբար մի քանի դիրքափոխություններ կատարելով, այսինքն՝ հաջորդաբար բազմապատկելով (8) տեսքի տեղադրություններով: Հետևապես, կարելի է պնդել (E արտադրիչը անտեսելով), որ **ամեն մի տեղադրություն կարելի է ներկայացնել դիրքափոխությունների արտադրյալի** տեսքով:

Յուրաքանչյուր տեղադրություն կարելի է տարբեր շատ ձևերով վերածել դիրքափոխությունների արտադրյալի: Միշտ կարելի է, օրինակ, ավելացնել (i, j) · (j, i) տեսքի երկու միատեսակ արտադրիչներ, որոնց արտադրյալը տալիս է E, այսինքն՝ իրար ոչնչացնում են: Բերենք մի ավելի պակաս չափով ակներև օրինակ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)\ (1\ 5)\ (3\ 4) = (1\ 4)\ (2\ 4)\ (4\ 5)\ (3\ 4)\ (1\ 3):$$

Տեղադրության զույգությունը սահմանելու նոր եղանակը հիմնված է հետևյալ թեորեմայի վրա.

Տեղադրությունը ինչպես էլ վերածվի դիրքափոխությունների արտադրյալի, այդ դիրքափոխությունների թվի զույգությունը կլինի միևնույնը, ըստ որում՝ այն համընկնում է տեղադրության զույգության հետ:

Այսպես, վերը դիտարկված օրինակում տեղադրությունը կենտ է, որում կարելի է համոզվել նաև խախտումները հաշվելով:

Այս թեորեմն ապացուցված կլինի, եթե մենք ցույց տանք, որ **ցանկացած k դիրքափոխությունների արտադրյալն այնպիսի տեղադրություն է, որի զույգությունը համընկնում է k թվի զույգության**

հետ. k=1 համար այդ ճիշտ է, քանի որ դիրքափոխությունը կենտ տեղադրություն է: Թող մեր պնդումն ապացուցված լինի (k—1) արտադրիչների դեպքի համար: Այդ դեպքում նրա իրավացիությունը k արտադրիչների համար բխում է նրանից, որ k—1 և k թվերը հակառակ զույգություններ ունեն, իսկ տեղադրության բազմապատկումը (տվյալ դեպքում՝ առաջին (k—1) արտադրիչների արտադրյալը) դիրքափոխության հետ համազոր է տեղադրության ստորին տողում այդ դիրքափոխության կատարման, որով և նրա զույգությունը փոխվում է:

Տեղադրության զույգությունը հեշտությամբ որոշելու համար հարմար գրելաձև է տեղադրությունը **ցիկլերի վերածելը**: n-րդ աստիճանի ամեն մի տեղադրություն կարող է 1, 2, ..., n սիմվոլներից մի քանիսը թողնել տեղերում իսկ մյուսներն իրար տեղափոխել: **Ցիկլիկ** (շրջանաձև) **տեղադրություն** կամ **ցիկլ** կոչվում է այնպիսի տեղադրությունը, որի անհրաժեշտ քանակի կիրառությամբ կարելի է նրանով իսկապես տեղափոխվող ցանկացած սիմվոլը փոխել այդպիսի ցանկացած այլ սիմվոլի: Այդպիսին է, օրինակ, 8-րդ աստիճանի

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

տեղադրությունը. նա իսկապես տեղափոխում է 2, 3, 6 և 8 սիմվոլները, ըստ որում՝ 2-ը փոխվում է 8-ին, 8-ը՝ 3-ին, 3-ը՝ 6-ին և 6-ը՝ կրկին 2-ին:

Ցիկլերի թվին են պատկանում բոլոր դիրքափոխությունները: Դիրքափոխությունների կրճատ գրման վերևում օգտագործված ձևի նման, ցիկլերի համար օգտագործվում է հետևյալ գրելաձևը. իսկապես տեղափոխվող սիմվոլները գրվում են կլոր փակագծերի մեջ իրար հետևից այն կարգով, ինչ կարգով նրանք մեկը մյուսին են փոխվում տեղադրությունը կրկնելիս: Գրելն սկսվում է իսկապես տեղափոխվող ցանկացած սիմվոլից, իսկ վերջին սիմվոլը համարվում է առաջինին փոխվող: Այսպես, վերը նշված օրինակի համար այդ գրելաձևը ունի (2 8 3 6) տեսքը: Ցիկլում իսկապես տեղափոխվող սիմվոլների թիվը կոչվում է ցիկլի **երկարություն**:

Երկու n-րդ աստիճանի ցիկլեր կոչվում են **անկախ**, եթե նրանք իսկապես տեղափոխվող ընդհանուր սիմվոլներ չունեն: Հասկանալի է, որ անկախ ցիկլերի արտադրյալը կախված չէ արտադրիչների կարգից:

Ամեն մի տեղադրություն կարելի է միակ եղանակով վերածել զույգ առ զույգ անկախ ցիկլերի արտադրյալի: Այս պնդման ապացույցն առանձին դժվարություն չի ներկայացնում, և մենք այն չենք բերում: Գործնականում վերածումը կատարում են հետևյալ կերպ. սկսում են իսկապես տեղափոխվող որևէ սիմվոլից ու նրա հետևից կարգով գրում բոլոր այն սիմվոլները, որոնց փոխվում է նա տեղադրության կրկնմամբ, մինչև նորից այդ սկզբնական սիմվոլին վերադառնալը, այսինքն՝ մինչև ցիկլի «փակումը»: Մնացած իսկապես տեղափոխվող որևէ սիմվոլից սկսելով, ստանում են երկրորդ ցիկլը և այլն:

Օրինակներ:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)\ (2\ 5\ 4):$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 6)\ (3\ 8)\ (4\ 7):$

Հակադարձաբար, անկախ ցիկլերի վերածված տեսքով տրված ամեն մի տեղադրություն կարելի է գրել սովորական տեսքով (եթե միայն տեղադրության աստիճանը հայտնի է)։ Օ ր ի ն ա կ՝

$$3)\ (1\ 3\ 7\ 2)\cdot(4\ 5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 2\end{pmatrix},$$

եթե հայտնի է, որ տեղադրության աստիճանը 7 է։ Դիցուք տրված է n-րդ աստիճանի մի տեղադրություն և թող s-ը լինի նրա վերածման մեջ անկախ ցիկլերի թվի և տեղերում մնացած սիմվոլների թվի գումարը[1]. n—s տարբերությունը կոչվում է այդ տեղադրության դեկրեմենտ։ Տեղադրության դեկրեմենտը, ակներևորեն, հավասար կլինի նրա իսկապես տեղափոխվող սիմվոլների թվին՝ հանած նրա վերածման մեջ եղած անկախ ցիկլերի թիվը։ Վերը դիտարկված 1), 2) և 3) օրինակների համար դեկրեմենտը համապատասխանաբար հավասար կլինի՝ 3, 4 և 4։

Տեղադրության զույգությունը համընկնում է այդ տեղադրության դեկրեմենտի զույգության հետ։

Իրոք, k երկարության ամեն մի ցիկլ կարելի է հետևյալ կերպ ներկայացնել որպես k—1 դիրքափոխությունների արտադրյալ՝

$$(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k)=(i_1,\ i_2)\cdot(i_1,\ i_3)\cdots(i_1,\ i_k):$$

Այժմ ենթադրենք, թե տրված է A տեղադրության վերածումը անկախ ցիկլերի։ Եթե յուրաքանչյուր ցիկլ հիշյալ ձևով վերածենք դիրքափոխությունների արտադրյալի, մենք կստանանք A տեղադրության ներկայացումը դիրքափոխությունների արտադրյալի ձևով։ Այդ դիրքափոխությունների թիվն, ակներևորեն, հավասար կլինի A տեղադրությամբ իսկապես տեղափոխվող սիմվոլների թվի և A տեղադրության վերածման մեջ անկախ ցիկլերի թվի տարբերությանը։ Այստեղից հետևում է, որ A տեղադրությունը կարելի է վերածել այնքան դիրքափոխությունների արտադրյալի, որքան այդ տեղադրության դեկրեմենտն է, այդ պատճառով էլ տեղադրության զույգությունը որոշվում է դեկրեմենտի զույգությամբ։

§ 4. n-րդ կարգի դետերմինանտներ

Այժմ մենք ցանկանում ենք § 2-ում n=2-ի և n=3-ի համար ստացած արդյունքները ընդհանրացնել ցանկացած n-ի համար։ Այդ նպատակով հարկավոր է մուծել n-րդ կարգի դետերմինանտներ։ Սակայն, հնարավոր չէ n-րդ կարգի դետերմինանտներ մուծել այն եղանակով, ինչ եղանակով արվել է երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների համար, այն է՝ լուծելով գծային հավասարումների սիստեմներ ընդհանուր դեպքում. n-ի աճմանը զուգընթաց հաշվումները կդառնային ավելի ու ավելի մեծածավալ և կամավոր n-ի համար գործնականում՝ անիրագործելի։

[1] Տեղադրության միջոցով տեղը մնացած ամեն մի սիմվոլի կարելի էր համապատասխանության մեջ դնել 1 երկարությամբ «ցիկլ»։ Օրինակ, վերը նշված 2) օրինակի համար կարելի էր գրել՝ (1 5 6) (3 8) (4 7) (2), բայց մենք այդպես չենք անելու։

Մենք ընտրենք այլ ճանապարհ. դիտարկելով մեզ արդեն ծանոթ երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտները, ձգտենք գտնել այն ընդհանուր օրենքը, որով այդ դետերմինանտներն արտահայտվում են համապատասխան մատրիցների էլեմենտների միջոցով, և հենց այդ օրենքն էլ ընդունենք որպես n-րդ կարգի դետերմինանտի սահմանում, իսկ հետո կապացուցենք, որ n-րդ կարգի դետերմինանտի այդպիսի սահմանման դեպքում Կրամերի կանոնն իրավացի է մնում։ Հիշենք երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների արտահայտությունները՝

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}:$$

Մենք տեսնում ենք, որ երկրորդ կարգի դետերմինանտի ամեն մի անդամ հանդիսանում է երկու այնպիսի էլեմենտների արտադրյալ, որոնք գտնվում են տարբեր տողերում ու տարբեր սյուներում, և այդ տեսքի բոլոր արտադրյալները, որոնք կարելի է կազմել երկրորդ կարգի մատրիցի էլեմենտներից (այդպիսիք ընդամենը երկուսն են) օգտագործվել են որպես դետերմինանտի անդամներ։ Նույն կերպ, երրորդ կարգի դետերմինանտի ամեն մի անդամ հանդիսանում է երեք էլեմենտների արտադրյալ, նույնպես վերցրած մատրիցի յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունից միայն մեկական, ըստ որում՝ նորից բոլոր այդպիսի արտադրյալներն օգտագործված են որպես դետերմինանտի անդամներ։

Դիցուք տրված է n-րդ կարգի հետևյալ քառակուսի մատրիցը՝

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

դիտարկենք այդ մատրիցի n-ական էլեմենտների բոլոր հնարավոր արտադրյալները՝ վերցրած (1) մատրիցի տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից, այսինքն՝

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} \qquad (2)$$

տեսքի արտադրյալները, որտեղ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ինդեքսները կազմում են 1, 2, ..., n թվերից որոշ տեղափոխություն։ Այդպիսի արտադրյալների թիվը հավասար է n էլեմենտներից կազմված բոլոր տեղափոխությունների թվին, այսինքն՝ n!։ Այդ բոլոր արտադրյալները կհամարենք

(1) մատրիցին համապատասխանող ապագա n-րդ կարգի դետերմինանտի անդամներ:

Որպեսզի որոշենք թե (2) արտադրյալը ինչ նշանով է մտնում դետերմինանտի կազմում, նկատենք, որ այդ արտադրյալի ինդեքսներից կարելի է կազմել

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

տեղադրությունը, որում i սիմվոլը փոխվում է α_i սիմվոլին, եթե (2) արտադրյալի կազմում մտնում է (1) մատրիցի i-րդ տողից և α_i-րդ սյունից $a_{i\alpha_i}$ էլեմենտը: Դիտարկելով երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների արտահայտությունները, մենք նկատում ենք, որ նրանց մեջ դրական նշանով մտնում են այն անդամները, որոնց ինդեքսներով կազմված տեղադրությունը զույգ է, իսկ բացասական նշանով՝ որոնց ինդեքսներով կազմված տեղադրությունը կենտ է: Բնական է այդ օրինաչափությունը պահպանել նաև n-րդ կարգի դետերմինանտի սահմանման մեջ: Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ սահմանմանը. (1) մատրիցին համապատասխանող **n-րդ կարգի դետերմինանտ** կոչվում է $n!$ թվով անդամների հանրահաշվական գումարը, որը կազմված է հետևյալ կերպ. անդամներ հանդիսանում են (1) մատրիցի յուրաքանչյուր տողից և յուրաքանչյուր սյունից մեկական վերցրած n հատ էլեմենտներից կազմված բոլոր հնարավոր արտադրյալները, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր անդամը վերցվում է դրական նշանով, եթե նրա ինդեքսներով կազմված տեղադրությունը զույգ է և բացասական նշանով՝ հակառակ դեպքում:

Մենք (1) մատրիցին համապատասխանող n-րդ կարգի դետերմինանտը գրելու համար կօգտագործենք, ինչպես երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների դեպքում, հետևյալ սիմվոլը.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Այս n-րդ կարգի դետերմինանտը $n=2$ և $n=3$ դեպքերում դառնում է մեզ ծանոթ երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտները, իսկ $n=1$ դեպքում, այսինքն՝ մեկ էլեմենտով մատրիցի դեպքում, դետերմինանտը հավասար է հենց այդ էլեմենտին: Սակայն մենք դեռևս չգիտենք, թե կարելի՞ է արդյոք $n>3$ դեպքում n-րդ կարգի դետերմինանտներից օգտվել՝ գծային հավասարումների սիստեմներ լուծելու համար: Այդ ցույց կտրվի § 7-ում, միայն անհրաժեշտ է նախապես հանգամանորեն ուսումնասիրել n-րդ կարգի դետերմինանտները, և, մասնավորաբար, նրանց հաշվելու համար գտնել հարմար մեթոդներ, քանի որ n-րդ

կարգի դետերմինանտի հաշվումը անմիջապես նրա սահմանման օգնությամբ, անգամ ոչ մեծ n-ի դեպքում, բավականին դժվարություն է ներկայացնում: Այժմ մենք ձևակերպենք և ապացուցենք n-րդ կարգի դետերմինանտների մի քանի պարզագույն հատկությունները, որոնք վերաբերում են գլխավորապես հետևյալ երկու հարցերին. նախ մեզ կհետաքրքրեն դետերմինանտի զրո լինելու պայմանները, մյուս կողմից՝ մատրիցի այնպիսի ձևափոխությունները, որոնք կամ չեն փոխում նրա դետերմինանտը, կամ ենթարկում են հեշտ հաշվի առնվող փոփոխությունների:

Անվանենք (1) մատրիցի շրջում (տրանսպոնացում) այդ մատրիցի այնպիսի ձևափոխությունը, որի դեպքում նրա տողերը դառնում են նույն համարներով սյուներ, այսինքն (1) մատրիցից հետևյալ՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

մատրիցին անցնելը. կարելի է ասել, որ շրջումը հանդիսանում է (1) մատրիցի կիսապտույտը գլխավոր առանցքի շուրջը: Համապատասխանաբար ասում են, որ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

դետերմինանտը ստացվել է (4) դետերմինանտի շրջումով:

Հատկություն 1. **Դետերմինանտը չի փոխվում նրա շրջումից:** Իրոք, (5) դետերմինանտի ամեն մի անդամ ունի

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} \tag{7}$$

տեսքը, որտեղ երկրորդ ինդեքսները կազմում են $1, 2, \ldots, n$ սիմվոլներից մի որոշ տեղափոխություն: Բայց (7) արտադրյալի բոլոր արտադրիչները (6) դետերմինանտի մեջ նույնպես գտնվում են տարբեր տողերում ու տարբեր սյուներում, այսինքն՝ (7)-ը հանդիսանում է նաև շրջված դետերմինանտի անդամը: Ակներևորեն, ճիշտ է նաև հակադարձը, ուստի (4) և (6) դետերմինանտները կազմված են միևնույն անդամներից: (7) անդամի նշանը (4) դետերմինանտում որոշվում է

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

տեղադրության զույգությամբ. (6) դետերմինանտում էլեմենտների առաջին ինդեքսները ցույց են տալիս սյուների համարները, իսկ երկրորդ ինդեքսները՝ տողերի համարները, դրա համար էլ (7) անդամին (6) դետերմինանտում համապատասխանում է

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ 1 & 2 \cdots n \end{pmatrix} \tag{9}$$

տեղադրությունը: Այդ (8) և (9) տեղադրությունները ընդհանրապես տարբեր են, բայց, պարզ է, որ ունեն նույն զույգությունը, ուստի (7) անդամի նշանը երկու դետերմինանտների մեջ էլ նույն է: Այսպիսով, (4) և (6) դետերմինանտները հանդիսանում են միատեսակ նշաններով միևնույն անդամների գումարներ, այսինքն՝ իրար հավասար են:

Առաջին հատկությունից բխում է, որ դետերմինանտի տողերի վերաբերյալ ամեն մի պնդում ճիշտ է նաև նրա սյուների համար և, հակառակը, այսինքն՝ դետերմինանտի տողերը և սյուները (ի տարբերություն մատրիցի) իրավահավասար են: Ելնելով դրանից, մենք դետերմինանտի հետագա հատկությունները (2—9) կձևակերպենք և կապացուցենք միայն դետերմինանտի տողերի համար. համապատասխան հատկությունները սյուների համար առանձին ապացույց, հետևապես, չեն պահանջելու:

Հատկություն 2. Եթե դետերմինանտի որևէ տողը կազմված է զրոներից, ապա դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Իրոք, թող դետերմինանտի i-րդ տողի բոլոր էլեմենտները լինեն զրոներ: Դետերմինանտի յուրաքանչյուր անդամում i-րդ տողից պետք է լինի որևէ էլեմենտ, այդ պատճառով դետերմինանտի բոլոր անդամները հավասար են զրոյի:

Հատկություն 3. Եթե մի դետերմինանտ ստացվել է մյուսից՝ երկու տողերի տեղափոխմամբ, ապա առաջին դետերմինանտի բոլոր անդամները կլինեն անդամներ նաև երկրորդ դետերմինանտում, բայց հակառակ նշանով, այսինքն՝ երկու տողերի տեղափոխությունից դետերմինանտը փոխում է միայն նշանը:

Իրոք, թող (4) դետերմինանտում տեղափոխվեն i-րդ և j-րդ տողերը, $i \neq j$, իսկ մնացած տողերը մնան իրենց տեղերում, մենք կստանանք

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{10}$$

դետերմինանտը (կողքից նշված են տողերի համարները): Եթե

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n} \tag{11}$$

հանդիսանում է (4) դետերմինանտի անդամ, ապա նրա բոլոր արտադրիչները (10) դետերմինանտում նույնպես կլինեն տարբեր տողերում ու տարբեր սյուներում: Այսպիսով, (4) և (10) դետերմինանտները կազմված են նույն անդամներից: (11) անդամին (4) դետերմինանտում համապատասխանում է

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots i \cdots j \cdots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_i \cdots \alpha_j \cdots \alpha_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

տեղադրությունը, իսկ (10) դետերմինանտում՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots j \cdots i \cdots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_i \cdots \alpha_j \cdots \alpha_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

տեղադրությունը, քանի որ, օրինակի համար, $a_{i\alpha_i}$-ն հիմա գտնվում է j-րդ տողում, բայց մնացել է նախկին α_i-րդ սյունակում: Բայց (13) տեղադրությունը ստացվել է (12) տեղադրությունից վերևի տողում միայն մեկ դիրքափոխությամբ, ուստի և նրանք տարբեր զույգություն ունեն: Այստեղից հետևում է, որ (4) դետերմինանտի բոլոր անդամները մտնում են (10) դետերմինանտի մեջ՝ հակառակ նշաններով, այսինքն՝ (4) և (10) դետերմինանտներն իրարից տարբերվում են միայն նշանով:

Հատկություն 4. Երկու միատեսակ տողեր ունեցող դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Իրոք, թող դետերմինանտը հավասար լինի d թվին, և թող նրա i-րդ և j-րդ տողերի համապատասխան էլեմենտները լինեն իրար հավասար ($i \neq j$): Այդ երկու տողերը տեղափոխելուց հետո, դետերմինանտը, (3) հատկության համաձայն, կհավասարվի $-d$ թվին: Բայց, քանի որ տեղափոխվել են միատեսակ տողեր, ապա դետերմինանտը իրականում չի փոխվի, այսինքն՝ $d = -d$, որտեղից և $d = 0$:

Հատկություն 5. Եթե դետերմինանտի որևէ տողի բոլոր էլեմենտները բազմապատկենք k թվով, ապա ինքը՝ դետերմինանտը կբազմապատկվի k-ով:

Թող k-ով բազմապատկվեն i-րդ տողի բոլոր էլեմենտները: Դետերմինանտի ամեն մի անդամ կպարունակի i-րդ տողից ճիշտ մեկ էլեմենտ, այդ պատճառով դետերմինանտի ամեն մի անդամ կստանա k բազմապատկիչը, այսինքն՝ ինքը դետերմինանտը կբազմապատկվի k-ով:

Այս հատկությունը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. որևէ տողի բոլոր էլեմենտների ընդհանուր բազմապատկիչը կարելի է դետերմինանտի նշանի տակից դուրս հանել:

Հատկություն 6. Երկու համեմատական տողեր ունեցող դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Իրոք, թող դետերմինանտի i-րդ տողի էլեմենտները տարբերվեն

j-րդ տողի համապատասխան էլեմենտներից ($i \neq j$) նույն k բազմապատկիչով: j-րդ տողի այդ k արտադրիչը դուրս հանելով դետերմինանտի նշանի տակից, մենք կստանանք երկու միատեսակ տողեր ունեցող դետերմինանտ, որը, 4-րդ հատկության համաձայն, հավասար է 0-ի։

4-րդ հատկությունը (ինչպես նաև 2-րդ հատկությունը, $n>1$ դեպքում), ակներևորեն հանդիսանում են 6-րդ հատկության մասնավոր դեպքերը (երբ $k=1$ և $k=0$)։

Հատկություն 7. **Եթե n-րդ կարգի դետերմինանտի i-րդ տողի բոլոր էլեմենտները ներկայացվում են երկու գումարելիների գումարի տեսքով՝**

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

ապա դետերմինանտը հավասար է երկու այնպիսի դետերմինանտների գումարի, որոնց մեջ, բացի i-րդ տողերից, մնացած տողերը նույնն են, ինչ որ տված դետերմինանտի մեջ, իսկ i-րդ տողը մի գումարելիում կազմված է b_j էլեմենտներից, իսկ մյուսում՝ c_j էլեմենտներից:

Իրոք, տված դետերմինանտի ամեն մի անդամ կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots (b_{\alpha_i}+c_{\alpha_i}) \cdots a_{n\alpha_n} =$$
$$= a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots b_{\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots c_{\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

Հավաքելով ի մի այդ գումարների առաջին գումարելիները (նույն նշաններով, ինչ նշան ունեին համապատասխան անդամները տված դետերմինանտում) մենք կստանանք, ակներևորեն, n-րդ կարգի դետերմինանտ, որը կտարբերվի տված դետերմինանտից միայն նրանով, որ i-րդ տողում a_{ij} էլեմենտների փոխարեն կլինեն b_j էլեմենտները: Համապատասխանաբար երկրորդ գումարելիները կկազմեն մի դետերմինանտ, որի i-րդ տողում կլինեն c_j էլեմենտները: Այսպիսով՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7-րդ հատկությունն առանց դժվարության տարածվում է այն դեպքի համար, երբ i-րդ տողի էլեմենտները հանդիսանում են ոչ թե երկու, այլ m թվերի գումար, $m \geqslant 2$։

Կասենք, որ դետերմինանտի i-րդ տողը հանդիսանում է *մնացած տողերի գծային կոմբինացիա*, եթե ամեն մի j համարով տողի համար ($j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots n$) կարելի է նշել այնպիսի k_j թիվ, որ j-րդ տողը բազմապատկելով k_j-ով, և հետո բոլոր տողերը, բացի i-րդ

տողից, գումարելով (ըստ որում՝ տողերի գումարումը պետք է հասկանալ այնպես, որ գումարվում են բոլոր այդ տողերի էլեմենտները՝ ամեն մի սյունում առանձին) մենք կստանանք i-րդ տողը։ Այդ k_j գործակիցներից ոմանք կարող են զրո լինել, այսինքն՝ i-րդ տողը իրականում կլինի ոչ թե բոլոր, այլ միայն մի քանի տողերի գծային կոմբինացիա։ Մասնավորաբար, եթե միայն մի k_j գործակից է զրոյից տարբեր, մենք կստանանք համեմատական տողերի դեպքը։ Վերջապես, եթե տողը կազմված է ամբողջովին զրոներից, ապա այն միշտ կլինի մնացած տողերի գծային կոմբինացիա. այս էլ այն դեպքն է, երբ բոլոր k_j գործակիցները հավասար են զրոյի։

Հատկություն 8. **Եթե դետերմինանտի տողերից մեկը հանդիսանում է մյուս տողերի գծային կոմբինացիա, ապա դետերմինանտը հավասար է զրոյի:**

Դիցուք, օրինակի համար, i-րդ տողը ուրիշ s տողերի գծային կոմբինացիա է, $1 \leqslant s \leqslant n-1$։ Այդ դեպքում i-րդ տողի ամեն մի էլեմենտը կլինի s գումարելիների գումար, դրա համար էլ, օգտագործելով 7-րդ հատկությունը, մենք մեր դետերմինանտը կներկայացնենք այնպիսի դետերմինանտների գումարի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրում i-րդ տողը համեմատական կլինի մյուս տողերից որևէ մեկին։ 6-րդ հատկության համաձայն, այդ բոլոր դետերմինանտներն էլ հավասար են զրոյի. հավասար է զրոյի, հետևապես, նաև տված դետերմինանտը։

Այս հատկությունը հանդիսանում է 6-րդ հատկության ընդհանրացումը, ըստ որում, ինչպես կապացուցենք § 10-ում, այն տալիս է դետերմինանտի զրո լինելու ամենաընդհանուր դեպքը։

Հատկություն 9. **Դետերմինանտը չի փոխվում, եթե նրա որևէ տողի էլեմենտներին գումարում ենք մի այլ տողի համապատասխան էլեմենտները՝ նախապես բազմապատկված միևնույն թվով:**

Իրոք, թող d դետերմինանտի i-րդ տողին գումարվի նրա j-րդ տողը ($i \neq j$)՝ բազմապատկված k թվով, այսինքն՝ նոր դետերմինանտի i-րդ տողի ամեն մի էլեմենտ կունենա $a_{is}+ka_{js}$ տեսքը, $s=1, 2, \ldots, n$։ Այդ դեպքում 7-րդ հատկության հիման վրա, այդ դետերմինանտը հավասար է երկու այնպիսի դետերմինանտների գումարին, որոնցից առաջինը d-ն է, իսկ երկրորդը պարունակում է երկու համեմատական տողեր, ուստի և հավասար է զրոյի։

Քանի որ k թիվը կարող է և բացասական լինել, **ապա դետերմինանտը չի փոխվում նրա մի որևէ տողից մի այլ տողի k-պատիկը հանելիս: Ընդհանրապես, դետերմինանտը չի փոխվում, եթե նրա որևէ տողին գումարվում է նրա ուրիշ տողերի գծային կոմբինացիա:**

Դիտարկենք մի օրինակ։ Դետերմինանտը կոչվում է շեղսիմետրիկ, եթե նրա գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված էլեմենտները իրարից տարբերվում են միայն նշանով, այսինքն՝ եթե ամեն մի i-ի և j-ի համար տեղի ունի $a_{ji}=-a_{ij}$, այստեղից հետևում է, որ բոլոր i-երի համար $a_{ii}=-a_{ii}=0$։ Այսպիսով, դետերմինանտն ունի հետևյալ տեսքը.

$$d=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Բազմապատկելով այդ դետերմինանտի ամեն մի տողը -1 թվով, մենք կստանանք շրջված դետերմինանտ, այսինքն՝ էլի՛ d-ն, որտեղից, 5-րդ հատկության հիման վրա, կստանանք՝

$$(-1)^n d = d.$$

Կենտ n-ի համար այստեղից հետևում է, որ $-d=d$, այսինքն՝ $d=0$։ Այսպիսով, ամեն մի կենտ կարգի շեղսիմետրիկ դետերմինանտ հավասար է զրոյի:

§ 5. Մինորներ և նրանց հանրահաշվական լրացուցիչները

Վերն արդեն ասել ենք, որ n-րդ կարգի դետերմինանտի հաշվումը՝ անմիջապես նրա սահմանման օգնությամբ, բավականին դժվար կլիներ. ամեն անգամ պետք է գրել բոլոր $n!$ հատ անդամները, որոշել նրանց նշանները և այլն։ Գոյություն ունեն դետերմինանտները հաշվելու ավելի պարզ մեթոդներ, որոնք հիմնված են այն բանի վրա, որ n-րդ կարգի դետերմինանտի հաշվումը կարելի է հանգեցնել ավելի ցածր կարգի դետերմինանտների հաշվման։ Այդ նպատակով մուծենք հետևյալ հասկացությունը։

Դիցուք տրված է n-րդ կարգի d դետերմինանտը։ Վերցնենք $1\leqslant k\leqslant n-1$ պայմանին բավարարող k ամբողջ թիվը և d դետերմինանտում վերցնենք կամավոր կերպով k տողեր և սյուներ։ Այդ տողերի և սյուների հատման կետերում գտնվող էլեմենտները, պարզ է, կազմում են k-րդ կարգի մատրից։ Այդ մատրիցի դետերմինանտը կոչվում է d դետերմինանտի k-րդ կարգի մինոր։ Կարելի է ասել նաև, որ k-րդ կարգի մինորն այնպիսի դետերմինանտ է, որն ստացվում է d-ից՝ նրա մեջ ջնջելով $n-k$ տող և $n-k$ սյուն։ Մասնավորապես, դետերմինանտի մեջ մեկ տող և մեկ սյուն ջնջելով, մենք կստանանք $(n-1)$-րդ կարգի մինոր. մյուս կողմից առաջին կարգի մինորներ կլինեն d դետերմինանտի առանձին էլեմենտները։

Դիցուք n-րդ կարգի d դետերմինանտում վերցրած է k-րդ կարգի M մինորը։ Եթե մենք դետերմինանտում ջնջենք այն տողերը և այն սյուները, որոնց հատման կետում գտնվում է այդ մինորը, ապա կմնա

մի $(n-k)$-րդ կարգի M' մինոր, որը կոչվում է M մինորի համար լրացուցիչ մինոր։ Եթե, ընդհակառակը, մենք ջնջենք այն տողերը և այն սյուները, որոնցում ընկած են M' մինորի էլեմենտները, ապա, պարզ է, կստանանք M մինորը։ Այսպիսով, կարելի է խոսել դետերմինանտի երկու փոխադարձաբար լրացուցիչ մինորների մասին։ Մասնավորապես, a_{ij} էլեմենտը և $(n-1)$-րդ կարգի այն մինորը, որն ստացվում է d դետերմինանտում i-րդ տողի և j-րդ սյան ջնջումով, կկազմեն երկու փոխադարձաբար լրացուցիչ մինորներ։ Եթե k-րդ կարգի M մինորը տեղավորված է $i_1, i_2, \ldots, i_k$ համարներ ունեցող տողերում և $j_1, j_2, \ldots, j_k$ համարներ ունեցող սյուներում, ապա M մինորի հանրահաշվական լրացում կանվանենք նրա M' լրացուցիչ մինորը՝ վերցրած դրական կամ բացասական նշանով՝ կախված նրանից, զո՞ւյգ է թե կենտ բոլոր այն տողերի և սյուների համարների գումարը, որոնցում տեղավորված է M մինորը, այսինքն՝ հետևյալ թիվը.

$$s_M=i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k. \qquad (1)$$

Այլ խոսքով, M մինորի համար հանրահաշվական լրացում կլինի $(-1)^{s_M} M'$ թիվը։

Դետերմինանտի ցանկացած k-րդ կարգի M մինորի և նրա հանրահաշվական լրացման արտադրյալը հանդիսանում է հանրահաշվական գումար, որի գումարելիներն ստացվում են M մինորի անդամները բազմապատկելով M' լրացուցիչ մինորի անդամներով՝ վերցրած $(-1)^{s_M}$ նշանով, ըստ որում դրանք կհանդիսանան d դետերմինանտի որոշ անդամներ, որոնց նշանները այդ գումարում համընկնում են այն նշանների հետ, ինչ նշանով դրանք մտնում են d դետերմինանտի կազմի մեջ:

Այս թեորեմայի ապացույցը մենք սկսենք այն դեպքից, երբ մինորը գտնվում է d դետերմինանտի վերին ձախ անկյունում՝

$$d=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & M & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & M' & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|,$$

այսինքն՝ 1, 2, …, k համարներով տողերում և նույն համարներով սյուներում։ Այս դեպքում M' մինորը կզբաղեցնի դետերմինանտի ներքևի աջ անկյունը, իսկ s_M թիվը զույգ կլինի՝

$$s_M=1+2+\cdots+k+1+2+\cdots+k=2(1+2+\cdots+k),$$

դրա համար էլ M մինորի համար հանրահաշվական լրացում կծառայի հենց M′ մինորը։

Վերցնենք M մինորի կամավոր՝

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k} \tag{2}$$

անդամը. նրա նշանը M-ում կլինի $(-1)^l$, որտեղ l-ը՝ կարգի խախտումների թիվն է

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix} \tag{3}$$

տեղադրության մեջ։ Իսկ M′ մինորի

$$a_{k+1\,\beta_{k+1}} \cdot a_{k+2\,\beta_{k+2}} \cdots a_{n\,\beta_n} \tag{4}$$

կամավոր անդամը այդ մինորում ունի $(-1)^{l'}$ նշանը, որտեղ l'-ը կարգի խախտումների թիվն է

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

տեղադրության մեջ։ Բազմապատկելով (2) և (4) անդամները, մենք կստանանք դետերմինանտի տարբեր տողերում ու տարբեր սյուներում գտնվող n էլեմենտների

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k}\, a_{k+1,\,\beta_{k+1}} a_{k+2,\,\beta_{k+2}} \cdots a_{n\beta_n} \tag{6}$$

արտադրյալը, այն, հետևապես, կլինի d դետերմինանտի անդամ։ (6) անդամի նշանը MM′ արտադրյալում կլինի (2) և (4) անդամների նշանների արտադրյալը, այսինքն՝ $(-1)^l \cdot (-1)^{l'} = (-1)^{l+l'}$։ Այդպիսի նշան ունի (6) անդամը նաև d դետերմինանտում։ Իրոք,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

տեղադրության ստորին տողը, որը կազմված է այդ անդամի ինդեքսներից, պարունակում է միայն $l+l'$ խախտում, որովհետև ոչ մի α և β իրար հետ խախտում չեն կազմում, քանի որ բոլոր α-ները փոքր են β-ներից ($\alpha_i \leqslant k$ և $\beta_i \geqslant k+1$)։

Դրանով թեորեմայի մեր դիտարկած մասնավոր դեպքը ապացուցված է։ Անցնենք ընդհանուր դեպքի դիտարկմանը, այսինքն՝ համարենք, որ M մինորը տեղավորված է $i_1, i_2, \ldots, i_k$-րդ տողերում և $j_1, j_2, \ldots, j_k$-րդ սյուներում, ըստ որում՝

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k.$$

Ձգտենք, դետերմինանտի տողերի և սյուների տեղափոխումով, M մինորը տեղափոխել վերին ձախ անկյունը, ըստ որում այնպես, որ լրա-

ցուցիչ մինորը չփոխվի։ Այդ նպատակի համար i_1-րդ տողը տեղափոխենք (i_1-1)-րդ տողի հետ, հետո (i_2-2)-րդ տողի հետ և այլն, մինչև որ i_1-րդ տողը զբաղեցնի առաջին տողի տեղը. դրա համար մենք պետք է տողերը տեղափոխենք (i_1-1) անգամ։ Հետո հաջորդաբար կտեղափոխենք i_2-րդ տողը իրենից վերև գտնվող տողերի հետ, մինչև այն տեղավորվի անմիջապես i_1-րդ տողի տակ, այսինքն՝ այն տեղը, որտեղ մինչև բոլոր ձևափոխությունները գրավում էր երկրորդ տողը։ Դրա համար, ինչպես հեշտ է ստուգել, մենք պետք է տողերը տեղափոխենք i_2-2 անգամ։ Նման ձևով, մենք i_3-րդ տողը կբերենք երրորդ տողի տեղը և այլն, մինչև i_k-րդ տողը կգրավի k-րդ տողի տեղը։ Ընդամենը, մենք կկատարենք տողերի դիրքափոխություն

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=i_1+i_2+\cdots+i_k-(1+2+\cdots+k)$$

անգամ։

M մինորն արդեն դասավորվել է նոր դետերմինանտի առաջին k տողերում։ Հիմա արդեն հաջորդաբար կտեղափոխենք դետերմինանտի սյուները. նախ j_1-րդը՝ իրեն նախորդող բոլոր սյուների հետ, մինչև այն կգրավի առաջին տեղը, հետո՝ j_2-րդը, մինչև այն կգրավի երկրորդ տեղը և այլն։ Ընդամենը կկատարվի

$$(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)$$

դիրքափոխություն սյուների միջև։

Այս բոլոր ձևափոխություններից հետո, մենք կգանք d′ նոր դետերմինանտին, որում M մինորը արդեն գրավում է վերին ձախ անկյունը։ Քանի որ ամեն անգամ մենք տեղափոխում էինք միայն հարևան տողերը կամ սյուները, ապա d դետերմինանտում M′ մինորը կազմող տողերի և սյուների փոխադարձ դասավորությունը մնացել է անփոփոխ, դրա համար էլ M մինորի լրացուցիչ մինորը d′ դետերմինանտում մնացել է M′ մինորը, որը հիմա արդեն գրավում է ներքևի աջ անկյունը։ Ինչպես առաջ ապացուցել էինք, MM′ արտադրյալը հանդիսանում է d′ դետերմինանտի որոշ անդամների գումար՝ վերցրած նույն նշաններով, ինչ նշաններով նրանք մտնում են d′ դետերմինանտի մեջ։ Բայց d′ դետերմինանտը ստացվել է d դետերմինանտից տողերի և սյուների միջև

$$\begin{aligned} &[(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)]+ \\ &+[(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)] = \\ &= S_M - 2\,(1+2+\cdots+k) \end{aligned}$$

դիրքափոխությունների օգնությամբ, այդ պատճառով, ինչպես մենք նախորդ պարագրաֆից գիտենք, d′ դետերմինանտի անդամները տարբերվում են d դետերմինանտի համապատասխան անդամներից $(-1)^{s_M}$ նշանով $[2\cdot(1+2+\dots+k)]$ զույգ թիվը, պարզ է, չի կարող ազդել նշանի վրա։ Այստեղից հետևում է, որ $(-1)^{s_M} MM'$ արտադրյալը կազմված է d դետերմինանտի որոշ քանակի անդամներից, վերցրած այն նշաններով, որոնցով նրանք մտնում են d դետերմինանտի մեջ։ Թեորեման ապացուցված է։

Նկատենք, որ երբ M և M′ մինորները փոխադարձ լրացնող են, s_M և $s_{M'}$ թվերն ունեն միևնույն զույգությունը։ Իրոք, յուրաքանչյուր տողի և յուրաքանչյուր սյան համարը որպես գումարելի մտնում է այդ թվերից մեկի և միայն մեկի մեջ, դրա համար էլ $s_M+s_{M'}$ գումարը հավասար է դետերմինանտի բոլոր տողերի և բոլոր սյուների համարների ընդհանուր գումարին, այսինքն՝ հավասար է $2(1+2+\dots+n)$ զույգ թվին։

§ 6. Դետերմինանտների հաշվումը

Նախորդ պարագրաֆի արդյունքները հնարավորություն են տալիս n-րդ կարգի դետերմինանտի հաշվումը հանգեցնելու մի քանի (n—1)-րդ կարգի դետերմինանտների հաշվման։ Մուծենք նախ հետևյալ նշանակումները. եթե a_{ij}-ն d դետերմինանտի էլեմենտն է, ապա M_{ij}-ով նշանակենք այդ էլեմենտի լրացուցիչ մինորը կամ, ավելի կարճ՝ այդ էլեմենտի մինորը, այսինքն՝ (n — 1)-րդ կարգի այն մինորը, որն ստացվում է d դետերմինանտից i-րդ տողը և j-րդ սյունը ջնջելով։ Այնուհետև, A_{ij}-ով նշանակենք a_{ij} էլեմենտի հանրահաշվական լրացումը, այսինքն՝

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ինչպես ապացուցված է նախորդ պարագրաֆում, $a_{ij} A_{ij}$ արտադրյալը հանդիսանում է d դետերմինանտի մի քանի անդամների գումար, որոնք մտնում են այդ գումարի մեջ այն նշաններով, ինչ նշաններով նրանք մտնում են d դետերմինանտի կազմի մեջ։ Հեշտ է հաշվել այդ անդամների թիվը. այն հավասար է M_{ij} մինորի անդամների թվին, այսինքն՝ հավասար է (n—1)!-ի։

Այժմ ընտրենք d դետերմինանտի ցանկացած i-րդ տողը և վերցնենք այդ տողի ամեն մի էլեմենտի և նրա հանրահաշվական լրացման արտադրյալը՝

$$a_{i1} A_{i1},\ a_{i2} A_{i2},\ \dots,\ a_{in} A_{in}. \tag{1}$$

Դետերմինանտի ոչ մի անդամ չի կարող մտնել (1) արտադրյալներից միաժամանակ երկուսի մեջ. իրոք, դետերմինանտի՝ $a_{i1} A_{i1}$ արտադրյալի մեջ մտնող բոլոր անդամները i-րդ տողից պարունակում են a_{i1} էլեմենտը, այդ պատճառով տարբերվում են դետերմինանտի այն անդամներից, որոնք մտնում են $a_{i2} A_{i2}$ արտադրյալի մեջ, այսինքն՝ a_{i2} էլեմենտը պարունակողներից և այլն։

Մյուս կողմից, d դետերմինանտի բոլոր այն անդամների ընդհանուր թիվը, որոնք մտնում են (1) արտադրյալների մեջ, հավասար է $(n-1)!\cdot n=n!$, այսինքն՝ դրանցով սպառվում են ընդհանրապես d դետերմինանտի բոլոր անդամները։ Մենք, այսպիսով, ապացուցեցինք, որ տեղի ունի d դետերմինանտի հետևյալ վերածումը ըստ i-րդ տողի՝

$$d=a_{i1} A_{i1}+a_{i2} A_{i2}+\dots+a_{in} A_{in}, \tag{2}$$

այսինքն, d դետերմինանտը հավասար է իր որևէ տողի բոլոր էլեմենտների և նրանց համապատասխան հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարին։ Նման վերածում կարելի է ստանալ նաև դետերմինանտի ցանկացած սյան նկատմամբ։

Փոխարինելով (2) վերածման մեջ հանրահաշվական լրացումները իրենց համապատասխան մինորներով՝ վերցրած դրական կամ բացասական նշաններով, մենք n-րդ կարգի դետերմինանտի հաշվումը կհանգեցնենք մի քանի (n—1)-րդ կարգի դետերմինանտների հաշվման։ Նկատենք, որ եթե i-րդ տողի որոշ էլեմենտներ հավասար են զրոյի, ապա, պարզ է, որ նրանց համապատասխան մինորները կարիք չկա հաշվելու։ Այդ նկատի առնելով, օգտակար է, օգտվելով 9-րդ հատկությունից (տես § 4), դետերմինանտը նախապես ձևափոխել այնպես, որպեսզի նրա որևէ տողում կամ սյունում հնարավորին չափ շատ էլեմենտներ փոխարինվեն զրոներով։ Իրականում, 9-րդ հատկությունը թույլ է տալիս դետերմինանտի ցանկացած տողի կամ սյան բոլոր էլեմենտները, բացի մեկից, փոխարինել զրոներով։ Իրոք, եթե $a_{ik}\neq 0$, ապա i-րդ տողի ցանկացած a_{ij} էլեմենտը՝ $j\neq k$, կլինի փոխարինված զրոյով, եթե j-րդ սյունից հանենք k-րդ սյունը՝ նախապես վերջինս բազմապատկելով $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$-ով։ Այսպիսով, n-րդ կարգի դետերմինանտի հաշվումը կարելի է հանգեցնել (n—1)-րդ կարգի միայն մ ե կ դետերմինանտի հաշվման։

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր։

1. Հաշվել չորրորդ կարգի

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը։ Օգտվելով նրա մեջ մեկ զրոյի առկայությունից, վերածենք այն ըստ երրորդ տողի՝

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -4\\ -5 & 3 & -3\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -5 & 1 & -4\\ 1 & -5 & -3\end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}.$$

Հաշվելով ստացված երրորդ կարգի դետերմինանտները, կստանանք՝

$$d=2\cdot 16-40+48=40.$$

2. Հաշվել հինգերորդ կարգի

$$d=\begin{vmatrix}-2 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5\\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

դետերմինանտը։ Երկրորդ տողին գումարելով հինգերորդ տողի եռապատիկը և չորրորդ տողից հանելով հինգերորդ տողի քառապատիկը, կստանանք՝

$$d=\begin{vmatrix}-2 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5\\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10\\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Այս դետերմինանտը վերածելով ըստ երրորդ սյան, որը պարունակում է զրոյից տարբեր միայն մեկ էլեմենտ (ինդեքսների 5+3 գումարով, որը զույգ է), կստանանք՝

$$d=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 18 & -7 & -10\end{vmatrix}.$$

Նոր ստացված դետերմինանտը ձևափոխենք, նրա առաջին տողին գումարելով երկրորդ տողի կրկնապատիկը և երրորդ տողից հանելով երկրորդի եռապատիկը, իսկ չորրորդից՝ երկրորդի կրկնապատիկը, կստանանք՝

$$d=\begin{vmatrix}0 & -13 & 25 & 17\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & 26 & -34 & -26\\ 0 & 36 & -33 & -24\end{vmatrix}.$$

Հետո, վերածելով սրան ըստ առաջին սյան, ըստ որում նկատի ունենալով, որ միակ զրոյից տարբեր էլեմենտին այդ սյունում համապատասխանում է ինդեքսների կենտ գումար, կստանանք՝

$$d=\begin{vmatrix}-13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24\end{vmatrix}.$$

Հաշվենք այս երրորդ կարգի դետերմինանտը, նախապես վերածելով այն ըստ երրորդ տողի՝

$$d=36\cdot\begin{vmatrix}25 & 16\\ -34 & -26\end{vmatrix}-(-33)\cdot\begin{vmatrix}-13 & 17\\ 26 & -26\end{vmatrix}+(-24)\cdot\begin{vmatrix}-13 & 25\\ 26 & -34\end{vmatrix}=$$

$$=36\cdot(-72)-(-33)\cdot(-104)+(-24)(-208)=-1032.$$

3. **Եթե դետերմինանտի գլխավոր անկյունագծի մի կողմում գտնվող բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի, ապա այդ դետերմինանտը հավասար է գլխավոր անկյունագծի վրայի էլեմենտների արտադրյալին:**

Երկրորդ կարգի դետերմինանտի համար այդ պնդումը շատ պարզ է։ Այդ պատճառով մենք այն կապացուցենք ինդուկցիայով, այսինքն՝ ընդունենք, որ այն ճիշտ է $(n-1)$-րդ կարգի դետերմինանտների համար, և ապացուցենք՝

$$d=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{3n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

n-րդ կարգի դետերմինանտի համար։

Վերածենք ըստ առաջին սյան, կստանանք՝

$$d=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Բայց աջ կողմում գրված մինորի համար կիրառելի է ինդուկցիայի պայմանը, այսինքն՝ այն հավասար է $a_{22}\,a_{33}\cdots a_{nn}$ արտադրյալին, ուստի և՝

$$d=a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. **Վանդերմոնդի դետերմինանտ** է կոչվում

$$d=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

դետերմինանտը։ Ապացուցենք, որ ցանկացած $n>1$ համար **Վանդերմոնդի դետերմինանտը հավասար է բոլոր հնարավոր a_i-a_j տարբերությունների արտադրյալին, որտեղ $1\leqslant j<i\leqslant n$։** Իրոք, $n=2$ դեպքում կլինի՝

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

Համարենք մեր պնդումը ճիշտ Վանդերմոնդի $(n-1)$-րդ կարգի դետերմինանտների համար և d դետերմինանտը ձևափոխենք հետևյալ կերպ. n-րդ (վերջին) տողից հանենք $(n-1)$-րդը՝ բազմապատկված a_1-ով, հետո $(n-1)$-րդից հանենք $(n-2)$-րդը՝

նույնպես բազմապատկված a_1-ով և այլն և, վերջապես, երկրորդ տողից հանենք առաջինը՝ նույնպես բազմապատկված a_1-ով: Մենք կստանանք՝

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \dots & a_n^2-a_1a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1}-a_1a_u^{n-2} \end{vmatrix},$$

Վերածելով այդ դետերմինանտը ըստ առաջին սյան, մենք կստանանք $(n-1)$-րդ կարգի մի դետերմինանտ, որը, բոլոր սյուներից ընդհանուր արտադրյալները դետերմինանտի նշանի տակից դուրս հանելուց հետո, կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a^n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

Վերջին արտադրիչը հանդիսանում է Վանդերմոնդի $(n-1)$-րդ կարգի դետերմինանտ, որը, ըստ պայմանի, հավասար է բոլոր a_i-a_j տարբերությունների արտադրյալին, որտեղ $2\leqslant j<i\leqslant n$: Հետևապես, օգտագործելով Π սիմվոլը որպես արտադրյալի նշան, կարելի է գրել, որ

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j):$$

Նույն մեթոդով կարելի է ապացուցել, որ

$$d'=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը հավասար է բոլոր հնարավոր a_i-a_j տարբերությունների արտադրյալին, որտեղ $1\leqslant i<j\leqslant n$, այսինքն՝

$$d'=\prod_{1\leqslant l<j\leqslant u}(a_i-a_j):$$

Դետերմինանտը ըստ որևէ տողի կամ սյան վերածելու վերաբերյալ վերը ստացած արդյունքն ընդհանրացնելով, ապացուցենք հետևյալ թեորեման, որն ասում է, թե ինչպե՞ս կարելի է դետերմինանտը վերածել ըստ մի քանի տողերի կամ սյուների:

Լապլասի թեորեման. Դիցուք n-րդ կարգի d դետերմինանտի մեջ կամավոր կերպով ընտրված են k տողեր (կամ k սյուներ), $1\leqslant k\leqslant n-1$: Այդ դեպքում այդ k տողերում գտնվող բոլոր k-րդ

կարգի մինորների և նրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար կլինի դետերմինանտին:

Ապացույց. Դիցուք d դետերմինանտում ընտրված են $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերը: Մենք գիտենք, որ ցանկացած k-րդ կարգի M մինորի և նրա հանրահաշվական լրացման արտադրյալը տալիս է d դետերմինանտի որոշ քանակությամբ անդամներ՝ վերցրած այն նշաններով, ինչ նշաններով նրանք մտնում են d դետերմինանտի մեջ: Հետևապես, թեորեմը ապացուցված կլինի, եթե մենք կարողանանք ցույց տալ, որ ստիպելով M-ին անցնելու ընտրված k տողերում դասավորված բոլոր k-րդ կարգի մինորներով, կստանանք դետերմինանտի բոլոր անդամները, ըստ որում նրանցից ոչ մեկը չի հանդիպի երկու անգամ:

Դիցուք

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}\text{-ը} \qquad (3)$$

d դետերմինանտի որևէ անդամն է: Առանձին վերցնենք այդ անդամի այն էլեմենտների արտադրյալը, որոնք պատկանում են մեր ընտրած $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերին. այդ կլինի

$$a_{i_1\alpha_{i_1}}a_{i_2\alpha_{i_2}}\cdots a_{i_k\alpha_{i_k}} \qquad (4)$$

արտադրյալը: Այդ արտադրյալի k արտադրիչները գտնվում են տարբեր սյուներում, այն է՝ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ համարներով սյուներում: Սյուների այդ համարները լրիվ որոշվում են, հետևապես, (3) անդամի տրումով: Եթե մենք M-ով նշանակենք $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ համարներով սյուների և արդեն նախօրոք ընտրած $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերի հատումներում գտնվող k-րդ կարգի մինորը, ապա (4) արտադրյալը կլինի M մինորի որևէ անդամը, իսկ (3) անդամի այն բոլոր էլեմենտների արտադրյալը, որոնք չեն մտնում (4)-ի մեջ, կլինի նրա լրացուցիչ մինորի անդամը: Այսպիսով, դետերմինանտի ամեն մի անդամ մտնում է վերցրած k տողերում գտնվող k-րդ կարգի մի որոշակի մինորի և նրա լրացուցիչ մինորի արտադրյալի մեջ, ըստ որում, հանդիսանում է այդ երկու մինորների միանգամայն որոշակի անդամների արտադրյալ: Որպեսզի, վերջապես, ստանանք դետերմինանտի մեր վերցրած անդամը այն նշանով, ինչ նշան նա ունի դետերմինանտում, մնում է, ինչպես մենք գիտենք, լրացուցիչ մինորը փոխարինել հանրահաշվական լրացումով: Դրանով ավարտվում է թեորեմայի ապացույցը:

Կարելի էր թեորեմայի ապացույցը տանել նաև մի քիչ այլ ճանապարհով: Այսպես, քանի որ ընտրված k տողերում գտնվող M մինորը k կարգի է, իսկ նրա հանրահաշվական լրացումը, որը լրացուցիչ մինորից կարող է տարբերվել միայն նշանով, $(n-k)$-րդ կարգի է, ապա նրանք համապատասխանաբար ունեն $k!$ հատ և $(n-k)!$ հատ անդամներ, իսկ նրանց արտադրյալը կունենա $k!(n-k)!$ հատ անդամներ: Մյուս կողմից, մեր ընտրած տողերի k-րդ կարգի մինորների թիվը հավասար է n էլեմենտներից k-ական կազմած բոլոր զուգորդությունների թվին, այսինքն՝ հավասար է

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Բազմապատկելով, մենք կստանանք, որ ընտրված տողերից բոլոր k-րդ կարգի մինորների և նրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը կազմված է $n!$ հատ գումարելիներից: Բայց, այդպիսին է նաև d դետերմինանտի բոլոր անդամների թիվը: Հետևաբար, թեորեման ապացուցված կլինի, եթե մենք ցույց տանք, որ d դետերմինանտի ամեն մի անդամ հիշյալ մինորների և նրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների դիտարկվող գումարի մեջ մտնում է գոնե մեկ անգամ (ուստի և ճիշտ մեկ անգամ), որի համար ընթերցողին մնում է կրկնել (որոշ պարզեցումներով) նախորդ ապացույցում բերված դատողությունները:

Լապլասի թեորեման հնարավորություն է տալիս n-րդ կարգի դետերմինանտի հաշվումը հանգեցնելու մի քանի k-րդ կարգի և $(n-k)$-րդ կարգի դետերմինանտների հաշվման:

Այդ նոր դետերմինանտների թիվը, ընդհանրապես, շատ է լինում, այդ պատճառով էլ Լապլասի թեորեման նպատակահարմար է կիրառել այն դեպքում, երբ k տողերը (կամ սյուները) հնարավոր է ընտրել այնպես, որ այդ տողերում գտնվող k-րդ կարգի մինորներից շատերը հավասար լինեն զրոյի:

Օրինակներ:

1. Դիցուք տրված է այնպիսի դետերմինանտ, որի առաջին k տողերի և վերջին $n-k$ սյուների հատման կետերի բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի՝

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Այդ դետերմինանտը հավասար է իր երկու մինորների արտադրյալին՝

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ապացուցելու համար բավական է d դետերմինանտը վերածել ըստ առաջին k տողերի:

2. Դիցուք տրված է $2n$-րդ կարգի այնպիսի d դետերմինանտ, որի վերին ձախ անկյունում գտնվող n-րդ կարգի մինորի բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի: Եթե դետերմինանտի վերին աջ, ներքևի ձախ և ներքևի աջ անկյունների մինորները համապատասխանաբար նշանակենք M, M' և M'', այսինքն՝ դետերմինանտը սիմվոլիկ ձևով ներկայացնենք $d=\begin{vmatrix} 0 & M \\ M' & M'' \end{vmatrix}$ տեսքով, ապա $d=(-1)^n MM'$:

Ապացուցելու համար d դետերմինանտը վերածենք ըստ առաջին n տողերի և նկատի ունենանք, որ

$$s_M=(1+2+\cdots+n)+[(n+1)+(n+2)+\cdots+2n]=n+2n^2,$$

այսինքն՝ s_M-ը և n-ը ունեն միևնույն զույգությունը:

3. Հաշվել

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը: Վերածենք այդ դետերմինանտը ըստ առաջին և երրորդ սյուների, որոնք պարունակում են բավականին հարմար դասավորված զրոներ, մենք կստանանք՝

$$d=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=(-8)\cdot(-20)-(-10)\cdot(-62)-7\cdot 87=-1069$$

§ 7. Կրամերի կանոնը

n-րդ կարգի դետերմինանտների վերևում շարադրված տեսությունը հնարավորություն է տալիս ցույց տալու, որ այդ դետերմինանտները, որոնք մուծվեցին երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտների նմանությամբ միայն, հենց նրանց պես էլ կարող են օգտագործվել գծային հավասարումների սիստեմներ լուծելու համար: Նախ մի լրացուցիչ դիտողություն անենք՝ կապված դետերմինանտի ըստ որևէ տողի կամ սյան վերածման հետ. այդ դիտողությունը հետագայում կօգտագործվի շատ անգամ:

Վերածենք

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը ըստ նրա j-րդ սյան՝

$$d=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},$$

իսկ հետո այդ վերածման մեջ j-րդ սյան էլեմենտները փոխարինենք $b_1, b_2, \ldots, b_n$ կամավոր թվերով: Մենք կստանանք $b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$ արտահայտությունը, որը կլինի

$$d'=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

դետերմինանտի վերածումը ըստ նրա j-րդ սյան, իսկ d'-ը ստացվում է d դետերմինանտից՝ նրա j-րդ սյունը $b_1, b_2, \ldots, b_n$ թվերի սյունով փոխարինելով: Իրոք, d դետերմինանտի j-րդ սյան փոխարինումը չի ներգործում նրա այդ սյան էլեմենտների մինորների վրա և, դրա պատճառով էլ, նրանց հանրահաշվական լրացումների վրա:

Կիրառենք այդ այն դեպքում, երբ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ թվերի փոխարեն վերցվում են d դետերմինանտի k-րդ սյան էլեմենտները ($k\neq j$): Այդպիսի փոխարինումից ստացված դետերմինանտը կպարունակի երկու միատեսակ սյուներ (j-րդ և k-րդ), այդ պատճառով էլ կլինի հավասար զրոյի: Հետևապես, հավասար է զրոյի նաև այդ դետերմինանտի վերածումը ըստ իր j-րդ սյան, այսինքն՝

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0, \quad j\neq k$$

դեպքում:

Այսպիսով, **դետերմինանտի մի որևէ սյան էլեմենտների և մի այլ սյան՝ դրանց համապատասխանող էլեմենտների հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի:** Այդպիսի արդյունք արդարացի է նաև, պարզ է, դետերմինանտի տողերի համար:

Անցնենք գծային հավասարումների սիստեմների ուսումնասիրմանը, ըստ որում սահմանափակվենք առայժմ այնպիսի սիստեմներով, որոնցում հավասարումների թիվը հավասար է անհայտների թվին, այսինքն՝

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

տեսքի սիստեմներով:

Լրացուցիչ կերպով ենթադրենք, որ անհայտների գործակիցներից կազմված դետերմինանտը, որը կարճ կոչվում է **սիստեմի դետերմինանտ**, զրոյից տարբեր է: Այդ ենթադրություններն անելով, մենք ցույց տանք, որ (1) սիստեմը համատեղ սիստեմ է և անգամ՝ որոշյալ:

Երկրորդ պարագրաֆում երբ լուծում էինք երեք անհայտով երեք հավասարումների սիստեմը, մենք սիստեմի ամեն մի հավասարումը բազմապատկում էինք մի որոշ բազմապատկիչով, իսկ հետո գումարելով հավասարումները պարզվում էր, որ անհայտներից երկուսի գործակիցները հավասար են զրոյի: Հիմա մենք հեշտությամբ տեսնում ենք, որ մեզ պետք եկած այդ բազմապատկիչները որոնելի անհայտի գործակիցների հանրահաշվական լրացումներն են սիստեմի դետերմինանտում: Այդ հնարքն այժմ կօգտագործենք (1) հավասարումների սիստեմի լուծման համար:

Նախ ընդունենք, որ (1) սիստեմը համատեղ է և $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ը նրա որևէ մի լուծումն է, հետևաբար, արդարացի են

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n=b_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

հավասարությունները:

Դիցուք j-ն $1, 2, \ldots, n$ թվերից ցանկացածն է: Բազմապատկենք (2) հավասարություններից առաջինի երկու մասն էլ A_{1j}-ով, այսինքն՝ սիստեմի d դետերմինանտի a_{1j} էլեմենտի հանրահաշվական լրացումով. երկրորդ հավասարության երկու մասը բազմապատկենք A_{2j}-ով և այլն, վերջապես, վերջին հավասարության երկու մասը՝ A_{nj}-ով: Հետո գումարելով ստացված հավասարությունների ձախ մասերն առանձին, աջ մասերն առանձին, մենք կստանանք հետևյալ հավասարությունը՝

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+ \\ &\quad+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+ \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+ \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})\alpha_n= \\ &\qquad=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}: \end{aligned}$$

Այդ հավասարության մեջ α_j-ի գործակիցը կլինի d-ն, իսկ մնացած բոլոր α-ների գործակիցները, համաձայն վերը կատարված դիտողության, հավասար կլինեն զրոյի. իսկ ազատ անդամը կլինի մի դետերմինանտ, որն ստացվում է d դետերմինանտից՝ նրա մեջ j-րդ սյունը (1) սիստեմի ազատ անդամների սյունով փոխարինելով։ Եթե մենք այդ վերջին դետերմինանտը, ինչպես և § 2-ում, նշանակենք d_j-ով, ապա մեր հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$d \cdot \alpha_j = d_j,$$

որտեղից, քանի որ $d \neq 0$, կստանանք՝

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

Դրանով ապացուցվեց, որ եթե (1) սիստեմը համատեղ է, ապա նա ունի

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{d_n}{d} \tag{3}$$

միակ լուծումը։

Այժմ ապացուցենք, որ թվերի (3) սիստեմը իրոք բավարարում է (1) հավասարումների սիստեմին, այսինքն՝ (1) սիստեմը համատեղ է։ Ընդ որում մենք օգտվելու ենք հետևյալ ընդունված նշանակումներից։

Ամեն մի $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ տեսքի գումար կարճ կնշանակվի $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$։ Իսկ եթե դիտարկվում է այնպիսի գումար, որի a_{ij} գումարելիներն օժտված են երկու ինդեքսներով, ըստ որում $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, ապա կարելի է վերցնել սկզբում այն a_{ij} էլեմենտների գումարը, որոնց համար առաջին ինդեքսն անփոփոխ է, այսինքն՝ $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$ գումարը, որտեղ $i=1, 2, \ldots, n$, իսկ հետո գումարել այդ բոլոր գումարները։ Այն ժամանակ բոլոր էլեմենտների գումարի համար մենք կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

գրառումը։

Կարելի էր, իհարկե, սկզբում գումարել a_{ij} գումարելիները անփոփոխ երկրորդ ինդեքսի համար, իսկ հետո արդեն գումարել ստացված գումարները։ Այդպիսով՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

այսինքն՝ կրկնակի գումարում կարելի է փոխել գումարման կարգը։

Այժմ (1) սիստեմի i-րդ հավասարման մեջ տեղադրենք անհայտների (3) արժեքները։ Քանի որ i-րդ հավասարման ձախ մասը կարելի է գրել $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ տեսքով և քանի որ $d_j = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$, ապա մենք կստանանք

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right).$$

Այդ ձևափոխությունների վերաբերյալ նկատենք, որ $\frac{1}{d}$ թիվը բոլոր գումարելիներում հանդիսացավ ընդհանուր արտադրիչ, դրա համար էլ մենք նրան հանեցինք գումարի նշանի առկից. բացի դրանից, գումարների կարգը փոխելուց հետո b_k արտադրիչը հանված է ներքին գումարի նշանի տակից, որովհետև ներքին գումարման j ինդեքսից այն կախված չէ։

Մենք գիտենք, որ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \ldots + a_{in} A_{kn}$ արտահայտությունը հավասար կլինի d-ի, երբ $k = i$, և հավասար է 0-ի բոլոր մնացած k-երի համար։ Այդպիսով, մեր արտաքին գումարում ըստ k-ի մնալու է միայն մեկ գումարելի, այն է՝ $b_i d$-ն, այսինքն՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_i d = b_i.$$

Դրանով ապացուցված է, որ թվերի (3) սիստեմը իրոք (1) սիստեմի համար լուծում է։

Մենք ստացանք հետևյալ կարևոր արդյունքը՝

n անհայտներով n գծային հավասարումների սիստեմը, որի դետերմինանտը տարբեր է զրոյից, լուծում ունի, այն էլ միայն մեկը: Լուծումը ստացվում է (3) բանաձևերով, այսինքն՝ Կրամերի կանոնով: Այդ կանոնի ձևակերպումը նույնն է, ինչ որ 2 հավասարումների սիստեմի համար (տես § 2)։

Օրինակ։ Լուծել գծային հավասարումների հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 &= 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0: \end{aligned}\right\}$$

Այդ սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է՝

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27,$$

դրա համար էլ կիրառելի է Կրամերի կանոնը։ Անհայտների արժեքների համար համարիչներ են ծառայում հետևյալ դետերմինանտները.

$$d_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81,\quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27,\quad d_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27,$$

Այսպիսով,

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=-1,\quad x_4=1$$

կազմում են մեր սիստեմի համար լուծում, ըստ որում՝ միակը։

Մենք դիտարկումից դուրս թողեցինք այն դեպքը, երբ n անհայտներով n գծային հավասարումների (1) սիստեմի դետերմինանտը հավասար էր զրոյի։ Մենք այդ դեպքը կդիտարկենք 2-րդ գլխում, որտեղ այն կգտնի իր տեղը՝ ցանկացած թվով անհայտներով ցանկացած թվով հավասարումների սիստեմների ընդհանուր տեսության մեջ։

Մենք n անհայտներով n գծային հավասարումների սիստեմի վերաբերյալ ունենք ևս մի դիտողություն։ Դիցուք տրված է n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների սիստեմ (տես § 1)՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=0:\end{aligned}\right\}\qquad (4)$$

Բոլոր d_j դետերմինանտները հավասար են զրոյի ($j=1, 2, \ldots, n$), քանի որ պարունակում են զրոներից կազմված սյուն։ Այսպիսով, եթե սիստեմի d դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, այսինքն՝ սիստեմի նկատմամբ կիրառելի է Կրամերի կանոնը, ապա սիստեմի համար միակ լուծումը կլինի զրոյական լուծումը՝

$$x_1=0,\quad x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0: \qquad (5)$$

Այստեղից բխում է հետևյալը.

Եթե n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների սիստեմն ունի ոչզրոյական լուծում, ապա սիստեմի d դետերմինանտը անհրաժեշտաբար հավասար է զրոյի:

§ 12-ում ցույց կտրվի նաև հակադարձը, այն է՝ որ եթե այդպիսի սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի, ապա բացի զրոյական լուծումից, որի գոյությունը համասեռ հավասարումների սիստեմի համար ակներև է, սիստեմը կունենա նաև այլ լուծումներ։

Օրինակ։ k-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում հավասարումների

$$\left.\begin{aligned} kx_1+x_2&=0,\\ x_1+kx_2&=0\end{aligned}\right\}$$

սիստեմը կարող է ունենալ ոչզրոյական լուծում։

Այդ սիստեմի դետերմինանտը՝

$$\begin{vmatrix} k & 1\\ 1 & k\end{vmatrix}=k^2-1$$

զրոյի հավասար կլինի միայն $k=\pm 1$ արժեքների դեպքում։ Հեշտ է նկատել, որ k-ի այդ երկու արժեքներից յուրաքանչյուրի դեպքում էլ սիստեմն իսկապես ունի ոչզրոյական լուծումներ։

Կրամերի կանոնի նշանակությունը գլխավորապես կայանում է նրանում, որ այն դեպքերում, երբ այդ կանոնը կիրառելի է, այն տալիս է սիստեմի գործակիցների միջոցով սիստեմի լուծման համար բացահայտ արտահայտություն։ Սակայն Կրամերի կանոնից գործնականում օգտվելը կապված է շատ մեծածավալ հաշվումների հետ. n անհայտներով n գծային հավասարումների սիստեմի համար հարկ է լինում հաշվել $n+1$ հատ n-րդ կարգի դետերմինանտ։ Անհայտների հաջորդաբար արտաքսման մեթոդը, որը մեր կողմից շարադրվեց § 1-ում, այդ տեսակետից շատ ավելի հարմար է, քանի որ այն հաշվումները, որոնք այդ մեթոդը պահանջում է, փաստորեն հավասարազոր են մեկ հատ n-րդ կարգի դետերմինանտ հաշվելուն։

Տարբեր կիրառություններում հանդիպում են գծային հավասարումների սիստեմներ, որոնց գործակիցները և ազատ անդամները հանդիսանում են այնպիսի իրական թվեր, որոնք ստացվում են ինչ-որ ֆիզիկական մեծությունների չափումներից, այսինքն՝ հայտնի են միայն մոտավորապես, որոշ ճշգրտությամբ։ Այդպիսի սիստեմների լուծման համար վերը շարադրված մեթոդները երբեմն անհարմար են լինում, քանի որ նրանք բերում են վատ ճշգրտությամբ արդյունքի, այդ պատճառով էլ մշակված են տարբեր իտերացիոն (հաջորդաբար կրկնման) մեթոդներ, այսինքն՝ մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս հիշյալ հավասարումների սիստեմները լուծել անհայտներին հաջորդաբար մոտենալու միջոցով։ Այդ մեթոդների մասին ընթերցողը կարող է տեղեկանալ մոտավոր հաշվումների տեսության գրքերում։

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ (ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ)

§ 8. n-չափանի վեկտորական տարածություն

Չնայած Կրամերի կանոնին ենթարկվող գծային հավասարումների սիստեմները լուծելու համար ստացված ապարատը այդ դեպքում բավականին հաջողությամբ է ծառայում մեզ, բայց և այնպես այն բավական չէ գծային հավասարումների ընդհանուր տեսությունը կառուցելու համար։ Բացի դետերմինանտներից ու մատրիցներից, մենք պետք է օգտվենք մի նոր գաղափարից, որը, թերևս, ավելի շատ ընդհանուր մաթեմատիկական հետաքրքրություն է ներկայացնում, այն է՝ բազմաչափ վեկտորական տարածության հասկացությունից։

Նախ մի քանի նախնական դիտողություններ։ Անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից հայտնի է, որ հարթության ամեն մի կետ (տրված կոորդինատային առանցքների դեպքում) որոշվում է իր երկու կոորդինատներով, այսինքն՝ երկու իրական թվերի կարգավորված սիստեմով. ամեն մի վեկտոր հարթության վրա որոշվում է իր երկու բաղադրիչներով, այսինքն՝ նույնպես երկու իրական թվերի կարգավորված սիստեմով։ Նման ձևով, ամեն մի կետ եռաչափանի տարածության մեջ որոշվում է իր երեք կոորդինատներով, ամեն մի վեկտոր տարածության մեջ՝ իր երեք բաղադրիչներով։

Երկրաչափության մեջ, նույնպես և մեխանիկայում ու ֆիզիկայում, հաճախ կարիք է լինում ուսումնասիրել այնպիսի օբյեկտներ, որոնց տրման համար երեք իրական թվերի սիստեմն անբավարար է։ Այսպես, դիտարկենք գնդերի բազմությունը տարածության մեջ։ Որպեսզի գունդը տարածության մեջ լրիվին որոշված լինի, պետք է տրված լինեն նրա

կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը, այսինքն՝ չորս իրական թվերի կարգավորված սիստեմ, ըստ որում՝ վերջինը (շառավիղը) կարող է ընդունել միայն դրական արժեքներ։ Դիտարկենք, մյուս կողմից, պինդ մարմնի տարբեր դիրքերը տարածության մեջ։ Մարմնի դիրքը լրիվ որոշված կլինի, եթե նշված լինեն նրա ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (այսինքն՝ երեք իրական թվեր), ծանրության կենտրոնով անցնող մի անշարժ առանցքի ուղղությունը (երկու թվեր՝ երեք ուղղորդ կոսինուսներից երկուսը) և, վերջապես, պտտման անկյունն այդ առանցքի շուրջը։ Այսպիսով, պինդ մարմնի դիրքը տարածության մեջ որոշվում է վեց իրական թվերի կարգավորված սիստեմով։

Այս օրինակները ցույց են տալիս, որ նպատակահարմար է դիտարկել n *իրական թվերից կազմված բոլոր հնարավոր կարգավորված սիստեմների համախումբը։ Հենց այդ համախումբն էլ, գումարման և թվով բազմապատկելու գործողությունները մուծելուց հետո (որը կատարվելու է ներքևում, իրենց բաղադրիչներով արտահայտվող եռաչափանի վեկտորների հետ այդ գործողությունները կատարելու նմանությամբ), կոչվում է* n*-չափանի վեկտորական տարածություն։ Այսպիսով,* n*-չափանի վեկտորական տարածությունը սոսկ հանրահաշվական կառուցվածք է, որը պահպանում է եռաչափանի տարածության մեջ սկզբնակետից ելնող վեկտորների համախմբության մի քանի ամենապարզ հատկությունները։*

n *թվերի*

$$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

կարգավորված սիստեմը կոչվում է n-չափանի վեկտոր: a_i *թվերը* $(i=1, 2, \ldots, n)$ *կանվանենք* α *վեկտորի* բաղադրիչներ: *Երկու՝* α *և* $\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *վեկտորներ համարվում են* հավասար, *եթե* $a_i=b_i$, $i=1, 2, \ldots, n$*։ Վեկտորների նշանակման համար կօգտագործենք հունական փոքրատառերը, իսկ լատինական փոքրատառերը՝ թվերի նշանակման համար։*

Որպես վեկտորների օրինակներ նշենք հետևյալները.

1) Հարթության կամ եռաչափանի տարածության մեջ, անշարժ կոորդինատային սիստեմի դեպքում, սկզբնակետից ելնող վեկտոր-հատվածները, վերը բերված սահմանման իմաստով, կլինեն համապատասխանաբար երկու և եռաչափանի վեկտորներ։

2) n *անհայտներով ամեն մի գծային հավասարման գործակիցները կազմում են* n*-չափանի վեկտոր։*

3) n *անհայտներով գծային հավասարումների ցանկացած սիստեմի ամեն մի լուծում հանդիսանում է* n*-չափանի վեկտոր։*

4) Եթե տրված է s*-տողանի և* n*-սյունանի մատրից, ապա նրա տողերը կլինեն* n*-չափանի վեկտորներ, իսկ սյուները՝* s*-չափանի վեկտորներ։*

5) S-տողանի և n-սյունանի մատրիցն ինքը կարող է դիտարկվել որպես $S \cdot n$-չափանի վեկտոր. դրա համար բավական է մատրիցի էլեմենտները կարդալ իրար հետևից՝ տող առ տող. մասնավորաբար, n-րդ կարգի ամեն մի քառակուսի մատրից կարելի է դիտել որպես n^2-չափանի վեկտոր, ըստ որում, ակներևորեն, ամեն մի n^2-չափանի վեկտոր կարելի է ստանալ այդ ճանապարհով n-րդ կարգի մի որոշ մատրիցից։

Երկու α և β վեկտորների գումար կոչվում է

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ a_n+b_n) \tag{3}$$

վեկտորը, որի բաղադրիչները հանդիսանում են (1) և (2) գումարելի վեկտորների համապատասխան բաղադրիչների գումարները։ Վեկտորների գումարումը բավարարում է տեղափոխելիության և զուգորդելիության օրենքներին, քանի որ այդ տեղի ունի թվերի գումարման համար։

Զրոյի դերը կատարում է զրո-վեկտորը՝

$$0=(0,\ 0,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ 0)\text{։} \tag{4}$$

Իրոք՝ $\alpha+0=(a_1+0,\ a_2+0,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ a_n+0)=\alpha$։

Զրո-վեկտորը գրելու համար մենք օգտագործում ենք նույն 0 սիմվոլը, ինչ և զրո թվի համար. այն հարցի լուծումը, թե տվյալ դեպքում խոսվում է զրո թվի՞ մասին, թե՞ զրո-վեկտորի, երբեք առանձին դժվարություն չի ներկայացնի. ընթերցողը միայն պետք է իմանա, որ հետագա պարագրաֆների ուսումնասիրման ընթացքում, հնարավոր են 0 սիմվոլի տարբեր մեկնաբանումներ։

(1) վեկտորին հակադիր վեկտոր անվանենք

$$-\alpha=(-a_1,\ -a_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ -a_n) \tag{5}$$

վեկտորը։ Պարզ է, որ $\alpha+(-\alpha)=0$։ Այժմ հեշտ է տեսնել, որ վեկտորների գումարման համար գոյություն ունի հակադարձ գործողությունը՝ հանումը։ Երկու՝ α և β վեկտորների տարբերություն կլինի $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ վեկտորը, այսինքն՝

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ a_n-b_n)\text{։} \tag{6}$$

n-չափանի վեկտորների (3) բանաձևով սահմանվող գումարումը ծագել է հարթության կամ եռաչափանի տարածության մեջ վեկտորների երկրաչափական գումարումից, որը կատարվում է զուգահեռագծի կանոնով։ Երկրաչափության մեջ օգտագործում են նաև վեկտորի բազմապատկումը իրական թվով («սկալյարով»). α վեկտորի բազմապատկումը k թվով $k>0$ դեպքում նշանակում է α վեկտորի ձգումը (երկարացումը) k անգամ (այսինքն՝ կարճացումը $k<1$ դեպքում), իսկ $k<0$ դեպքում՝

ձգումը (k) անգամ և ուղղությունը հակառակ ուղղությամբ փոխելը։ Այդ կանոնն արտահայտելով α վեկտորի բաղադրիչների միջոցով և անցնելով մեզ հետաքրքրող ընդհանուր դեպքին, մենք կստանանք հետևյալ սահմանումը՝

որևէ α վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է

$$k\alpha=\alpha k=(k_1a,\ ka_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ ka_n) \tag{7}$$

վեկտորը, որի բաղադրիչները հավասար են համապատասխանաբար α վեկտորի բաղադրիչներին՝ բազմապատկած k-ով։

Այդ սահմանումից բխում են հետևյալ կարևոր հատկությունները, որոնց ստուգումը թողնվում է ընթերցողին՝

$$k(\alpha\pm\beta)=k\alpha\pm k\beta, \tag{8}$$

$$(k\pm l)\alpha=k\alpha\pm l\alpha, \tag{9}$$

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha, \tag{10}$$

$$1\cdot\alpha=\alpha\text{։} \tag{11}$$

Նույնքան հեշտ էլ ստուգվում են հետևյալ հատկությունները.

$$0\cdot\alpha=0, \tag{12}$$

$$(-1)\cdot\alpha=-\alpha, \tag{13}$$

$$k\cdot 0=0, \tag{14}$$

եթե $k\alpha=0$, ապա կամ $k=0$, կամ $\alpha=0$, (15)

որոնք կարելի է նաև ստանալ որպես հետևանքներ (8)—(11) հատկություններից։

Իրական բաղադրիչներով բոլոր n-չափանի վեկտորների համախումբը, նրա մեջ սահմանված վեկտորների գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկելու գործողություններով, կոչվում է **n-չափանի վեկտորական տարածություն**:

Ընդգծենք, որ n-չափանի վեկտորական տարածության սահմանման մեջ չի մտնում վեկտորը վեկտորի հետ բազմապատկելու ոչ մի գործողություն։ Վեկտորների բազմապատկումը սահմանելը հեշտ կլիներ. օրինակ՝ համարել արտադրյալ վեկտոր այն վեկտորը, որի բաղադրիչները համապատասխանաբար հանդիսանում են արտադրիչ վեկտորների համապատասխան բաղադրիչների արտադրյալները։ Բայց այդպիսի սահմանումը մեզ մոտ ոչ մի կարևոր կիրառություն չէր գտնի։ Այսպես, վեկտոր-հատվածները, որոնք ելնում են հարթության կամ եռաչափանի տարածության մեջ կոորդինատների սկզբնակետից, անշարժ կոորդինատային սիստեմի դեպքում, կազմում են համապատասխանաբար երկու կամ եռաչափանի վեկտորական տարածություն։ Վեկտորների գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկելու գործողությունները, ինչպես վերը նշվեց, այս օրինակներում կարևոր երկրաչափական իմաստ ունեն: Մինչդեռ ըստ բաղադրիչների վեկտորների բազմապատկմանը ոչ մի խելացի երկրաչափական մեկնաբանում չի կարելի տալ:

Դիտարկենք ևս մեկ օրինակ: n անհայտներով գծային հավասարման ձախ մասը՝ այսինքն՝

$$f=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$$

տեսքի արտահայտությունը կոչվում է գծային ձև $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտների նկատմամբ: Գծային ձևը, ակներևաբար, լրիվ որոշվում է իր գործակիցներից կազմած $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ վեկտորով. հակադարձաբար, ամեն մի n-չափանի վեկտոր միարժեքորեն որոշում է մի որոշ գծային ձև: Վեկտորների գումարումը և վեկտորի բազմապատկումը թվով դառնում են համապատասխան գործողություններ գծային ձևերի հետ: Այդ գործողություններից մենք լայն կերպով օգտվեցինք § 1-ում: Վեկտորների բազմապատկումը ըստ բաղադրիչների, նաև այս օրինակում, չունի ոչ մի իմաստ:

§ 9. Վեկտորների գծային կախումը

Եթե n-չափանի տարածությունից վերցրած երկու α և β վեկտորների համար գոյություն ունի այնպիսի k թիվ, որ $\beta=k\alpha$ (տես նախորդ պարագրաֆում (7) բանաձևը), ապա β վեկտորը կոչվում է համեմատական α վեկտորին: Մասնավորապես, 0 վեկտորը համեմատական է ցանկացած α վեկտորին, որովհետև $0=0\alpha$: Եթե $\beta=k\alpha$ և $\beta\neq0$, որտեղից $k\neq0$, ապա $\alpha=k^{-1}\beta$, այսինքն՝ ոչզրոյական վեկտորների համար համեմատականությունը օժտված է սիմետրիկության հատկությամբ:

Հետևյալ հասկացությունը հանդիսանում է երկու վեկտորների համեմատականության հասկացության ընդհանրացումը, որի հետ (մատրիցի տողերի դեպքի համար) մենք արդեն հանդիպել ենք § 4-ում: β վեկտորը կոչվում է $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ վեկտորների գծային կոմբինացիա (զուգակցություն), եթե գոյություն ունեն այնպիսի $l_1, l_2, \dots, l_s$ թվեր, որ՝

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\dots+l_s\alpha_s:$$

Այսպիսով, β վեկտորի j-րդ բաղադրիչը $(j=1, 2, \dots, n)$, վեկտորների գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկելու սահմանումների համաձայն, հավասար կլինի համապատասխանաբար $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ վեկտորների j-րդ բաղադրիչների և $l_1, l_2, \dots, l_s$ թվերի արտադրյալների գումարին:

Վեկտորների

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r \ (r\geq2) \qquad (1)$$

սիստեմը կոչվում է գծայնորեն կախյալ, եթե այդ վեկտորներից գոնե մեկը հանդիսանում է (1) սիստեմի մնացած վեկտորների գծային կոմբինացիա. հակառակ դեպքում (1) սիստեմը կոչվում է գծայնորեն անկախ:

Նշենք այդ շատ կարևոր հասկացության սահմանման մի այլ ձև. (1) վեկտորների սիստեմը գծայնորեն կախյալ է, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $k_1, k_2, \dots, k_r$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, որ տեղի ունի այսպիսի հավասարություն՝

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r=0: \qquad (2)$$

Այդ երկու սահմանումների համարժեքության ապացույցը ոչ մի էական դժվարություն չի ներկայացնում: Դիցուք, օրինակի համար, (1) սիստեմից α_r վեկտորը մնացած վեկտորների գծային կոմբինացիան է՝

$$\alpha_r=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\dots+l_{r-1}\alpha_{r-1},$$

այստեղից բխում է՝

$$-\alpha_r+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\dots+l_{r-1}\alpha_{r-1}=0$$

հավասարությունը, այսինքն՝ (2) տեսքի հավասարություն, որտեղ $k_i=l_i$, $i=1, 2, \dots, r-1$ համար և $k_r=-1$, այսինքն՝ $k_r\neq0$: Դիցուք, հակադարձաբար, (1) վեկտորները կապված են (2) առնչությամբ, որտեղ, օրինակ, $k_r\neq0$: Այդ դեպքում՝

$$\alpha_r=\left(-\frac{k_1}{k_r}\right)\alpha_1+\left(-\frac{k_2}{k_r}\right)\alpha_2+\dots+\left(-\frac{k_{r-1}}{k_r}\right)\alpha_{r-1},$$

այսինքն՝ α_r վեկտորը հանդիսացավ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ վեկտորների գծային կոմբինացիա:

Օրինակ: Վեկտորների

$$\alpha_1=(5, 2, 1), \ \alpha_2=(-1, 3, 3), \ \alpha_3=(9, 7, 5) \text{ և } \alpha_4=(3, 8, 7)$$

սիստեմը գծայնորեն կախյալ է, որովհետև վեկտորները կապված են

$$4\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4=0$$

առնչությամբ: Այդ առնչության մեջ բոլոր գործակիցները տարբեր են զրոյից: Մեր վեկտորների մեջ գոյություն ունեն և ուրիշ գծային կախումներ, որոնց մեջ գործակիցներից մանր հավասար են զրոյի, օրինակ՝

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0, \quad 3\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=0:$$

Վեկտորների գծային կախվածության մասին վերը արված սահմանումներից երկրորդը կիրառելի է նաև $r=1$ դեպքի համար, այսինքն՝ այն դեպքի համար, երբ սիստեմը կազմված է միայն մեկ α վեկտորից: Այդ սիստեմը այն և միայն այն ժամանակ կլինի գծայնորեն կախյալ, երբ $\alpha=0$: Իրոք, եթե $\alpha=0$, ապա, օրինակի համար, երբ $k=1$ կլինի $k\alpha=1\cdot0=0$: Հակադարձաբար, եթե $k\alpha=0$ և $k\neq0$, ապա $\alpha=0$:

Նշենք գծային կախվածության հասկացության հետևյալ հատկությունը.

Եթե վեկտորների (1) սիստեմի որևէ ենթասիստեմ գծայնորեն կախյալ է, ապա ամբողջ (1) սիստեմը նույնպես գծայնորեն կախյալ է:

Իրոք, դիցուք (1) սիստեմից $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ վեկտորները, որտեղ $s<r$, կապված են

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

առնչությամբ, որտեղ ոչ բոլոր գործակիցներն են հավասար զրոյի: Այստեղից բխում է

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+0\cdot\alpha_{s+1}+\cdots+0\cdot\alpha_r=0$$

առնչությունը, այսինքն՝ (1) սիստեմը գծայնորեն կախյալ է:

Այս հատկությունից հետևում է՝ գծային կախվածությունն ամեն մի սիստեմի, որը պարունակում է երկու հավասար կամ, ընդհանրապես, երկու համեմատական վեկտորներ, ինչպես և ամեն մի սիստեմի, որը պարունակում է զրո-վեկտորը: Նկատենք, որ քիչ առաջ ապացուցած հատկությունը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. եթե (1) սիստեմը գծայնորեն անկախ սիստեմ է, ապա նրա ամեն մի ենթասիստեմ նույնպես գծայնորեն անկախ է:

Հարց է առաջանում՝ որքա՞ն շատ վեկտորներ կարող է պարունակել n-չափանի վեկտորների գծայնորեն անկախ սիստեմը և, մասնավորապես, արդյոք կա՞ն այդպիսի սիստեմներ ցանկացած չափով շատ թվով վեկտորներով: Այդ հարցին պատասխանելու համար n-չափանի վեկտորական տարածությունում դիտարկենք հետևյալ վեկտորները.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=(1, 0, 0, \ldots, 0),\\ \varepsilon_2&=(0, 1, 0, \ldots, 0),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n&=(0, 0, 0, \ldots, 1),\end{aligned}\qquad(3)$$

որոնք կոչվում են այդ տարածության միավոր վեկտորներ:

Միավոր վեկտորների սիստեմը գծայնորեն անկախ է:

Դիցուք՝

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0.$$

քանի որ այդ հավասարության ձախ մասը հավասար է $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ վեկտորին, ապա՝

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n)=0,$$

այսինքն՝ $k_i=0$, $i=1, 2, \ldots n$, որովհետև զրո-վեկտորի բոլոր բաղադրիչները հավասար են զրոյի, իսկ վեկտորների հավասարությունը համարժեք է նրանց համապատասխան բաղադրիչների հավասարությանը:

Մենք, այսպիսով, n-չափանի վեկտորական տարածության մեջ գտանք գծայնորեն անկախ վեկտորների մի սիստեմ՝ բաղկացած n վեկտորներից: Ընթերցողը հետագայում կտեսնի, որ իրականում այդ տարածության մեջ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ այդպիսի սիստեմներ:

Մյուս կողմից, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

Ցանկացած s թվով վեկտորներ n-չափանի վեկտորական տարածությունից $s>n$ դեպքում կազմում են գծայնորեն կախյալ սիստեմ:

Դիցուք մեզ տված են հետևյալ վեկտորները.

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\\ \alpha_2&=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_s&=(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}):\end{aligned}$$

Մեզ հարկավոր է ընտրել այնպիսի $k_1, k_2, \ldots, k_s$ թվեր, որոնք ոչ բոլորն են հավասար զրոյի և

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0: \qquad (4)$$

(4) հավասարությունից անցնելով բաղադրիչների միջև համապատասխան հավասարություններին, կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{s1}k_s&=0,\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{s2}k_s&=0,\\ \cdots\cdots\cdots&\\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{sn}k_s&=0:\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

(5) հավասարությունները կազմում է s անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների սիստեմ՝ $k_1, k_2, \ldots, k_s$ անհայտների նկատմամբ: Այդ սիստեմի հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից, դրա համար էլ, ինչպես ապացուցված է § 1-ի վերջում, այդ սիստեմն ունի ոչզրոյական լուծումներ: Այսպիսով, կարելի է ընտրել $k_1, k_2, \ldots, k_s$ թվերը ոչ բոլորը հավասար զրոյի, որոնք բավարարում են (4) պայմանին: Թեորեման ապացուցված է:

n-չափանի վեկտորների

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \qquad (6)$$

գծայնորեն անկախ սիստեմն անվանենք առավելագույն (մաքսիմալ) գծային անկախ սիստեմ, եթե n-չափանի ամեն մի β վեկտորի ավելացումը այս սիստեմին տալիս է արդեն գծայնորեն կախյալ սիստեմ: Քանի որ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, β վեկտորների ամեն մի գծային կախման մեջ β-ի գործակիցը պետք է լինի զրոյից տարբեր, հակառակ դեպքում (6) սիստեմը կլիներ գծայնորեն կախյալ, ապա β վեկտորը հանդիսանում է (6) վեկտորների գծային կոմբինացիա: Այդ պատճառով վեկտորների (6) սիստեմը այն և միայն այն ժամանակ կլինի գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմ, եթե (6) վեկտորները գծայնորեն անկախ են, իսկ n-չափանի ամեն մի β վեկտոր հանդիսանում է նրանց գծային կոմբինացիա։

Վերն ստացված արդյունքներից բխում է, որ n-չափանի տարածության միջ n վեկտորներից կազմված յուրաքանչյուր գծայնորեն անկախ սիստեմ կլինի առավելագույն սիստեմ, ինչպես նաև, որ ամեն մի գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն սիստեմ պարունակում է n-ից ոչ ավելի վեկտորներ:

Գծայնորեն անկախ վեկտորների յուրաքանչյուր սիստեմ n-չափանի վեկտորական տարածությունից պարունակվում է գոնե մեկ առավելագույն սիստեմում: Իրոք, եթե վեկտորների տված սիստեմը առավելագույն չէ, ապա նրան կարելի է ավելացնել մի վեկտոր այնպես, որ ստացված սիստեմը մնա գծայնորեն անկախ վեկտորների սիստեմ։ Եթե այս նոր ստացված սիստեմը դարձյալ առավելագույն չէ, ապա նրան կարելի է ավելացնել էլի՛ մեկ վեկտոր և այլն։ Այդ պրոցեսը, սակայն, չի կարող անվերջ շարունակվել, քանի որ n-չափանի վեկտորների ցանկացած սիստեմը, երբ նրա մեջ մտնող վեկտորների քանակը անցնում է n-ից, դառնում է արդեն գծայնորեն կախյալ սիստեմ։

Քանի որ մեկ ոչ-զրոյական վեկտորից բաղկացած յուրաքանչյուր սիստեմ գծայնորեն անկախ է, ապա մենք ստանում ենք, որ յուրաքանչյուր ոչզրոյական վեկտոր պարունակվում է գծայնորեն անկախ վեկտորների մի որոշ առավելագույն սիստեմում, և այդ պատճառով էլ n-չափանի վեկտորական տարածության մեջ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն սիստեմներ:

Հարց է առաջանում. այդ տարածության մեջ գոյություն ունե՞ն n-ից քիչ վեկտորներ պարունակող գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն սիստեմներ, թե՞ ամեն մի առավելագույն սիստեմում վեկտորների քանակն անպայման հավասար է n-ի։ Այդ կարևոր հարցի պատասխանը կտրվի ստորև՝ մի քանի նախնական դիտարկումներից հետո։

Եթե β վեկտորը հանդիսանում է

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \qquad (7)$$

վեկտորների գծային կոմբինացիա, ապա հաճախ ասում են, որ β-ն գծայնորեն արտահայտվում է (7) սիստեմո՛վ։ Հասկանալի է, որ եթե β վեկտորը գծայնորեն արտահայտվում է այդ սիստեմի որևէ ենթասիստեմով, ապա այն գծայնորեն կարտահայտվի նաև (7) սիստեմի միջոցով. բավական է սիստեմի մնացած վեկտորների գործակիցները վերցնել զրոներ։ Ընդհանրացնելով այդ տերմինաբանությունը, ասում են, որ

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \qquad (8)$$

վեկտորների սիստեմը գծայնորեն արտահայտվում է (7) սիստեմով, եթե յուրաքանչյուր β_i վեկտոր ($i=1, 2, \dots, s$) հանդիսանում է (7) սիստեմի վեկտորների գծային կոմբինացիա։

Ապացուցենք այդ հասկացության փոխանցելիությունը (տրանզիտիվությունը). եթե (8) սիստեմը գծայնորեն արտահայտվում է (7) սիստեմով և

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \qquad (9)$$

վեկտորների սիստեմը գծայնորեն արտահայտվում է (8) սիստեմով, ապա (9)-ը գծայնորեն կարտահայտվի նաև (7) սիստեմով։

Իրոք,

$$\gamma_j=\sum_{i=1}^{s} l_{ji}\beta_i, \quad j=1, 2, \dots, t, \qquad (10)$$

բայց $\beta_i=\sum_{m=1}^{r} k_{im}\alpha_m$, $i=1, 2, \dots, s$։ Տեղադրելով այդ արտահայտությունները (10)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\gamma_j=\sum_{i=1}^{s} l_{ji}\left(\sum_{m=1}^{r} k_{im}\alpha_m\right)=\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{s} l_{ji}k_{im}\right)\alpha_m,$$

այսինքն՝ ցանկացած $\gamma_j (j=1, 2, \dots, t)$ վեկտորը հանդիսանում է (7) վեկտորների գծային կոմբինացիա։

Վեկտորների երկու սիստեմ կոչվում են համարժեք, եթե նրանցից յուրաքանչյուրը գծայնորեն արտահայտվում է մյուսով։ Վեկտորների սիստեմների մեկը մյուսով գծայնորեն արտահայտվելու հատկության փոխանցելիությունից, որ հիմա ապացուցեցինք, հետևում է վեկտորների սիստեմների համարժեքության գաղափարի փոխանցելիությունը, ինչպես նաև հետևյալ պնդումը. եթե վեկտորների երկու սիստեմներ համարժեք են և եթե որևէ վեկտոր գծայնորեն արտահայտվում է այդ սիստեմներից մեկով, ապա նա գծայնորեն կարտահայտվի նաև մյուսով:

Չի կարելի պնդել, որ եթե երկու համարժեք սիստեմներից մեկը գծայնորեն անկախ է, ապա մյուսն էլ է օժտված այդ հատկությամբ։ Իսկ եթե այդ երկու սիստեմներն էլ գծայնորեն անկախ են, ապա նրանց մեջ մտնող վեկտորների քանակի մասին կարելի է անել մի շատ կարևոր պնդում։ Նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը, որը, իր հետագա դերի համար և նրան դիմելու հարմարության նպատակով, անվանենք հ ի մ ն ա կ ա ն թ ե ո ր ե մ։

Եթե n-չափանի վեկտորական տարածության մեջ տված են վեկտորների երկու սիստեմներ՝

$$
\begin{array}{ll}
\text{(I)} & \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \\
\text{(II)} & \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s,
\end{array}
$$

որոնցից առաջինը գծայնորեն անկախ է և գծայնորեն արտահայտվում է երկրորդով, ապա առաջին սիստեմի վեկտորների քանակը մեծ չէ երկրորդ սիստեմի վեկտորների քանակից, այսինքն՝ $r \leqslant s$։

Ենթադրենք հակառակը՝ $r > s$։ Ըստ պայմանի, (I) սիստեմի ամեն մի վեկտոր գծայնորեն արտահայտվում է (II) սիստեմով՝

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1s}\beta_s, \\
\alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2s}\beta_s, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \cdots + a_{rs}\beta_s.
\end{array}\right\} \tag{11}
$$

Այդ գծային արտահայտությունների գործակիցները կազմում են r հատ s-չափանի վեկտորների սիստեմ՝

$$
\left.\begin{array}{l}
\gamma_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1s}), \\
\gamma_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2s}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rs}).
\end{array}\right\}
$$

Քանի որ $r > s$, ապա այդ վեկտորները գծայնորեն կախյալ են, այսինքն՝

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_r\gamma_r = 0,$$

որտեղ $k_1, k_2, \ldots, k_r$ գործակիցները ոչ բոլորն են հավասար զրոյի։ Այստեղից մենք հանգում ենք բաղադրիչների միջև հետևյալ հավասարումներին՝

$$\sum_{i=1} k_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{12}$$

Այժմ դիտարկենք վեկտորների (1) սիստեմի հետևյալ գծային կոմբինացիան՝

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

կամ, կարճ՝ $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i$։ *Օգտվելով (11)-ից և (12)-ից, կստանանք՝*

$$\sum_{i=1} \quad = \sum_{i=1}^{r} k_i\left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_j\right) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij}\right)\beta_j = 0,$$

որը, սակայն, հակասում է (I) սիստեմի գծային անկախությանը։

Մեր ապացուցած հիմնական թեորեմայից բխում է հետևյալ արդյունքը՝

Եթե վեկտորների գծայնորեն անկախ սիստեմները համարժեք են, ապա նրանք պարունակում են հավասար քանակությամբ վեկտորներ։

Պարզ է, որ n-չափանի վեկտորների ցանկացած երկու գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմներ համարժեք են։ Հետևապես, նրանք կազմված են միևնույն քանակությամբ վեկտորներից, իսկ քանի որ մեզ հայտնի է, որ գոյություն ունի n վեկտորներից կազմված այդպիսի մի սիստեմ, ապա, վերջապես, մենք ստանում ենք 74-րդ էջում դրած հարցի պատասխանը՝ n-չափանի վեկտորական տարածության մեջ վեկտորների յուրաքանչյուր գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմ բաղկացած է n վեկտորներից։

Ստացված արդյունքներից կարելի է բխեցնել նաև ուրիշ հետևանքներ։

Եթե վեկտորների գծայնորեն կախյալ տրված սիստեմից վերցրած են երկու նրա մեջ գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմներ, այսինքն՝ այնպիսի ենթասիստեմներ, որոնց, առանց խախտելու գծային անկախությունը, չի կարելի ավելացնել մեր սիստեմի վեկտորներից ոչ մի այլ վեկտոր, ապա այդ ենթասիստեմները պարունակում են հավասար քանակությամբ վեկտորներ։

Իրոք, եթե

$$\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{13}$$

սիստեմում

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \quad s < r \tag{14}$$

ենթասիստեմը գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմ է, ապա $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ վեկտորներից ամեն մեկը գծայնորեն արտահայտվում է (14) սիստեմով։ Մյուս կողմից, (13) սիստեմից ամեն մի α_i վեկտոր գծայնորեն արտահայտվում է հենց այդ սիստեմով. բավական է α_i վեկտորի գործակիցը վերցնել 1, իսկ մյուս վեկտորների գործակիցները՝ 0։ Այժմ արդեն հեշտ է տեսնել (13) և (14) սիստեմների համարժեքությունը։ Այստեղից հետևում է, որ (13) սիստեմը համարժեք է իր ցանկացած գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմին, հետևապես՝ բոլոր այդպիսի ենթասիստեմները համարժեք են իրար, այսինքն՝ լինելով գծայնորեն անկախ, պարունակում են միևնույն քանակությամբ վեկտորներ։

Տված սիստեմի ցանկացած գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմի մեջ մտնող վեկտորների թիվը կոչվում է այդ սիստեմի **ռանգ**։ *Օգտագործելով այդ հասկացությունը, հիմնական թեորեմայից արտածենք էլի՛ մեկ հետևանք։*

Դիցուք տրված են n-չափանի վեկտորների երկու սիստեմներ՝

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \tag{15}$$

և

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \tag{16}$$

ոչ անպայման գծայնորեն անկախ, ըստ որում (15) սիստեմի ռանգը հավասար է k թվին, իսկ (16) սիստեմի ռանգը՝ l թվին։ Եթե առաջին սիստեմը գծայնորեն արտահայտվում է երկրորդով, ապա $k \leqslant l$, իսկ եթե այդ սիստեմները համարժեք են, ապա $k=l$։

Իրոք, դիցուք

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k} \tag{17}$$

և

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_l} \tag{18}$$

համապատասխանաբար (15) և (16) սիստեմների ցանկացած երկու գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմներ են։ Այդ դեպքում (15) և (17) սիստեմները կլինեն իրար համարժեք և այդ բանը ճիշտ է նաև (16) և (18) սիստեմների համար։ (16) սիստեմի միջոցով (15) սիստեմի գծայնորեն արտահայտվելուց այժմ բխում է, որ (17) սիստեմը նույնպես գծայնորեն արտահայտվում է (16) սիստեմի միջոցով, և այդ պատճառով էլ նաև նրան համարժեք (18) սիստեմի միջոցով։ Դրանից հետո մնում է, օգտագործելով (17) սիստեմի գծային անկախությունը, կիրառել հիմնական թեորեման։ Ապացուցվելիք հետևանքի երկրորդ պնդումն անմիջապես բխում է առաջինից։

§ 10. Մատրիցի ռանգը

Եթե տրված է n-չափանի վեկտորների որևէ սիստեմ, ապա բնականաբար հարց է առաջ գալիս՝ այդ վեկտորների սիստեմը գծայնորեն կախյա՞լ է, թե՞ ոչ։ Չի կարելի հույս դնել, թե այդ հարցի լուծումն ամեն մի կոնկրետ դեպքում հեշտ կլինի. առաջին հայացքից

$$\alpha=(2, -5, 1, -1), \quad \beta=(1, 3, 6, 5), \quad \gamma=(-1, 4, 1, 2)$$

վեկտորների սիստեմի մեջ դժվար է նկատել որևէ գծային կախում, չնայած իրականում այդ վեկտորները կապված են

$$7\alpha-3\beta+11\gamma=0$$

առնչությամբ։

Այդ հարցի լուծման մի մեթոդ տալիս է § 1-ը. քանի որ տրված վեկտորների բաղադրիչները մեզ հայտնի են, ապա անհայտներ համարելով որոնելի գծային կախման գործակիցները, մենք կստանանք գծային համասեռ հավասարումների սիստեմ, որը և կլուծենք Գաուսի մեթոդով։ Այս պարագրաֆում մեկ այլ մոտեցում ցույց կտրվի դիտարկվող

հարցին։ Միաժամանակ մենք բավականին կմոտենանք մեր հիմնական նպատակին՝ գծային հավասարումների կամայական սիստեմների լուծմանը։

Դիցուք տրված է s-տողանի և n-սյունանի

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, ըստ որում s և n թվերը ոչնչով կապված չեն իրար հետ։ Այդ մատրիցի սյուները, դիտարկված որպես s-չափանի վեկտորներ, ընդհանրապես, կարող են գծայնորեն կախյալ լինել։ Սյուների սիստեմի ռանգը, այսինքն՝ A մատրիցի գծայնորեն անկախ սյուների առավելագույն թիվը (ավելի ճիշտ՝ այն սյուների քանակը, որոնք մտնում են սյուների սիստեմի ամեն մի գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմի մեջ), կոչվում է այդ մատրիցի ռանգ։

Հասկանալի է, որ նման ձևով A մատրիցի տողերը կարելի է դիտել որպես n-չափանի վեկտորներ։ Պարզվում է, որ մատրիցի տողերի սիստեմի ռանգը հավասար է նրա սյուների սիստեմի ռանգին, այսինքն՝ հավասար է այդ մատրիցի ռանգին։ Այդ բավականին անսպասելի փաստի ապացույցը կտրվի, երբ մենք կնշենք մատրիցի ռանգի սահմանման մի այլ ձև ևս, որը միանգամից տալիս է նաև մատրիցի ռանգը հաշվելու գործնական եղանակ։

Նախ ուղղանկյուն մատրիցների համար ընդհանրացնենք մինորի հասկացությունը։ A մատրիցի մեջ կամայական կերպով ընտրենք k տողեր և k սյուներ $[k \leqslant \min(s,n)]$։ Այդ k տողերի և k սյուների հատման կետերի էլեմենտները կազմում են k-րդ կարգի քառակուսի մատրից, որի դետերմինանտը կոչվում է A մատրիցի k-րդ կարգի մինոր։ Հետո մեզ հետաքրքրելու են այն մինորների կարգերը, որոնք զրոյից տարբեր են, հատկապես այդ կարգերից ամենաբարձրը։ Այն որոնելիս օգտակար է հաշվի առնել հետևյալ դիտողությունը. եթե A մատրիցի բոլոր k-րդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի, ապա զրոյի հավասար են նաև ավելի բարձր կարգի մինորները։ Իրոք, ամեն մի k+j կարգի մինոր $[k < k+j \leqslant \min(s, n)]$, Լապլասի թեորեմայի համաձայն, վերածելով ըստ որևէ k տողերի, մենք այդ մինորը կներկայացնենք որպես k-րդ կարգի մինորների և j-րդ կարգի ինչ-որ մինորների արտադրյալների գումար. դրանով էլ ապացուցվում է, որ այդ մինորը հավասար է զրոյի։

Այժմ ապացուցենք մատրիցի ռանգի մասին հետևյալ թեորեման՝

A մատրիցի՝ զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգը հավասար է այդ մատրիցի ռանգին:

Ապացույց: *Դիցուք* A *մատրիցի՝ զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգը հավասար է* r-*ի: Համարենք, որ այդ* r-*րդ կարգի զրոյից տարբեր* D *մինորը ընկած է մատրիցի վերին ձախ անկյունում, որով, իհարկե, չենք խախտի ապացույցի ընդհանրությունը՝*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & D & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & \cdot & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdot & \cdot & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \cdot & \cdot & a_{sr} & a_{s,r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{sn} \end{pmatrix}, D\neq 0:$$

Այդ դեպքում, A *մատրիցի առաջին* r *սյուները կլինեն գծայնորեն անկախ. հակառակ դեպքում, եթե նրանց միջև լիներ գծային կախում, ապա, քանի որ վեկտորները գումարելիս գումարվում են նրանց համապատասխան բաղադրիչները,* D *մինորի սյուների մեջ էլ կլիներ այդ նույն գծային կախումը, ուստի և* D *մինորը հավասար կլիներ զրոյի:*

Այժմ ապացուցենք, որ A *մատրիցի ամեն մի* l-*րդ սյուն* ($r<l\leqslant n$) *կլինի առաջին* r *սյուների գծային կոմբինացիա: Վերցնենք ցանկացած* i, $1\leqslant i\leqslant n$, *և կառուցենք* $r+1$ *կարգի հետևյալ դետերմինանտը.*

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix},$$

որն ստացվում է «եզրավորելով» D *մինորը* l-*րդ սյան և* i-*րդ տողի համապատասխան էլեմենտներով: Այդ* Δ_i *դետերմինանտը ամեն մի* i-*ի դեպքում հավասար է զրոյի: Իրոք, եթե* $i>r$, *ապա* Δ_i *դետերմինանտը կլինի մեր* A *մատրիցի* $(r+1)$-*րդ կարգի մինոր, դրա համար էլ հավասար կլինի զրոյի՝* r *թվի ընտրության շնորհիվ, իսկ եթե* $i\leqslant r$, *ապա* Δ_i-*ն չի լինի արդեն* A *մատրիցի մինոր, քանի որ չի ստացվի այդ մատրիցից նրա որոշ տողեր և որոշ սյուներ ջնջելով. բայց* Δ_i-*ն այժմ կունենա երկու միատեսակ տողեր և այդ իսկ պատճառով նորից հավասար կլինի զրոյի:*

Դիտարկենք Δ_i *դետերմինանտի վերջին տողի էլեմենտների հանրահաշվական լրացումները: Պարզ է, որ* a_{il} *էլեմենտի հանրահաշվական լրացում է ծառայում* D *մինորը: Իսկ եթե* $1\leqslant j\leqslant r$, *ապա* a_{ij} *էլեմենտի համար* Δ_i *դետերմինանտում հանրահաշվական լրացում կլինի*

$$A_j=(-1)^{(r+1)+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$$

թիվը. այն կախված չէ i-*ից և դրա համար էլ նշանակված է* A_j-*ով: Այսպիսով,* Δ_i *դետերմինանտը վերածելով ըստ իր վերջին տողի էլեմենտների և հաշվի առնելով, որ* $\Delta_i=0$, *մենք կստանանք՝*

$$a_{i1}A_1+a_{r2}A_2+\cdot\cdot\cdot+a_{ir}A_r+a_{il}D=0,$$

որտեղից, քանի որ $D\neq 0$,

$$a_{il}=-\frac{A_1}{D}a_{i1}+\frac{A_2}{D}a_{i2}-\cdot\cdot\cdot-\frac{A_r}{D}a_{ir}:$$

Այս հավասարությունն իրավացի է $i=1, 2, \dots, s$ *բոլոր արժեքների համար և, քանի որ նրա գործակիցները* i-*ից կախված չեն, ապա մենք ստանում ենք, որ* A *մատրիցի* l-*րդ սյունը հանդիսանում է նրա առաջին* r *սյուների գումարը՝ վերցրած համապատասխանաբար* $-\frac{A_1}{D}, -\frac{A_2}{D}, \dots, -\frac{A_r}{D}$ *գործակիցներով:*

Այսպիսով, A *մատրիցի սյուների սիստեմում մենք գտանք* r *սյուներից կազմված գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմ: Դրանով ապացուցվեց, որ* A *մատրիցի ռանգը հավասար է* r-*ի, այսինքն՝ ապացուցվեց ռանգի մասին թեորեմը:*

Այդ թեորեմը հնարավորություն է տալիս մատրիցի ռանգը գործնականորեն հաշվելու, դրանով էլ տալիս է տված վեկտորների սիստեմում գոյություն ունեցող գծային կախման հարցի լուծումը. տված վեկտորները համարելով մատրիցի սյուներ ու հաշվելով այդ մատրիցի ռանգը, կգտնենք գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն քանակը մեր վեկտորների սիստեմում:

Ռանգի մասին հիմնական թեորեմայի վրա հիմնված մատրիցի ռանգը գտնելու մեթոդը, չնայած պահանջում է հաշվել մեր մատրիցի վերջավոր քանակի մինորները, բայց այդ մինորների թիվը կարող է և շատ մեծ լինել: Հետևյալ դիտողությունը հնարավորություն է տալիս այդ մեթոդի մեջ բավականին պարզեցում մտցնելու: Եթե ընթերցողը մի անգամ ևս վերանայի մատրիցի ռանգի մասին թեորեմայի ապացույցը, նա կտեսնի, որ մենք ապացուցելիս չենք օգտագործել A *մատրիցի* բ ո լ ո ր $(r+1)$-*րդ կարգի մինորների զրո լինելը. իրականում մենք օգտագործել ենք միայն* $(r+1)$-*րդ կարգի այն մինորների զրո լինելը, որոնք եզրավորում են տված* r *կարգի զրոյից տարբեր* D *դետերմինանտը (այսինքն՝ իրենց մեջ լրիվ պարունակում են* D-*ն): Դրա համար էլ, միայն այդ մինորների զրո լինելուց արդեն բխում է, որ* r-*ը հանդիսանում է* A *մատրիցում գծային անկախ սյուների առա-*

վելագույն քանակը, վերջինից էլ արդեն հետևում է այդ մատրիցի ընդհանրապես բոլոր $(r+1)$-րդ կարգի մինորների զրո լինելը։ Մենք հանգում ենք *մատրիցի ռանգը հաշվելու կանոնին*՝

Մատրիցի ռանգը հաշվելիս պետք է ցածր կարգի մինորներից անցնել բարձր կարգի մինորներին։ Եթե արդեն գտնված է k-րդ կարգի զրոյից տարբեր D մինորը, ապա հաշվելու կարիք ունեն միայն այդ D մինորը երիզավորող $(k+1)$-րդ կարգի մինորները. Եթե նրանք բոլորն էլ հավասար են զրոյի, ուրեմն մատրիցի ռանգը հավասար է k-ի։

Օրինակներ։

1. Գտնել

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցի ռանգը։

Երկրորդ կարգի այն մինորը, որն ընկած է այդ մատրիցի վերին ձախ անկյունում, հավասար է զրոյի։ Բայց A մատրիցը պարունակում է նաև զրոյից տարբեր երկրորդ կարգի մինորներ, օրինակ՝

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Երրորդ կարգի

$$d'=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

մինորը, որը երիզավորում է d մինորը, հավասար է 1-ի, բայց d' մինորը երիզավորող չորրորդ կարգի երկու մինորներն էլ հավասար են զրոյի՝

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

ուստի, A մատրիցի ռանգը հավասար է երեքի։

2. Գտնել գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն ենթասիստեմը

$\alpha_1=(2,\ -2,\ -4)$, $\alpha_2=(1,\ 9,\ 3)$, $\alpha_3=(-2,\ -4,\ 1)$, $\alpha_4=(3,\ 7,\ -1)$

վեկտորների սիստեմում։ Կազմենք

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որի համար սյուներ են ծառայում տվյալ վեկտորները։ Այդ մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի, քանի որ վերին ձախ անկյունում ընկած երկրորդ

կարգի մինորը զրոյից տարբեր է, իսկ նրան երիզավորող երրորդ կարգի երկու մինորներն էլ հավասար են զրոյի։ Դրանից հետևում է, որ α_1 և α_2 վեկտորները տված սիստեմում կազմում են գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն ենթասիստեմներից մեկը։

Որպես մատրիցի ռանգի մասին թեորեմայի հետևանք, ապացուցենք հետևյալ պնդումը, որի մասին ասվել էր ավելի վաղ.

Ամեն մի մատրիցի գծայնորեն անկախ տողերի առավելագույն քանակը հավասար է նրա գծայնորեն անկախ սյուների առավելագույն քանակին, այսինքն՝ հավասար է այդ մատրիցի ռանգին։

Ապացուցելու համար մատրիցը շրջենք գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ, այսինքն՝ տողերը դարձնենք սյուներ՝ պահպանելով նրանց համարները։ Շրջելիս, մատրիցի՝ զրոյից տարբեր մինորների առավելագույն կարգը չի կարող փոխվել, քանի որ շրջումից դետերմինանտը չի փոխվում, իսկ տված մատրիցի ամեն մի մինորի շրջված մինորը կպարունակվի նոր մատրիցում, և հակառակը։ Այստեղից հետևում է, որ նոր մատրիցի ռանգը հավասար է տված մատրիցի ռանգին, դրա հետ միաժամանակ այն հավասար է նոր մատրիցի գծայնորեն անկախ սյուների առավելագույն քանակին, այսինքն՝ նախկին մատրիցի գծայնորեն անկախ *տողերի* առավելագույն քանակին։

Օրինակ. Արդեն § 8-ից ծանոթ ենք n անհայտներով գծային ձևի հասկացությանը, գիտենք նրանց գումարման և թվով բազմապատկման սահմանումները։ Այդ սահմանումները հնարավորություն են տալիս գծային կախման գաղափարն իր բոլոր հատկություններով փոխանցել գծային ձևերի համար։ Դիցուք տրված է գծային ձևերի հետևյալ սիստեմը.

$$\begin{aligned} f_1&=x_1+2x_2+x_3+3x_4, \\ f_2&=4x_1-x_2-5x_3-6x_4, \\ f_3&=x_1-3x_2-4x_3-7x_4, \\ f_4&=2x_1+x_2-x_3. \end{aligned}$$

Հարկավոր է նրանից առանձնացնել գծայնորեն անկախ ձևերի առավելագույն ենթասիստեմ։

Կազմենք այդ ձևերի սիստեմի գործակիցների մատրիցը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

և գտնենք նրա ռանգը։ Վերին ձախ անկյունում ընկած երկրորդ կարգի մինորը զրոյից տարբեր է, բայց, ինչպես հեշտ է ստուգել, նրան երիզավորող բոլոր չորս հատ երրորդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի։ Այստեղից հետևում է, որ մեր մատրիցի առաջին երկու տողերը գծայնորեն անկախ են, իսկ երրորդ և չորրորդ տողերը կլինեն նրանց գծային կոմբինացիաներ։ Ուստի տված գծային ձևերի սիստեմում f_1 և f_2 գծային ձևերը կազմում են որոնելի ենթասիստեմը։

Նշենք մատրիցի ռանգի մասին թեորեմայի մի կարևոր հետևանք ևս։

Դետերմինանտը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տողերի միջև գոյություն ունի գծային կախում:

Այդ թեորեմայի մի ուղղությամբ արդեն ապացուցել ենք § 4-ում (8-րդ հատկությունը)։ Դիցուք այժմ մեզ տված է n-րդ կարգի դետերմինանտ, որը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ տված է n-րդ կարգի քառակուսի մատրից, որի ամենաբարձր կարգի միակ մինորը հավասար է զրոյի։ Այստեղից հետևում է, որ այդ մատրիցի զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգը փոքր է n-ից, այսինքն՝ մատրիցի ռանգը n-ից փոքր է, դրա համար էլ, ըստ վերը ապացուցածի, այդ մատրիցի տողերի միջև գոյություն ունի գծային կախում։

Պարզ է, որ այդ հետևանքում կարելի էր դետերմինանտի տողերի փոխարեն խոսել սյուների մասին։

Մատրիցի ռանգը հաշվելու մի այլ մեթոդ ևս գոյություն ունի, որը կապված չէ մատրիցի ռանգի մասին թեորեմայի հետ և չի պահանջում դետերմինանտների հաշվում։ Այն կիրառվում է միայն այնպիսի դեպքերում, երբ մեզ պետք է լինում միայն իմանալ մատրիցի ռանգը և չի հետաքրքրում, թե հատկապես որ սյուներն են (կամ տողերը) կազմում գծայնորեն անկախ սյուների առավելագույն սիստեմ։ Շարադրենք այդ մեթոդը։

A *մատրիցի* տարրական ձևափոխություններ *կոչվում են նրա հետևյալ ձևափոխությունները.*

(ա) երկու տողերի կամ երկու սյուների դիրքափոխությունը.

(բ) տողերի (կամ սյուների) բազմապատկումը զրոյից տարբեր ցանկացած թվով.

(գ) որևէ տողին (կամ սյանը) մի այլ տող գումարելը՝ նախապես բազմապատկած որևէ թվով։

Հեշտ է նկատել, որ տարրական ձևափոխությունները մատրիցի ռանգը չեն փոխում։ *Իրոք, եթե ձևափոխությունը վերաբերում է, օրինակի համար, մատրիցի սյուներին, ապա սյուների սիստեմը, դիտարկված որպես վեկտորների սիստեմ, փոխարինվում է իրեն համարժեք սիստեմով։ Ապացուցենք այդ միայն (գ) ձևափոխության համար, քանի որ (ա) և (բ) ձևափոխությունների համար այդ ակներև է։ Թող i-րդ սյանը ավելացվի j-րդ սյունը՝ բազմապատկած k-ով։ Եթե մատրիցի սյուներ մինչև ձևափոխությունը հանդիսանում էին*

$$a_1,\ a_2,\ \dots,a_i,\ \dots.\ a_j,\ \dots,\ a_n \tag{1}$$

վեկտորները, ապա ձևափոխությունից հետո մատրիցի սյուներ կդառնային

$$a_1,\ a_2\ \dots\ a_i'=a_i+ka_j,\ \dots\ a_j\ \dots a_n \tag{2}$$

վեկտորները։ Ինչպես տեսնում ենք, (2) սիստեմը գծայնորեն արտահայտվում է (1) սիստեմով, իսկ

$$a_i=a_i'-ka_j$$

հավասարությունը ցույց է տալիս, որ իր հերթին (1) սիստեմը գծայնորեն արտահայտվում է (2) սիստեմով։ Հետևապես, այդ սիստեմները համարժեք են և, դրա

համար էլ, նրանց գծայնորեն անկախ սյուների առավելագույն քանակները հավասար են։

Այսպիսով, մատրիցի ռանգը հաշվելիս, կարելի է նախապես պարզեցնել մատրիցը որոշ տարրական ձևափոխությունների միջոցով։

Ասում են, որ s *տողերով և* n *սյուներով մատրիցը ունի* անկյունագծային տեսք, *եթե նրա բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի, բացի* a_{11}, a_{22}, …, a_{rr} *էլեմենտներից (որտեղ* $0\leqslant r\leqslant \min(s,n)$*)։ Այդպիսի մատրիցի ռանգը, ակներևորեն, հավասար է* r-*ի։*

Ամեն մի մատրից տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

Իրոք, դիցուք տված է

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{s1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{sn}\end{pmatrix}$$

մատրիցը։ Եթե նրա բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի, ապա այն արդեն ունի անկյունագծային տեսք։ Իսկ եթե նրա մեջ կան զրոյից տարբեր էլեմենտներ, ապա տողերի և սյուների միջև կատարելով դիրքափոխություն, կարելի է զրոյից տարբեր էլեմենտը տեղավորել վերին ձախ անկյունում. համարենք արդեն $a_{11}\neq 0$*։ Հետո, բազմապատկելով առաջին տողը* a_{11}^{-1}-*ով, մենք* a_{11} *էլեմենտը կդարձնենք մեկ։ Եթե մենք հիմա* j-*րդ սյունից* ($j>1$) *հանենք առաջին սյունը՝ բազմապատկած* a_{1j}-*ով, ապա* a_{1j} *էլեմենտը կփոխարինվի զրոյով։ Կատարելով այդ ձևափոխությունը բոլոր սյուների հետ, սկսած երկրորդից, և հետո էլ բոլոր տողերի հետ, մեր մատրիցը կբերենք հետևյալ տեսքին.*

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & a_{22}' & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}'\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & a_{s2}' & \cdot & \cdot & \cdot & a_{sn}'\end{pmatrix}.$$

Կատարելով նույնը ներքևի աջ անկյունում մնացած մատրիցի հետ, և այդպես շարունակելով, մենք վերջավոր թվով քայլերից հետո կգանք անկյունագծային մատրիցի, որն ունի նույն ռանգը, ինչ որ սկզբնական A *մատրիցը։*

Այսպիսով, մատրիցի ռանգը գտնելու համար հարկավոր է տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ նրան բերել անկյունագծային տեսքի և վերջինում հաշվել միավորների թիվը գլխավոր անկյունագծի վրա:

Օ ր ի ն ա կ։ Գտնել

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

մատրիցի ռանգը։ Այդ մատրիցում տեղափոխելով առաջին և երկրորդ տողերը և հետո առաջին տողը բազմապատկելով $\frac{1}{2}$-*ով, մենք կստանանք*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ -4 & -1 & 5\\ 1 & 3 & 7\\ 5 & 0 & -10\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

մատրիցը։ Նրա երրորդ սյանն ավելացնելով առաջին սյան կրկնապատիկը, իսկ հետո յուրաքանչյուր մնացած տողին ավելացնելով նոր ստացած առաջին տողը՝ բազմապատկած որևէ թվով, մենք կստանանք

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

մատրիցը։ Վերջապես, երկրորդ տողը բազմապատկելով —1-ով և երրորդ սյունից հանելով երկրորդ սյան կրկնապատիկը, իսկ հետո էլ երրորդ և հինգերորդ տողերից հանելով նոր երկրորդ տողը՝ բազմապատկված որևէ թվով, մենք կհանգենք որոնելի անկյունագծային տեսքին՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Այսպիսով, A մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի։

13-րդ գլխում մենք էլի՛ կհանդիպենք մատրիցի տարրական ձևափոխություններին և անկյունագծային տեսքին։ Ի դեպ, դրանք կլինեն այնպիսի մատրիցներ, որոնց էլեմենտները կլինեն ոչ թե թվեր, այլ բազմանդամներ։

§ 11. Գծային հավասարումների սիստեմներ

Մենք անցնում ենք գծային հավասարումների կամավոր սիստեմների ուսումնասիրմանը, ըստ որում այլևս նախապես չենք ենթադրում, որ անհայտների թիվը անպայման հավասար է հավասարումների թվին։ Մեր ստացած արդյունքը կիրառելի կլինի նաև այն դեպքի համար (§ 7-ում մենք այն թողել էինք առանց դիտարկման), երբ անհայտների թիվը հավասար է հավասարումների թվին, բայց սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի։

Դիցուք տրված է գծային հավասարումների

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n&=b_s \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

սիստեմը։ Ինչպես մենք § 1-ից գիտենք, նախ պետք է որոշել այդ սիստեմի համատեղ լինելու հարցը։ Այդ նպատակի համար կազմենք սիստեմի գործակիցների A մատրիցը և $\overline{A}$ ընդլայնված մատրիցը, որն

ստացվում է A մատրիցից՝ նրան ավելացնելով ազատ անդամների սյունը՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix},$$

և հաշվենք այդ մատրիցների ռանգերը։ Հեշտ է նկատել, որ $\overline{A}$ **մատրիցի ռանգը կամ հավասար է A մատրիցի ռանգին կամ մեկ միավորով ավելի է վերջինից**: Իրոք, A մատրիցի սյուներից վերցնենք գծայնորեն անկախ սյուների որևէ առավելագույն սիստեմ. այն գծայնորեն անկախ կլինի նաև $\overline{A}$ մատրիցում: Եթե այն պահպանում է նաև $\overline{A}$-ում առավելագույն լինելու հատկությունը, այսինքն՝ ազատ անդամների սյունը գծայնորեն արտահայտվում է այդ սիստեմով, ապա A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերը հավասար են։ Հակառակ դեպքում, միացնելով այդ սիստեմին ազատ անդամների սյունը, մենք կստանանք $\overline{A}$ մատրիցի գծայնորեն անկախ սյուների սիստեմ, որը և կլինի $\overline{A}$-ում առավելագույն սիստեմ։

Գծային հավասարումների սիստեմի համատեղ լինելու հարցը լրիվ կերպով որոշվում է հետևյալ թեորեմայով.

Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմա։ **Գծային հավասարումների (1) սիստեմը համատեղ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ընդլայնված $\overline{A}$ մատրիցի ռանգը հավասար է A մատրիցի ռանգին։**

Ապացույց: Դիցուք (1) սիստեմը համատեղ է և թող նրա լուծումներից մեկը լինի $k_1, k_2, \ldots, k_n$-ը: Տեղադրելով այդ թվերը (1) սիստեմի մեջ անհայտների փոխարեն, մենք կստանանք s հատ նույնություններ, որոնք ցույց են տալիս, որ $\overline{A}$ մատրիցի վերջին սյունը հանդիսանում է մնացած բոլոր սյուների գումարը՝ բազմապատկված համապատասխանաբար $k_1, k_2, \ldots, k_n$ թվերով: Իսկ $\overline{A}$ մատրիցի մնացած սյուներից յուրաքանչյուրը մտնում է նաև A մատրիցի մեջ, այդ պատճառով էլ գծայնորեն արտահայտվում է այդ մատրիցի սյուների միջոցով: Հակադարձաբար, A մատրիցի ամեն մի սյուն հանդիսանում է սյուն նաև $\overline{A}$ մատրիցում, այդ պատճառով էլ գծայնորեն արտահայտվում է այդ մատրիցի սյուների միջոցով: Այստեղից հետևում է, որ A և $\overline{A}$ մատրիցների սյուների սիստեմները իրար համարժեք են, ուստի, ինչպես ապացուցված է § 9-ում, s-չափանի վեկտորների այդ երկու սիստեմներն ունեն միևնույն ռանգը. ուրիշ խոսքով՝ A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերը հավասար են։

2. Դիցուք այժմ տված է, որ A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերը հավասար են։ Այստեղից հետևում է, որ A մատրիցի գծայնորեն անկախ սյուների ամեն մի առավելագույն սիստեմ կլինի գծայնորեն անկախ

սյուների առավելագույն սիստեմ նաև $\overline{A}$ մատրիցում: Այսպիսով, այդ սիստեմի միջոցով, ուստի և ընդհանրապես A մատրիցի սյուների սիստեմի միջոցով, գծայնորեն կարտահայտվի $\overline{A}$ մատրիցի վերջին սյունը: Հետևաբար, գոյություն ունի գործակիցների այնպիսի սիստեմ՝ $k_1, k_2, \dots, k_n$, որ A մատրիցի սյուների գումարը՝ վերցրած համապատասխանաբար $k_1, k_2, \dots, k_n$ գործակիցներով, հավասար կլինի ազատ անդամների սյանը, և դրա համար էլ $k_1, k_2, \dots, k_n$ թվերը կազմում են (1) սիստեմի լուծում: Այսպիսով, A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերի հավասարությունից բխում է (1) սիստեմի համատեղությունը.

Թեորեման լրիվ ապացուցված է: Կոնկրետ օրինակներում նրա կիրառման ժամանակ պետք է նախ հաշվել A մատրիցի ռանգը, որի համար պետք է գտնել զրոյից տարբեր այն մինորներից մեկը, որին եզրավորող բոլոր մինորները հավասար են զրոյի: Թող այդ լինի M մինորը: Դրանից հետո պետք է հաշվել $\overline{A}$ մատրիցի բոլոր այն մինորները, որոնք եզրավորում են M-ը, բայց չեն պարունակվում A-ում (այսպես կոչված՝ (1) սիստեմի բնութագրիչ դետերմինանտները): Եթե նրանք բոլորն էլ հավասար են զրոյի, ապա A մատրիցի ռանգը հավասար է $\overline{A}$ մատրիցի ռանգին, և դրա համար էլ (1) սիստեմը համատեղ է, հակառակ դեպքում նա անհամատեղ սիստեմ է: Այսպիսով, Կրոնեկերի-Կապելլիի թեորեման կարելի է ձևակերպել նաև այսպես՝ գծային հավասարումների (1) սիստեմը այն և միայն այն դեպքում է համատեղ, եթե նրա բոլոր բնութագրիչ դետերմինանտները հավասար են զրոյի:

Այժմ ենթադրենք, թե (1) սիստեմը համատեղ սիստեմ է: Կրոնեկերի-Կապելլիի թեորեման, որի միջոցով մենք պարզում ենք այդ սիստեմի համատեղ լինելը, հաստատում է միայն լուծման գոյությունը: Սակայն, այն չի տալիս բոլոր լուծումները գտնելու որևէ գործնական եղանակ: Այժմ մենք անցնում ենք այդ խնդրին:

Դիցուք A մատրիցի ռանգը r է: Ինչպես նախորդ պարագրաֆում ապացուցել ենք, r-ը հավասար է A մատրիցի գծայնորեն անկախ տողերի առավելագույն թվին: Դիցուք, պարզության համար, A մատրիցի առաջին r տողերը գծայնորեն անկախ են, իսկ մնացած տողերից յուրաքանչյուրը նրանց գծային կոմբինացիա է: Այդ դեպքում $\overline{A}$ մատրիցի առաջին r տողերը նույնպես կլինեն գծայնորեն անկախ, քանի որ նրանց միջև ամեն մի գծային կախում կլիներ գծային կախում նաև A մատրիցի առաջին r տողերի միջև (հիշել վեկտորների գումարման սահմանումը): Այնուհետև, A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերի հավասարությունից հետևում է, որ $\overline{A}$ մատրիցի առաջին r տողերը կազմում են նրա մեջ գծայնորեն անկախ տողերի առավելագույն սիստեմ, այսինքն՝ այդ մատրիցի ամեն մի այլ տող կհանդիսանա առաջին r տողերի գծային կոմբինացիա:

Այստեղից հետևում է, որ (1) սիստեմի ամեն մի հավասարում կարելի է ներկայացնել որոշ գործակիցներով վերցրած առաջին r հավասարումների գումարի տեսքով, հետևապես՝ առաջին r հավասարումների սիստեմի ամեն մի ընդհանուր լուծում կբավարարի նաև (1) սիստեմի բոլոր հավասարումներին: Բավական է, հետևապես, գտնել

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots a_{rn}x_n=b_r \end{array}\right\} \qquad (2)$$

սիստեմի բոլոր լուծումները:

Քանի որ (2) հավասարումների անհայտների գործակիցներից կազմված տողերը գծայնորեն անկախ են, այսինքն՝ գործակիցներից կազմված մատրիցը ունի r ռանգը, ապա $r \leqslant n$ և, բացի դրանից, այդ մատրիցի r-րդ կարգի մինորներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից: Եթե $r=n$, ապա (2) սիստեմը կլինի n անհայտներով n հավասարումների սիստեմ, ըստ որում սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, այսինքն՝ այն, հետևաբար նաև (1) սիստեմը, կունենա միակ լուծում, այն է՝ Կրամերի կանոնով որոշվող լուծումը:

Դիցուք այժմ $r<n$ և դիցուք, որոշակիության համար, զրոյից տարբեր r-րդ կարգի մինորը առաջին r անհայտների գործակիցներից կազմված մինորն է: (2) հավասարումներից յուրաքանչյուրում $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ անհայտներով բոլոր անդամները տեղափոխենք աջ մասը և այդ անհայտների համար ընտրենք որոշ $c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_n$ արժեքներ: Մենք կստանանք $x_1, x_2, \dots, x_r$ անհայտների նկատմամբ r հավասարումների հետևյալ սիստեմը.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}c_{r+1}-\dots-a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}c_{r+1}-\dots-a_{2n}c_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}c_{r+1}-\dots-a_{rn}c_n. \end{array} \qquad (3)$$

Այդ սիստեմի նկատմամբ կիրառելի է Կրամերի կանոնը և, այդ պատճառով, այն ունի $c_1, c_2, \dots, c_r$ միակ լուծումը: Ակներևորեն, $c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n$ թվերի սիստեմը կլինի լուծում (2) սիստեմի համար: Քանի որ $x_{r+1}, \dots, x_n$ անհայտների (այսպես կոչված՝ ազատ անհայտների) համար $c_{r+1}, \dots, c_n$ արժեքները մենք կարող ենք ընտրել ցանկացած կերպով, ապա այդ ճանապարհով կստացվեն (2) սիստեմի անվերջ քանակությամբ տարբեր լուծումներ:

Մյուս կողմից, (2) սիստեմի ամեն մի լուծում կարելի է ստանալ այդ ճանապարհով՝ եթե տված է (2) սիստեմի որևէ $c_1, c_2, \dots, c_n$ լուծում, ապա որպես ազատ անհայտների արժեքներ կվերցնենք $c_{r+1},\dots,c_n$ թվերը: Այն ժամանակ $c_1, c_2, \dots, c_r$ թվերը կբավարարեն (3) սիստեմին և, դրա համար էլ, կկազմեն այդ սիստեմի այն միակ լուծումը, որը հաշվվում է Կրամերի կանոնով:

Ի մի հավաքելով վերը ասածները, ստանում ենք գծային հավասարումների կամավոր սիստեմի լուծման հետևյալ կանոնը.

Դիցուք տրված է գծային հավասարումների (1) համատեղ սիստեմը և դիցուք գործակիցներից կազմված A մատրիցի ռանգը r է: A-ում ընտրենք r գծայնորեն անկախ տողեր և (1) սիստեմում թողնենք միայն այն հավասարումները, որոնց գործակիցները մտնում են ընտրված տողերի մեջ: Այդ հավասարումներում ձախ մասում թողնենք r հատ այնպիսի անհայտներ, որոնց գործակիցներից կազմված դետերմինանտը տարբեր է զրոյից, իսկ մնացած անհայտները համարենք ազատ անհայտներ և տանենք հավասարումների աջ մասը: Ազատ անհայտներին տալով ցանկացած թվային արժեքներ և Կրամերի կանոնով հաշվելով մնացած անհայտների արժեքները, մենք ստանում ենք (1) սիստեմի բոլոր լուծումները:

Լրացուցիչ կերպով մի անգամ էլ ձևակերպենք մեր կողմից ստացված հետևյալ արդյունքը.

(1) համատեղ սիստեմն այն և միայն այն ժամանակ ունի միակ լուծում, երբ A մատրիցի ռանգը հավասար է անհայտների թվին՝ $r=n$:

Օրինակներ: 1. Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7, \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1, \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \end{array}\right\}$$

Այդ սիստեմի գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի, որովհետև երկրորդ կարգի այն մինորը, որն ընկած է մատրիցի վերին ձախ անկյունում, հավասար չէ զրոյի, բայց նրան եզրավորող երրորդ կարգի մինորները երկուսն էլ հավասար են զրոյի: Բայց ընդլայնված մատրիցի ռանգը հավասար է երեքի, քանի որ՝

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Այստեղից հետևում է, որ սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է:

2. Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{array}{l} 7x_1+3x_2=2, \\ x_1-2x_2=-3, \\ 4x_1+9x_2=11. \end{array}\right\}$$

Գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի, այսինքն՝ հավասար է անհայտների թվին: Ընդլայնված մատրիցի ռանգը նույնպես հավասար է եր-

կուսի: Այսպիսով, սիստեմը համատեղ է և ունի միակ լուծում: Սիստեմի առաջին երկու հավասարումների ձախ մասերը գծայնորեն անկախ են. լուծելով այդ երկու հավասարումների սիստեմը, մենք անհայտների համար կստանանք հետևյալ արժեքները.

$$x_1=-\frac{5}{17}, \qquad x_2=\frac{23}{17}.$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս լուծումը բավարարում է նաև երրորդ հավասարմանը:

3. Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1, \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0: \end{array}\right\}$$

Այն համատեղ սիստեմ է, քանի որ ինչպես ընդլայնված մատրիցի ռանգը, այնպես էլ սիստեմի գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի: Առաջին և երրորդ հավասարումների ձախ մասերը գծայնորեն անկախ են, քանի որ x_1 և x_2 անհայտների գործակիցներից կազմված երկրորդ կարգի դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի: Լուծում ենք այդ երկու հավասարումների սիստեմը, ըստ որում՝ x_3, x_4, x_5 անհայտները համարում ենք ազատ անհայտներ, տանում ենք հավասարումների աջ մասը և ընդունում, որ նրանց տրված են որոշակի թվային արժեքներ: Կիրառելով Կրամերի կանոնը, մենք ստանում ենք՝

$$x_1=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4-x_5,$$

$$x_2=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4.$$

Այս հավասարություններով որոշվում է սիստեմի ընդհանուր լուծումը: Նրանց մեջ ազատ անհայտներին տալով կամավոր թվային արժեքներ, մենք կստանանք մեր սիստեմի բոլոր լուծումները: Այսպես, մեր սիստեմի լուծումներ կլինեն, օրինակ՝ $(2, 5, 3, 0, 0)$, $(3, 5, 2, 1, -2)$, $\left(0, -\frac{1}{4}, -1, 1, \frac{1}{4}\right)$ վեկտորները և այլն: Մյուս կողմից, x_1-ի և x_2-ի արտահայտությունները ընդհանուր լուծումից տեղադրելով մեր սիստեմի ցանկացած հավասարման մեջ, օրինակ՝ երկրորդում, որը առաջ չէր դիտարկված, մենք կստանանք նույնություն:

4. Լուծել հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+5x_2-x_2=-1, \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1: \end{array}\right\}$$

Չնայած անհայտների թիվը հավասար է հավասարումների թվին, բայց սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի և, այդ պատճառով, Կրամերի կանոնը կիրառելի չէ: Գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է երեքի. այդ մատրիցի վերին աջ անկյունում ընկած երրորդ կարգի մինորը տարբեր է զրոյից: Ընդլայնված մատրիցի ռանգը նույնպես հավասար է երեքի, այսինքն՝ սիստեմը համատեղ է: Դիտարկենք միայն առաջին երեք հավասարումները, ըստ որում x_1

անհայտը համարելով ազատ անհայտ, մենք կստանանք սիստեմի ընդհանուր լուծումը հետևյալ տեսքով.

$$x_2=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}x_1,\quad x_3=-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}x_1,\quad x_4=0:$$

5. Դիցուք տված է n անհայտների նկատմամբ n+1 հավասարումների սիստեմ: $\overline{A}$ ընդլայնված մատրիցն այս դեպքում կլինի (n+1)-րդ կարգի քառակուսի մատրից: Եթե մեր սիստեմը համատեղ է, ապա, Կրոնեկերի-Կապելլիի թեորեմայի համաձայն, $\overline{A}$ մատրիցի դետերմինանտը պետք է հավասար լինի զրոյի:

Այսպես, դիցուք տված է

$$\left.\begin{aligned} x_1-8x_2&=3,\\ 2x_1+x_2&=1,\\ 4x_1+7x_2&=-4\end{aligned}\right\}$$

սիստեմը: Այդ հավասարումների գործակիցներից և ազատ անդամներից կազմված

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 7 & -4\end{vmatrix}=-77$$

դետերմինանտը տարբեր է զրոյից, ուստի սիստեմը անհամատեղ է:

Հակադարձ պնդումը, ընդհանրապես, կարող է ճիշտ չլինել, քանի որ $\overline{A}$ մատրիցի դետերմինանտի զրո լինելուց չի հետևում A և $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերի հավասարությունը:

§ 12. Գծային համասեռ հավասարումների սիստեմներ

Նախորդ պարագրաֆում ստացված արդյունքները կիրառենք գծային համասեռ հավասարումների դեպքի համար՝

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0,\\ \cdots\cdots&\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n&=0:\end{aligned}\qquad(1)$$

Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմայից բխում է, որ այդ սիստեմը միշտ համատեղ է, քանի որ զրոներից կազմված սյան ավելացումը չի կարող բարձրացնել մատրիցի ռանգը: Իհարկե, այդ երևում է նաև անմիջապես՝ (1) սիստեմը կանխահայտորեն ունի (0, 0, . . . ,0) զրոյական լուծում:

Դիցուք (1) սիստեմի գործակիցներից կազմված A մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի: Եթե r=n, ապա զրոյական լուծումը (1) սիստեմի համար կլինի միակ լուծումը, իսկ եթե $r<n$, ապա սիստեմը կունենա նաև ոչ զրոյական լուծումներ և այդ բոլոր լուծումները գըտ-

նելու համար օգտագործվում է նույն մեթոդը, ինչ որ վերևում օգտագործվեց կամավոր հավասարումների սիստեմի դեպքում: Մասնավորապես, n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների սիստեմը այն և միայն այն ժամանակ ունի ոչ զրոյական լուծումներ, երբ այդ սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի[1]: Իրոք, այդ դետերմինանտի զրո լինելը հավասարազոր է նրան, որ A մատրիցի ռանգը փոքր է n-ից: Մյուս կողմից, եթե համասեռ հավասարումների սիստեմում հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից, ապա սիստեմը անպայման ունի ոչ զրոյական լուծումներ, քանի որ այդ դեպքում ռանգը չի կարող հավասար լինել անհայտների թվին. այս արդյունքը մի անգամ արդեն ստացվել է § 1-ում այլ դատողություններից:

Դիտարկենք, մասնավորապես, n անհայտներով n—1 համասեռ հավասարումների սիստեմը, ըստ որում ընդունենք, որ այդ հավասարումների ձախ մասերը գծայնորեն անկախ են: Դիցուք այդ սիստեմի գործակիցներից կազմված մատրիցն է՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n}\end{pmatrix}:$$

M_i-ով նշանակենք (n—1)-րդ կարգի այն մինորը, որն ստացվում է A մատրիցից, նրա մեջ i-րդ սյունը ջնջելով (i=1, 2...,n):

Այդ դեպքում սիստեմի լուծումներից մեկը կլինի

$$M_1,-M_2,\ M_3,-M_4,\ \ldots,\ (-1)^{n-1}M_n\qquad(2)$$

թվերի սիստեմը, իսկ ամեն մի այլ լուծում կլինի այս լուծմանը համեմատական:

Ապացույց: Քանի որ, ըստ պայմանի, A մատրիցի ռանգը հավասար է (n—1)-ի, ապա M_i մինորներից գոնե մեկը պետք է տարբեր լինի զրոյից. թող այդ լինի M_n-ը: Մեր սիստեմում X_n-ը ազատ անհայտ համարելով, այն տեղափոխենք աջ կողմը, որից հետո կստանանք՝

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}&=-a_{1n}x_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}&=-a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots&\cdots\\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n-1}x_{n-1}&=-a_{n-1,n}x_n:\end{aligned}$$

Կրամերի կանոնը կիրառելով, մենք կստանանք տված հավասարումների սիստեմի ընդհանուր լուծումը, որին, պարզ ձևափոխություններից հետո, կարելի է տալ հետևյալ տեսքը.

$$x_i=(-1)^{n-i}\frac{M_i}{M_n}x_n,\quad i=1,2,\ldots,n-1:\qquad(3)$$

Ընդունելով $x_n=(-1)^{n-1}M_n$, մենք կստանանք՝ $X_i=(-1)^{2n-i-1}M_i$, (i=1,2,...,n—1) կամ, քանի որ (2n—i—1)—(i—1)=(2n—2i)-ն զույգ թիվ է, $x_i=(-1)^{i-1}M_i$, այսինքն՝ (2) թվերի սիստեմը իրոք կլինի մեր հավասարումների

[1] Այդ թեորեմայի մի կեսն արդեն ապացուցված է § 7-ում:

սիստեմի լուծումը: Այդ սիստեմի ցանկացած այլ լուծումը ստացվում է (3) բանաձևով՝ x_n անհայտի մի այլ թվային արժեքի համար, այդ պատճառով էլ այն համեմատական է (2) լուծմանը: Հասկանալի է, որ դիտարկված պնդումը իրավացի է նաև այն դեպքում, երբ $M_n=0$, բայց M_i մինորներից մեկը $(1\leq i\leq n-1)$ զրոյից տարբեր է:

Գծային համասեռ հավասարումների սիստեմի լուծումները օժտված են հետևյալ հատկություններով: Եթե $\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ վեկտորը (1) սիստեմի լուծում է, ապա ամեն մի k թվի համար $k\beta=(kb_1, kb_2,\ldots,kb_n)$ վեկտորը նույնպես կլինի այդ սիստեմի լուծում, որ հեշտությամբ ստացվում է անմիջական տեղադրման միջոցով: Այնուհետև, եթե $\gamma=(c_1, c_2,\ldots,c_n)$-ը նույնպես (1) սիստեմի լուծում է, ապա $\beta+\gamma=(b_1+c_1, b_2+c_2,\ldots,b_n+c_n)$ վեկտորը նույնպես կլինի (1) սիստեմի լուծում՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_j+c_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_j+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=0, \quad i=1, 2,\ldots,s:$$

Այդ պատճառով, (1) համասեռ հավասարումների լուծումների յուրաքանչյուր գծային կոմբինացիա նույնպես կլինի այդ սիստեմի լուծում: Նկատենք, որ անհամասեռ հավասարումների սիստեմի համար, այսինքն՝ այնպիսի գծային հավասարումների սիստեմի, որոնց ազատ անդամները ոչ բոլորն են հավասար զրոյի, նման պնդում տեղի չունի, այսինքն՝ անհամասեռ հավասարումների սիստեմի երկու լուծումների գումարը, ինչպես նաև որևէ լուծումը թվով բազմապատկած, արդեն չեն կարող այդ սիստեմի համար լուծում ծառայել:

Մենք § 9-ից գիտենք, որ n-չափանի տարածության մեջ վեկտորների ամեն մի սիստեմ, որում վեկտորների քանակը մեծ է n-ից, կլինի գծայնորեն կախյալ: Այստեղից հետևում է, որ (1) համասեռ հավասարումների լուծումներից, որոնք, ինչպես մենք գիտենք, հանդիսանում են n-չափանի վեկտորներ, կարելի է ընտրել վ ե ր ջ ա վ ո ր քանակով գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն սիստեմ, առավելագույն այն իմաստով, որ (1) սիստեմի ցանկացած այլ լուծում կհանդիսանա այդ ընտրված լուծումների գծային կոմբինացիա: Գծային համասեռ հավասարումների (1) սիստեմի լուծումների ամեն մի գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմ կոչվում է այդ սիստեմի **լուծումների հիմնական (ֆունդամենտալ) սիստեմ:**

Եվս մեկ անգամ ընդգծենք, որ **n-չափանի վեկտորը այն և միայն այն ժամանակ կլինի (1) համասեռ հավասարումների սիստեմի լուծում, եթե այն հանդիսանում է լուծումների հիմնական սիստեմը կազմող վեկտորների գծային կոմբինացիա:**

Պարզ է, որ լուծումների հիմնական սիստեմ գոյություն կարող է ունենալ այն դեպքում, երբ (1) սիստեմն ունի ոչ զրոյական լուծում, այսինքն՝ երբ նրա գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը փոքր է անհայտների թվից: Ընդ որում (1) սիստեմը կարող է ունենալ լու-

ծումների բազմաթիվ իրարից տարբեր հիմնական սիստեմներ: Այդ բոլոր սիստեմները, սակայն, համարժեք են իրար, քանի որ որևէ սիստեմից վերցրած յուրաքանչյուր վեկտոր գծայնորեն արտահայտվում է մի այլ սիստեմի վեկտորների միջոցով և հակառակը, ուստի այդ բոլոր սիստեմները **բաղկացած են միևնույն քանակությամբ լուծումներից:**

Իրավացի է հետևյալ թեորեման.

Եթե համասեռ հավասարումների (1) սիստեմի գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը փոքր է անհայտների n թվից, ապա լուծումների ամեն մի հիմնական սիստեմ պարունակում է n—r լուծում:

Ապացույցի համար նկատենք, որ $n-r$ թիվը հանդիսանում է (1) սիստեմի ազատ անհայտների թիվը. դիցուք $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$-ը ազատ անհայտներն են: Դիտարկենք $n-r$ կարգի զրոյից տարբեր մի որևէ դետերմինանտ, որը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$d=\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2}, & \cdots, & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2}, & \cdots, & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,r+1}, & c_{n-r,r+2}, & \cdots & c_{n-r,n} \end{vmatrix}:$$

Այդ դետերմինանտի i-րդ տողի էլեմենտները $(1\leqslant i\leqslant n-r)$ վերցնելով որպես ազատ անհայտների արժեքներ, մենք, ինչպես գիտենք, $x_1, x_2,\ldots,x_r$ անհայտների համար կստանանք միարժեք կերպով որոշվող արժեքներ, այսինքն՝ (1) սիստեմի համար կստանանք մի լրիվ որոշակի լուծում: Այդ լուծումը գրենք վեկտորի տեսքով՝

$$\alpha_i=(c_{i1}, c_{i2},\ldots,c_{ir}, c_{i,r+1}, \ldots,c_{in}):$$

Մեր կողմից ստացած $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_{n-r}$ վեկտորների սիստեմը հանդիսանում է (1) սիստեմի համար լուծումների հիմնական սիստեմ: Իրոք, այդ վեկտորների սիստեմը գծայնորեն անկախ սիստեմ է, քանի որ այդ վեկտորներով, որպես տողերով, կազմված մատրիցը պարունակում է $(n-r)$-րդ կարգի զրոյից տարբեր d մինորը: Մյուս կողմից, դիցուք

$$\beta=(b_1, b_2, \ldots b_r, b_{r+1},b_{r+2}, \ldots b_n)$$

վեկտորը (1) սիստեմի ցանկացած լուծումն է: Ցույց տանք, որ β վեկտորը գծայնորեն արտահայտվում է

$$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$$

վեկտորների միջոցով:

Նշանակենք α'_i-ով $(i=1, 2,\ldots n-r)$ d դետերմինանտի i-րդ տողը՝ դիտարկելով այն որպես $(n-r)$-չափանի վեկտոր: Նշանակենք նաև $\beta'=(b_{r+1},\ldots,b_n)$: Ստացված $\alpha'_i(i=1, 2,\ldots n-r)$ վեկտորները գծայնորեն անկախ են, քանի որ $d\neq0$: Իսկ $(n-r)$-չափանի վեկտորների

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{n-r}, \beta'$$

սիստեմը գծայնորեն կախյալ է, քանի որ այստեղ վեկտորների թիվը

$(n-r+1)$ *մեծ է նրանց չափականությունից* $(n-r)$։ *Ուստի, գոյություն ունեն այնպիսի* $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$ *թվեր, որ*

$$\beta' = k_1\alpha'_1 + k_2\alpha'_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha'_{n-r}։ \qquad (4)$$

Դիտարկենք այժմ

$$\delta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} - \beta$$

n-չափանի վեկտորը։ Այդ վեկտորը, հանդիսանալով (1) համասեռ հավասարումների սիստեմի լուծումների գծային կոմբինացիա, ինքը ևս կլինի այդ սիստեմի լուծում։ Իսկ (4)-ից բխում է, որ δ լուծման մեջ ազատ անհայտների արժեքները հավասար են զրոյի։ Բայց (1) սիստեմի այն միակ լուծումը, որն ստացվում է ազատ անհայտների զրոյի հավասար արժեքների համար, հանդիսանում է զրոյական լուծումը։ Այսպիսով՝ $\delta=0$, այսինքն՝

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

և թեորեմն ապացուցված է։

Նկատենք, որ վերը բերված ապացույցը հնարավորություն է տալիս պնդելու, որ մենք կստանանք (1) համասեռ հավասարումների սիստեմի լուծումների բոլոր հիմնական սիստեմները, եթե որպես d դետերմինանտ վերցնենք $n-r$ կարգի բոլոր հնարավոր զրոյից տարբեր դետերմինանտները։

Օրինակ։ Տված է համասեռ հավասարումների հետևյալ սիստեմը.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 &= 0։ \end{aligned}\right\}$$

Գործակիցներով կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի, անհայտների թիվը՝ հինգի, դրա համարեք էլ այդ սիստեմի լուծումների ամեն մի հիմնական սիստեմ կպարունակի երեք լուծում։ Սիստեմը լուծենք սահմանափակվելով առաջին երկու գծայնորեն անկախ հավասարումների սիստեմով և համարելով x_3, x_4 և x_5-ը ազատ անհայտներ։ Մենք ընդհանուր լուծումը կստանանք հետևյալ տեսքով.

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \quad x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5։$$

Այնուհետև վերցնենք գծայնորեն անկախ երեք չափանի (1, 0, 0), (0, 1, 0) և (0, 0, 1) երեք վեկտորները։ Այս վեկտորներից յուրաքանչյուրը որպես ազատ անհայտների արժեքներ տեղադրելով ընդհանուր լուծման մեջ և հաշվելով x_1, x_2 անհայտների արժեքները, մենք կստանանք տվյալ հավասարումների սիստեմի լուծումների հետևյալ հիմնական սիստեմը.

$$\alpha_1 = \left(\frac{18}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right), \quad a_2 = \left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{9}, 0, 1, 0\right), \quad \alpha_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)։$$

Մենք այս պարագրաֆը վերջացնենք դիտարկելով համասեռ և անհամասեռ հավասարումների սիստեմների լուծումների միջև եղած ***կապը։*** *Դիցուք տված է գծային անհամասեռ հավասարումների հետևյալ սիստեմը.*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}a_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Գծային համասեռ հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

որն ստացվել է (5) սիստեմից, ազատ անդամները զրոներով փոխարինելով, կոչվում է (5) սիստեմի համար բերված սիստեմ։ *Գոյություն ունի սերտ կապ (5) և (6) սիստեմների լուծումների միջև, ինչպես երևում է հետևյալ երկու թեորեմներից.*

1. (5) սիստեմի ցանկացած լուծման և (6) սիստեմի ցանկացած լուծման գումարը նորից (5) սիստեմի համար լուծում կլինի:

Իրոք, դիցուք $c_1, c_2, \ldots, c_n$-ը (5) սիստեմի լուծում է, իսկ $d_1, d_2, \ldots, d_n$-ը՝ (6) սիստեմի լուծումը։ Վերցնելով (5) սիստեմի ցանկացած հավասարումը, օրինակ՝ k-րդը, և տեղադրելով նրա մեջ անհայտների փոխարեն c_1+d_1, $c_2+d_2, \ldots, c_n+d_n$ արժեքները, մենք կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j+d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}d_j = b_k + 0 = b_k։$$

2. Հավասարումների (5) սիստեմի ցանկացած երկու լուծումների տարբերությունը հանդիսանում է լուծում (6) սիստեմի համար:

Իրոք, դիցուք $c_1, c_2, \ldots, c_n$-ը և $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$-ը (5) սիստեմի լուծումներ են։ Վերցնելով (6) սիստեմի ցանկացած հավասարումը, օրինակ՝ k-րդը, և տեղադրելով նրա մեջ անհայտների փոխարեն

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \ldots, c_n - c'_n$$

արժեքները, մենք կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j - c'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c'_j = b_k - b_k = 0։$$

Այդ թեորեմներից բխում է, որ գտնելով անհամասեռ հավասարումների (5) սիստեմի որևէ լուծումը և գումարելով նրան (6) բերված սիստեմի ամեն մի լուծումը, մենք կստանանք (5) սիստեմի բոլոր լուծումները:

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

§ 13. Մատրիցների բազմապատկումը

Նախորդ գլուխներում մատրիցի հասկացությունն օգտագործվեց որպես կարևոր օժանդակ միջոց գծային հավասարումների տեսության մեջ։ Այդ հասկացության բազմաթիվ այլ կիրառությունները այն դարձրել են մի մեծ, ինքնուրույն տեսության առարկա, որն իր շատ մասերով դուրս է գալիս մեր դասընթացի սահմաններից։ Մենք հիմա կզբաղվենք այդ տեսության հիմունքներով, սկսելով հետևյալից. տվյալ կարգի բոլոր քառակուսի մատրիցների բազմության մեջ, յուրահատուկ, բայց լրիվ հիմնավորված եղանակով սահմանենք հանրահաշվական երկու գործողություն՝ գումարումը և բազմապատկումը։ Մենք սկսենք նախ մատրիցների բազմապատկման սահմանումից։ Մատրիցների գումարումը կսահմանվի § 15-ում։

Անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից հայտնի է, որ հարթության մեջ ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի առանցքներն α անկյան տակ պտտելիս կետի կոորդինատները ձևափոխվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

որտեղ x-ը և y-ը կետի նախկին կոորդինատներն են, իսկ x'-ը և y'-ը՝ նոր։ Այսպիսով, x-ը և y-ը որոշ թվային գործակիցների միջոցով գծայնորեն արտահայտվում են x'-ով և y'-ով։ Բազմաթիվ այլ դեպքերում նույնպես հանդիպում ենք անհայտների (կամ փոփոխականների) փոխարինմանը, որտեղ նույնպես նախկին անհայտները գծայնորեն են արտահայտվում նորերի միջոցով. անհայտների այդպիսի փոխարինումը սովորաբար անվանում են նրանց գծային ձևափոխություն (կամ

գծային տեղադրություն)։ Մենք, այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ սահմանմանը.

Անհայտների գծային ձևափոխություն է կոչվում այնպիսի անցումն n հատ՝ $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտներից n հատ՝ $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտներին, որի ժամանակ նախկին անհայտները որոշ թվային գործակիցների օգնությամբ գծայնորեն են արտահայտվում նոր անհայտների միջոցով՝

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{array}\right\} \qquad (1),$$

(1) գծային ձևափոխությունը լրիվին որոշվում է գործակիցներից կազմած իր

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցով, քանի որ միևնույն մատրիցն ունեցող երկու գծային ձևափոխություններ իրարից կարող են տարբերվել միայն անհայտների նշանակման համար օգտագործվող տառերով։ Բայց մենք կհամարենք, որ այդ նշանակումների ընտրությունը միայն կախված է մեզնից։ Հակադարձաբար, տալով n-րդ կարգի որևէ մատրից, մենք անմիջապես կարող ենք գրել այն գծային ձևափոխությունը, որի համար այդ մատրիցը ծառայում է որպես գործակիցների մատրից։ Այսպիսով, n անհայտներով գծային ձևափոխությունների և n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն, դրա համար էլ, գծային ձևափոխությունների հետ կապված ամեն մի հասկացության և այդ ձևափոխությունների ամեն մի հատկության պետք է համապատասխանի համանման հասկացություն կամ հատկություն մատրիցների համար։

Դիտարկենք երկու գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման հարցը։ Դիցուք (1) գծային ձևափոխությունից անմիջապես հետո կիրառվում է հետևյալ գծային ձևափոխությունը.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \dots + b_{2n}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \dots + b_{nn}z_n, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

որը $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտների սիստեմը բերում է $z_1, z_2, \dots, z_n$ անհայտների սիստեմին. այդ գծային ձևափոխության մատրիցը նշանակենք B-ով։ Տեղադրելով (1)-ում $y_1, y_2, \dots, y_n$-ի արտահայտությունները (2)-ից, մենք կգանք $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտների գծային արտահայտություններին՝ $z_1, z_2, \dots, z_n$ անհայտների միջոցով։ Այսպիսով, երկու գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման արդյունքը նույնպես գծային ձևափոխություն է։

Օրինակ։ Տրված երկու՝

$$x_1=3y_1-y_2, \qquad y_1=z_1+z_2,$$
$$x_2=y_1+5y_2, \qquad y_2=4z_1+2z_2$$

գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման արդյունքը կլինի՝

$$x_1=3(z_1+z_2)-(4z_1+2z_2)=-z_1+z_2$$
$$x_2=(z_1+z_2)+5(4z_1+2z_2)=21z_1+11z_2$$

գծային ձևափոխությունը։

Նշանակենք C-ով (1) և (2) գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառմամբ ստացվող գծային ձևափոխության մատրիցը, և գտնենք այն օրենքը, որով նրա c_{ik} էլեմենտները $(i, k=1, 2, \dots, n)$ արտահայտվում են A և B մատրիցների էլեմենտներով։ (1) և (2) գծային ձևափոխությունները կարճ գրելով այսպես՝

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \qquad y_j=\sum_{k=1}^{n} b_{jk}z_k, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

մենք կստանանք՝

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)z_k, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Այսպիսով, z_k-ի գործակիցը x_i-ի արտահայտության մեջ, այսինքն՝ C մատրիցի c_{ik} էլեմենտի արտահայտությունը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}. \tag{3}$$

C մատրիցի i-րդ տողում և k-րդ սյունում գտնվող էլեմենտը հավասար է A մատրիցի i-րդ տողի և B մատրիցի k-րդ սյան համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարին:

Այսպիսով, C մատրիցի էլեմենտները A և B մատրիցների էլեմենտներով արտահայտող (3) բանաձևը հնարավորություն է տալիս անմիջապես գրելու C մատրիցը՝ տվյալ A և B մատրիցների միջոցով, առանց դիտարկելու A և B մատրիցներին համապատասխանող գծային ձևափոխությունները։ Այս ճանապարհով n-րդ կարգի մատրիցների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանության մեջ է դրվում միարժեքորեն որոշված մի երրորդ մատրից։ Կարելի է ասել, որ n-րդ կարգի մատրիցների բազմության մեջ մենք սահմանեցինք մի հանրահաշվական գործողություն. այն կոչվում է մատրիցների բազմապատկում,

իսկ C մատրիցն էլ կոչվում է A և B մատրիցների արտադրյալ՝ C=AB։

Մեկ անգամ ևս ձևակերպենք գծային ձևափոխությունների և մատրիցների բազմապատկման միջև եղած կապը։

Անհայտների այն գծային ձևափոխությունը, որն ստացվում է որպես A և B մատրիցներով երկու գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման արդյունք, ունի գործակիցների AB մատրիցը:

Օրինակներ։

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot1+9\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+9\cdot1 \\ (-1)\cdot1+3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3)+3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & -6 \end{pmatrix};$$

2) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix},$$

3) $$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Գտնել հետևյալ գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառմամբ ստացվող գծային ձևափոխությունը՝

$$x_1=5y_1-y_2+3y_3,$$
$$x_2=y_1-2y_2,$$
$$x_3=7y_2-y_3$$

և

$$y_1=2z_1+z_3,$$
$$y_2=z_2-5z_3,$$
$$y_3=2z_2.$$

Բազմապատկելով մատրիցները, կստանանք՝

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix}.$$

Այսպիսով, որոնելի գծային ձևափոխությունը կլինի՝

$$x_1=10z_1+5z_2+10z_3,$$
$$x_2=2z_1-2z_2+11z_3,$$
$$x_3=5z_2-35z_3.$$

Վերցնենք մատրիցների բազմապատկման վերաբերյալ հենց նոր դիտարկված օրինակներից մեկը՝ օրինակ (2)-ը, և գտնենք այդ նույն մատրիցների արտադրյալը՝ վերցրած հակառակ կարգով.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix},$$

Մենք տեսնում ենք, որ մատրիցների արտադրյալը կախված է արտադրիչների կարգից, այսինքն՝ մատրիցների բազմապատկումն անտեղափոխելի է։ Այդպես էլ, հավանաբար, պետք է սպասեինք, քանի որ C մատրիցի սահմանման մեջ, որը տրված է վերևում (3) բանաձևերի օգնությամբ, A և B մատրիցները մասնակցում են անհավասար իրավունքներով, A-ում վերցված են տողերը, B-ում՝ սյուները։

Անտեղափոխելի n-րդ կարգի մատրիցների օրինակներ, այսինքն՝ մատրիցներ, որոնց արտադրյալը փոխվում է արտադրիչների տեղափոխումից, կարելի և բերել ամեն մի n-ի համար սկսած n=2-ից (երկրորդ կարգի մատրիցները (1) օրինակում անտեղափոխելի են)։ Մյուս կողմից, տված երկու մատրիցները պատահաբար կարող են տեղափոխելի լինել, օրինակ՝

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Մատրիցների բազմապատկումը բավարարում է զուգորդման օրենքին, հետևապես, կարելի է խոսել վերջավոր թվով որոշակի կարգով վերցրած (պարզ է՝ արտադրյալի անտեղափոխելիության պատճառով) n-րդ կարգի մատրիցների միարժեքորեն որոշված արտադրյալի մասին։

Ապացույց. Դիցուք տված են n-րդ կարգի երեք կամայական մատրիցներ՝ A, B և C։ Դրանք գրենք հետևյալ կրճատ ձևով՝ $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$, $C=(c_{ik})$, որոնք ցույց են տալիս նրանց էլեմենտների ընդհանուր տեսքը։ Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$AB=U=(u_{ij}), \quad BC=V=(v_{ij}),$$
$$(AB)C=S=(s_{ij}), \quad A(BC)=T=(t_{ij}).$$

Մենք պետք է ապացուցենք $(AB)C=A(BC)$ հավասարությունը, այսինքն՝ $S=T$։

Բայց՝

$$u_{il}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}, \quad v_{kj}=\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj},$$

և դրա համար էլ, $S=UC$, $T=AV$ հավասարությունների շնորհիվ՝

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{n} u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}, \quad t_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

այսինքն՝ $s_{ij}=t_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots,n$ համար։

Մատրիցների բազմապատկման հետագա հատկությունները ուսումնասիրելու համար հարկավոր է նրանց դետերմինանտների մասնակցությունը, ըստ որում մենք պայմանավորվենք A մատրիցի դետերմինանտը կարճության համար նշանակել $|A|$-ով։ Եթե ընթերցողը վերը դիտարկած յուրաքանչյուր օրինակում հաշվի բազմապատկվող մատրիցների դետերմինանտները և համեմատի այդ դետերմինանտների արտադրյալը տված մատրիցների արտադրյալ-մատրիցի դետերմինանտի հետ, ապա կհայտնաբերի բավականին հետաքրքիր օրինաչափություն, որն արտահայտվում է դետերմինանտների բազմապատկման հետևյալ շատ կարևոր թեորեմայով։

Մի քանի n-րդ կարգի մատրիցների արտադրյալի դետերմինանտը հավասար է այդ մատրիցների դետերմինանտների արտադրյալին:

Բավական է այդ թեորեման ապացուցել երկու մատրիցների համար։ Դիցուք տված են n-րդ կարգի $A=(a_{ij})$ և $B=(b_{ij})$ մատրիցները և դիցուք $AB=C=(c_{ij})$։ Կառուցենք հետևյալ 2n-րդ կարգի Δ օժանդակ դետերմինանտը. Նրա վերին ձախ անկյունում տեղավորենք A մատրիցը, վարի աջ անկյունում՝ B մատրիցը, վերին աջ անկյունը ամբողջովին լրացնենք զրոներով, իսկ ներքևի ձախ անկյան անկյունագծի վրա տեղավորենք —1-եր՝ մյուս տեղերը դարձյալ զբաղեցնելով զրոներով։ Հետևապես, Δ դետերմինանտը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Լապլասի թեորեման կիրառելով Δ դետերմինանտի վրա և վերածելով այն ըստ առաջին n տողերի, կստանանք հետևյալ հավասարությունը.

$$\Delta=|A|\cdot|B|. \tag{4}$$

Ջգտենք, մյուս կողմից, այնպես ձևափոխել Δ դետերմինանտը, որ նրա մեծությունը չփոխվի, բայց որպեսզի բոլոր b_{ij} $(i, j=1,2,\ldots,n)$ էլեմենտները փոխարինվեն զրոներով։ Այդ նպատակի համար, Δ դետերմինանտի $(n+1)$-րդ սյանն ավելացնենք առաջին սյունը՝ բազմապատկված b_{11}-ով, երկրորդ սյունը՝ բազմապատկված b_{21}-ով և այլն, վերջապես, n-րդ սյունը՝ բազմապատկված b_{n1}-ով։ Հետո, $(n+2)$-րդ սյանն ավելացնենք առաջին սյունը՝ բազմապատկված b_{12}-ով, երկրորդ սյունը՝ բազմապատկված b_{22}-ով և այլն։ Ընդհանրապես, $(n+j)$-րդ սյանը, որտեղ $j=1,2,\ldots,n$, ավելացնենք առաջին n սյուների գումարը՝ նախապես բազմապատկած համապատասխանաբար $b_{1j}, b_{2j},\ldots, b_{nj}$ թվերով։

Հեշտ է նկատել, որ այդ ձևափոխությունները չփոխելով Δ դետերմինանտի մեծությունը, նրանում իրոք բոլոր b_{ij} էլեմենտները փոխարինում են զրոներով։ Միաժամանակ Δ դետերմինանտի վերին աջ անկյան զրոների տեղը հանդես են գալիս հետևյալ թվերը. i-րդ տողի և

$(n+j)$-րդ սյան հատման կետում $(i, j=1, 2, \dots, n)$ այժմ կլինի $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$, որը ըստ (3)-ի հավասար է $C=AB$ մատրիցի c_{ij} էլեմենտին։ Այսպիսով, դետերմինանտի վերին աջ անկյունում այժմ տեղավորված կլինի C մատրիցը՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}:$$

Մի անգամ ևս կիրառենք Լապլասի թեորեմը, վերածելով դետերմինանտը ըստ նրա վերջին n սյուների։ Քանի որ C մատրիցը գտնվում է վերին աջ անկյունում, ապա $|C|$ մինորի լրացուցիչ մինորը կլինի հավասար $(-1)^n$, իսկ որովհետև $|C|$-ն զբաղեցնում է $1, 2, \dots, n$ համարներով տողերը և $n+1, \dots, 2n$ համարներով սյուները, ըստ որում՝

$$1+2+\cdots+n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n=2n^2+n,$$

ապա՝

$$\Delta=(-1)^{2n^2+n}\cdot(-1)^n|C|=(-1)^{2(n^2+n)}|C|,$$

կամ, քանի որ $2(n^2+n)$-ը զույգ է, ապա՝

$$\Delta=|C|: \qquad (5)$$

Վերջապես (4)-ից և (5)-ից բխում է

$$|C|=|A|\cdot|B|$$

ապացուցելիք հավասարությունը։

Դետերմինանտների բազմապատկման թեորեմը կարելի էր ապացուցել նաև առանց Լապլասի թեորեմայից օգտվելու։ Այդպիսի ապացույցներից մեկն ընթերցողը կգտնի § 16-ի վերջում։

§ 14. Հակադարձ մատրից

Քառակուսի մատրիցը կոչվում է վերասերված, քայքայված (կամ եզակի, հատուկ) մատրից, եթե նրա դետերմինանտը հավասար է զրոյի և չվերասերված, չքայքայված (կամ ոչեզակի, ոչհատուկ)՝ հակառակ դեպքում։ Համապատասխանաբար՝ անհայտների գծային ձևափոխությունը կոչվում է վերասերված կամ չվերասերված՝ կախված այն բանից, թե այդ գծային ձևափոխության մատրիցը վերասերվա՞ծ է, թե՞ ոչ։ Նախորդ պարագրաֆի վերջում ապացուցված թեորեմայից բխում են հետևյալ պնդումները.

Այնպիսի մատրիցների արտադրյալը, որոնցից գոնե մեկը վերասերված է, նույնպես վերասերված կլինի։

Չվերասերված մատրիցների արտադրյալը՝ ինքը կլինի չվերասերված։

Քանի որ գոյություն ունի կապ մատրիցների բազմապատկման և համապատասխան գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման միջև, ապա այդտեղից հետևում է այսպիսի պնդում՝ մի քանի գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման արդյունքը այն և միայն այն ժամանակ կլինի չվերասերված ձևափոխություն, եթե տված բոլոր ձևափոխությունները չվերասերված են։

Մատրիցների բազմապատկման ժամանակ միավորի դեր է կատարում այսպես կոչված

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

միավոր մատրիցը, ըստ որում այն տեղափոխելի է նույն կարգի ցանկացած մատրիցի հետ՝

$$AE=EA=A. \qquad (1)$$

Այդ հավասարությունն ապացուցվում է կամ այդ մատրիցների անմիջական բազմապատկմամբ, կամ այն փաստի հիման վրա, որ միավոր մատրիցը համապատասխանում է անհայտների նույնական գծային ձևափոխությանը՝

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= y_n, \end{aligned}$$

որի կիրառումը ցանկացած գծային ձևափոխությունից առաջ կամ հետո պարզ է, չի փոխում այդ վերջինը։

Նկատենք, որ E միավոր մատրիցը՝ ցանկացած A մատրիցի դեպքում (1) պայմանին բավարարող միակ մատրիցն է։ Իրոք, եթե գոյություն ունենար այդ հատկությամբ E' մատրից ևս, ապա մենք կունենայինք՝

$$E'E=E, \qquad E'E=E'$$

որտեղից

$$E=E'.$$

Տված մատրիցի համար հակադարձ մատրիցի գոյության հարցը, պարզվում է, որ ավելի բարդ է։ Մատրիցների բազմապատկման անտեղափոխելիության պատճառով, մենք այժմ կխոսենք աջից հակադարձ մատրիցի մասին, այսինքն՝ այնպիսի A^{-1} մատրիցի, որ A մատրիցն աջից բազմապատկվելով նրանով, տա միավոր մատրիցը՝

$$AA^{-1}=E. \qquad (2)$$

Եթե A մատրիցը լինի վերասերված և գոյություն ունենար A^{-1} մատրիցը, ապա (2) հավասարության ձախ մասում գտնվող արտադրյալը, ինչպես գիտենք, կլիներ վերասերված մատրից, այն դեպքում, երբ իրականում աջ մասում գտնվող E մատրիցը չվերասերված է, քանի որ նրա դետերմինանտը հավասար է մեկի:

Այսպիսով, վերասերված մատրիցը չի կարող ունենալ աջից հակադարձ մատրից: Նման դատողությունները ցույց են տալիս, որ այն չի կարող ունենալ նաև ձախից հակադարձ մատրից, դրա համար էլ՝ վերասերված մատրիցի համար ընդհանրապես հակադարձ մատրից գոյություն չունի:

Անցնելով չվերասերված մատրիցների դեպքին, սկզբում մտցնենք հետևյալ օժանդակ հասկացությունը: Դիցուք տված է n-րդ կարգի

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Այդ դեպքում A մատրիցի էլեմենտների հանրահաշվական լրացումներից կազմված

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

մատրիցը կոչվում է A մատրիցին կցյալ (կամ փոխադարձ) մատրից, ըստ որում A մատրիցի a_{ji} էլեմենտի հանրահաշվական լրացումը գտնվում է A^* մատրիցի մեջ j-րդ տողի և i-րդ սյան հատման կետում:

Գտնենք AA^* և A^*A արտադրյալները: Օգտվելով, § 6-ում ստացած, դետերմինանտը ըստ որևէ տողի կամ սյան վերածելու բանաձևերից, ինչպես նաև § 7-ի այն թեորեմայից, որ դետերմինանտի որևէ տողի (սյան) էլեմենտների և մի այլ տողի (սյան) համապատասխան էլեմենտների հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի, և նշանակելով A մատրիցի դետերմինանտը d-ով՝

$$d=|A|,$$

մենք կստանանք հետևյալ հավասարությունը.

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}: \qquad (3)$$

Այստեղից հետևում է, որ եթե A մատրիցը չվերասերված է, ապա նրա A^* կցյալ մատրիցը նույնպես չվերասերված է, ըստ որում A^* մատրիցի d^* դետերմինանտը հավասար է A մատրիցի d դետերմինանտի (n—1)-րդ աստիճանին:

Իրոք, (3) հավասարությունից անցնելով նրանց դետերմինանտների միջև հավասարության, մենք կստանանք՝

$$dd^*=d^n,$$

որտեղից, քանի որ $d\neq 0$, կստացվի

$$d^*=d^{n-1}[1]:$$

Այժմ հեշտ է ապացուցել հակադարձ մատրիցի գոյությունը յուրաքանչյուր չվերասերված մատրիցի համար և գտնել նրա տեսքը:

Նախ նկատենք, որ եթե վերցնենք A և B երկու մատրիցների AB արտադրյալ մատրիցը և որևէ արտադրիչի, օրինակ՝ B մատրիցի բոլոր էլեմենտները բաժանենք միևնույն d թվի վրա, ապա AB արտադրյալի բոլոր էլեմենտները նույնպես կբաժանվեն այդ նույն թվի վրա. ապացուցելու համար հարկավոր է միայն հիշել մատրիցների բազմապատկման սահմանումը: Այսպիսով, եթե

$$d=|A|\neq 0,$$

ապա (3) հավասարումից բխում է, որ A մատրիցի հակադարձ մատրիցը կստացվի A^* կցյալ մատրիցից՝ նրա բոլոր էլեմենտները d-ի վրա բաժանելով՝

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \cdots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \cdots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \cdots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}:$$

Իրոք, (3)-ից բխում են

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \qquad (4)$$

հավասարությունները:

Մի անգամ ևս ընդգծենք, որ A^{-1} մատրիցի i-րդ տողում գրված են |A| դետերմինանտի i-րդ սյան էլեմենտների հանրահաշվական լրացումները՝ բաժանված d=|A|-ի վրա:

---

[1] Կարելի էր ապացուցել, որ եթե A մատրիցը վերասերված է, ապա նրա A^* կցյալ մատրիցը նույնպես վերասերված է, ընդ որում նրա ռանգը 1-ից մեծ չէ:

Հեշտ է ապացուցել, որ A չվերասերված մատրիցի համար A^{-1} մատրիցը միակ մատրիցն է, որը բավարարում է (4) պայմանին: *Իրոք, եթե* C *մատրիցն այնպիսին է, որ*

$$AC=CA=E,$$

ապա

$$CAA^{-1}=C(AA^{-1})=CE=C,$$

$$CAA^{-1}=(CA)A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1},$$

որտեղից

$$C=A^{-1}:$$

Դետերմինանտների բազմապատկման մասին թեորեմայից և (4)-ից բխում է, որ A^{-1} *մատրիցի դետերմինանտը հավասար է* $\frac{1}{|A|}$, *այնպես որ, այդ մատրիցը նույնպես կլինի չվերասերված և նրա համար հակադարձ մատրից կծառայի* A *մատրիցը:*

Եթե այժմ տված են n*-րդ կարգի* A *և* B *քառակուսի մատրիցները, որոնցից* A*-ն չվերասերված է, իսկ* B*-ն՝ կամավոր, ապա մենք կարող ենք* աջից և ձախից բաժանել B-ն A-ի վրա, *այսինքն՝ լուծել հետևյալ մատրիցային հավասարումները.*

$$AX=B, \quad YA=B: \tag{5}$$

Դրա համար, մատրիցների բազմապատկման զուգորդելիության շնորհիվ, բավական է վերցնել

$$X=A^{-1}B, \ Y=BA^{-1},$$

ըստ որում (5) հավասարումների այդ լուծումները, մատրիցների բազմապատկման անտեղափոխելիության պատճառով, ընդհանրապես, տարբեր կլինեն:

Օրինակներ: 1) Տված է

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Նրա $|A|$ *դետերմինանտը հավասար է 5-ի, այդ պատճառով էլ* A^{-1} *հակադարձ մատրիցը գոյություն ունի, ըստ որում*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

2. Տված են $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *և* $B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *մատրիցները, ըստ որում* A *մատրիցը չվերասերված է և*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

այդ պատճառով $AX=B$ *և* $YA=B$ *հավասարումների լուծումներ կծառայեն հետևյալ մատրիցները՝*

$$X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}:$$

Ուղղանկյուն մատրիցների բազմապատկումը. *Չնայած մատրիցների բազմապատկումը նախորդ պարագրաֆում սահմանվեց միայն միևնույն կարգի քառակուսի մատրիցների համար, սակայն այն կարելի է ընդհանրացնել նաև* A *և* B *ուղղանկյուն մատրիցների համար, եթե միայն հնարավոր լինի կիրառել նախորդ պարագրաֆի (3) բանաձևը, այսինքն՝ եթե* A *մատրիցի յուրաքանչյուր տողը պարունակի այնքան էլեմենտ, որքան էլեմենտ է պարունակում* B *մատրիցի յուրաքանչյուր սյունը: Ուրիշ խոսքով* կարելի է խոսել A և B ուղղանկյուն մատրիցների արտադրյալի մասին այն դեպքում, երբ A մատրիցի սյուների քանակը հավասար է B մատրիցների տողերի քանակին, ըստ որում AB մատրիցի տողերի քանակը հավասար է A մատրիցի տողերի քանակին, իսկ սյուների քանակը՝ B մատրիցի սյուների քանակին:

Օրինակներ:

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix},$$

$$3)\ (5\ \ 1\ \ 0\ \ -3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=(11\ \ -1):$$

Ուղղանկյուն մատրիցների բազմապատկումը կարելի է կապել անհայտների գծային ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման հետ, եթե միայն վերջիններիս սահմանման մեջ հրաժարվենք այն պայմանից, որ անհայտների թիվը պահպանվում է գծային ձևափոխությունների դեպքում:

Հեշտ է ստուգել նաև, բառացիորեն կրկնելով վերը բերված քառակուսի մատրիցներին վերաբերող ապացույցը, որ զուգորդելիության օրենքը մնում է արդարացի նաև ուղղանկյուն մատրիցների բազմապատկման ժամանակ:

Մենք օգտվենք հիմա ուղղանկյուն մատրիցների բազմապատկումից և հակադարձ մատրիցի հատկություններից Կրամերի կանոնը նոր եղանակով արտածելու համար, որը չի պահանջում այնպիսի բարդ հաշվումներ, ինչպիսիք բերվեցին § 7-ում: Դիցուք տրված է n անհայտներով n գծային հավասարումների սիստեմ՝

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}\right\}$$

ըստ որում այդ սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է: Նշանակենք (6) սիստեմի գործակիցներից կազմված մատրիցը A-ով. այդ մատրիցը չվերասերված է, քանի որ ըստ ընդունման $d=|A|\neq 0$: Հետո, X-ով նշանակենք (6) սիստեմի անհայտներից կազմված սյունը, իսկ B-ով՝ ազատ անդամներից կազմված սյունը, այսինքն՝

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

AX արտադրյալն իմաստ ունի, քանի որ A մատրիցի սյուների քանակը հավասար է X մատրիցի տողերի քանակին, ըստ որում այդ արտադրյալը կլինի սյուն՝ կազմված (6) սիստեմի հավասարումների ձախ մասերից: Այսպիսով, (6) սիստեմը կարելի է գրել մեկ մատրիցային հավասարման միջոցով՝

$$AX=B. \tag{7}$$

(7) հավասարման երկու կողմն էլ ձախից բազմապատկելով A^{-1} մատրիցով, որի գոյությունը բխում է A մատրիցի չվերասերված լինելուց, մենք կստանանք՝

$$X=A^{-1}B. \tag{8}$$

Աջ կողմում գտնվող արտադրյալը հանդիսանում է մեկ սյունանի մատրից, նրա j-րդ էլեմենտը հավասար է A^{-1} մատրիցի j-րդ տողի էլեմենտների և B մատրիցի համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարին, այսինքն՝ հավասար է

$$\frac{A_{1j}}{d}b_1+\frac{A_{2j}}{d}b_2+\cdot\cdot\cdot+\frac{A_{nj}}{d}b_n=\frac{1}{d}(A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\cdot\cdot\cdot A_{nj}b_n)$$

թվին: Աջ կողմի փակագիծը հանդիսանում է d_j դետերմինանտը, որը ստացվել է d դետերմինանտից՝ նրա j-րդ սյունը B սյունով փոխարինելով, և վերածված է ըստ j-րդ սյան: Այսպիսով, (8) բանաձևերը համարժեք են § 7-ի (3) բանաձևերին, որոնք արտահայտում են (6) սիստեմի լուծումը՝ Կրամերի կանոնով ստացված:

Մնում է ցույց տալ, որ անհայտների համար ստացված արժեքներն իրոք հանդիսանում են (6) սիստեմի լուծում: Դրա համար բավական է (8) արտահայտությունը տեղադրել (7) մատրիցային հավասարման մեջ, որը, պարզ է, կբերի $B=B$ նույնության:

Մատրիցների արտադրյալի ռանգը: Դետերմինանտների բազմապատկման վերաբերյալ թեորեման վերասերված մատրիցների դեպքում, բացի նրանից, որ արտադրյալը նույնպես վերասերված է, դրանից ավելի որևէ բան ասելու հնարավորություն չի տալիս, չնայած վերասերված քառակուսի մատրիցները կարող են դեռևս տարբերվել իրենց ռանգով: Նկատենք, որ գոյություն չունի լրիվ որոշակի կախում արտադրիչ-մատրիցների ռանգերի և արտադրյալ-մատրիցի ռանգի միջև, ինչպես ցույց են տալիս հետևյալ օրինակները.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Երկու դեպքում էլ բազմապատկվում են 1 ռանգ ունեցող երկու մատրիցներ, բայց առաջին դեպքում արտադրյալն ունի 1 ռանգ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ 0 ռանգ: Ճիշտ է միայն հետևյալ թեորեման, այն էլ ոչ միայն քառակուսի, այլև ուղղանկյուն մատրիցների համար.

Արտադրյալ-մատրիցի ռանգը ավելի չէ արտադրիչ-մատրիցներից յուրաքանչյուրի ռանգից:

Բավական է այդ թեորեման ապացուցել երկու արտադրիչների դեպքի համար: Դիցուք տրված են A և B մատրիցները, որոնց համար AB արտադրյալն իմաստ ունի. նշանակենք $AB=C$: Դիտարկենք § 13-ի (3) բանաձևը, որը տալիս է C մատրիցի էլեմենտների արտահայտությունը: Վերցնելով այդ բանաձևը տրված k-ի և բոլոր հնարավոր i-երի ($i=1, 2, \ldots, n$) համար, մենք կստանանք, որ C մատրիցի k-րդ սյունը հանդիսանում է A մատրիցի բոլոր սյուների գումարը՝ վերցրած որոշ գործակիցներով (այն է՝ $b_{1k}, b_{2k}, \ldots$ գործակիցներով): Դրանով ապացուցվում է, որ C մատրիցի սյուների սիստեմը գծորեն արտահայտվում են A մատրիցի սյուների սիստեմի միջոցով, և դրա համար էլ, ինչպես ցույց է տրվել § 9-ում, առաջին սիստեմի ռանգը փոքր է կամ հավասար երկրորդ սիստեմի ռանգից, ուրիշ խոսքով՝ C մատրիցի ռանգը մեծ չէ A մատրիցի ռանգից: Քանի որ, § 13-ի այդ նույն (3) բանաձևի համաձայն, տված i-ի և բոլոր k-երի համար բխում է, որ C մատրիցի յուրաքանչյուր i-րդ տողը հանդիսանում է B մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիա, ապա նման դատողությամբ մենք կստանանք, որ C մատրիցի ռանգն էլ բարձր չէ B մատրիցի ռանգից:

Ավելի ճիշտ արդյունք ենք ստանում, երբ արտադրիչներից մեկը չվերասերված քառակուսի մատրից է՝

A կամայական մատրիցի և Q չվերասերված քառակուսի մատրիցի աջից կամ ձախից արտադրյալի ռանգը հավասար է A մատրիցի ռանգին:

Դիցուք, օրինակ՝

$$AQ=C. \tag{9}$$

Նախորդ թեորեմայից բխում է, որ C մատրիցի ռանգը մեծ չէ A մատրիցի ռանգից: (9) հավասարությունը աջից բազմապատկելով Q^{-1} մատրիցով, մենք կստանանք

$$A=CQ^{-1}$$

հավասարությունը, այդ պատճառով, դարձյալ նախորդ թեորեմայի համաձայն, A մատրիցի ռանգը մեծ չէ C մատրիցի ռանգից: Այդ երկու եզրակացությունների միատեղումն ապացուցում է A և C մատրիցների ռանգերի հավասարությունը:

§ 15. Մատրիցների գումարումը և մատրիցի բազմապատկումը թվով

n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների համար գումարումը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$A=(a_{ij})$ և $B=(b_{ij})$ երկու n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների A+B գումար կոչվում է այն $C=(c_{ij})$ մատրիցը, որի յուրաքանչյուր էլեմենտը հավասար է A և B մատրիցների համապատասխան էլեմենտների գումարին՝ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Մատրիցների գումարման այս սահմանումը, պարզ է, բավարարում է տեղափոխելիության և զուգորդելիության օրենքներին: Նրա համար գոյություն ունի հակադարձ գործողությունը՝ հանումը, ընդ որում A և B մատրիցների տարբերություն ծառայում է A և B մատրիցների համապատասխան էլեմենտների տարբերություններից կազմված մատրիցը: Զրոյի դեր կատարում է զրո-մատրիցը, որը կազմված է միայն զրոներից, հետագայում այդ մատրիցը կնշանակենք 0 սիմվոլով, իհարկե, չշփոթելով զրո թվի հետ:

Քառակուսի մատրիցների գումարումը և § 13-ում սահմանված բազմապատկումը[1] կապված են բաշխական օրենքով:

[1] Կարելի էր, իհարկե, մատրիցների արտադրյալը նույնպես սահմանել բնական կերպով՝ որպես համապատասխան էլեմենտների արտադրյալներից կազմված մատրից, բայց այդպիսի բազմապատկումը, ի տարբերություն § 13-ի սահմանումից, ոչ մի լուրջ կիրառություն չէր ունենա:

Իրոք, դիցուք տված են n-րդ կարգի երեք մատրիցներ՝ $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$: Ցանկացած i-ի և j-ի համար տեղի ունի

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}$$

ակներև հավասարությունը: Այդ հավասարության աջ մասը հանդիսանում է (A+B)C մատրիցի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման կետի էլեմենտը, ձախ մասը հանդիսանում է AC+BC մատրիցի նույն տեղում գտնվող էլեմենտը: Դրանով էլ ապացուցվեց

$$(A+B)C=AC+BC$$

հավասարությունը: C(A+B)=CA+CB հավասարությունը ապացուցվում է նույն կերպ. մատրիցների բազմապատկման անտեղափոխելիությունը, պարզ է, որ պահանջում է ապացուցել բաշխականության այդ երկու օրենքն էլ:

Մուծենք մատրիցը թվով բազմապատկելու հետևյալ սահմանումը. A քառակուսի մատրիցի և K թվի kA արտադրյալ կոչվում է այն $A'=(a'_{ij})$ մատրիցը, որն ստացվում է A մատրիցի բոլոր էլեմենտները k-ով բազմապատկելով՝

$$a'_{ij}=ka_{ij}.$$

Մատրիցը թվով բազմապատկելու այդպիսի մի օրինակի հետ մենք արդեն հանդիպել ենք նախորդ պարագրաֆում. եթե A մատրիցը չվերասերված է, ընդ որում $|A|=d$, ապա նրա A^{-1} հակադարձ մատրիցը և A^* կցյալ մատրիցը կապված են

$$A^{-1}=d^{-1}A^*$$

առնչությամբ: Ինչպես մենք գիտենք, n-րդ կարգի ամեն մի քառակուսի մատրից կարելի է դիտարկել որպես n^2-չափանի վեկտոր, ընդ որում մատրիցների և վեկտորների այդ համապատասխանությունը փոխմիարժեք է: Այդ պատճառով էլ, մատրիցների մեր սահմանած գումարումը և մատրիցի բազմապատկումը թվով դառնում են վեկտորների գումարում և վեկտորի բազմապատկում թվով: Այսպիսով, **n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների բազմությունը կարելի է դիտարկել որպես n^2-չափանի վեկտորական տարածություն:**

Այստեղից բխում է հետևյալ հավասարությունների արդարացի լինելը (այստեղ A-ն և B-ն n-րդ կարգի մատրիցներ են, k-ն և l-ը թվեր են, 1-ը միավոր թիվն է)՝

$$k(A+B)=kA+kB, \tag{1}$$

$$(k+l)A=kA+lA, \tag{2}$$

$$k(lA)=(kl)A, \tag{3}$$

$$1\cdot A=A: \tag{4}$$

Այս հավասարությունններից (1)-ը և (2)-ը մատրիցի բազմապատկումը թվով կապում են մատրիցների գումարման հետ։ Դրա հետ միասին, շատ կարևոր կապ գոյություն ունի մատրիցը թվով բազմապատկելու և իրենց՝ մատրիցների բազմապատկման միջև, այն է՝

$$(kA)B = A(kB) = k(AB), \tag{5}$$

այսինքն՝ եթե մատրիցների արտադրյալում արտադրիչներից մեկը բազմապատկվում է k թվով, ապա ամբողջ արտադրյալը նույնպես բազմապատկվում է այդ k թվով։

Իրոք, դիցուք տված են $A=(a_{ij})$ և $B=(b_{ij})$ մատրիցները և k թիվը։ Այդ դեպքում ցանկացած i-ի և j-ի համար կունենանք՝

$$\sum_{s=1}^{n}(ka_{is})b_{sj}=k\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj},$$

Այդ հավասարության ձախ մասը կլինի $(kA)B$ մատրիցի i-րդ տողի և j-րդ սյան էլեմենտը, իսկ աջ մասը՝ նույն տեղում գտնվող էլեմենտը $k(AB)$ մատրիցում։ Դրանով ապացուցվեց

$$(kA)B=k(AB)$$

հավասարությունը։ $A(kB)=k(AB)$ հավասարությունը ապացուցվում է նույն կերպ։

Մատրիցը թվով բազմապատկելու գործողությունը հնարավորություն է ստեղծում մատրիցը գրելու նոր ձև մուծել։ Նշանակենք E_{ij}-ով այն մատրիցը, որի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման կետում գրված է միավոր, իսկ մնացած բոլոր տեղերում՝ զրոներ։ Համարելով $i=1, 2, \ldots, n$ և $j=1, 2, \ldots, n$, մենք կստանանք n^2 հատ E_{ij} մատրիցներ, որոնք, ինչպես հեշտ է ստուգել, իրար հետ կապված են բազմապատկման հետևյալ աղյուսակով.

$$E_{is}E_{sj}=E_{ij}, \quad E_{is}E_{tj}=0, \quad \text{երբ } t\neq s.$$

kE_{ij} մատրիցը տարբերվում է E_{ij} մատրիցից միայն նրանով, որ նրա i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման կետում գրված է k թիվը։ Հաշվի առնելով այդ և օգտվելով մատրիցների գումարման սահմանումից, մենք կամավոր քառակուսի A մատրիցի համար ստանում ենք հետևյալ գրելաձևը.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}, \tag{6}$$

ըստ որում A մատրիցը (6) տեսքով գրվում է միակ ձևով։

Դիցուք, E-ն միավոր մատրից է. kE մատրիցը, համաձայն մատրիցը թվով բազմապատկելու սահմանմանը, կունենա հետևյալ տեսքը.

$$kE=\begin{pmatrix} k & & & \mathbf{0} \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & k \end{pmatrix},$$

այսինքն՝ գլխավոր անկյունագծի վրա ամենուրեք գրված է k թիվը, իսկ անկյունագծից դուրս բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի։ Այդպիսի մատրիցները կոչվում են սկալյար մատրիցներ։

Մատրիցների գումարման սահմանումից հետևում է

$$kE+lE=(k+l)E \tag{7}$$

հավասարությունը։ Մյուս կողմից, օգտվելով մատրիցների բազմապատկումից կամ հիմնվելով (5) հավասարության վրա, կստանանք՝

$$kE\cdot lE=(kl)E. \tag{8}$$

Կարելի է A մատրիցը k թվով բազմապատկելը մեկնաբանել որպես A մատրիցի բազմապատկում kE սկալյար մատրիցով, մատրիցների բազմապատկման իմաստով։ Իրոք, ըստ (5)-ի՝

$$(kE)A=A(kE)=kA.$$

Այստեղից բխում է նաև, որ սկալյար մատրիցը տեղափոխելի է ցանկացած A մատրիցի հետ։ Շատ կարևոր է այն, որ միայն սկալյար մատրիցներն են օժտված այդ հատկությամբ։

Եթե n-րդ կարգի որևէ $C=(c_{ik})$ մատրից տեղափոխելի է նույն կարգի ամեն մի մատրիցի հետ, ապա C մատրիցը սկալյար մատրից է։

Իրոք, համարենք $i\neq j$ և դիտարկենք ըստ պայմանի իրար հավասար CE_{ij} և $E_{ij}C$ մատրիցները (տես վերը E_{ij} մատրիցի սահմանումը), հեշտ է տեսնել, որ CE_{ij} մատրիցի բոլոր սյուները, բացի j-րդից, կազմված են զրոներից, իսկ j-րդ սյունը համընկնում է C մատրիցի i-րդ սյան հետ։ Մասնավորաբար, CE_{ij} մատրիցի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման կետում գտնվում է c_{ii} էլեմենտը։ Նման ձևով $E_{ij}C$ մատրիցի բոլոր տողերը, բացի i-րդից, կազմված են զրոներից, իսկ i-րդ տողը համընկնում է C մատրիցի j-րդ տողի հետ. $E_{ij}C$ մատրիցի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման կետում գտնվում է c_{jj} էլեմենտը։ Օգտվելով $CE_{ij}=E_{ij}C$ հավասարությունից, մենք ստանում ենք, որ $c_{ii}=c_{jj}$ (որպես էլեմենտներ, որոնք գտնվում են հավասար մատրիցների միևնույն տեղերում), այսինքն՝ C մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող բոլոր էլեմենտներն իրար հավասար են։ Մյուս կողմից, CE_{ij} մատրիցի j-րդ տողի և j-րդ սյան հատման կետում գտնվում է c_{ji} էլեմենտը. բայց $E_{ij}C$ մատրիցի նույն տեղում գտնվում է զրո (որովհետև $i\neq j$), այդ պատճառով էլ $c_{ji}=0$, այսինքն՝ C մատրիցի գլխավոր անկյունագծից դուրս գտնվող ամեն մի էլեմենտ հավասար է զրոյի։ Թեորեման ապացուցված է։

§ 16*. Դետերմինանտների տեսության աքսիոմատիկ կառուցումը

n-րդ կարգի դետերմինանտը մի թիվ է, որը միարժեքորեն որոշվում է տրված n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցով։ Դետերմինանտի սահմանումը, որը բերված է § 4-ում, տալիս է այն կանոնը, որով այդ դետերմինանտը արտահայտվում է տված մատրիցի էլեմենտների միջոցով։ Այդ կոնստրուկտիվ սահմանումը, սակայն, կարելի է փոխարինել աքսիոմատիկ սահմանումով. ուրիշ խոսքով, կարելի է դետերմինանտների § 4-ում և § 6-ում բերված հատկություններից նշել այնպիսիք, որ մատրիցի՝ այդ հատկություններով օժտված միակ իրական ֆունկցիան լինի նրա դետերմինանտը։

Այդպիսի պարզագույն սահմանում կարելի է ստանալ օգտվելով դետերմինանտի վերլուծումից՝ ըստ որևէ տողի։ Դիտարկենք ցանկացած կարգի քառակուսի մատրիցներ և համարենք, որ ամեն մի այդպիսի M մատրիցի դրված է համապատասխանության մեջ մի d_M թիվ, ըստ որում բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

1) Եթե M մատրիցը առաջին կարգի է, այսինքն՝ կազմված է մեկ հատ a էլեմենտից, ապա $d_M = a$։

2) Եթե n-րդ կարգի M մատրիցի առաջին տողը կազմված է $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ էլեմենտներից և եթե M_i-ով $(i = 1, 2, \ldots, n)$ նշանակենք $(n-1)$-րդ կարգի այն մատրիցը, որը մնում է M մատրիցից առաջին տողը և i-րդ սյունը ջնջելուց հետո, ապա՝

$$d_M = a_{11} d_{M_1} - a_{12} d_{M_2} + a_{13} d_{M_3} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} d_{M_n}.$$

Այդ դեպքում ամեն մի M մատրիցի համար d_M թիվը հանդիսանում է այդ մատրիցի դետերմինանտը։ Մենք այդ պնդման ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին. այն կարելի է կատարել ինդուկցիայով ըստ n-ի և օգտվելով § 6-ի արդյունքներից։

Շատ ավելի հետաքրքրական են դետերմինանտի աքսիոմատիկ սահմանման մյուս ձևերը, որոնք իրենց հիմքում ունեն § 4-ում ստացված դետերմինանտի պարզագույն հատկությունները և վերաբերում են սոսկ միայն դետերմինանտի տվյալ n կարգին։ Մենք այժմ սկսում ենք դիտարկել այդպիսի սահմանումներից մեկը։

Դիցուք ամեն մի n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցի համապատասխանեցված է մի d_M թիվ, ըստ որում թող բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

I. Եթե M մատրիցի որևէ տողը բազմապատկվում է k-ով, ապա d_M թիվը նույնպես բազմապատկվում է k-ով։

II. Այդ d_M թիվը չի փոխվում, եթե M մատրիցի որևէ տողին ավելացվում է այդ մատրիցի որևէ այլ տող։

III. Եթե E-ն միավոր մատրից է, ապա $d_E = 1$։

Ապացուցենք, որ ամեն մի M մատրիցի համար d_M թիվը հավասար է այդ մատրիցի դետերմինանտին։

Սկզբում I—III պայմաններից արտածենք d_M թվի մի քանի հատկություններ, որոնք նման են n-րդ կարգի դետերմինանտի համապատասխան հատկություններին։

(1). Եթե M մատրիցի որևէ տողը բաղկացած է զրոներից, ապա $d_M = 0$։

Իրոք, բազմապատկելով զրոներից կազմված տողը 0 թվով, մենք մատրիցը չենք փոխի, բայց, I պայմանի համաձայն, d_M թիվը բազմապատկվում է 0-ով։ Այդպիսով՝

$$d_M = 0 \cdot d_M = 0.$$

(2). Եթե M մատրիցի i-րդ տողին ավելացնենք նրա j-րդ տողը $(i \neq j)$՝ բազմապատկված k թվով, դրանից d_M թիվը չի փոխվի։

Եթե $k = 0$, ապա ամեն ինչ ապացուցված է։ Իսկ եթե $k \neq 0$, ապա, j-րդ տողը բազմապատկելով k-ով, կստանանք մի M' մատրից, որի համար, ըստ I պայմանի, կունենանք $d_{M'} = k d_M$։ Հետո, M' մատրիցի i-րդ տողին ավելացնենք նրա j-րդ տողը, կստանանք մի M'' մատրից, ըստ որում, համաձայն II պայմանի, $d_{M''} = d_{M'}$։ Վերջապես M'' մատրիցի j-րդ տողը բազմապատկենք k^{-1}-ով, մենք կստանանք մի M''' մատրից, որը իրականում ստացվում է M-ից ապացուցվելիք հատկության մեջ ձևակերպված ձևափոխությամբ, ըստ որում՝

$$d_{M'''} = k^{-1} d_{M''} = k^{-1} d_{M'} = k^{-1} \cdot k d_M = d_M.$$

(3). Եթե M մատրիցի տողերը գծայնորեն կախյալ են, ապա $d_M = 0$։

Իրոք, եթե տողերից մեկը, օրինակ՝ i-րդ տողը, հանդիսանում է մնացած տողերի գծային կոմբինացիա, ապա մի քանի անգամ կիրառելով (2) ձևափոխությունը, կարելի է i-րդ տողը փոխարինել զրոներից բաղկացած տողով։ Իսկ (2) ձևափոխությունը չի փոխում d_M թիվը, այդ պատճառով, համաձայն (1)-ի, $d_M = 0$։

(4). Եթե M մատրիցի i-րդ տողը հանդիսանում է երկու β և γ վեկտորների գումար և եթե M' և M'' մատրիցները ստացվել են M մատրիցից՝ նրա i-րդ տողը համապատասխանաբար β-ով և γ-ով փոխարինելով, ապա

$$d_M = d_{M'} + d_{M''}.$$

Իրոք, դիցուք S-ը M մատրիցի, բացի i-րդից, մնացած բոլոր տողերի սիստեմն է։ Եթե S-ում գծային կախում լինի, ապա գծայնորեն կախյալ կլինեն M, M', M'' մատրիցներից յուրաքանչյուրի տողերը, դրա համար էլ, ըստ (3)-ի, $d_M = d_{M'} = d_{M''} = 0$, որից և բխում է այդ դեպքում ապացուցվելիք հատկության արդարացի լինելը։ Իսկ եթե S սիստեմի բոլոր $n-1$ վեկտորները գծայնորեն անկախ են, ապա, ինչպես գիտենք § 9-ից, այն կարելի է լրացնել որևէ α վեկտորով այնպես, որ ստացված սիստեմը լինի n-չափանի վեկտորական տարածության գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն սիստեմ։ Այդ սիստեմի միջոցով կարելի է գծայնորեն արտահայտել β և γ վեկտորները։ Դիցուք α վեկտորը մըտնում է β-ի և γ-ի արտահայտության մեջ համապատասխանաբար k և l գործակիցներով, իսկ β+γ արտահայտության մեջ, այսինքն՝ M մատրիցի i-րդ տողում α վեկտորը կմտնի k+l գործակցով։ Այժմ M, M′ և M″ մատրիցները կարելի է ձևափոխել, հանելով նրանց i-րդ տողերից մյուս տողերի գծային որոշ կոմբինացիաներ այնպես, որ նրանց i-րդ տողեր համապատասխանաբար ծառայեն (k+l)α, kα և lα վեկտորները։ Այդ պատճառով, նշանակելով M°-ով M մատրիցի i-րդ տողը α վեկտորով փոխարինելուց ստացված մատրիցը և հաշվի առնելով (1) և (2) հատկությունները, մենք կհանգենք հետևյալ հավասարություններին.

$$d_M=(k+l)d_{M^0},\quad d_{M'}=kd_{M^0},\ d_{M''}=ld_{M^0}\text{։}$$

Դրանով և (4) հատկությունը ապացուցված է։

(5). Եթե $\overline{M}$ մատրիցն ստացվել է M մատրիցից երկու տողերի դիրքափոխությամբ, ապա $d_{\overline{M}}=-d_M$։

Իրոք, թող M մատրիցի i-րդ և j-րդ տողերի տեղերը կարիք լինեն փոխելու։ Այդ բանին կարելի է հասնել հետևյալ ձևափոխությունների շղթայի միջոցով՝ սկզբում M մատրիցի i-րդ տողին կավելացնենք նրա j-րդ տողը և կստանանք M′ մատրիցը, ըստ որում, համաձայն II պայմանի, $d_{M'}=d_M$։ Հետո, M′ մատրիցի j-րդ տողից կհանենք նրա i-րդ տողը և կստանանք M″ մատրիցը, որի համար, (2) հատկության համաձայն, կստանանք $d_{M''}=d_{M'}$. M″ մատրիցի j-րդ տողը կտարբերվի M մատրիցի i-րդ տողից միայն նշանով։ Հիմա M″ մատրիցի i-րդ տողին ավելացնենք նրա j-րդ տողը։ Այդ ձևափոխությամբ ստացված M‴ մատրիցի համար, համաձայն II պայմանի, կլինի $d_{M'''}=d_{M''}$, ըստ որում այդ մատրիցի i-րդ տողը համընկնում է M մատրիցի j-րդ տողի հետ։ Բազմապատկենք, վերջապես, M‴ մատրիցի j-րդ տողը −1 թվով, մենք կգանք $\overline{M}$ որոնելի մատրիցին։ I պայմանի համաձայն՝

$$d_{\overline{M}}=-d_{M'''}=-d_M\text{։}$$

(6). Եթե M′ մատրիցը ստացվել է M մատրիցից տողերի տեղափոխությամբ, ըստ որում M′ մատրիցի i-րդ տողը (i=1, 2,…, n) հանդիսանում է M մատրիցի α_i-րդ տողը, ապա՝

$$d_{M'}=\pm d_M,$$

որտեղ դրական նշան կլինի, երբ

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

տեղադրությունը զույգ է և բացասական նշան՝ երբ այն կենտ է։

Իրոք, M′ մատրիցը կարելի է ստանալ M մատրիցից երկու տողերի որոշ քանակի դիրքափոխությունների օգնությամբ, դրա համար էլ կարելի է օգտվել (5) հատկությունից։ Այդպիսի դիրքափոխությունների թվի զույգությամբ, ինչպես հայտնի է § 3-ից, որոշվում է այդ տեղադրության զույգությունը։

Այժմ դիտարկենք $M=(a_{ij})$, $N=(b_{ij})$ մատրիցները և նրանց $Q=MN$ արտադրյալը § 13-ի իմաստով։ Գտնենք d_Q թիվը։ Մենք գիտենք, որ Q մատրիցի ամեն մի i-րդ տող հանդիսանում է N մատրիցի բոլոր տողերի գծային կոմբինացիա, որտեղ գործակիցները կլինեն $a_{i1}, a_{i2},\ldots, a_{in}$ թվերը (տես, օրինակ, § 14-ը)։ Փոխարինենք Q մատրիցի բոլոր տողերը հիշյալ գծային կոմբինացիաներով և մի քանի անգամ օգտվենք (4) հատկությամբ։ Մենք կստանանք, որ d_Q թիվը կլինի հավասար d_T թվերի գումարին բոլոր հնարավոր T մատրիցների համար, որտեղ T մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը. T մատրիցի i-րդ տողը (i=1, 2,…, n) հավասար է N մատրիցի α_i-րդ տողին՝ բազմապատկած $a_{i\alpha_i}$ թվով։ Այդ ժամանակ, (3) հատկության շնորհիվ, կարելի է չդիտարկել այն T մատրիցները, որոնց համար գոյություն ունեն այնպիսի i և j ինդեքսներ (i≠j), որ $\alpha_i=\alpha_j$։ Այլ խոսքով, մնալու են միայն այնպիսի T մատրիցներ, որոնց համար $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ ինդեքսները կազմում են 1, 2,…, n թվերի տեղափոխություն։ Համաձայն I և (6) հատկությունների, այդպիսի մատրիցների համար d_T թիվը ունի հետևյալ տեսքը.

$$d_T=\pm a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}d_N,$$

որտեղ նշանը որոշվում է ինդեքսների տեղադրության զույգությամբ։ Այստեղից մենք գալիս ենք d_Q թվի արտահայտությանը. d_T-երի արտահայտությունից դուրս հանելով փակագծից d_N ընդհանուր արտադրիչը, փակագծի մեջ, պարզ է, կմնա |M|-ը, այսինքն՝ M մատրիցի դետերմինանտը, ըստ § 4-ում տված կոնստրուկտիվ սահմանման, այսինքն՝

$$d_Q=(M)\cdot d_N\text{;}\qquad (*)$$

Եթե մենք այժմ վերցնենք որպես N մատրից E միավոր մատրիցը, ապա Q=M և, III հատկության համաձայն, $d_N=d_E=1$, այսինքն՝ ցանկացած M մատրիցի համար տեղի ունի

$$d_M=|M|$$

հավասարությունը, ինչ և պետք էր ապացուցել։ Միաժամանակ մենք տվեցինք դետերմինանտների բազմապատկման թեորեմայի երկրորդ ապացույցը, ըստ որում՝ առանց օգտվելու Լապլասի թեորեմայից. դրա համար հարկավոր է (*) հավասարության մեջ d_Q և d_N թվերը փոխարինել իրենց համապատասխան մատրիցների դետերմինանտներով։

Այս աքսիոմատիկ ուսումնասիրությունն ավարտենք՝ ապացուցելով I—III պայմանների անկախությունը, այսինքն՝ ապացուցենք, որ այդ պայմաններից ոչ մեկը չի հանդիսանում մյուս երկու պայմանների հետևանքը։

Որպեսզի ապացուցենք III պայմանի անկախությունը, համարենք $d_M=0$ ամեն մի n-րդ կարգի M մատրիցի համար։ I և II պայմանները, պարզ է, կբավարարվեն, իսկ III պայմանը խախտվում է։

Որպեսզի ապացուցենք II պայմանի անկախությունը, համարենք, որ ամեն մի M մատրիցի համար d_M թիվը հավասար է այդ մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրայի էլեմենտների արտադրյալին։ I և III պայմանները տեղի ունեն, իսկ II պայմանը տեղի չունի։

Վերջապես, I պայմանի անկախությունը ապացուցելու համար, համարենք $d_M=1$ ամեն մի M մատրիցի համար։ II և III պայմանները տեղի ունեն, իսկ I պայմանը տեղի չունի։

ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ

§ 17. Կոմպլեքս թվերի սիստեմը

Տարրական հանրահաշվի դասընթացում մի քանի անգամ թվերի պաշարի հարստացում է տեղի ունենում։ Դպրոցականը, երբ նոր սկսում է ուսումնասիրել հանրահաշիվը, ծանոթ է լինում միայն թվաբանությունից սովորած դրական ամբողջ և կոտորակային թվերին։ Հանրահաշիվը փաստորեն սկսվում է բացասական թվերի ներմուծմամբ, այսինքն՝ կարևոր թվային սիստեմներից առաջինի՝ ամբողջ թվերի սիստեմի ձևավորմամբ, որը կազմված է բոլոր դրական ու բացասական ամբողջ թվերից և զրոյից, և ապա՝ ավելի լայն սիստեմի՝ ռացիոնալ թվերի սիստեմի ձևավորմամբ, որը կազմված է բոլոր ամբողջ թվերից և բոլոր կոտորակային թվերից, ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական։ Թվերի պաշարի հետագա ընդլայնումը տեղի է ունենում այն ժամանակ, երբ դիտարկման են ենթարկվում իռացիոնալ թվերը։ Թվային այն սիստեմը, որը կազմված է բոլոր ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերից, կոչվում է իրական թվերի սիստեմ։ Իրական թվերի սիստեմի խստությամբ կառուցումը սովորաբար կատարվում է մաթեմատիկական անալիզի համալսարանական դասընթացում։ Մեզ համար, սակայն, բավական էր նախորդ գլուխներում և բավական կլինի հետագայում իրական թվերի հետ ունեցած ծանոթությունը այն չափով, ինչ չափով այն ունի ընթերցողը բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի ուսումնասիրությունն սկսելիս։

Վերջապես, տարրական հանրահաշվի դասընթացի վերջում իրական թվերի սիստեմն ընդլայնվում է մինչև կոմպլեքս թվերի սիստեմը։ Թվերի այդ սիստեմն ընթերցողի համար մնում է, անշուշտ, ավելի նվազ սովորական, քան իրական թվերի սիստեմը, չնայած իրականում այն օժտված է լավագույն շատ հատկություններով: Այս գլխում կրկին անգամ անհրաժեշտ լրիվությամբ կշարադրվի կոմպլեքս թվերի տեսությունը:

Կոմպլեքս թվերի մուծումը կապված է հետևյալ խնդրի հետ: Հայտնի է, որ իրական թվերը բավական չեն իրական գործակիցներով ամեն մի քառակուսի հավասարում լուծելու համար: Իրական արմատներ չունեցող պարզագույն քառակուսի հավասարման օրինակ է ծառայում

$$X^2+1=0 \qquad (1)$$

հավասարումը: Հենց այդ հավասարումն էլ այժմ մեզ հետաքրքրելու է: Մեր առաջ դրված խնդիրն այսպիսին է. իրական թվերի սիստեմն ընդարձակել մինչև թվերի այնպիսի սիստեմ, որ այդ նոր սիստեմում (1) հավասարումն արդեն արմատ ունենա:

Որպես մատերիալ, որից կառուցվելու է թվերի այդ նոր սիստեմը, վերցնենք հարթության կետերը: Հիշեցնենք, որ ուղիղ գծի կետերով իրական թվերի պատկերումը (հիմնված այն բանի վրա, որ մենք ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն ուղիղ գծի բոլոր կետերի բազմության և բոլոր իրական թվերի բազմության միջև, եթե տված կոորդինատների սկզբնակետի և մասշտաբի միավորի դեպքում, յուրաքանչյուր կետին համապատասխանեցվում է նրա աբսցիսը) սիստեմատիկ կերպով օգտագործվում է մաթեմատիկայի բոլոր բաժիններում և այդ դարձել է այնքան սովորական, որ մենք ոչ մի տարբերություն չենք դնում իրական թվի և այն պատկերող կետի միջև: Այսպիսով, մենք ցանկանում ենք սահմանել այնպիսի թվերի սիստեմ, որոնք պատկերվում են հարթության բոլոր կետերով: Մինչև հիմա մենք կարիք չենք զգացել հարթության կետերը գումարելու կամ բազմապատկելու, այդ պատճառով գործողությունները հարթության կետերի միջև մենք իրավասու ենք ընտրելու միայն հոգ տանելով այն բանի համար, որպեսզի նոր ստեղծված թվերի սիստեմը օժտված լինի բոլոր այն հատկություններով, որոնց համար մենք այն ստեղծում ենք: Առաջին հայացքից այդ սահմանումը, հատկապես բազմապատկման համար, մեզ կթվա բավականին արհեստական: Բայց 10-րդ գլխում մենք ցույց կտանք, որ գործողությունների ոչ մի այլ սահմանում, անգամ առաջին հայացքից ավելի բնական թվացող սահմանում, մեզ չէր հասցնի նպատակին, այսինքն՝ իրական թվերի սիստեմի այնպիսի ընդարձակման, որը պարունակեր (1) հավասարման արմատը: Նույն տեղում էլ ցույց կտրվի, որ այդ կառուցման մեջ հարթության կետերի փոխարինումը ցանկացած

այլ մատերիալով չէր հանգեցնի թվերի այնպիսի սիստեմի, որն իր հանրահաշվական հատկություններով տարբերվեր կոմպլեքս թվերի այն սիստեմից, որը կառուցելու ենք ստորև:

Դիցուք հարթության վրա ընտրված է ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմ: Պայմանավորվենք հարթության կետերը նշանակել α, β, γ, ... տառերով և a աբսցիս ու b օրդինատ ունեցող α կետը գրել (a, b), այսինքն՝ մի քիչ նահանջելով այն գրելաձևից, ինչ ընդունված է անալիտիկ երկրաչափության մեջ, գրել՝ $\alpha=(a, b)$: Եթե տված են $\alpha=(a, b)$ և $\beta=(c, d)$ կետերը, ապա այդ կետերի գումար մենք կանվանենք $a+c$ աբսցիսով և $b+d$ օրդինատով կետը, այսինքն՝

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d). \qquad (2)$$

այդ $\alpha=(a, b)$ և $\beta=(c, d)$ կետերի արտադրյալ մենք կանվանենք $ac-bd$ աբսցիսով և $ad+bc$ օրդինատով կետը, այսինքն՝

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc): \qquad (3)$$

Այսպիսով, մենք հարթության բոլոր կետերի միջև սահմանեցինք երկու հանրահաշվական գործողություն: Ցույց տանք, որ այդ գործողությունները օժտված են այն բոլոր հիմնական հատկություններով, ինչպիսի հատկություններով օժտված են այդ գործողությունները իրական թվերի սիստեմում կամ ռացիոնալ թվերի սիստեմում. այդ երկու գործողությունները բավարարում են տեղափոխելիության և զուգորդելիության օրենքներին, կապված են իրար հետ բաշխական օրենքով, դրանց համար գոյություն ունեն հակադարձ գործողությունները՝ հանումը և բաժանումը (բացի զրոյի վրա բաժանելուց):

Գումարման տեղափոխելիությունը և զուգորդելիությունն ակներև են (ավելի ճիշտ՝ բխում են իրական թվերի գումարման համապատասխան հատկություններից), քանի որ հարթության կետերը գումարելիս մենք առանձին գումարում ենք նրանց աբսցիսները և առանձին՝ օրդինատները: Բազմապատկման տեղափոխելիությունը հիմնված է այն բանի վրա, որ կետերի բազմապատկման մեջ α և β կետերը մտնում են սիմետրիկ կերպով: Բազմապատկման զուգորդելիությունը հաստատում են հետևյալ հավասարությունները.

$$[(a, b)(c, d)](e, f)=(ac-bd, ad+bc)(e, f)=$$
$$=(ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce).$$

$$(a, b)[(c, d)(e, f)]=(a, b)(ce-df, cf+de)=$$
$$=(ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf):$$

Բաշխական օրենքը բխում է հետևյալ հավասարություններից.

$$[(a, b)+(c, d)](e, f)=(a+c, b+d)(e, f)=(ae+ce-bf-df, af+cf+be+de),$$

$$(a, b)(e, f)+(c, d)(e, f)=(ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de)=$$
$$=(ae-bf+ce-df, af+be+cf+de)։$$

Դիտարկենք հակադարձ գործողությունների հարցը։ Եթե տված են $\alpha=(a, b)$ և $\beta=(c, d)$ կետերը, ապա նրանց տարբերությունը կլինի այնպիսի (x, y) կետը, որ՝

$$(c, d)+(x, y)=(a, b)։$$

Այստեղից, (2)-ի շնորհիվ՝

$$c+x=a, \qquad d+y=b։$$

Այսպիսով, $\alpha=(a, b)$ և $\beta=(c, d)$ կետերի տարբերություն ծառայում է

$$\alpha-\beta=(a-c, b-d) \tag{4}$$

կետը և այդ տարբերությունը որոշված է միարժեքորեն։ Մասնավորաբար, զրո կծառայի կոորդինատների (0, 0) սկզբնակետը, իսկ $\alpha=(a, b)$ կետի հակադիր կետը կլինի

$$-\alpha=(-a, -b) \tag{5}$$

կետը։ Այնուհետև, դիցուք տված են $\alpha=(a, b)$ և $\beta=(c, d)$ կետերը, ըստ որում β կետը տարբեր է զրոյից, այսինքն՝ c և d կոորդինատներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից և այդ պատճառով $c^2+d^2\neq 0$։ α-ի և β-ի քանորդը պետք է լինի այնպիսի (x, y) կետ, որ $(c, d)(x, y)=(a, b)$։ Այստեղից, ըստ (3)-ի՝

$$\left.\begin{aligned} cx-dy&=a,\\ dx+cy&=b։\end{aligned}\right\}$$

Լուծելով հավասարումների այդ սիստեմը, մենք ստանում ենք՝

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}։$$

Այսպիսով, $\beta\neq 0$ դեպքում, $\frac{\alpha}{\beta}$ քանորդ գոյություն ունի և միարժեքորեն որոշված է՝

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)։ \tag{6}$$

Համարելով այստեղ $\beta=\alpha$, մենք ստանում ենք, որ կետերի՝ մեր սահմանած բազմապատկման մեջ որպես միավոր ծառայում է (1,0) կետը, որը գտնվում է աբսցիսների առանցքի վրա կոորդինատների սկզբնակետից մեկ միավոր հեռավորությամբ դեպի աջ։

Հետո, (6)-ում համարելով $\alpha=1=(1,0)$, կստանանք, որ $\beta\neq 0$ դեպքում, β-ի հակադարձ կետ է ծառայում

$$\beta^{-1}=\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right) \tag{7}$$

կետը։

Այսպիսով, մենք կառուցեցինք հարթության կետերով պատկերվող թվերի մի սիստեմ, ըստ որում այդ թվերի հետ գործողությունները սահմանվում են (2) և (3) բանաձևերով։ Թվերի այդ սիստեմը կոչվում է կոմպլեքս թվերի սիստեմ։

Ցույց տանք, որ կոմպլեքս թվերի սիստեմը հանդիսանում է իրական թվերի սիստեմի ընդարձակումը։ Այդ նպատակի համար դիտարկենք աբսցիսների առանցքի վրայի կետերը, այսինքն՝ $(a, 0)$ տեսքի կետերը։ Դնելով $(a, 0)$ կետը համապատասխանության մեջ a իրական թվի հետ, մենք, պարզ է, ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն այդ կետերի բազմության և բոլոր իրական թվերի բազմության միջև։ Այդ կետերի նկատմամբ (2) և (3) բանաձևերի կիրառումը տալիս է՝

$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0),$$

$$(a, 0)\cdot(b, 0)=(ab, 0)$$

հավասարությունները, այսինքն՝ $(a, 0)$ կետերը գումարվում և բազմապատկվում են այնպես, ինչպես համապատասխան իրական թվերը։ Այսպիսով, աբսցիսների առանցքի վրա գտնվող կետերի բազմությունը, դիտարկված որպես կոմպլեքս թվերի սիստեմի մաս, իր հանրահաշվական հատկություններով ոչնչով չի տարբերվում իրական թվերի սիստեմից, որը սովորական եղանակով պատկերվում է ուղիղ գծի կետերով։ Այդ մեզ հնարավորություն է տալիս հետագայում $(a, 0)$ կետը չտարբերել a իրական թվից, այսինքն՝ միշտ համարել $(a, 0)=a$։ Մասնավորաբար, ստացվում է, որ կոմպլեքս թվերի սիստեմում զրոն՝ (0, 0)-ն և միավորը՝ (1, 0)-ն հանդիսանում են 0 և 1 սովորական իրական թվերը։

Մենք պետք է հիմա ցույց տանք, որ կոմպլեքս թվերի մեջ գտնվում է (1) հավասարման արմատը, այսինքն՝ այնպիսի թիվ, որի քառակուսին հավասար է −1 իրական թվին։ Այդ կլինի, օրինակ՝ (0, 1) կետը, այսինքն՝ այն կետը, որը գտնվում է օրդինատների առանցքի վրա սկզբնակետից մեկ միավոր հեռավորությամբ դեպի վեր։ Իրոք, ըստ (3)-ի կստանանք՝

$$(0,\ 1)(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1\text{։}$$

Պայմանավորվենք այդ կետը նշանակել i-ով, այնպես որ՝ $i^2=-1$։ Ցույց տանք, վերջապես, որ մեր կառուցած թվերի համար կարելի է ստանալ նրանց սովորական գրելաձևը։ Դրա համար ստանանք նախ b իրական թվի և i կետի արտադրյալը՝

$$bi=(b,\ 0)\cdot(0,\ 1)=(0,\ b).$$

այդ կլինի, հետևապես, օրդինատների առանցքի վրա ընկած կետ, որն ունի b օրդինատը, ըստ որում, օրդինատների առանցքի յուրաքանչյուր կետ կներկայացվի այդպիսի արտադրյալի ձևով։ Եթե այժմ (a, b)-ն որևէ կամավոր կետ է, ապա համաձայն

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)$$

հավասարության, կստանանք՝

$$(a,\ b)=a+bi,$$

այսինքն՝ մենք, իրոք, գալիս ենք կոմպլեքս թվերի սովորական գրելաձևին. a+bi արտահայտության մեջ եղած գումարը և արտադրյալը հարկավոր է անշուշտ հասկանալ այն գործողությունների իմաստով, որոնք սահմանվեցին մեր կառուցած կոմպլեքս թվերի սիստեմում։

Այժմ, երբ արդեն կառուցված է կոմպլեքս թվերի սիստեմը, ընթերցողը առանց դժվարության կարող է ստուգել, որ այս դասագրքի նախորդ գլուխների ողջ բովանդակությունը՝ և՛ դետերմինանտների տեսությունը, և՛ գծային հավասարումների սիստեմների տեսությունը, և՛ վեկտորների գծային կախման տեսությունը, և՛ մատրիցների հետ գործողությունների տեսությունը, այդ բոլորն առանց որևէ սահմանափակման փոխանցվում են այն դեպքին, երբ դիտարկման են թույլատրվում ցանկացած կոմպլեքս թվերը և ոչ թե միայն իրական թվերը։

Վերջում նկատենք, որ մեր կողմից բերված կոմպլեքս թվերի սիստեմի կառուցումը մեզ հուշում է այսպիսի հարց՝ հնարավոր չէ՞ արդյոք երեքչափանի տարածության մեջ այնպես սահմանել կետերի գումարման և բազմապատկման գործողությունները, որ այդ կետերի բազմությունը դառնա թվային սիստեմ և՝ իր մեջ պարունակի կոմպլեքս թվերի կամ գոնե իրական թվերի սիստեմը։ Այդ հարցը դուրս է գալիս մեր դասընթացի սահմաններից և մենք միայն կնշենք, որ այդ հարցի պատասխանը, պարզվում է, որ բացասական է։

Մյուս կողմից, նկատելով, որ կոմպլեքս թվերի այն գումարումը, որը մենք սահմանեցինք վերևում, փաստորեն համընկնում է հարթության վրա սկզբնակետից ելնող վեկտորների գումարման հետ (տե՛ս

հաջորդ պարագրաֆը), բնական է դառնում այսպիսի հարցադրումը. կարելի՞ է արդյոք որոշ n-երի համար այնպես սահմանել վեկտորների բազմապատկումը n-չափանի իրական վեկտորական տարածության մեջ, որպեսզի այդ բազմապատկման և վեկտորների սովորական գումարման գործողությունների նկատմամբ մեր տարածությունը լինի թվային մի սիստեմ, որն իր մեջ պարունակի իրական թվերի սիստեմը։ Կարելի է ցույց տալ, որ, եթե պահանջենք պահպանվեն գործողությունների այն բոլոր հատկությունները, որոնք տեղի ունեն ռացիոնալ թվերի, իրական թվերի և կոմպլեքս թվերի սիստեմներում, ապա այդ հնարավոր չէ։ Իսկ եթե հրաժարվենք բազմապատկման տեղափոխելիությունից, ապա այդպիսի կառուցում հնարավոր է չորսչափանի տարածության մեջ. ստացված թվերի սիստեմը կոչվում է կվատերնիոնների սիստեմ։ Նման կառուցում հնարավոր է նաև 8-չափանի տարածության մեջ, ստացվում է, այսպես կոչված, Կեյլիի թվերի սիստեմը։ Այստեղ, իմիջիայլոց, արդեն ստիպված ենք հրաժարվել ոչ միայն բազմապատկման տեղափոխելիությունից, այլ նաև նրա զուգորդելիությունից՝ փոխելով վերջինս մի ավելի թույլ պայմանով։

§ 18. Կոմպլեքս թվերի հետագա ուսումնասիրությունը

Պատմականորեն ստեղծված սովորության համապատասխան մենք էլ i կոմպլեքս թիվը կանվանենք կեղծ միավոր, իսկ bi տեսքի թվերը՝ զուտ կեղծ թվեր կամ ուղղակի՝ կեղծ թվեր, թեպետև այդպիսի թվերի գոյությունը մեզ ոչ մի կասկածի առիթ չի տալիս և մենք կարող ենք օրդինատների առանցքի վրա նշել այն կետերը, որոնցով ներկայացվում են այդ թվերը։ Կոմպլեքս թվի $\alpha=a+bi$ գրելաձևում a թիվը կոչվում է α թվի իրական մաս, իսկ bi-ն՝ նրա կեղծ մաս։ Այն հարթությունը, որի կետերը, համաձայն § 17-ի, նույնացվում են կոմպլեքս թվերի հետ, կոչվելու է կոմպլեքս հարթություն, այդ հարթության աբսցիսների առանցքը կոչվում է իրական առանցք, քանի որ նրա կետերը ներկայացնում են իրական թվերը, իսկ օրդինատների առանցքը համապատասխանաբար կոչվում են կեղծ առանցք։

a+bi տեսքով գրվող կոմպլեքս թվերի համար գումարումը, բազմապատկումը, հանումը և բաժանումը, ինչպես բխում է նախորդ պարագրաֆի (2), (4), (3) և (6) բանաձևերից, կատարվում են հետևյալ ձևով.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)=(ad+bc)i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i\text{։}$$

Մենք կարող ենք ասել, որ կոմպլեքս թվերի գումարման ժամանակ գումարվում են նրանց իրական մասերը առանձին և կեղծ մասերը առանձին. նույնպիսի կանոն տեղի ունի նաև հանման ժամանակ: Բազմապատկման և բաժանման բանաձևերի բառերով ձևակերպումը բավականին բարդ կլիներ, ուստի մենք այն չենք տալիս: Այդ բանաձևերից վերջինի հիշելը անհրաժեշտություն չէ. հարկավոր է միայն իմանալ, որ այն կարելի է արտածել՝ բազմապատկելով տված կոտորակի համարիչը և հայտարարը մի թվով, որը հայտարարից տարբերվում է միայն կեղծ մասի նշանով:

Իրոք,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i:$$

Օրինակներ:

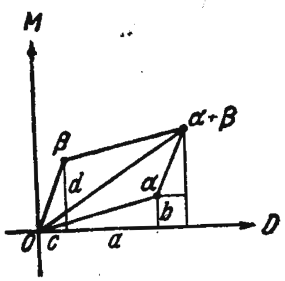
1) $(2+5i)+(1-7i)=(2+1)+(5-7)i=3-2i;$

2) $(3-9i)-(7+i)=(3-7)+(-9-1)i=-4-10i:$

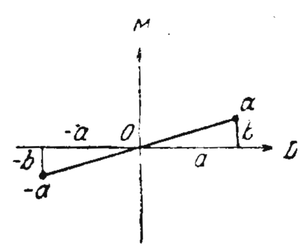
3) $(1+2i)(3-i)=[1\cdot 3-2\cdot(-1)]+[1\cdot(-1)+2\cdot 3]i=5+5i:$

4) $\frac{23+i}{3+i}=\frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{70-20i}{10}=7-2i:$

Կոմպլեքս թվերի պատկերումը հարթության կետերի միջոցով, բնականաբար, ցանկություն է առաջացնում կոմպլեքս թվերի համար սահմանած գործողություններին տալ երկրաչափական մեկնաբանում: Գումարման համար այդպիսի մեկնաբանում կարելի է ստանալ առանց դժվարության: Դիցուք տված են $\alpha=a+bi$ և $\beta=c+di$ թվերը: Նրանց համապատասխան (a, b) և (c, d) կետերը միացնենք սկզբնակետի հետ հատվածներով, և այդ հատվածների վրա կառուցենք զուգահեռագիծ (գծ. 2): Այդ զուգահեռագծի չորրորդ գագաթը, պարզ է, կլինի $(a+c, b+d)$ կետը:



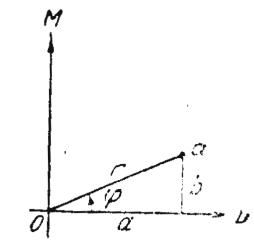
Գծ. 2.



Գծ. 3.

Այսպիսով, կոմպլեքս թվերի գումարումը երկրաչափորեն կատարվում է զուգահեռագծի կանոնով, այսինքն՝ սկզբնակետից ելնող վեկտորների գումարման կանոնով: Հետո, $\alpha=a+bi$ թվի հակադիր թիվը կլինի կոմպլեքս հարթության վրա α կետին սկզբնակետի նկատմամբ սիմետրիկ կետը (գծ. 3): Այստեղից առանց դժվարության կարելի է ստանալ հանման երկրաչափական մեկնաբանումը:

Կոմպլեքս թվերի բազմապատկման և բաժանման գործողությունների երկրաչափական իմաստը պարզ կդառնա միայն այն բանից հետո, երբ մենք կոմպլեքս թվերի համար մուծենք մինչև այժմ օգտագործած գրելաձևերից տարբեր մի նոր գրելաձև: α թվի $\alpha=a+bi$ տեսքով գրելաձևում օգտագործվում են α կետի դեկարտյան կոորդինատները: Հարթության վրա կետի դիրքը նաև որոշվում է նրա բևեռային կոորդինատներով, այն է՝ սկզբնակետից այդ կետի r հեռավորությամբ և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ սկզբնակետից դեպի այդ կետը եղած ուղղության կազմված φ անկյան միջոցով (գծ. 4): Այստեղ r թիվը իրական դրական թիվ է, ըստ որում նա հավասար է զրոյի միայն O կետի համար: Իրական առանցքի վրա ընկած, այսինքն՝ իրական թիվ հանդիսացող α-ի համար r թիվը կլինի α-ի բացարձակ մեծությունը, այդ պատճառով էլ ամեն մի կոմպլեքս α-ի համար երբեմն r-ն անվանում են α թվի բացարձակ մեծություն կամ ավելի հաճախ՝ α թվի մոդուլ՝ նշանակելով այն $|\alpha|$-ով:



Գծ. 4.

Իսկ φ անկյունը կանվանենք α թվի արգումենտ և կնշանակենք $\arg\alpha$[1]: Այդ φ անկյունը կարող է ընդունել ցանկացած իրական արժեքներ, ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական, ըստ որում, դրական անկյունները պետք է հաշվել ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ, իսկ եթե անկյուններն իրարից տարբերվում են 2π-ով կամ 2π-ի բազմապատիկներով, ապա նրանց համապատասխան կետերը նույն r-ի դեպքում համընկնում են:

Այսպիսով, կոմպլեքս թվի արգումենտը ունի անթիվ բազմությամբ արժեքներ, որոնք իրարից տարբերվում են 2π-ի բազմապատիկներով. երկու կոմպլեքս թվերի հավասարությունից, որոնք տրված են իրենց արգումենտներով և մոդուլներով, կարելի է եզրակացնել, որ նրանց արգումենտները տարբերվում են 2π-ի ամբողջ բազմապատիկներով, մինչդեռ նրանց մոդուլները հավասար են: Արգումենտը սահմանված չէ միայն 0 թվի համար. այդ թիվը, սակայն, լրիվ որոշվում է $|0|=0$ հավասարությամբ:

[1] Հետևապես մենք հրաժարվում ենք կետի բևեռային կոորդինատների սովորական անուններից՝ բևեռային շառավիղ և բևեռային անկյուն:

Կոմպլեքս թվի արգումենտը իրական թվի նշանի բնական ընդհանրացումն է: Իրոք, իրական դրական թվի արգումենտը հավասար է 0-ի, իրական բացասական թվի արգումենտը հավասար է π-ի. իրական առանցքի վրա սկզբնակետից դուրս են գալիս միայն երկու ուղղություններ և նրանց կարելի է տարբերել երկու՝ + և — սիմվոլներով՝ այն դեպքում, երբ կոմպլեքս-հարթության վրա 0 կետից դուրս եկող ուղղությունների անվերջ շատ են և նրանք տարբերվում են իրական առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյուններով:

Կետի դեկարտյան կոորդինատների և բևեռային կոորդինատների միջև գոյություն ունի հետևյալ կապը, որն իրավացի է հարթության վրա կետի ցանկացած դիրքի համար

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi, \tag{1}$$

որտեղից՝

$$r = +\sqrt{a^2+b^2}: \tag{2}$$

(1) բանաձևը կիրառելով ցանկացած $\alpha = a+bi$ կոմպլեքս թվի նկատմամբ, կստանանք՝

$$\alpha = a+bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i,$$

կամ՝

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi): \tag{3}$$

Հակադարձաբար. դիցուք $\alpha = a+ib$ թիվը գրված է $\alpha = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ ձևով, որտեղ r_0 և φ_0 թվերն ինչ-որ իրական թվեր են, ըստ որում $r \geqslant 0$: Այդ դեպքում՝ $r_0\cos\varphi_0 = a$, $r_0\sin\varphi_0 = b$, որտեղից $r_0 = +\sqrt{a^2+b^2}$, այսինքն՝ ըստ (2)-ի, $r_0 = |\alpha|$: Այստեղից, օգտվելով (1)-ից, ստանում ենք՝ $\cos\varphi_0 = \cos\varphi$, $\sin\varphi_0 = \sin\varphi$, այսինքն՝ $\varphi_0 = \arg\alpha$: Այսպիսով, ամեն մի α կոմպլեքս թիվ (3) տեսքով գրվում է միակորեն, որտեղ $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$ (իհարկե, φ արգումենտը որոշվում է միայն 2π-ին բազմապատիկ գումարելիների ճշտությամբ): α թվի այդպիսի գրելաձևը կոչվում է նրա եռանկյունաչափական տեսք և հետագայում այն բավականին հաճախ կօգտագործվի:

Հետևյալ թվերը՝

$$\alpha = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad \beta = \cos\frac{19}{3}\pi + i\sin\frac{19}{3}\pi$$

և

$$\gamma = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

տրված են եռանկյունաչափական տեսքով, այստեղ

$$|\alpha| = 3, \quad |\beta| = 1, \quad |\gamma| = \sqrt{3},$$

$$\arg\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \arg\beta = \frac{19}{3}\pi, \quad \arg\gamma = -\frac{\pi}{7} \left(\text{կամ } \arg\beta = \frac{\pi}{3}, \ \arg\gamma = \frac{13}{7}\pi\right).$$

Մյուս կողմից, հետևյալ կոմպլեքս թվերը.

$$\alpha' = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \qquad \beta' = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

$$\gamma' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{3}{4}\pi\right), \qquad \delta' = \sin\frac{3}{4}\pi + i\cos\frac{3}{4}\pi$$

գրված են ոչ եռանկյունաչափական տեսքով, չնայած նրանց տեսքը հիշեցնում է (3) գրելաձևը: Այդ թվերը եռանկյունաչափական տեսքով գրվում են հետևյալ կերպ.

$$\alpha' = 2\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right), \qquad \beta' = 3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right),$$

$$\delta' = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$

γ' թվի եռանկյունաչափական տեսքը որոնելը հանդիպում է այնպիսի դժվարությունների, ինչ որ համարյա միշտ տեղի է ունենում կոմպլեքս թվի սովորական գրելաձևից եռանկյունաչափականին անցնելիս և հակառակը. սինուսի և կոսինուսի տված թվային արժեքներով գտնել ճշգրիտ անկյունը և տված անկյան համար գտնել նրա սինուսի և կոսինուսի ճշգրիտ արժեքները, բացի շատ քիչ դեպքերից, համարյա միշտ անհնար է:

Դիցուք α և β կոմպլեքս թվերը տրված են եռանկյունաչափական տեսքով՝

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'):$$

Բազմապատկենք այդ թվերը՝

$$\alpha\beta = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\cdot[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] =$$

$$= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'),$$

կամ

$$\alpha\beta = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]: \tag{4}$$

Մենք ստացանք $\alpha\beta$ արտադրյալը եռանկյունաչափական տեսքով, դրա համար էլ $|\alpha\beta| = rr'$ կամ՝

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|, \tag{5}$$

այսինքն՝ կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մոդուլը հավասար է արտադրիչների մոդուլների արտադրյալին: Այնուհետև, $\arg(\alpha\beta) = \varphi + \varphi'$ կամ՝

$$\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta, \tag{6}$$

այսինքն՝ կոմպլեքս թվերի արտադրյալի արգումենտը հավասար է արտադրիչների արգումենտների գումարին[1]: Այս կանոնները, պարզ է, տարածվում են ցանկացած վերջավոր թվով արտադրիչների վրա:

[1] Ընդգծենք, որ այստեղ հավասարությունը հասկացվում է 2π-ին բազմապատիկ գումարելիի ճշտությամբ:

Իրական թվերի դեպքում (5) բանաձևի կիրառումը տալիս է այդ թվերի բացարձակ արժեքների հայտնի հատկությունը, իսկ (6)-ը դառնում է, ինչպես հեշտ է ստուգել, իրական թվերի բազմապատկման նշանների կանոնը։

Նման կանոններ գոյություն ունեն նաև քանորդի համար։ Իրոք, դիցուք $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$, ընդ որում $\beta\neq 0$ այսինքն՝ $r'\neq 0$։ Այդ դեպքում՝

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'-i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi'+\sin^2\varphi')}=$$

$$=\frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi'+i\sin\varphi\cos\varphi'-i\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi'\sin\varphi')$$

կամ՝

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]: \tag{7}$$

Այստեղից հետևում է, որ $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{r}{r'}$ կամ՝

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}, \tag{8}$$

այսինքն՝ երկու կոմպլեքս թվերի քանորդի մոդուլը հավասար է համարիչի մոդուլին՝ բաժանած հայտարարի մոդուլի վրա: Այնուհետև,

$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\varphi-\varphi'$ կամ՝

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta, \tag{9}$$

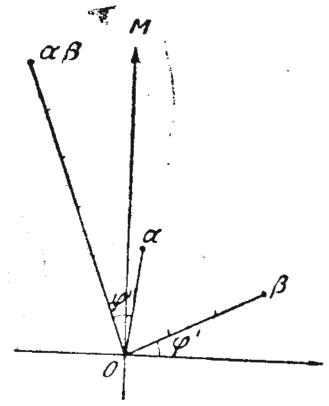
այսինքն՝ երկու կոմպլեքս թվերի քանորդի արգումենտը ստացվում է բաժանելիի արգումենտից հանելով բաժանարարի արգումենտը:

Բազմապատկման և բաժանման երկրաչափական իմաստն այժմ բացատրվում է առանց դժվարության։ Իրոք, α և β թվերի արտադրյալը պատկերող կետը, ըստ (5) և (6) բանաձևերի, մենք կստանանք, եթե 0-ից դեպի α գնացող վեկտորը (գծ. 5) պտտենք ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ $\varphi'=\arg\beta$ անկյան տակ, իսկ հետո՝ ձգենք այդ վեկտորը $r'=|\beta|$ անգամ (երբ $0<r'<1$ այդ կլինի, իհարկե, ոչ թե ձգում այլ՝ սեղմում)։ Հետո, (7)-ից հետևում է, որ $\alpha=r(\cos\varphi+ +i\sin\varphi)\neq 0$ դեպքում կլինի՝

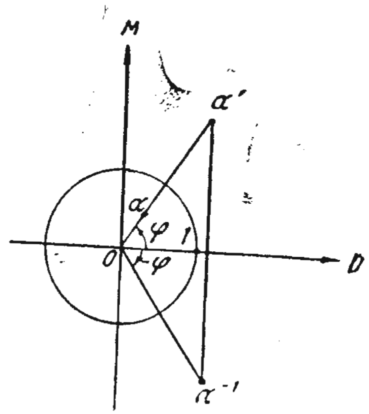
$$\alpha^{-1}=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)] \tag{10}$$

այսինքն՝ $|\alpha^{-1}|=|\alpha|^{-1}$, $\arg(\alpha^{-1})=-\arg\alpha$։ Այսպիսով, մենք կստանանք

α^{-1} կետը, եթե α կետից նախ անցնենք այն α' կետին, որն ընկած է նույն կիսաուղիղի վրա, ինչ որ α-ն և զրոյից ունի r^{-1} հեռավորությունը, իսկ հետո՝ անցնենք իրական առանցքի նկատմամբ α'-ին սիմետրիկ կետին (գծ. 6)[1],



Գծ. 5.



Գծ. 6.

Եռանկյունաչափական տեսքով տրված կոմպլեքս թվերի գումարը և տարբերությունը հնարավոր չէ արտահայտել (4) և (7) բանաձևերին նման բանաձևերով։ Գումարի մոդուլի համար, սակայն, տեղի ունեն հետևյալ կարևոր անհավասարությունները.

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|, \tag{11}$$

այսինքն՝ երկու կոմպլեքս թվերի գումարի մոդուլը փոքր կամ հավասար է գումարելիների մոդուլների գումարից և մեծ կամ հավասար է այդ մոդուլների տարբերությունից: Այդ (11) հավասարությունները բխում են տարրական երկրաչափության մեջ եռանկյան կողմերի մասին հայտնի թեորեմայից, որովհետև $|\alpha+\beta|$-ն հավասար է $|\alpha|$ և $|\beta|$ կողմերով զուգահեռագծի անկյունագծին։ Հարկավոր է հատուկ դիտարկման ենթարկել այն դեպքը, երբ α-ն, β-ն և 0-ն ընկած են մի ուղիղի վրա. այդ մենք թողնում ենք ընթերցողին։ Միայն այդ դեպքում (11) բանաձևերում կարող է տեղի ունենալ հավասարություն։

[1] Այն և միայն այն դեպքում է $|\alpha|=|\alpha'|$, երբ $|\alpha|=1$, այսինքն՝ երբ α կետը ընկած է միավոր շրջանի շրջանագծի վրա։ Եթե α-ն ընկած լինի միավոր շրջանի ներսը, ապա α'-ը կլինի այդ շրջանից դուրս, և հակառակը, ընդ որում, այդ ճանապարհով մենք կստանանք, պարզ է, փոխմիարժեք համապատասխանության կոմպլեքս հարթության մի կողմից՝ այն բոլոր կետերի, որոնք ընկած են միավոր շրջանից դուրս և մյուս կողմից՝ այն բոլոր կետերի միջև, որոնք գտնվում են միավոր շրջանի ներսը և զրոյից տարբեր են։

Քանի որ $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ և

$$|-\beta|=|\beta| \tag{12}$$

(այդ հավասարությունը բխում է թեկուզ հենց $-\beta$ թվի երկրաչափական մեկնաբանումից), ապա (11)-ից բխում են

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta| \tag{13}$$

անհավասարությունները, այսինքն՝ տարբերության մոդուլի համար տեղի ունեն նույնպիսի անհավասարություններ, ինչ որ գումարի մոդուլի համար։

(11) անհավասարությունները կարելի էր ստանալ նաև հետևյալ ճանապարհով։ Դիցուք $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ և դիցուք $\alpha+\beta$ թվի եռանկյունաչափական տեսքն է՝ $\alpha+\beta=R(\cos\psi+i\sin\psi)$։ Գումարելով առանձին-առանձին իրական մասերը և կեղծ մասերը, կստանանք՝

$$r\cos\varphi+r'\cos\varphi'=R\cos\psi,$$

$$r\sin\varphi+r'\sin\varphi'=R\sin\psi.$$

բազմապատկելով առաջին հավասարության երկու մասերը $\cos\psi$-ով, երկրորդ հավասարման երկու կողմերը՝ $\sin\psi$-ով, և գումարելով, կստանանք՝

$$r(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)+r'(\cos\varphi'\cos\psi+\sin\varphi'\sin\psi)=R(\cos^2\psi+\sin^2\psi),$$

այսինքն՝

$$r\cos(\varphi-\psi)+r'\cos(\varphi'-\psi)=R.$$

Այստեղից, քանի որ կոսինուսը երբեք մեկից մեծ լինել չի կարող, բխում է $r+r'\geqslant R$, այսինքն՝ $|\alpha|+|\beta|\geqslant|\alpha+\beta|$ անհավասարությունը։ Մյուս կողմից, $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha+\beta)+(-\beta)$. այստեղից, ըստ ապացուցածի և համաձայն (12)-ի՝

$$|\alpha|\leqslant|\alpha+\beta|+|-\beta|=|\alpha+\beta|+|\beta|,$$

որտեղից

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|.$$

Պետք է նկատել, որ կոմպլեքս թվերի համար «մեծ է» և «փոքր է» հասկացությունը հնարավոր չէ իմաստալի կերպով սահմանել, քանի որ այդ թվերը, ի տարբերություն իրական թվերի, ընկած են ոչ թե մի ուղիղի վրա, որի կետերը բնականորեն կարգավորված են, այլ հարթության վրա։ Այդ պատճառով կոմպլեքս թվերը (և ոչ թե նրանց մոդուլները) ոչ մի դեպքում չի կարելի անհավասարության նշանով կապել իրար հետ։

Համալուծ թվեր: Դիցուք տված է $\alpha=a+bi$ կոմպլեքս թիվը։ $a-bi$ կոմպլեքս թիվը, որը α-ից տարբերվում է միայն կեղծ մասի նշանով, կոչվում է α-ի համալուծ և նշանակվում է $\bar{\alpha}$-ով։

Հիշենք, որ կոմպլեքս թվերի բաժանման ժամանակ մենք հանդիպել ենք համալուծ թվին, չնայած նրան այդ անունը չենք տվել։

Պարզ է, որ $\bar{\alpha}$-ի համալուծը կլինի α-ն, այսինքն՝ կարելի է խոսել համալուծ թվերի զույգի կամ՝ մի զույգ համալուծ թվերի մասին։ Իրական թիվը, և միայն այն է, որ համալուծ է ինքն իրեն։

Համալուծ թվերը երկրաչափորեն հանդիսանում են իրական առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ կետեր (գծ. 7)։ Այստեղից հետևում են

$$|\bar{\alpha}|=|\alpha|,\quad \arg\bar{\alpha}=-\arg\alpha \tag{14}$$

հավասարությունները։

Համալուծ թվերի գումարը և արտադրյալը իրական թվեր են: Իրոք,

$$\alpha+\bar{\alpha}=2a,$$

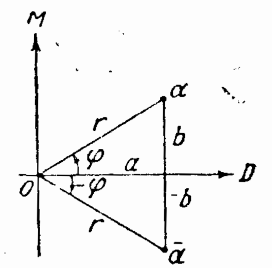
$$\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2=|\alpha|^2. \tag{15}$$

Վերջին հավասարությունը ցույց է տալիս, որ $\alpha\bar{\alpha}$ թիվը $\alpha\neq0$ դեպքում, անգամ դրական է։ Հետագայում (§ 24-ում) կստանանք մի թեորեմա, որը ցույց կտա, որ համալուծ թվերի համար հենց նոր ապացուցած հատկությունը նրանց համար բնութագրիչ հատկություն է։ Հետևյալ հավասարությունը՝

$$(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i,$$

ցույց է տալիս որ երկու թվերի գումարի համալուծը հավասար է գումարելիների համալուծների գումարին՝

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}. \tag{16}$$



գծ. 7.

Նման ձևով,

$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

հավասարությունից բխում է, որ երկու թվերի արտադրյալի համալուծը հավասար է արտադրիչների համալուծների արտադրյալին՝

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}. \tag{17}$$

Անմիջական ստուգումից երևում է, որ ճիշտ են նաև հետևյալ բանաձևերը՝

$$\overline{\alpha-\beta}=\alpha-\bar{\beta}, \tag{18}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}. \tag{19}$$

Ապացուցենք հետևյալ պնդումը՝ եթե α թիվը որևէ ձևով արտահայտված է β_1, β_2, …β_n կոմպլեքս թվերի միջոցով գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունների օգնությամբ, ապա այդ արտահայտության մեջ բոլոր β_k թվերը փոխարինելով իրենց համալուծներով, կստանանք α թվի համալուծը. մասնավորապես, եթե α թիվը իրական թիվ է, ապա այն չի փոխվի բոլոր β_k թվերը իրենց համալուծներով փոխարինելիս:

Այս պնդումը կապացուցենք ինդուկցիայով ըստ n-ի, քանի որ $n=2$ դեպքում այն բխում է (16)—(19) բանաձևերից։

Դիցուք, α թիվը արտահայտված է ոչ անպայման տարբեր β_1, β_2, ..., β_n թվերի միջոցով։ Այդ արտահայտության մեջ գոյություն ունի որոշ կարգ, որով գումարման, բազմապատկման, բաժանման և հանման գործողությունները կիրառվում են։ Վերջին քայլը կլինի այդ գործողություններից որևէ մեկի կիրառումը γ_1-ի նկատմամբ, որն արտահայտվում է β_1, β_2, ..., β_k թվերի միջոցով, որտեղ $1 \leqslant k \leqslant n-1$, և γ_2-ի նկատմամբ, որն արտահայտվում է β_{k+1}, ..., β_n-ի միջոցով։ Ըստ ինդուկցիայի, β_1, β_2, ..., β_k թվերի փոխարինումը իրենց համալուծներով առաջ է բերում γ_1-ի փոխարինում $\bar{\gamma}_1$-ով, իսկ β_{k+1}, ..., β_n-ի փոխարինումը իրենց համալուծներով առաջ է բերում γ_2-ի փոխարինում $\bar{\gamma}_2$-ով։ Սակայն, համաձայն (16)—(19) բանաձևերից մեկի, γ_1-ից և γ_2-ից իրենց $\bar{\gamma}_1$ և $\bar{\gamma}_2$ համալուծներին անցումը α-ն դարձնում է $\bar{\alpha}$։

§ 19. Կոմպլեքս թվերից արմատ հանելը

Անցնենք կոմպլեքս թվերն աստիճան բարձրացնելու և կոմպլեքս թվերից արմատ հանելու հարցին։ Կոմպլեքս թիվը n ամբողջ դրական աստիճան բարձրացնելու համար հարկավոր է այդ $\alpha=a+bi$ կոմպլեքս թվի $(a+bi)^n$ արտահայտությանը կիրառել Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը (այդ բանաձևը ճիշտ է նաև կոմպլեքս թվերի համար, քանի որ նրա ապացույցը հիմնված է միայն բաշխական օրենքի վրա), և հետո հաշվի առնել, որ $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, որտեղից և ընդհանրապես՝

$$i^{4k}=1, \quad i^{4k+1}=i, \quad i^{4k+2}=-1, \quad i^{4k+3}=-i.$$

Եթե α թիվը տված է եռանկյունաչափական տեսքով, ապա ամբողջ դրական n թվի համար նախորդ պարագրաֆի (4) բանաձևից հետևում է՝

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{1}$$

որը կոչվում է Մուավրի բանաձև. *այս նշանակում է՝* կոմպլեքս թիվն աստիճան բարձրացնելիս նրա մոդուլը բարձրացվում է այդ աստիճանը, իսկ արգումենտը բազմապատկվում է աստիճանի ցուցիչով: *Այդ ճիշտ է նաև ամբողջ բացասական աստիճանի համար։ Իրոք, $\alpha^{-n}=(\alpha^{-1})^n$ շնորհիվ բավական է Մուավրի բանաձևը կիրառել α^{-1} թվի համար, որի եռանկյունաչափական տեսքը տրված է նախորդ պարագրաֆի (10) բանաձևով։*

Օրինակներ։

1) $i^{37}=i$, $i^{112}=-1$:

2) $(2+5i)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot 5i+3\cdot 2\cdot 5^2i^2+5^3i^3=8+60i-150-125i=-142-65i$:

3) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=(\sqrt{2})^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4$:

4) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{-3}=3^{-3}\left[\cos\left(-\frac{3}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{5}\pi\right)\right]=$

$$=\frac{1}{27}\left(\cos\frac{7}{5}\pi+i\sin\frac{7}{5}\pi\right).$$

Մուավրի բանաձևի մի մասնավոր դեպքը, այն է՝

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

հավասարությունը, հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ ստանալու բանաձևեր բազմապատիկ անկյան սինուսի և կոսինուսի համար։ Իրոք, այդ հավասարության ձախ մասը բացելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևով և հավասարեցնելով հավասարման երկու կողմերի իրական և կեղծ մասերն առանձին-առանձին, մենք կստանանք՝

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi-\ldots,$$

$$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi+$$

$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\cdot\sin^5\varphi-\ldots.$$

Այստեղ $\binom{n}{k}$-ն բինոմային գործակցի սովորական նշանակումն է՝

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}:$$

Երբ $n=2$, մենք ստանում ենք հայտնի բանաձևեր՝

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi=2\cos\varphi\sin\varphi,$$

ինչպես նաև $n=3$ դեպքում՝

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi։$$

Կոմպլեքս թվից արմատ հանելն արդեն որոշ դժվարություն է ներկայացնում։ Սկսենք $\alpha=a+bi$ թվից քառակուսի արմատ հանելուց։ Մենք առայժմ չգիտենք գոյություն ունի՞ կոմպլեքս թիվ, որի քառակուսին հավասար լինի α-ի։ Ընդունենք, որ այդպիսի $u+vi$ թիվ գոյություն ունի, այսինքն՝ պահպանելով սովորական գրելաձևը, կարող ենք գրել՝

$$\sqrt{a+bi}=u+vi,$$

որտեղից՝

$$(u+vi)^2=a+bi,$$

իսկ այստեղից հետևում է՝

$$\left.\begin{aligned} u^2-v^2&=a,\\ 2uv&=b։\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Այս հավասարությունների երկու մասերն էլ քառակուսի բարձրացնելով, իսկ հետո գումարելով, կստանանք՝

$$(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=(u^2+v^2)^2=a^2+b^2,$$

որտեղից՝

$$u^2+v^2=+\sqrt{a^2+b^2},$$

դրական նշանով է վերցրած, որովհետև u և v թվերը իրական են և այդ պատճառով էլ հավասարման ձախ մասը դրական է։ Այդ հավասարությունից և (2) հավասարություններից առաջինից ստանում ենք՝

$$u^2=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}),$$

$$v^2=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})։$$

Քառակուսի արմատ հանելով, մենք ստանում ենք u-ի համար երկու արժեք և v-ի համար երկու արժեք, որոնք տարբերվում են միայն նշանով։ Բոլոր այդ արժեքները կլինեն իրական, քանի որ ցանկացած a-ի և b-ի համար արմատ է հանվում դրական թվերից։ Ստացված u-ի և v-ի արժեքները իրար հետ չի կարելի ցանկացած ձևով զուգակցել, որովհետև, համաձայն (2) հավասարություններից երկրորդի, uv արտադրյալի նշանը պետք է համընկնի b-ի նշանի հետ։ Այդ տալիս է երկու հնարավոր զուգակցումներ u-ի և v-ի արժեքների համար, այսինքն՝ $u+vi$ տեսքի երկու թվեր, որոնք կարող են ծառայել α թվից քառա-

կուսի արմատի արժեքներ։ Այդ թվերը իրարից տարբերվում են նշանով։ Չնայած մեծածավալ, բայց տարրական ստուգումը (ստացված թվերը քառակուսի բարձրացնելով $b>0$ դեպքի համար առանձին և $b<0$ դեպքի համար առանձին) ցույց է տալիս, որ մեր գտած թվերն իրոք հանդիսանում են α թվից քառակուսի արմատի արժեքներ։ Այսպիսով, կոմպլեքս թվից քառակուսի արմատ հանելը միշտ հնարավոր է և տալիս է երկու արժեքներ, որոնք իրարից տարբերվում են նշանով:

Մասնավորաբար, այժմ հնարավոր է նաև բացասական թվից քառակուսի արմատ հանելը, ըստ որում այդ արմատի արժեքները կլինեն զուտ կեղծ։ Իրոք, եթե $a<0$ և $b=0$, ապա $\sqrt{a^2+b^2}=-a$, քանի որ այդ արմատը պետք է լինի դրական և այդ դեպքում՝ $u^2=\frac{1}{2}(a-a)=0$, այսինքն՝ $u=0$, որտեղից՝ $\sqrt{a}=\pm vi$։

Օրինակ։ Դիցուք $\alpha=21-20i$։ Այդ դեպքում՝ $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29$, դրա համար էլ $u^2=\frac{1}{2}(21+29)=25$, $v^2=\frac{1}{2}(-21+29)=4$, որտեղից՝ $u=\pm 5$, $v=\pm 2$։ Քանի որ b-ն բացասական է, ապա u-ի և v-ի նշանները պետք է տարբեր լինեն, այդ պատճառով էլ՝

$$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i)։$$

$a+bi$ տեսքի կոմպլեքս թվից երկուսից ավելի բարձր աստիճանի արմատ հանելու փորձը հանդիպում է անհաղթահարելի դժվարությունների։ Այսպես, եթե մենք ցանկանայինք նույն մեթոդով, ինչպես վերևում, երրորդ աստիճանի արմատ հանել $a+bi$ տեսքի կոմպլեքս թվից, ապա մենք ստիպված կլինեինք լուծելու մի քանի երրորդ աստիճանի օժանդակ հավասարումներ, որ մենք առայժմ չգիտենք և որը, ինչպես մենք § 38-ում կտեսնենք, պահանջում է երրորդ աստիճանի արմատ հանել կոմպլեքս թվից։ Մյուս կողմից, եռանկյունաչափական տեսքը բավականին լավ է հարմարեցրած ցանկացած աստիճանի արմատ հանելու համար և, օգտվելով նրանից, մենք հիմա այդ հարցը լրիվ կսպառենք։

Դիցուք պահանջվում է n աստիճանի արմատ հանել $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ թվից։ Ընդունենք, որ այդ հնարավոր է և արդյունքում ստացվում է $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ թիվը, այսինքն՝

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)։ \qquad (3)$$

Այդ դեպքում, ըստ Մուավրի բանաձևի, $\rho^n=r$, այսինքն $\rho=\sqrt[n]{r}$, որտեղ աջ մասում գտնվում է r իրական դրական թվից n աստիճանի արմատի միարժեքորեն որոշված արժեքը։ Մյուս կողմից, (3) հավասարության ձախ մասի արգումենտը $n\theta$-ն է։ Չի կարելի, սակայն, պնդել, որ $n\theta=\varphi$, քանի որ այդ անկյունները իրականում կարող են իրարից տարբերվել 2π թվի բազմապատիկ հանդիսացող գումարելիով։ Այդ պատճառով՝ $n\theta=\varphi+2k\pi$, որտեղ k-ն ամբողջ թիվ է, որտեղից՝

$$\theta=\frac{\varphi+4k\pi}{n}.$$

Հակադարձաբար, եթե մենք վերցնենք $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ թիվը, ապա ամեն մի ամբողջ k-ի համար (թե՛ դրական, թե՛ բացասական), այդ թվի n աստիճանը հավասար է α-ի։ Այսպիսով՝

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \qquad (4)$$

k-ին տալով տարբեր ամբողջ արժեքներ, մենք ոչ միշտ կստանանք տարբեր արժեքներ որոնելի արմատի համար։ Իրոք,

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \qquad (5)$$

արժեքների համար մենք կստանանք արմատի n հատ արժեքներ, որոնք բոլորը կլինեն տարբեր, քանի որ k-ի մեկով մեծացնելը առաջացնում է արգումենտի մեծացում $\frac{2\pi}{n}$-ով։ Թո՛ղ k-ն հիմա լինի կամավոր։ Եթե $k=nq+r$, $0\leqslant r\leqslant n-1$, ապա՝

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

այսինքն՝ $k=nq+r$ և $k=r$ դեպքերում արգումենտի արժեքները միմյանցից տարբերվում են 2π-ի բազմապատիկով. հետևապես, $k=nq+r$ դեպքում արմատի համար ստանում ենք այնպիսի արժեք, ինչպիսի արժեք $k=r$ դեպքում, այսինքն՝ (5) սիստեմի մեջ մտնող արժեքներից։

Այսպիսով, α կոմպլեքս թվից n աստիճանի արմատ հանելը միշտ հնարավոր է և այն տալիս է n տարբեր արժեքներ։ Բոլոր այդ արժեքները դասավորված են $\sqrt[n]{|a|}$ շառավղով և զրո կենտրոնով շրջանագծի վրա և այդ շրջանագիծը բաժանում են n հավասար մասերի։

Մասնավորաբար, a իրական թվից n աստիճանի արմատը նույնպես ունի n տարբեր արժեքներ. այդ արժեքներից իրական կլինեն

կամ երկուսը, կամ մեկը, կամ ոչ մեկը՝ կախված a-ի նշանից և n-ի զույգությունից։

Օրինակներ։

1) $$\beta=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right):$$

$$k=0,\quad \beta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$k=1,\quad \beta_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right),$$

$$k=2,\quad \beta_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

2) $$\beta=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2},$$

$$\beta_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \beta_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\beta_0:$$

3) $$\beta=\sqrt[3]{-\;}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),$$

$$\beta_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$\beta_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$\beta_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Միավորի արմատները։ *Հատկապես կարևոր է n աստիճանի արմատ հանել 1 թվից։ Այդ արմատն ունի n արժեքներ, ըստ որում, շնորհիվ $1=\cos 0+\sin 0$ և (4) բանաձևերի, բոլոր այդ արժեքները կամ, ինչպես մենք կասենք,* միավորից n աստիճանի բոլոր արմատները *տրվում են հետևյալ բանաձևերով.*

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (6)$$

Միավորից n աստիճանի արմատի իրական արժեքներն ստացվում են (6) բանաձևով $k=0$ և $\frac{n}{2}$ արժեքների դեպքում, եթե n-ը զույգ է և

$k=0$ արժեքից, երբ n-ը կենտ է։ Կոմպլեքս հարթության վրա միավորի n աստիճանի արմատները դասավորված են միավոր շառավղով շրջանագծի վրա և բաժանում են այն n հավասար աղեղների. բաժանման այդ կետերից մեկը հենց 1 թիվն է։ Այստեղից հետևում է, որ միավորի այն արմատները, որոնք իրական չեն, իրական առանցքի նկատմամբ դասավորված են սիմետրիկ կերպով, այսինքն՝ զույգ առ զույգ համալուծ են։

Միավորի քառակուսի արմատն ունի երկու արժեք՝ 1 և —1, միավորի 4 աստիճանի արմատն ունի չորս արժեք՝ 1, —1, i, —i։ Հետագայի համար կարևոր է հիշել միավորից խորանարդ արմատի արժեքները։ Դրանք կլինեն, ըստ (6)-ի, $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ թվերը, որտեղ $k=0, 1, 2$, այսինքն՝ բացի միավորից, նաև իրար հետ համալուծ հետևյալ երկու թվերը.

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{7}$$

Կոմպլեքս թվից n աստիճանի արմատի բոլոր արժեքները կարելի է ստանալ այդ արժեքներից մեկը բազմապատկելով միավորից n աստիճանի արմատի բոլոր արժեքներով։ Իրոք, թող β-ն լինի α թվից n աստիճանի արմատի արժեքներից մեկը, այսինքն՝ $\beta^n=\alpha$, իսկ ε-ը թող լինի միավորից n աստիճանի արմատի ցանկացած արժեքը, այսինքն՝ $\varepsilon^n=1$։ Այդ դեպքում $(\beta\varepsilon)^n=\beta^n\varepsilon^n=\alpha$, այսինքն՝ $\beta\varepsilon$-ը կլինի $\sqrt[n]{\alpha}$-ի արժեքներից մեկը։ Բազմապատկելով β-ն միավորից n աստիճանի արմատի ամեն մի արժեքով, մենք կստանանք $\sqrt[n]{\alpha}$-ի համար n տարբեր արժեքներ, այսինքն՝ այդ արմատի բոլոր արժեքները։

Օրինակներ։ 1) $\sqrt[3]{-8}$-ը ունի երեք արժեք, որոնցից մեկը կլինի —2-ը, մյուս երկուսը ըստ 7-ի կլինեն՝ $-2\varepsilon_1=1-i\sqrt{3}$ և $-2\varepsilon_2=1+i\sqrt{3}$ թվերը (տե՛ս վերևում օրինակ 3)։

2) $\sqrt[4]{81}$-ը ունի չորս արժեք՝ 3, —3. $3i$, —$3i$։

Միավորից n աստիճանի երկու արմատների արտադրյալը նույնպես կլինի միավորից n աստիճանի արմատ։ Իրոք, եթե $\varepsilon^n=1$ և $\eta^n=1$, ապա $(\varepsilon\eta)^n=\varepsilon^n\eta^n=1$։ Հետո, միավորից n աստիճանի արմատի հակադարձ թիվը նույնպես կլինի նույնպիսի արմատ։ Իրոք, դիցուք $\varepsilon^n=1$, այդ դեպքում $\varepsilon\varepsilon^{-1}=1$-ից հետևում է $\varepsilon^n\varepsilon^{-n}=1$ կամ $(\varepsilon^{-1})^n=1$։

Ընդհանրապես, միավորից n աստիճանի արմատի ցանկացած աստիճանը նույնպես կլինի միավորից n աստիճանի արմատ։

Միավորից ամեն մի k աստիճանի արմատ կլինի նաև միավորից l աստիճանի արմատ՝ k-ին բազմապատիկ ամեն մի l-ի համար։ Այստեղից հետևում է, որ եթե մենք դիտարկելու լինենք միավորից n աստիճանի արմատի բոլոր արժեքները, ապա այդ արժեքներից մի մասը արդեն կլինեն միավորից n' աստիճանի արմատներ, որոշ n'-ների համար, որոնք հանդիսանում են n-ի բաժանարարներ։ Բայց յուրաքանչյուր n-ի դեպքում գոյություն ունեն միավորից n աստիճանի այնպիսի արմատներ, որոնք արդեն չեն հանդիսանում միավորից ավելի ցածր աստիճանի արմատներ, այդպիսի արմատները կոչվում են միավորից n աստիճանի նախնական արմատներ։ Դրանց գոյությունը բխում է (6) բանաձևից. եթե տվյալ k-ին համապատասխանող արմատի արժեքը մենք նշանակենք ε_k-ով (այնպես որ $\varepsilon_0=1$), ապա ըստ Մուավրի (1) բանաձևի՝

$$\varepsilon_1^k=\varepsilon_k.$$

Հետևապես, ε_1-ի n-ից փոքր ոչ մի աստիճանը չի կարող հավասարվել 1-ի։ Այսինքն՝ $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$-ը նախնական արմատ է։

Միավորից n աստիճանի ε արմատը այն և միայն այն ժամանակ կլինի նախնական արմատ, եթե նրա բոլոր ε^k աստիճանները $k=0, 1, \ldots, n-1$ դեպքերում իրարից տարբեր են, այսինքն՝ եթե նրանցով սպառվում են միավորից n աստիճանի բոլոր արմատները։

Իրոք, եթե ε թվի բոլոր նշված աստիճաններն իրարից տարբեր են, ապա ε-ը կլինի n աստիճանի նախնական արմատ։ Իսկ եթե, օրինակ՝ $\varepsilon^k=\varepsilon^l$, $0\leqslant k<l\leqslant n-1$, ապա $\varepsilon^{l-k}=1$, այսինքն՝ $1\leqslant l-k<n-1$ անհավասարությունների հետևանքով ε-ը նախնական արմատ չի լինի։

Վերը գտած ε_1 նախնական արմատը, ընդհանրապես, միակ n աստիճանի նախնական արմատը չէ։ Այդ բոլոր նախնական արմատները գտնելուն է ծառայում հետևյալ թեորեման.

Եթե ε-ը միավորից n աստիճանի նախնական արմատ է, ապա ε^k թիվը այն և միայն այն ժամանակ կլինի n աստիճանի նախնական արմատ, եթե k-ն փոխադարձաբար պարզ է n-ի հետ։

Իրոք, դիցուք d-ն k և n թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է։ Եթե $d>1$ և $k=dk'$, $n=dn'$, ապա՝

$$(\varepsilon^k)^{n'}=\varepsilon^{kn'}=\varepsilon^{k'n}=(\varepsilon^n)^{k'}=1,$$

այսինքն՝ ε^k արմատը հանդիսանում է n' աստիճանի արմատ միավորից։

Դիցուք, մյուս կողմից, $d=1$ և դիցուք, դրա հետ միասին, ε^k թիվը միայն m աստիճանի արմատ է, $1 \leqslant m < n$։ Այսպիսով,

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1։$$

Քանի որ ε թիվը n աստիճանի նախնական արմատ է միավորից, այսինքն՝ միայն նրա n-ին բազմապատիկ աստիճաններն են հավասար լինում մեկի, ապա mk թիվը n-ի բազմապատիկն է, այստեղից, քանի որ $1 \leqslant m < n$, ապա k և n թվերը չեն կարող լինել փոխադարձաբար պարզ թվեր, հակառակ մեր ենթադրությանը։

Այսպիսով, միավորից n աստիճանի նախնական արմատների թիվը հավասար է n-ից փոքր և n-ի հետ փոխադարձաբար պարզ k ամբողջ դրական թվերի քանակին։ Այդ թիվը սովորաբար նշանակում են $\varphi(n)$-ով, նրա արտահայտությունը կարելի է գտնել թվերի տեսության ցանկացած դասագրքում։

Եթե p-ն պարզ թիվ է, ապա միավորից p աստիճանի նախնական արմատներ կծառայեն բոլոր այդ արմատները, բացի միավորից՝ իրենից։ Մյուս կողմից, միավորից չորս աստիճանի արմատներից, նախնական կլինեն միայն i և $-i$ թվերը, իսկ 1-ը և -1-ը՝ ոչ։

ԳԼՈՒԽ ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԱՐՄԱՏՆԵՐԸ

§ 20. Գործողություններ բազմանդամների ճետ

Գրքի առաջին երկու գլուխների բովանդակությունը, այն է՝ դետերմինանտների տեսությունը և գծային հավասարումների տեսությունը, հագել է որպես անմիջական զարգացումն հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի այն ուղղության, որը սկսվելով առաջին աստիճանի մեկ անհայտով մեկ հավասարումից, տանում է դեպի երկու և երեք անհայտով համապատասխանաբար երկու և երեք հավասարումների սիստեմները։ Տարրական հանրահաշվի մյուս ուղղությունը, որին այնտեղ ավելի մեծ նշանակություն է տրված, հանդիսանում է անցումը մեկ անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումից նորից մեկ անհայտով երկրորդ աստիճանի ցանկացած քառակուսի հավասարմանը, իսկ հետո նաև երրորդ ու չորրորդ աստիճանի որոշ մասնավոր տեսքի հավասարումներին։ Այս ուղղությունը վերաճում է բարձրագույն հանրահաշվի բավականին մեծ և բովանդակալից բաժնի, որը նվիրված է n-րդ աստիճանի մեկ անհայտով ցանկացած հավասարման ուսումնասիրությանը։ Հանրահաշվի պատմականորեն ավելի վաղ շրջանում առաջացած այդ բաժնին են վերաբերում գրքի ինչպես այս, այնպես էլ հետևյալ գլուխներից մի քանիսը։

n-րդ աստիճանի հավասարման ընդհանուր տեսքը (որտեղ n-ը՝ մի որոշ դրական ամբողջ թիվ է) կլինի՝

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0։ \tag{1}$$

Այդ հավասարման $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ գործակիցները մենք կհամարենք կամայական կոմպլեքս թվեր, ըստ որում ավագ անդամի a_0 գործակիցը պետք է տարբեր լինի զրոյից։

Եթե գրված է (1) հավասարումը, ապա սովորաբար պահանջվում է լուծել այն։ Այլ խոսքով, հարկավոր է գտնել x անհայտի համար այնպիսի թվային արժեքներ, որոնք բավարարում են այդ հավասարմանը, այսինքն՝ անհայտի տեղ տեղադրելուց և նշված բոլոր գործողությունները կատարելուց հետո, (1) հավասարման ձախ մասը դառնում է զրո։

Նպատակահարմար է, սակայն, (1) հավասարման լուծման խնդիրը փոխարինել ավելի ընդհանուր խնդրով՝ ուսումնասիրել այդ հավասարման ձախ մասը՝

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n, \tag{2}$$

որը կոչվում է n աստիճանի բազմանդամ (պոլինոմ) x անհայտի նկատմամբ: Մենք ընտրում ենք այդ տերմիններից առաջինը. հարկավոր է մեկընդմիշտ հիշել, որ այստեղ բազմանդամ է կոչվում միայն (2) տեսքի արտահայտությունը, այսինքն՝ միայն x անհայտի ամբողջ ոչբացասական աստիճանների գումարը՝ վերցրած որոշ թվային գործակիցներով, և ոչ թե միանդամների ցանկացած գումարը, ինչպես այդ ընդունված է տարրական հանրահաշվում։ Մասնավորաբար, մենք բազմանդամներ չենք համարի այնպիսի արտահայտությունները, որոնք պարունակում են x անհայտը բացասական կամ կոտորակային ցուցիչով, օրինակ՝ $2x^2-\frac{1}{x}+3$ կամ $ax^{-3}+bx^{-2}+cx^{-1}+d+ex+fx^2$, կամ՝ $x^{\frac{1}{2}}+1$։ Բազմանդամը կրճատ գրելու համար մենք կօգտագործենք $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ և այլ նշաններ։

$f(x)$ և $g(x)$ երկու բազմանդամներ համարվելու են հավասար (կամ նույնաբար հավասար)՝ $f(x)=g(x)$, այն դեպքում, եթե հավասար են անհայտի միևնույն աստիճանի գործակիցները։ Մասնավորաբար, ոչ մի բազմանդամ չի կարող հավասար լինել զրոյի, եթե նրա որևէ գործակիցը տարբեր է զրոյից, այդ պատճառով (1) հավասարման մեջ օգտագործած հավասարման նշանը ոչ մի առնչություն չունի այստեղ սահմանված բազմանդամների հավասարության հետ։ Հետագայում, բազմանդամները միմյանց հետ կապող $=$ նշանը միշտ հարկավոր է հասկանալ այդ բազմանդամների նույնաբար հավասար լինելու իմաստով։

Այսպիսով, n աստիճանի (2) բազմանդամի վրա կարելի է նայել որպես ձևական մի արտահայտության, որը լրիվին որոշվում է իր $a_0, a_1, \dots, a_n$ գործակիցների ընտրությամբ, որտեղ $a_0\neq 0$։ Այս բառերի

լրիվ իմաստը կպարզվի բավական ուշ՝ 10-րդ գլխում։ Նկատենք, որ բազմանդամը գրելու (2) տեսքից բացի, այսինքն՝ x անհայտի նվազող աստիճաններով գրելուց բացի, կթույլատրվեն նաև այլ տեսակի գրելաձևեր, որոնք ստացվում են (2)-ից գումարելիների տեղափոխությամբ, օրինակ՝ անհայտի աճող աստիճաններով դասավորված:

Իհարկե, (2) բազմանդամի վրա կարելի է նայել նաև մաթեմատիկական անալիզի տեսակետից, այսինքն՝ այն համարել կոմպլեքս փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիա։ Պետք է հաշվի առնել, սակայն, որ երկու ֆունկցիաներ համարվում են իրար հավասար, եթե հավասար են նրանց արժեքները x փոփոխականի բոլոր արժեքների համար: Պարզ է, որ երկու բազմանդամներ, որոնք հավասար են վերը նշված ձևական-հանրահաշվական իմաստով, կլինեն հավասար նաև որպես x-ից ֆունկցիաներ։ Հակադարձը, սակայն, կապացուցենք միայն § 24-ում։ Դրանից հետո. թվային գործակիցներով բազմանդամի հասկացության վերաբերյալ հանրահաշվական և տեսաբանական-ֆունկցիոնալ տեսակետները իրոք համարժեք կդառնան, իսկ առայժմ մենք պետք է ամեն անգամ նշենք թե ինչ իմաստ է վերագրվում բազմանդամի հասկացությանը։ Ներկա և հաջորդ երկու պարագրաֆներում մենք բազմանդամին կնայենք որպես ձևական-հանրահաշվական արտահայտության։

Պարզ է, որ ամեն մի բնական n-ի համար գոյություն ունեն n-րդ աստիճանի բազմանդամներ։ Դիտարկելով բոլոր հնարավոր այդպիսի բազմանդամները. մենք բացի առաջին, երկրորդ, երրորդ և այլ աստիճանի բազմանդամներից, կհանդիպենք նաև զրո աստիճանի բազմանդամների, այսինքն՝ զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի հետ։ Զրո թիվը նույնպես կհամարվի բազմանդամ. այդ կլինի միակ բազմանդամը, որի աստիճանն անորոշ է։

Հիմա մենք կսահմանենք կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների համար գումարման և բազմապատկման գործողությունները։ Այդ գործողությունները կմուծվեն իրական գործակիցներով բազմանդամների գործողությունների նմանությամբ, որոնք հայտնի են ընթերցողին տարրական հանրահաշվի դասընթացից։

Եթե տված են կոմպլեքս գործակիցներով $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները, հարմարության համար գրված x-ի աճող աստիճաններով՝

$$f(x)+a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \qquad a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\dots b_{s-1}x^{s-1}+b_sx^s, \qquad b_s\neq 0,$$

և եթե, օրինակ՝ $n\geqslant s$, ապա նրանց գումար է կոչվում

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\dots, c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$$

բազմանդամը, որի գործակիցները ստացվում են $f(x)$-ի և $g(x)$-ի մեջ x անհայտի միևնույն աստիճանի գործակիցները գումարելով, այսինքն՝

$$c_i=a_i+b_i,\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,n, \qquad (3)$$

ընդ որում $n>s$ դեպքում $b_{s+1},\ldots,b_n$ գործակիցները պետք է համարել հավասար զրոյի: Գումարի աստիճանը կլինի հավասար n-ի, եթե $n>s$, իսկ $n=s$ դեպքում կարող է պատահել, որ այն փոքր լինի n-ից, այն է, երբ $b_n=-a_n$:

Այդ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների արտադրյալ է կոչվում

$$f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s}$$

բազմանդամը, որի գործակիցները որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$d_i=\sum_{k+l=i}a_kb_l,\qquad i=0,\,1,\,\ldots,\,n+s-1,\;n+s, \qquad (\ )$$

այսինքն՝ d_i գործակիցը հանդիսանում է $f(x)$-ի և $g(x)$-ի այնպիսի գործակիցների արտադրյալների գումար, որոնց ինդեքսների գումարը հավասար է i-ի, օրինակ՝ $d_0=a_0b_0$, $d_1=a_0b_1+a_1b_0,\ldots,d_{n+s}=a_nb_s$: Վերջին հավասարությունից բխում է, որ $d_{n+s}\neq 0$ և այդ պատճառով երկու բազմանդամների արտադրյալի աստիճանը հավասար է այդ բազմանդամների աստիճանների գումարին:

Այստեղից բխում է, որ զրոյից տարբեր բազմանդամների արտադրյալը ոչ մի դեպքում չի կարող հավասար լինել զրոյի:

Բազմանդամների համար մեր սահմանած գործողությունները ի՞նչ հատկություններով են օժտված: Գումարման տեղափոխելիությունը և զուգորդելիությունն անմիջապես բխում են թվերի համար այդ օրենքների բավարարվելուց, քանի որ գումարվում են x-ի ամեն մի աստիճանի գործակիցները իրար հետ: Հանումը տեղի ունի. զրոյի դեր կատարում է զրո թիվը, որը պատկանում է բազմանդամների թվին, իսկ $f(x)$ բազմանդամի համար հակադիր բազմանդամ է ծառայում

$$-f(x)=-a_0-a_1x-\ldots-a_nx^n$$

բազմանդամը:

Բազմապատկման տեղափոխելիությունը բխում է թվերի բազմապատկման տեղափոխելիությունից և այն փաստից, որ բազմանդամների բազմապատկման սահմանման մեջ երկու բազմանդամների գործակիցներն էլ մասնակցում են հավասար իրավունքներով:

Բազմապատկման զուգորդելիությունն ապացուցվում է հետևյալ կերպ: Եթե, բացի $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամներից, տված է նաև

$$h(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{t-1}x^{t-1}+c_tx^t,\qquad c_t\neq 0$$

բազմանդամը, ապա $[f(x)\,g(x)]h(x)$ արտադրյալում x^i-ի գործակից $(i=0,\,1,\,\ldots,\,n+s+t)$ կլինի

$$\sum_{j+m=i}\Big(\sum_{k+l=j}a_kb_l\Big)c_m=\sum_{k+l+m=i}a_kb_lc_m$$

թիվը, իսկ $f(x)[g(x)h(x)]$ արտադրյալում կլինի նրան հավասար

$$\sum_{k+j=i}a_k\Big(\sum_{l+m=j}b_lc_m\Big)=\sum_{k+l+m=i}a_kb_lc_m$$

թիվը: Վերջապես, բաշխելիության օրենքը բխում է

$$\sum_{k+l=i}(a_k+b_k)c_l=\sum_{k+l=i}a_kc_l+\sum_{k+l=i}b_kc_l$$

հավասարությունից, քանի որ այդ հավասարման ձախ մասը հանդիսանում է x^i-ի գործակիցը $[f(x)+g(x)]h(x)$ բազմանդամում, իսկ աջ մասն անհայտի նույն աստիճանի գործակիցն է $f(x)h(x)+g(x)h(x)$ բազմանդամում:

Նկատենք, որ միավորի դերը բազմանդամների բազմապատկման ժամանակ կատարում է 1 թիվը՝ դիտարկված որպես զրո աստիճանի բազմանդամ: Մյուս կողմից, $f(x)$ բազմանդամը այն և միայն այն ժամանակ է օժտված $f^{-1}(x)$ հակադարձ բազմանդամով՝

$$f(x)f^{-1}(x)=1, \qquad (5)$$

երբ $f(x)$-ը զրո աստիճանի բազմանդամ է: Իրոք, եթե $f(x)$-ը զրոյից տարբեր a թիվ է, ապա նրա համար հակադարձ բազմանդամ կլինի a^{-1} թիվը, իսկ եթե $f(x)$-ի աստիճանը՝ $n\geqslant 1$ և եթե $f^{-1}(x)$ բազմանդամը գոյություն ունենար, ապա (5) հավասարության ձախ մասի աստիճանը կլիներ n-ից ոչ պակաս, մինչդեռ աջ կողմում զրո աստիճանի բազմանդամ է:

Այստեղից բխում է, որ բազմանդամների բազմապատկման համար հակադարձ գործողություն՝ բաժանում գոյություն չունի: Այս տեսակետից, կոմպլեքս գործակիցներով բոլոր բազմանդամների սիստեմը հիշեցնում է բոլոր ամբողջ թվերի սիստեմը: Այդ նմանությունը ի հայտ է գալիս նաև նրանում, որ բազմանդամների համար, ինչպես և ամբողջ թվերի համար, գոյություն ունի մնացորդով բաժանման ալգորիթմ: Իրական գործակիցներով բազմանդամների համար այդ ալգորիթմն ընթերցողին հայտնի է դեռևս տարրական հանրահաշվից: Իսկ քանի որ մենք հիմա դիտարկում ենք կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների դեպքը, ապա կարիք կա նորից տալու դրան վերաբերող բոլոր ձևակերպումները և բերել նրանց ապացույցները:

Ցանկացած f(x) և g(x) երկու բազմանդամների համար կարելի է գտնել այնպիսի q(x) և r(x) բազմանդամներ, որ

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \qquad (6)$$

ըստ որում r(x)-ի աստիճանը փոքր է g(x)-ի աստիճանից և կամ r(x)=0: Այդ պայմաններին բավարարող q(x) և r(x) բազմանդամները որոշվում են միարժեքորեն:

Նախ ապացուցենք թեորեմայի երկրորդ կեսը: Թող գոյություն ունենան էլի $\bar{q}(x)$ և $\bar{r}(x)$ բազմանդամներ, որոնք նույնպես բավարարում են

$$f(x)=g(x)\bar{q}(x)+\bar{r}(x) \qquad (7)$$

հավասարությանը, և $\bar{r}(x)$-ի աստիճանն էլ փոքր է g(x)-ի աստիճանից[1]: (6) և (7) հավասարությունների աջ մասերն իրար հավասարեցնելով, կստանանք՝

$$g(x)[q(x)-\bar{q}(x)]=\bar{r}(x)-r(x).$$

Այդ հավասարության աջ մասի աստիճանը փոքր է g(x)-ի աստիճանից, իսկ ձախ մասի աստիճանը $q(x)-\bar{q}(x)\neq 0$ դեպքում կլիներ մեծ կամ հավասար g(x)-ի աստիճանին: Այդ պատճառով պետք է, որ $q(x)-\bar{q}(x)=0$, այսինքն՝ $q(x)=\bar{q}(x)$, իսկ այդ դեպքում նաև $r(x)=\bar{r}(x)$, ինչը և հարկավոր էր ապացուցել:

Անցնենք թեորեմայի առաջին կեսի ապացուցմանը: Դիցուք f(x) և g(x) բազմանդամները համապատասխանաբար ունեն n և s աստիճանները: Եթե $n<s$, ապա կարելի է համարել q(x)=0, r(x)=f(x): Իսկ եթե $n\geqslant s$, ապա օգտվենք այն մեթոդից, որով տարրական հանրահաշվում կատարվում է իրական գործակիցներով այնպիսի բազմանդամների բաժանումը, որոնք դասավորված են անհայտի նվազող աստիճաններով: Դիցուք

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}x+a_n, \qquad a_0\neq 0,$$

$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\dots+b_{s-1}x+b_s, \qquad b_0\neq 0.$$

Համարելով

$$f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x)=f_1(x), \qquad (8)$$

մենք կստանանք n-ից ցածր աստիճանի բազմանդամ: Նշանակենք

[1] *Կամ թե $\bar{r}(x)=0$: Հետագայում այդ մասին էլ չի ասվելու:*

այդ աստիճանը n_1-ով, իսկ $f_1(x)$-ի ավագ անդամի գործակիցը՝ a_{10}: Եթե դեռևս $n_1\geqslant s$, ապա համարենք

$$f_1(x)-\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}g(x)=f_2(x). \qquad (8_1)$$

Նշանակենք $f_2(x)$-ի աստիճանը n_2-ով, իսկ ավագ անդամի գործակիցը՝ a_{20}-ով, հետո համարենք

$$f_2(x)-\frac{a_{20}}{b_0}x^{n_2-s}g(x)=f_3(x), \qquad (8_2)$$

և այլն:

Քանի որ $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... բազմանդամների աստիճանները նվազում են՝ $n>n_1>n_2 \dots$, ապա վերջավոր քանակի քայլերից հետո մենք կհասնենք այնպիսի $f_k(x)$ բազմանդամի՝

$$f_{k-1}(x)-\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_k-s}g(x)=f_k(x), \qquad (8_{k-1})$$

որի n_k աստիճանը արդեն փոքր կլինի s-ից, որից հետո այս պրոցեսը դադարեցվում է: Գումարելով այժմ (8), (8_1), ..., (8_{k-1}) հավասարությունները, մենք կստանանք՝

$$f(x)-\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}+\dots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}\right)g(x)=f_k(x),$$

այսինքն՝

$$q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}\dots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s},$$

$$r(x)=f_k(x)$$

բազմանդամներն իրոք բավարարում են (6) հավասարությանը, ըստ որում r(x)-ի աստիճանը փոքր է g(x)-ի աստիճանից:

Նկատենք, որ q(x) բազմանդամը կոչվում է f(x)-ը g(x)-ի վրա բաժանելու քանորդ, *իսկ r(x)-ը՝ այդ բաժանման* մնացորդ:

Մնացորդով բաժանման ալգորիթմից երևում է, որ եթե f(x)-ը և g(x)-ը իրական գործակիցներով բազմանդամներ են, ապա բոլոր $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... բազմանդամների գործակիցները, և այդ պատճառով նաև q(x) քանորդի և r(x) մնացորդի գործակիցները կլինեն իրական:

§ 21. Բաժանարարներ: Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը

Դիցուք տված են կոմպլեքս գործակիցներով զրոյից տարբեր $f(x)$ *և* $\varphi(x)$ *բազմանդամները։ Եթե* $f(x)$*-ը* $\varphi(x)$*-ի վրա բաժանելիս ստացված մնացորդը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ ինչպես ասում են,* $f(x)$*-ը* բաժանվում է *(կամ* ամբողջովին բաժանվում է*)* $\varphi(x)$*-ի վրա, ապա* $\varphi(x)$ *բազմանդամը կոչվում է* $f(x)$ *բազմանդամի* բաժանարար։

Այն և միայն այն ժամանակ $\varphi(x)$-ը կլինի $f(x)$-ի բաժանարար, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\psi(x)$ բազմանդամ, որ

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)։ \tag{1}$$

Իրոք, եթե $\varphi(x)$*-ը* $f(x)$*-ի բաժանարարն է, ապա որպես* $\psi(x)$ *կարելի է վերցնել* $f(x)$*-ի և* $\varphi(x)$*-ի քանորդը։ Հակադարձաբար դիցուք գոյություն ունի (1) հավասարությանը բավարարող* $\psi(x)$ *բազմանդամ։ Նախորդ պարագրաֆում ապացուցած*

$$f(x)=\varphi(x)q(x)+r(x)$$

հավասարությանը բավարարող $q(x)$ *և* $r(x)$ *բազմանդամների միակությունից և* $r(x)$*-ի աստիճանը* $\varphi(x)$*-ի աստիճանից փոքր լինելուց մեր դեպքում հետևում է, որ* $f(x)$*-ի և* $\varphi(x)$*-ի քանորդը հավասար է* $\psi(x)$*-ին, իսկ մնացորդը հավասար է զրոյի։*

Պարզ է, որ եթե (1) հավասարությունը տեղի ունի, ապա $\psi(x)$*-ը նույնպես կլինի* $f(x)$*-ի բաժանարար։ Պարզ է նաև, որ* $\varphi(x)$*-ի աստիճանը մեծ չէ* $f(x)$*-ի աստիճանից։*

Նկատենք, որ եթե $f(x)$ *բազմանդամը և նրա բաժանարար* $\varphi(x)$*-ը երկուսն էլ ունեն ռացիոնալ գործակիցներ կամ իրական գործակիցներ, ապա* $\psi(x)$ *բազմանդամը նույնպես կունենա ռացիոնալ կամ, համապատասխանաբար, իրական գործակիցներ, քանի որ այն գտնում ենք բաժանման ալգորիթմի օգնությամբ։ Իհարկե, ռացիոնալ կամ իրական գործակիցներով բազմանդամը կարող է օժտված լինել և այնպիսի բաժանարարներով, որոնց ոչ բոլոր գործակիցներն են ռացիոնալ կամ, համապատասխանաբար, իրական թվեր։ Այդ ցույց է տալիս, օրինակ, հետևյալ հավասարությունը.*

$$x^2+1=(x-i)(x+i)։$$

Նշենք բազմանդամների բաժանելիությանը վերաբերող մի քանի հիմնական հատկություններ, որոնք հետագայում բազմաթիվ կիրառություններ կունենան։

I. Եթե $f(x)$-ը բաժանվում է $g(x)$-ի վրա և $g(x)$-ն էլ բաժանվում է $h(x)$-ի վրա, ապա $f(x)$-ը նույնպես բաժանվում է $h(x)$-ի վրա։

Իրոք, ըստ պայմանի $f(x)=g(x)\varphi(x)$ *և* $g(x)=h(x)\psi(x)$, *այդ պատճառով էլ* $f(x)=h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$։

II. Եթե $f(x)$-ը և $\varphi(x)$-ը բաժանվում են $h(x)$-ի վրա, ապա նրանց գումարը և տարբերությունը նույնպես բաժանվում են $h(x)$-ի վրա:

Իրոք, $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ *և* $g(x)=\varphi(x)\chi(x)$ *հավասարություններից հետևում է*

$$f(x)\pm g(x)=\varphi(x)[\psi(x)\pm\chi(x)]։$$

III. Եթե $f(x)$-ը բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա, ապա $f(x)$-ի և ցանկացած $g(x)$ բազմանդամի արտադրյալը նույնպես կբաժանվի $\varphi(x)$-ի վրա:

Իրոք, եթե $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, *ապա* $f(x)g(x)=\varphi(x)[\psi(x)g(x)]$։

II-*ից և* III-*ից բխում է հետևյալ հատկությունը.*

IV. Եթե $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ բազմանդամներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա, ապա $\varphi(x)$-ի վրա կբաժանվի նաև

$$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+\dots+f_k(x)g_k(x)$$

բազմանդամը, որտեղ $g_1(x)$, $g_2(x)$, …, $g_k(x)$-ը՝ կամավոր բազմանդամներ են:

V. Ամեն մի $f(x)$ բազմանդամ բաժանվում է զրո աստիճանի ամեն մի բազմանդամի վրա:

Իրոք, եթե $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$, *իսկ* c*-ն զրոյից տարբեր կամայական թիվ է, այսինքն՝ զրո աստիճանի ինչ-որ բազմանդամ, ապա*

$$f(x)=c\left(\frac{a_0}{c}x^n+\frac{a_1}{c}x^{n-1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{c}x+\frac{a_n}{c}\right)։$$

VI. Եթե $f(x)$-ը բաժանվում $\varphi(x)$-ի վրա, ապա $f(x)$-ը կբաժանվի նաև $c\varphi(x)$-ի վրա, որտեղ c-ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է:

Իրոք, $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ *հավասարությունից բխում է* $f(x)=[c\varphi(x)][c^{-1}\psi(x)]$։

VII. Եթե $c\neq 0$, ապա $cf(x)$ բազմանդամները և միայն նրանք կլինեն $f(x)$-ի այնպիսի բաժանարարներ, որոնք ունեն նույն աստիճանը, ինչ որ $f(x)$-ը: *Իրոք,* $f(x)=c^{-1}[cf(x)]$, *այսինքն՝* $f(x)$*-ը բաժանվում է* $cf(x)$*-ի վրա։ Եթե, մյուս կողմից,* $f(x)$*-ը բաժանվում է* $\varphi(x)$*-ի վրա, ըստ որում*

$f(x)$-ի և $\varphi(x)$-ի աստիճանները համընկնում են, ապա $f(x)$-ի $\varphi(x)$-ի քանորդի աստիճանը պետք է հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ $f(x)=d\varphi(x)$, $d\neq 0$, որտեղից՝ $\varphi(x)=d^{-1}f(x)$։

Այստեղից բխում է հետևյալ հատկությունը.

VIII. Այն և միայն այն դեպքում են $f(x)$-ը և $g(x)$-ը միաժամանակ բաժանվում իրար վրա, երբ $g(x)=cf(x)$, $c\neq 0$։

Վերջապես, VIII-ից և I-ից բխում է հետևյալ հատկությունը.

IX. Երբ $c\neq 0$, ապա $f(x)$ և $cf(x)$ բազմանդամներից մեկի ամեն մի բաժանարար կլինի բաժանարար նաև մյուսի համար։

Ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար։ *Դիցուք տված են $f(x)$ և $g(x)$ կամայական բազմանդամները։ Եթե $\varphi(x)$ բազմանդամը $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամներից ամեն մեկի համար բաժանարար է, ապա այն կոչվում է նրանց* ընդհանուր բաժանարար։ *Զրո աստիճանի բոլոր բազմանդամները, ըստ V հատկության (տե՛ս վերևում), պատկանում են $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարարների թվին։ Եթե բացի դրանցից, այդ երկու բազմանդամները չունեն այլ բաժանարարներ, ապա նրանք կոչվում են* փոխադարձաբար պարզ *բազմանդամներ։*

Ընդհանրապես, $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները կարող են ունենալ նաև x-ից կախված բաժանարարներ, ուստի մենք ցանկանում ենք տալ այդ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի *հասկացությունը։*

Անհարմար կլիներ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը սահմանել որպես ամենամեծ աստիճանի ընդհանուր բաժանարար։ Որովհետև, մի կողմից, մենք դեռ չգիտենք, թե այդ բազմանդամները չունե՞ն արդյոք ամենամեծ աստիճանի, իրարից ոչ միայն հաստատուն արտադրիչով տարբերվող, մի քանի ընդհանուր բաժանարարներ, այլ կերպ ասած՝ այդպիսի սահմանումը չի՞ պարունակում արդյոք չափից ավելի անորոշություն։ Մյուս կողմից, տարրական թվաբանության մեջ ընթերցողն արդեն հանդիպել է ամբողջ թվերի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը գտնելու խնդրին և գիտե, որ 12 և 18 թվերի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար 6-ը ոչ միայն այդ թվերի մյուս ընդհանուր բաժանարարներից ամենամեծն է, այլ նույնիսկ բաժանվում է այդ ընդհանուր բաժանարարներից յուրաքանչյուրի վրա։ Իրոք, 12 և 18 թվերի մյուս ընդհանուր բաժանարարները կլինեն 1, 2, 3, —1, —2, —3, —6 թվերը։

Այդ նկատառումով, մենք բազմանդամների համար ընդունենք այսպիսի սահմանում.

Զրոյից տարբեր $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների համար ընդհանուր

ամենամեծ բաժանարար կոչվում է այնպիսի $d(x)$ բազմանդամը, որը $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար է և, բացի այդ, ինքն էլ բաժանվում է նրանց մյուս բոլոր ընդհանուր բաժանարարների վրա։ *$f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը նշանակում են $(f(x), g(x))$ սիմվոլով։*

Այդ սահմանման մեջ մնում է բաց այն հարցը, թե ցանկացած $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների համար գոյություն ունի՞ ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար։ Հիմա այդ հարցին դրական պատասխան կտրվի։ Միաժամանակ կառաջարկվի մեթոդ տված երկու բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գործնականորեն գտնելու համար։ Հասկանալի է, որ մենք չենք կարող այստեղ փոխադրել այն մեթոդը, որով սովորաբար գտնում ենք ամբողջ թվերի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը, քանի որ ամբողջ թիվը պարզ արտադրիչների վերածելու նման բան բազմանդամների համար առայժմ չունենք։ Բայց ամբողջ թվերի համար գոյություն ունի նաև այլ եղանակ, որը կոչվում է հաջորդաբար բաժանման ալգորիթմ *կամ* Էվկլիդեսի ալգորիթմ. *այդ եղանակը լրիվ կիրառելի է նաև բազմանդամների դեպքում։*

Բազմանդամների համար Էվկլիդեսի ալգորիթմը կայանում է հետևյալում։ Դիցուք տված են $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները։ $f(x)$-ը բաժանենք $g(x)$-ի վրա, ընդհանրապես ասած, կստանանք ինչ-որ $r_1(x)$ մնացորդ։ Հետո, $g(x)$-ը բաժանենք $r_1(x)$-ի վրա, կստանանք $r_2(x)$ մնացորդ, $r_1(x)$-ը բաժանենք $r_2(x)$-ի վրա և այլն։ Քանի որ մնացորդների աստիճանները շարունակ նվազում են, ուստի հաջորդաբար բաժանման այդ շղթայում անպայման կհանդիպենք այնպիսի մնացորդի, որի վրա հաջորդ բաժանումը կկատարվի առանց մնացորդի, այդ պատճառով էլ բաժանման պրոցեսն այդտեղ կդադարի։ Այն $r_k(x)$ մնացորդը, որի վրա առանց մնացորդի բաժանվեց նախորդ $r_{k-1}(x)$ մնացորդը, կլինի հենց $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը։

Ապացուցման համար նախորդ պարբերության մեջ շարադրվածը գրի առնենք հետևյալ հավասարությունների շղթայի տեսքով.

$$\left.\begin{array}{l}
f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x),\\
r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-3}(x)=r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x)\\
r_{k-1}(x)=r_k(x)q_{k+1}(x)։
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Վերջին հավասարությունը ցույց է տալիս, որ $r_k(x)$-ը հանդիսանում է $r_{k-1}(x)$-ի բաժանարար։ Այստեղից հետևում է, որ նախավերջին հավասարության աջ մասի երկու գումարելիներն էլ բաժանվում են

$r_k(x)$-ի վրա, այդ պատճառով էլ $r_k(x)$-ը կլինի նաև $r_{k-2}(x)$-ի բաժանարար։ Հետո, նույն ճանապարհով բարձրանալով վեր, մենք կստանանք, որ $r_k(x)$-ը հանդիսանում է բաժանարար նաև $r_{k-3}(x)$, $r_{k-4}(x)$, …, $r_2(x)$, $r_1(x)$ բազմանդամների համար։ Այստեղից, համաձայն երկրորդ հավասարության, կհետևի, որ $r_k(x)$-ը հանդիսանում է բաժանարար $g(x)$-ի համար, ուստի և, համաձայն առաջին հավասարության, այստեղից կհետևի, որ $r_k(x)$-ը հանդիսանում է բաժանարար նաև $f(x)$-ի համար։ Այսպիսով, $r_k(x)$-ը հանդիսացավ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար։

Այժմ վերցնենք $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ցանկացած $\varphi(x)$ ընդհանուր բաժանարարը։ Քանի որ (2) հավասարություններից առաջինի ձախ մասը և աջ մասի առաջին գումարելին բաժանվում են $\varphi(x)$-ի, ապա $r_1(x)$-ը նույնպես կբաժանվի $\varphi(x)$-ի։ Անցնելով երկրորդ և հաջորդ հավասարություններին, մենք նույն ձևով կստանանք, որ $\varphi(x)$-ի վրա բաժանվում են $r_2(x)$, $r_3(x)$, … բազմանդամները։ Վերջապես, երբ արդեն ապացուցվել է, որ $r_{k-1}(x)$-ը բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա, ապա նախավերջին հավասարությունից էլ մենք կստանանք, որ $r_k(x)$-ը բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա։ Այսպիսով, $r_k(x)$-ը իրոք կլինի $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը։

Մենք ապացուցեցինք, այսպիսով, որ ցանկացած երկու բազմանդամներ ունեն ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար, և ստացանք այն հաշվելու մի եղանակ։ Այդ եղանակը ցույց է տալիս, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները երկուսն էլ ունեն ռացիոնալ գործակիցներ կամ իրական գործակիցներ, ապա նրանց ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի գործակիցները նույնպես կլինեն ռացիոնալ կամ, համապատասխանաբար, իրական թվեր, չնայած, իհարկե, այդ բազմանդամները կարող են ունենալ նաև այնպիսի բաժանարարներ, որոնց ոչ բոլոր գործակիցներն են ռացիոնալ (կամ իրական)։ Այսպես, օրինակ՝

$$f(x)=x^3-3x^2-2x+6, \qquad g(x)=x^3+x^2-2x-2$$

ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը x^2-2 ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամն է, չնայած նրանք ունեն նաև $x-\sqrt{2}$ ընդհանուր բաժանարարը, որի ոչ բոլոր գործակիցներն են ռացիոնալ։

Եթե $d(x)$-ը $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարն է, ապա, ինչպես հետևում է VIII և IX հատկություններից (տե՛ս վերևում), որպես այդ երկու բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար կարելի էր վերցնել նաև $cd(x)$ բազմանդամը, որտեղ c-ն զրոյից տարբեր կամավոր թիվ է։ Ուրիշ խոսքով՝ երկու բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը որոշված է

միայն զրո աստիճանի բազմանդամ արտադրիչի ճշտությամբ։ Ելնելով դրանից, կարելի է պայմանավորվել, որ երկու բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի ավագ անդամի գործակիցը միշտ հավասար լինի մեկի։ Օգտվելով այդ պայմանից, կարելի է ասել, որ երկու բազմանդամներ այն և միայն այն ժամանակ են փոխադարձաբար պարզ, երբ նրանց ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը հավասար է մեկի։ Իրոք, երկու փոխադարձ պարզ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար կարելի է համարել զրոյից տարբեր ցանկացած թիվ, բայց, այն բազմապատկելով իր հակադարձ էլեմենտով, կստանանք մեկ։

Օ ր ի ն ա կ։ Գտնել հետևյալ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը.

$$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x+3, \qquad g(x)=3x^3+10x^2+2x-3։$$

Էվկլիդեսի ալգորիթմը կիրառելով ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների վրա, մենք, որպեսզի խուսափենք կոտորակային գործակիցներից, կարող ենք բաժանելին բազմապատկել կամ բաժանարարը կրճատել զրոյից տարբեր ցանկացած թվով, ընդ որում՝ այդ սկսելով ոչ թե հաջորդական բաժանման ինչ-որ տեղից, այլև հենց այդ բաժանման ընթացքում։ Պարզ է, որ այդ պատճառով կփոփոխվի քանորդը, բայց մեզ հետաքրքրող մնացորդները միայն ձեռք կբերեն զրո աստիճանի ինչ-որ բազմապատկիչներ, որոնք ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը գտնելու համար մեզ չեն խանգարի։

$f(k)$-ը բաժանենք $g(x)$-ի վրա, նախապես $f(x)$-ը բազմապատկելով 3-ով՝

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
3x^4+10x^3+2x^2-3x & x+1 \\ \hline
-x^3-5x^2-9x-9 &
\end{array}$$

(բազմապատկելով մնացորդը −3-ով)

$$\begin{array}{r}
3x^3+15x^2+27x+27 \\
3x^3+10x^2+2x-3 \\ \hline
5x^2+25x+30։
\end{array}$$

Կատարելով կրճատում 5-ի վրա, որպես առաջին մնացորդ կստանանք՝ $r_1(x)=x^2+5x+6$։ $g(x)$-ը բաժանենք $r_1(x)$-ի վրա

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2}
3x^3+15x^2+18x & 3x-5 \\ \cline{1-1}
-5x^2-16x-3 & \\
-5x^2-25x-30 & \\ \cline{1-1}
9x+27։ &
\end{array}$$

Կատարելով կրճատում 9-ի վրա, որպես երկրորդ մնացորդ կստանանք՝ $r_2(x)=x+3$։ Քանի որ՝

$$r_1(x)=r_2(x)(x+2),$$

ապա $r_2(x)$-ը կլինի այն վերջին մնացորդը, որի վրա առանց մնացորդի բաժանվում է նախավերջին մնացորդը: Այդ պատճառով էլ, այն կլինի որոնելի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը՝

$$(f(x),\ g(x))=x+3.$$

Օգտվելով Էվկլիդեսի ալգորիթմից, ապացուցենք հետևյալ թ ե ո ր ե մ ը.

Եթե $d(x)$-ը $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, ապա կարելի է գտնել այնպիսի $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որ

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x), \qquad (3)$$

ընդ որում, եթե $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների աստիճանները մեծ են զրոյից, ապա կարելի է $u(x)$-ի աստիճանը փոքր համարել $g(x)$-ի աստիճանից, իսկ $v(x)$-ի աստիճանը՝ փոքր $f(x)$-ի աստիճանից:

Ապացույցը հիմնված է (2) հավասարությունների վրա: Եթե մենք հաշվի առնենք, որ $r_k(x)=d(x)$, և ընդունենք $u_1(x)=1$, $v_1(x)=-q_k(x)$, ապա (2) հավասարություններից նախավերջինը կտա՝

$$d(x)=r_{k-2}(x)u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x).$$

Տեղադրելով այստեղ $r_{k-1}(x)$-ի արտահայտությունը $r_{k-3}(x)$-ի և $r_{k-2}(x)$-ի միջոցով (2)-ի նախորդ հավասարությունից, մենք կստանանք՝

$$d(x)=r_{k-3}(x)u_2(x)+r_{k-2}(x)v_2(x),$$

որտեղ, պարզ է, $u_2(x)=v_1(x)$, $v_2(x)=u_1(x)-v_1(x)q_{k-1}(x)$: Շարունակելով նույն կերպ (2) հավասարումներով վեր բարձրանալ, մենք, վերջապես, կգանք ապացուցելիք (3) հավասարությանը:

Թեորեմայի երկրորդ պնդումը ապացուցելու համար ենթադրենք, թե (3) հավասարությանը բավարարող $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներն արդեն գտնված են, բայց, օրինակ, $u(x)$-ի աստիճանը մեծ կամ հավասար է $g(x)$-ի աստիճանից: $u(x)$-ը բաժանենք $g(x)$-ի վրա՝

$$u(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

որտեղ $r(x)$-ի աստիճանը փոքր է $g(x)$-ի աստիճանից, և այդ արտահայտությունը տեղադրենք (3)-ի մեջ: Մենք կստանանք՝

$$f(x)r(x)+g(x)[v(x)+f(x)q(x)]=d(x)$$

հավասարությունը: $f(x)$-ի մոտ գրված $r(x)$ արտադրիչի աստիճանն արդեն փոքր է $g(x)$-ի աստիճանից, իսկ միջակ փակագծերում եղած բազմանդամի աստիճանը իր հերթին պետք է փոքր լինի $f(x)$-ի աստիճանից, որովհետև, հակառակ դեպքում, ձախ մասի երկրորդ գումարելիի աստիճանը կլիներ $g(x)f(x)$ արտադրյալի աստիճանից ոչ փոքր, բայց քանի որ առաջին գումարելիի աստիճանը փոքր է այդ արտադրյալի աստիճանից, ուստի և ամբողջ ձախ մասի աստիճանը կլիներ մեծ կամ հավասար $g(x)f(x)$-ի աստիճանին, մինչդեռ, մեր ենթադրության համաձայն, $d(x)$-ի աստիճանը փոքր է ձախ մասի աստիճանից:

Թեորեման ապացուցված է: Միաժամանակ մենք ստացանք, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամներն ունեն ռացիոնալ կամ իրական գործակիցներ, ապա այդ $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամները կարելի է ընտրել այնպես, որ նրանց գործակիցները նույնպես լինեն ռացիոնալ կամ, համապատասխանաբար, իրական թվեր:

Օ ր ի ն ա կ: Գտնենք (3) հավասարությանը բավարարող $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամները, եթե

$$f(x)=x^3-x^2+3x-10, \qquad g(x)=x^3+6x^2-9x-14.$$

Այդ բազմանդամների նկատմամբ կիրառենք Էվկլիդեսի ալգորիթմը, ընդ որում այժմ, բաժանումը կատարելիս, պետք է վարվել այնպես, որ քանորդը չփոխվի, քանի որ այդ քանորդները օգտագործվում են $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամները գտնելիս: Մենք կստանանք հետևյալ հավասարությունների սիստեմը.

$$f(x)=g(x)+(-7x^2+12x+4),$$

$$g(x)=(-7x^2+12x+4)\left(-\frac{1}{7}x-\frac{54}{49}\right)+\frac{235}{49}(x-2),$$

$$-7x^2+12x+4=(x-2)(-7x-2).$$

Այստեղից հետևում է, որ $(f(x),\ g(x))=x-2$ և, որ՝

$$u(x)=\frac{7}{235}x+\frac{54}{235}, \qquad v(x)=-\frac{7}{235}x-\frac{5}{235}.$$

Օգտագործելով մեր ապացուցած թեորեման փոխադարձաբար պարզ բազմանդամների համար, մենք կհանգենք այսպիսի արդյունքի՝

$f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները այն և միայն այն ժամանակ են փոխադարձաբար պարզ, եթե կարելի է գտնել այնպիսի $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որոնք բավարարեն

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

հավասարությանը:

Հիմնվելով սրա վրա, կարելի է ապացուցել մի քանի պարզ, բայց կարևոր թ ե ո ր ե մ ն ե ր փ ո խ ա դ ա ր ձ ա բ ա ր պ ա ր զ բ ա զ մ ա ն դ ա մ ն ե ր ի վ ե ր ա բ ե ր յ ա լ.

ա) Եթե $f(x)$ բազմանդամը փոխադարձաբար պարզ է $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ բազմանդամներից յուրաքանչյուրի հետ, ապա այն փոխադարձաբար պարզ է նաև նրանց արտադրյալի հետ:

Իրոք, համաձայն (4)-ի, գոյություն ունեն այնպիսի $u(x)$ *և* $v(x)$ *բազմանդամներ, որ*

$$f(x)u(x)+\varphi(x)v(x)=1:$$

Բազմապատկելով այդ հավասարությունը $\psi(x)$*-ով, կստանանք՝*

$$f(x)[u(x)\psi(x)]+[\varphi(x)\psi(x)]v(x)=\psi(x),$$

որտեղից հետևում է, որ $f(x)$*-ի և* $\varphi(x)\psi(x)$*-ի յուրաքանչյուր ընդհանուր բաժանարար կլինի բաժանարար նաև* $\psi(x)$*-ի համար, իսկ ըստ պայմանի* $(f(x)\psi(x))=1$:

բ) Եթե $f(x)$-ը և $\varphi(x)$-ը փոխադարձաբար պարզ են և $f(x)g(x)$ արտադրյալը բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա, ապա $g(x)$-ը բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա:

Իրոք, բազմապատկելով

$$f(x)u(x)+\varphi(x)v(x)=1$$

հավասարությունը $g(x)$*-ով, մենք կստանանք՝*

$$[f(x)g(x)]u(x)+\varphi(x)[v(x)g(x)]=g(x):$$

Այդ հավասարության ձախ մասի երկու գումարելիներն էլ բաժանվում են $f(x)$*-ի վրա, նրա վրա, հետևապես, կբաժանվի նաև* $g(x)$*-ը:*

գ) Եթե $f(x)$ բազմանդամը բաժանվում է $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ բազմանդամներից յուրաքանչյուրի վրա, որոնք իրար հետ փոխադարձաբար պարզ են, ապա $f(x)$-ը բաժանվում է նաև նրանց արտադրյալի վրա:

Իրոք, $f(x)=\varphi(x)\bar{\varphi}(x)$*, այնպես որ աջ մասում եղած արտադրյալը բաժանվում է* $\psi(x)$*-ի վրա, այդ պատճառով, ըստ բ)-ի,* $\bar{\varphi}(x)$*-ը բաժանվում է* $\psi(x)$*-ի վրա՝* $\bar{\varphi}(x)=\psi(x)\bar{\psi}(x)$*, որտեղից՝* $f(x)=[\varphi(x)\psi(x)]\bar{\psi}(x)$:

Ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի սահմանումը կարելի է տարածել բազմանդամների ցանկացած վերջավոր սիստեմի վրա. $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ *բազմանդամների* ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար *կոչվում է այդ բազմանդամների այնպիսի ընդհանուր բաժանարարը, որը բաժանվում է այդ բազմանդամների ցանկացած այլ ընդհանուր բաժանարարի վրա: Բազմանդամների ցանկացած վերջավոր սիստեմի համար ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի գոյությունը բխում է հետևյալ թեորեմայից, որը տալիս է նաև այն գտնելու եղանակը.*

$f_1(x)$, $f_2(x)$ ..., $f_s(x)$ **բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը հավասար է $f_s(x)$ բազմանդամի և $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{s-1}(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարին:**

Իրոք, $s=2$ *դեպքի համար թեորեման ակներև է: Այդ պատճառով, ընդունենք, որ այն ճիշտ է* $s-1$ *դեպքի համար, այսինքն՝ մասնավորաբար,* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{s-1}(x)$ *բազմանդամների համար արդեն ապացուցված է նրանց ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար* $d(x)$*-ի գոյությունը:* $d(x)$ *և* $f_s(x)$ *բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը նշանակենք* $\bar{d}(x)$*-ով: Այն կլինի, պարզ է, տված բոլոր բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար: Մյուս կողմից, այդ բազմանդամների ամեն մի այլ ընդհանուր բաժանարար կլինի բաժանարար նաև* $d(x)$*-ի, ուստի և՝* $\bar{d}(x)$*-ի համար:*

Մասնավորաբար, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ *բազմանդամների սիստեմը կոչվում է* փոխադարձաբար պարզ, *եթե այդ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարարներ հանդիսանում են միայն զրո աստիճանի բազմանդամները, այսինքն՝ եթե նրանց ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը հավասար է 1-ի: Եթե* $s>2$, *ապա այդ բազմանդամները զույգ առ զույգ կարող են և փոխադարձաբար պարզ չլինել: Այսպես, օրինակ*

$$f(x)=x^3-7x^2+7x+15, \qquad g(x)=x^2-x-20, \qquad h(x)=x^3+x^2-12x$$

բազմանդամների սիստեմը փոխադարձաբար պարզ է, չնայած՝

$$(f(x),\ g(x))=x-5, \qquad (f(x),\ h(x))=x-3, \qquad (g(x),\ h(x))=x+4:$$

Ընթերցողն առանց դժվարության կարող է ստանալ ապացուցած ա)-գ) թեորեմաների ընդհանրացումը ցանկացած վերջավոր թվով բազմանդամների համար:

§ 22. Բազմանդամների արմատները

Երբ § 20-ում խոսում էինք բազմանդամի հասկացությունը ֆունկցիոնալ-տեսաբանական տեսակետից դիտարկելու մասին, մենք այնտեղ հանդիպեցինք նաև բազմանդամի արժեքների գաղափարին: Հիշենք դրանց սահմանումը.

Եթե

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

որևէ բազմանդամ է, իսկ c*-ն որևէ թիվ է, ապա*

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n$$

թիվը, որն ստացվում է (1) արտահայտության մեջ x *անհայտը* c*-ով* փոխարինելուց և ապա նշված գործողությունները կատարելուց հետո, կոչվում է $f(x)$ **բազմանդամի արժեք** $x=c$-**ի համար**: Պարզ է, որ երբ $f(x)=g(x)$ բազմանդամների § 20-ում սահմանած հանրահաշվական հավասարության իմաստով, ապա՝ $f(c)=g(c)$ ցանկացած c-ի համար:

Հեշտ է տեսնել նաև, որ եթե

$$\varphi(x)=f(x)+g(x), \qquad \psi(x)=f(x)g(x),$$

ապա՝

$$\varphi(c)=f(c)+g(c), \qquad \psi(c)=f(c)g(c):$$

Այլ կերպ ասած, § 20-ում սահմանած բազմանդամների գումարման և բազմապատկման գործողությունները, բազմանդամներին ֆունկցիոնալ-տեսաբանական տեսակետից նայելու դեպքում, դառնում են ֆունկցիաների գումարման և բազմապատկման գործողություններ, նրանց համապատասխան արժեքների գումարման և բազմապատկման իմաստով:

Եթե $f(c)=0$, այսինքն՝ $f(x)$ բազմանդամը դառնում է զրո նրա մեջ x անհայտը c թվով փոխարինելիս, ապա c-ն կոչվում է բազմանդամի (կամ $f(x)=0$ հավասարման) **արմատ**: Հիմա ցույց կտրվի, որ այդ հասկացությունն ամբողջովին վերաբերում է բազմանդամների բաժանականության այն տեսությանը, որը նախորդ պարագրաֆի ուսումնասիրման առարկան էր:

Եթե մենք $f(x)$ բազմանդամը բաժանենք առաջին աստիճանի ցանկացած բազմանդամի վրա (կամ, ինչպես հետագայում ասելու ենք, **գծային երկանդամի վրա**), ապա մնացորդը կլինի կամ զրո աստիճանի բազմանդամ, կամ զրո, այսինքն՝ բոլոր դեպքերում՝ որևէ r թիվ: Հետևյալ թեորեման հնարավորություն է տալիս այդ մնացորդը գտնել՝ առանց բաժանման գործողությունը կատարելու, այն դեպքում, երբ, բաժանումը կատարվում է $x-c$ տեսքի երկանդամի վրա:

$f(x)$ բազմանդամը $x-c$ գծային բազմանդամի վրա բաժանելիս առաջացած մնացորդը հավասար է բազմանդամի $f(c)$ արժեքին $x=c$-ի համար:

Իրոք, դիցուք՝

$$f(x)=(x-c)q(x)+r:$$

Վերցնելով այդ հավասարության երկու մասերի արժեքները $x=c$ համար, մենք կստանանք՝

$$f(c)=(c-c)q(c)+r=r,$$

որը և ապացուցում է թեորեմը:

Այստեղից բխում է այսպիսի բացառիկ կարևոր հետևանք՝

c թիվը այն և միայն այն դեպքում կլինի $f(x)$ բազմանդամի արմատ, եթե $f(x)$-ը բաժանվի $(x-c)$-ի վրա:

Մյուս կողմից, եթե $f(x)$-ը բաժանվում է որևէ առաջին աստիճանի $ax+b$ բազմանդամի վրա, ապա նա բաժանվում է, պարզ է, նաև $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$ բազմանդամի վրա, այսինքն՝ $x-c$ տեսքի բազմանդամի վրա: Այսպիսով, **$f(x)$ բազմանդամի արմատները գտնելը հավասարազոր է նրա գծային բաժանարարները գտնելուն:** Նկատի ունենալով վերևում ասածը, $f(x)$ բազմանդամը $x-c$ գծային երկանդամի վրա բաժանելու հետևյալ մեթոդը բավականին հետաքրքրություն է ներկայացնում, որը ավելի պարզ է, քան բազմանդամների բաժանման ալգորիթմը:

Այդ մեթոդը կոչվում է Հորների մեթոդ: Դիցուք՝

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \tag{2}$$

և դիցուք՝

$$f(x)=(x-c)q(x)+r, \tag{3}$$

որտեղ

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}:$$

(3)-ում x-ի միևնույն աստիճանի գործակիցները բաղդատելով, կստանանք՝

$$\begin{gathered} a_0=b_0, \\ a_1=b_1-cb_0, \\ a_2=b_2-cb_1, \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1}=b_{n-1}-cb_{n-2} \\ a_n=r-cb_{n-1}: \end{gathered}$$

Այստեղից հետևում է, որ $b_0=a_0$, $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, այսինքն՝ b_k գործակիցն ստացվում է նախորդ b_{k-1} գործակիցը c-ով բազմապատկելով և համապատասխան a_k գործակցի հետ գումարելով: Վերջապես, $r=cb_{n-1}+a_n$, այսինքն՝ r մնացորդը նույնպես, որը հավասար է, ինչպես մենք գիտենք, $f(c)$-ի, ստացվում է նույն այդ օրենքով: Այսպիսով, քանորդի գործակիցները և մնացորդը կարելի է հաջորդաբար ստանալ նույնատիպ հաշվումների օգնությամբ, որոնք, ինչպես ցույց է տրված հետևյալ օրինակում, կարելի է դասավորել սխեմայի տեսքով:

1. $f(x)=2x^5-x^4-3x^3+x-3$ բազմանդամը բաժանել $(x-3)$-ի վրա:

Կազմենք մի աղյուսակ, որում գծից վեր դասավորված են $f(x)$ բազմանդամի գործակիցները, գծի տակ դասավորված են քանորդի համապատասխան գործակիցները և մնացորդը, որոնք հաշվվում են հաջորդաբար, իսկ ձախ կողքում գրված է տվյալ օրինակում c-ի արժեքը.

$$\begin{array}{c|llllll} & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 3 & 2, & 3\cdot2-1=5, & 3\cdot5-3=12, & 3\cdot12+0=36, & 3\cdot36+1=109, & 3\cdot109-3=324\end{array},$$

Այսպիսով, որոնելի քանորդը կլինի՝

$$q(x)=2x^4+5x^3+12x^2+36x+109,$$ իսկ մնացորդը՝ $r=f(3)=324$։

2. $f(x)=x^4-8x^3+x^2+4x-9$ բազմանդամը բաժանել $(x+1)$-ի։

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -8 & 1 & 4 & -9 \\ \hline -1 & 1 & -9 & 10 & -6 & -3\end{array},$$

Այդ պատճառով քանորդը կլինի՝

$$q(x)=x^3-9x^2+10x-6,$$

իսկ մնացորդը՝ $r=f(-1)=-3$։

Այդ օրինակները ցույց են տալիս, որ Հորների մեթոդը կարելի է օգտագործել նաև անհայտի տվյալ արժեքի դեպքում բազմանդամի արժեքն արագ հաշվելու համար։

Բազմապատիկ արմատներ։ Եթե c-ն $f(x)$ բազմանդամի արմատն է, այսինքն՝ $f(c)=0$, ապա ինչպես մենք գիտենք, $f(x)$-ը բաժանվում է $(c-x)$-ի վրա։ Կարող է պատահել, որ $f(x)$ բազմանդամը բաժանվի ոչ միայն $(x-c)$ գծային երկանդամի առաջին աստիճանի վրա, այլ նրա ավելի բարձր աստիճանի վրա։ Համենայն դեպս, կգտնվի այնպիսի բնական k թիվ, որ $f(x)$-ը առանց մնացորդի կբաժանվի $(x-c)^k$-ի վրա, բայց $(x-c)^{k+1}$ աստիճանի վրա արդեն չի բաժանվի։ Այդ պատճառով էլ՝

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x),$$

որտեղ $\varphi(x)$ բազմանդամը $(x-c)$-ի վրա արդեն չի բաժանվում, այսինքն՝ c-ն նրա արմատը չի։ Այդպիսի k թիվը կոչվում է c արմատի բազմապատիկություն $f(x)$ բազմանդամում, իսկ c արմատն ինքը՝ այդ բազմանդամի k-պատիկ արմատ։ Եթե $k=1$, ապա ասում են, որ c-ն պարզ արմատ է։

Բազմապատիկ արմատի հասկացությունը սերտորեն կապված է բազմանդամի ածանցյալի հասկացության հետ։ Բայց մենք ուսումնասիրում ենք ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամներ, այդ պատճառով չենք կարող այստեղ պարզապես օգտվել ածանցյալի այն հասկացությունից, որը տրված է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում։ Այն, ինչ-որ ասվելու է ստորև, պետք է դիտել որպես բազ-

մանդամի ածանցյալի՝ մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից անկախ սահմանում։

Դիցուք տրված է n-րդ աստիճանի մի բազմանդամ՝

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով։ Նրա ածանցյալ (կամ առաջին ածանցյալ) կոչվում է

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\dots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

$(n-1)$-րդ աստիճանի բազմանդամը։

Զրո աստիճանի բազմանդամի և զրոյի ածանցյալը համարվում է հավասար զրոյի։ Առաջին ածանցյալի ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ բազմանդամի երկրորդ ածանցյալ և նշանակվում է $f''(x)$-ով և այլն։ Պարզ է, որ՝

$$f^{(n)}(x)=n!a_0$$

և դրա համար էլ՝ $f^{(n+1)}(x)=0$, այսինքն՝ n-րդ աստիճանի բազմանդամի $(n+1)$-րդ ածանցյալը հավասար է զրոյի։

Մենք, կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների դեպքում չենք կարող օգտվել ածանցյալի՝ մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում իրական գործակիցներով բազմանդամների համար ապացուցված հատկություններից և, օգտվելով միայն ածանցյալի վերևում տրված սահմանումից, պետք է այդ հատկությունները նորից ապացուցենք։ Մեզ հետաքրքրում են հետևյալ հատկությունները, որոնք հանդիսանում են, ինչպես ասում են, գումարի և արտադրյալի համար ածանցման բանաձևեր՝

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x), \tag{4}$$

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)։ \tag{5}$$

Իմիջիայլոց, այդ բանաձևերը հեշտ է ստուգել անմիջական հաշվումներով, վերցնելով որպես $f(x)$ և $g(x)$ երկու կամավոր բազմանդամներ, և կիրառելով ածանցյալի վերը տրված սահմանումը։ Այդ ստուգումը մենք թողնում ենք ընթերցողին։

(5) բանաձևն առանց դժվարության տարածվում է ցանկացած վերջավոր թվով արտադրիչների արտադրյալի վրա, դրա շնորհիվ էլ սովորական եղանակով կարելի է արտածել աստիճանի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(f^k(x))'=kf^{k-1}(x)f'(x)։ \tag{6}$$

Մեր նպատակն է ապացուցել հետևյալ թեորեմը.

Եթե c թիվը f(x) բազմանդամի k-պատիկ արմատ է, ապա $k>1$ դեպքում այն կլինի այդ բազմանդամի առաջին ածանցյալի $(k-1)$-պատիկ արմատը, իսկ եթե $k=1$, ապա c-ն $f'(x)$-ի արմատ չի լինի:

Իրոք, դիցուք՝

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x),\quad k\geqslant 1, \tag{7}$$

որտեղ $\varphi(x)$-ն արդեն չի բաժանվում $(x-c)$-ի վրա: Դիֆերենցելով (7) հավասարությունը, կստանանք՝

$$f'(x)=(x-c)^k\varphi'(x)+k(x-c)^{k-1}\varphi(x)=(x-c)^{k-1}[(x-c)\varphi'(x)+k\varphi(x)].$$

Քառակուսի փակագծերի մեջ գրված գումարի առաջին գումարելին բաժանվում է $(x-c)$-ի վրա, իսկ երկրորդ գումարելին չի բաժանվում, այդ պատճառով ամբողջ այդ գումարը $(x-c)$-ի վրա բաժանվել չի կարող: Հաշվի առնելով, որ $f'(x)$-ը $(x-c)^{k-1}$-ի վրա բաժանման քանորդը որոշվում է միարժեքորեն, մենք կստանանք, որ $(x-c)^{k-1}$-ը հանդիսանում է $(x-c)$ երկանդամի այն ամենաբարձր աստիճանը, որի վրա բաժանվում է $f'(x)$ բազմանդամը, որը և պետք էր ապացուցել:

Այդ թեորեմը կիրառելով մի քանի անգամ, մենք ստանում ենք, որ f(x) բազմանդամի k-պատիկ արմատը կլինի $(k-s)$-պատիկ արմատ այդ բազմանդամի s-րդ ածանցյալի համար $k\geqslant s$, և այն չի կարող լինել f(x) բազմանդամի k-րդ ածանցյալի և հաջորդ ածանցյալների արմատը:

§ 23. Հիմնական թեորեմա

Նախորդ պարագրաֆում զբաղվելով բազմանդամի արմատներով, մենք հարց չդրեցինք այն մասին, թե ամե՞ն մի բազմանդամ ունի արմատներ: Հայտնի է, որ գոյություն ունեն իրական գործակիցներով բազմանդամներ, որոնք չունեն իրական արմատներ. օրինակ, այդպիսին է x^2+1 բազմանդամը:

Կարելի էր սպասել, որ գոյություն ունեն բազմանդամներ, որոնք չունեն արմատներ անգամ կոմպլեքս թվերի մեջ, հատկապես երբ դիտարկվում են ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամներ: Եթե իրոք այդ այդպես լիներ, ապա կոմպլեքս թվերի սիստեմը կարիք կզգար հետագա ընդարձակման: Իրականում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որը կոչվում է կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի հիմնական թեորեմա.

Ցանկացած թվային գործակիցներով ամեն մի բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր չէ մեկից, ունի առնվազն մեկ արմատ, ընդհանուր դեպքում՝ կոմպլեքս:

Այդ թեորեմը ողջ մաթեմատիկայի մեծագույն նվաճումներից մեկն է և իր կիրառություններն է գտնում գիտության ամենատարբեր ճյուղերում: Նրա վրա է հիմնված, մասնավորապես, թվային գործակիցներով բազմանդամների հետագա ամբողջ տեսությունը, այդ պատճառով էլ այդ թեորեմն առաջներում (երբեմն հիմա էլ) անվանում էին «բարձրագույն հանրահաշվի հիմնական թեորեմա»: Իրականում, սակայն, հիմնական թեորեման զուտ հանրահաշվական թեորեմա չէ: Նրա բոլոր ապացույցներում, որոնց քանակը XVIII դարի ամենավերջում Գաուսի տված առաջին ապացույցից հետո, բավականին շատ է, շատ կամ քիչ չափով հարկադրաբար օգտագործվել են իրական և կոմպլեքս թվերի, այսպես կոչված, տոպոլոգիական հատկությունները, այսինքն՝ անընդհատության հետ կապված հատկությունները:

Ստորև բերվող ապացույցի մեջ կոմպլեքս գործակիցներով f(x) բազմանդամը կդիտարկվի որպես x կոմպլեքս փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիա: Այսպիսով, x-ը կարող է ընդունել ցանկացած կոմպլեքս արժեքներ կամ, հաշվի առնելով § 17-ում կոմպլեքս թվերի կառուցման եղանակը, կասենք, որ x փոփոխականը փոփոխվում է կոմպլեքս հարթությունում: Կոմպլեքս թվեր կլինեն նաև f(x) բազմանդամի արժեքները: Կարելի է համարել, որ այդ արժեքները նշվում են կոմպլեքս հարթության երկրորդ օրինակի վրա, նման այն բանին, ինչպես իրական փոփոխականից իրական ֆունկցիայի համար՝ անկախ փոփոխականի արժեքները նշվում են մի թվային առանցքի վրա (աբսցիսների առանցքի), իսկ ֆունկցիայի արժեքները՝ մյուս թվային առանցքի վրա (օրդինատների առանցքի):

Անընդհատ ֆունկցիայի՝ մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից ընթերցողին հայտնի սահմանումը տարածվում է նաև կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի վրա, ըստ որում՝ ձևակերպման մեջ բացարձակ արժեքները փոխարինվում են մոդուլներով:

x կոմպլեքս փոփոխականի f(x) կոմպլեքս ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ x_0 կետում, եթե ամեն մի ε իրական դրական թվի համար կարելի է նշել այնպիսի δ իրական դրական թիվ, որ x-ի ցանկացած (ընդհանրապես կոմպլեքս) h աճի համար, որի մոդուլը բավարարում է $|h|<\delta$ պայմանին, բավարարվի նաև

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը:

$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ, եթե նա անընդհատ է ամեն մի x_0 կետում, որտեղ նա որոշված է, այսինքն՝ եթե $f(x)$-ը բազմանդամ է, ապա նա անընդհատ է ամբողջ կոմպլեքս հարթությունում։

Բազմանդամը x կոմպլեքս փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիա է։

Այս թեորեման կարելի էր ապացուցել այնպես, ինչպես այն արվում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում, այն է, նախապես ցույց տալ, որ անընդհատ ֆունկցիաների գումարը և արտադրյալը նույնպես անընդհատ ֆունկցիաներ են, և նկատի ունենալով, որ միշտ միևնույն կոմպլեքս թվին հավասար հաստատուն ֆունկցիան նույնպես անընդհատ ֆունկցիա է։ Բայց մենք կգնանք այլ ճանապարհով։

Նախ ապացուցենք թեորեմայի մասնավոր դեպքը, այն դեպքը, երբ $f(x)$ բազմանդամի ազատ անդամը հավասար է զրոյի, ըստ որում, ապացուցենք միայն $f(x)$-ի անընդհատությունը $x_0=0$ կետում։ Այլ կերպ ասած, մենք ապացուցենք հետևյալ լեմման (h-ի տեղ մենք գրում ենք x)։

Լեմմա 1. Եթե $f(x)$ բազմանդամի ազատ անդամը հավասար է զրոյի՝

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x,$$

այսինքն՝ $f(0)=0$, ապա ամեն մի $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է ընտրել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ $|x|<\delta$ պայմանին բավարարող բոլոր x-երի համար տեղի ունենա $|f(x)|<\varepsilon$ պայմանը։

Իրոք, դիցուք՝

$$A=\max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|)։$$

ε թիվը մեզ արդեն տված է, ցույց տանք, որ եթե որպես δ վերցնենք

$$\delta=\frac{\varepsilon}{A+\varepsilon} \qquad (1)$$

թիվը, ապա այն կբավարարի պահանջվող պայմանին։

Իրոք,

$$|f(x)|\leqslant|a_0||x|^n+|a_1||x|^{n-1}+\dots+|a_{n-1}||x|\leqslant A(|x|^n+|x|^{n-1}+\dots+|x|),$$

այսինքն՝

$$|f(x)|\leqslant A\frac{|x|-|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Քանի որ $|x|<\delta$ և, ըստ (1), $\delta<1$, ապա՝

$$\frac{|x|-|x|^{n+1}}{1-|x|}<\frac{|x|}{1-|x|},$$

և դրա համար էլ՝

$$|f(x)|<\frac{A|x|}{1-|x|}<\frac{A\delta}{1-\delta}=\frac{A\frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}}{1-\frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}}=\varepsilon,$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել։

Այժմ արտածենք հետևյալ բանաձևը։ Դիցուք տված է կամայական կոմպլեքս գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

բազմանդամը։ Այստեղ x-ի փոխարեն տեղադրենք $x+h$, որտեղ h-ը երկրորդ անհայտն է։ Աջ մասի յուրաքանչյուր $(x+h)^k$ աստիճանը, $k\leqslant n$, բացելով ըստ Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի և իմի հավաքելով h-ի նույն աստիճանի անդամները, մենք կստանանք, ինչպես ընթերցողը առանց դժվարության կստուգի, հետևյալ հավասարությունը.

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x),$$

այսինքն՝ Թեյլորի բանաձևը, *որը տալիս է $f(x+h)$-ի վերածումը ըստ h «աճի» աստիճանների։*

Կամայական $f(x)$ բազմանդամի անընդհատությունը ցանկացած x_0 կետում ապացուցվում է այժմ հետևյալ կերպ։

Ըստ Թեյլորի բանաձևի՝

$$f(x_0+h)-f(x_0)=c_1h+c_2h^2+\dots+c_nh^n=\varphi(h),$$

որտեղ՝

$$c_1=f'(x_0), \qquad c_2=\frac{1}{2!}f''(x_0), \ \dots, \ c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)։$$

Այստեղ $\varphi(h)$ բազմանդամը h-ի նկատմամբ բազմանդամ է՝ առանց ազատ անդամի, այդ պատճառով, ըստ 1-ին լեմմայի, ամեն մի $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է ընտրել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ $|h|<\delta$ դեպքում լինի $|\varphi(h)|<\varepsilon$, այսինքն՝

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել։

Օգտվելով § 18-ի (13) բանաձևից, կարելի է գրել՝

$$||f(x_0+h)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x_0+h)-f(x_0)|։$$

Այստեղից և բազմանդամի անընդհատության ապացույցից բխում է

$f(x)$ բազմանդամի $|f(x)|$ մոդուլի անընդհատությունը։ *Այդ մոդուլը, պարզ է, որ հանդիսանում է իրական ոչ բացասական ֆունկցիա* x *կոմպլեքս փոփոխականից։*

Այժմ կապացուցենք մի քանի լեմմաներ, որոնք կօգտագործվեն հիմնական թեորեման ապացուցելիս։

Լեմմա ավագ անդամի մոդուլի մասին։ Եթե տված է n-րդ ($n \geqslant 1$) աստիճանի բազմանդամ՝

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

որի գործակիցները կամայական կոմպլեքս թվեր են և եթե k-ն ցանկացած իրական դրական թիվ է, ապա x անհայտի ըստ մոդուլի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում տեղի ունի

$$|a_0x^n|>K|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n| \tag{2}$$

անհավասարությունը, այսինքն՝ ավագ անդամի մոդուլը դառնում է մեծ մնացած անդամների գումարի մոդուլից, այն էլ՝ ցանկացած անգամ։

Իրոք, դիցուք A-*ն* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *գործակիցների մոդուլներից ամենամեծն է՝*

$$A=\max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)։$$

Այդ դեպքում (տե՛ս § 18-ում կոմպլեքս թվերի գումարի և արտադրյալի մոդուլների հատկությունը) կարող ենք գրել՝

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n|\leqslant|a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}+\dots$$

$$\dots+|a_n|\leqslant A(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\dots+1)=A\frac{|x|^n-1}{|x|-1}։$$

Ընդունելով $x>1$, *կստանանք՝*

$$\frac{|x|^n-1}{x-1}<\frac{|x|^n}{|x|-1},$$

որտեղից՝

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n|<A\cdot\frac{|x|^n}{|x|-1}։$$

Այսպիսով, (2) անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե x-*ը բացի* $|x|>1$ *անհավասարությունից, բավարարի նաև*

$$KA\frac{|x|^n}{|x|-1}\leqslant|a_0x^n|=|a_0||x|^n$$

անհավասարությանը, այսինքն եթե՝

$$|x|\geqslant\frac{KA}{|a_0|}+1։ \tag{3}$$

Քանի որ (3) անհավասարության աջ մասը մեծ է 1-ից, ապա կարելի է պնդել, որ այդ անհավասարությանը բավարարող x-*ի արժեքների համար տեղի ունի (2) անհավասարությունը, որը և ապացուցում է լեմման։*

Լեմմա բազմանդամի մոդուլի աճման մասին։ Կոմպլեքս գործակիցներով ամեն մի $f(x)$ բազմանդամի համար, որի աստիճանը մեկից փոքր չէ, և ամեն մի ցանկացած չափով մեծ M իրական դրական թվի համար կարելի է ընտրել այնպիսի իրական դրական N թիվ, որ $|x|>N$ դեպքում լինի $|f(x)|>M$։

Դիցուք՝ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$։

Ըստ § 18-ի (11) բանաձևի՝

$$|f(x)|=|a_0x^n+(a_1x^{n-1}+\dots+a_n)|\geqslant|a_0x^n|-|a_1x^{n-1}+\dots+a_n|։ \tag{4}$$

Կիրառելով ավագ անդամի մոդուլի մասին լեմման $k=2$-*ի համար, կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի այնպիսի* N_1 *թիվ, որ* $|x|>N_1$ *դեպքում կլինի՝*

$$|a_0x^n|>2|a_1x^{n-1}+\dots+a_n|։$$

Այստեղից՝

$$|a_1x^{n-1}+\dots+a_n|<\frac{1}{2}|a_0x^n|,$$

այսինքն՝ ըստ (4)-ի,

$$|f(x)|>|a_0x^n|-\frac{1}{2}|a_0x^n|=\frac{1}{2}|a_0x^n|։$$

Այս անհավասարության աջ մասը կլինի M-*ից մեծ, երբ*

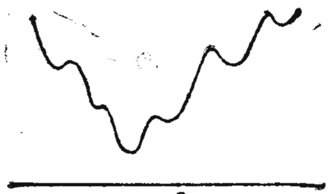
$$|x|>N_2=\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}։$$

Այսպիսով, երբ $x>N=\max(N_1, N_2)$ *կունենանք՝* $|f(x)|>M$։

Այս լեմմայի իմաստը կարելի է պարզաբանել հետևյալ երկրաչափական պատկերման միջոցով, որն այս պարագրաֆում կօգտագործվի մի քանի անգամ։ Ենթադրենք, թե կոմպլեքս հարթության ամեն մի x_0 *կետում այդ հարթությանը կանգնեցրած է ուղղահայաց, որի երկարությունը (տված մասշտաբի միավորի համար) հավասար է այդ կետում բազմանդամի արժեքի մոդուլին, այսինքն՝ հավասար է* $|f(x_0)|$։

Ուղղահայացների ծայրերը, համաձայն բազմանդամի մոդուլի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմայի, կկազմեն որոշ անընդհատ մակերևույթ, որը տեղավորված կլինի կոմպլեքս հարթությունից վերև։ Բազմանդամի մոդուլի աճման մասին լեմման ցույց է տալիս, որ $|x_0|$-ի աճման հետ միաժամանակ այդ մակերևույթն ավելի և ավելի է հեռանում կոմպլեքս հարթությունից, չնայած պարզ է, որ այդ հեռացումը մոնոտոն լինել չի կարող։ Գծ. 8-ում սխեմատիկորեն ցույց է տրված այդ մակերևույթի և 0 կետով անցնող ու կոմպլեքս հարթության ուղղահայաց հարթության հատման գիծը։

Հիմնական թեորեմայի ապացույցում կարևոր դեր է խաղում հետևյալ լեմման։



0

Գծ. 8.

Դալամբերի լեմման։ Եթե $x=x_0$ դեպքում n-րդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը $(n\geqslant 1)$ չի դառնում զրո՝ $f(x_0)\neq 0$, և այդ պատճառով $|f(x_0)|>0$, ապա կարելի է գտնել այնպիսի h աճ, ընդհանրապես կոմպլեքս, որ $|f(x_0+h)|<|f(x_0)|$։

Ըստ Թեյլորի բանաձևի, քանի դեռ h-ի արժեքը կամավոր է, կունենանք՝

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\text{։}$$

Ըստ պայմանի, x_0-ն $f(x)$-ի համար արմատ չէ։ Բայց, պատահաբար այդ թիվը կարող է լինել $f'(x)$-ի արմատ, նաև կարող է լինել հաջորդ ածանցյալներից մի քանիսի արմատ ևս։ Ուստի թո՛ղ k-րդ ածանցյալը $(k\geqslant 1)$ լինի x_0 կետում զրոյից տարբեր ածանցյալներից առաջինը, այսինքն՝

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0\text{։}$$

Այդպիսի k գոյություն ունի, քանի որ, եթե a_0-ն $f(x)$ բազմանդամի ավագ անդամի գործակիցն է, ապա՝

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_0\neq 0\text{։}$$

Այսպիսով՝

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\text{։}$$

Իհարկե, կարող են $f(x_0)^{(k+1)}, \dots, f(x_0)^{(n-1)}$ թվերից մի քանիսը ևս հավասար լինել զրոյի, բայց այդ մեզ համար էական չէ։

Այդ հավասարության երկու մասն էլ բաժանելով $f(x_0)$-ի վրա, որը ըստ պայմանի, զրոյից տարբեր է, և կատարելով

$$c_j=\frac{f^{(j)}(x)}{j!f(x_0)},\qquad j=K,\ K+1,\ \dots\ n$$

նշանակումները, մենք կստանանք՝

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=1+c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+\dots+c_nh^n$$

կամ, քանի որ $c_k\neq 0$՝

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=(1+c_kh^k)+c_kh^k\left(\frac{c_{k+1}}{c_k}h+\dots+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right)\text{։}$$

Անցնելով մոդուլներին, կստանանք՝

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right|\leqslant|1+c_kh^k|+|c_kh^k|\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}n+\dots+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right|\text{։}\tag{5}$$

Մինչև այժմ մենք h աճի վերաբերյալ ոչ մի նախնական ենթադրություն չէինք արել։ Հիմա մենք *կընտրենք* h-ը, ըստ որում նրա մոդուլն առանձին կընտրենք, արգումենտն՝ առանձին։ Մոդուլը կընտրենք հետևյալ կերպ։ Քանի որ

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}h+\dots+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}$$

հանդիսանում է h-ի նկատմամբ բազմանդամ առանց ազատ անդամի, ապա 1-ին լեմմայի համաձայն (համարելով $\varepsilon=\frac{1}{2}$), կարելի է գտնել այնպիսի δ_1, որ $|h|<\delta_1$ դեպքում տեղի ունենա՝

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}h+\dots+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right|<\frac{1}{2}\text{։}\tag{6}$$

Մյուս կողմից,

$$|h|<\delta_2=\sqrt[k]{|c_k|^{-1}}$$

դեպքում կլինի՝

$$|c_kh^k|<1\text{։}\tag{7}$$

Համարենք, որ h-ի մոդուլը ընտրված է

$$|h|<\min(\delta_1,\delta_2)\tag{8}$$

անհավասարությանը համապատասխան։ Այդ դեպքում, (6)-ի շնորհիվ, (5) անհավասարությունը դառնում է խիստ անհավասարություն՝

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right|<|1+c_kh^k|+\frac{1}{2}|c_kh^k|,\tag{9}$$

(7) պայմանից մենք կօգտվենք հետո։

h-ի արգումենտն ընտրելու համար պահանջենք, որպեսզի $c_k h^k$ թիվը լինի իրական բացասական թիվ։ Այլ խոսքով՝

$$\arg(c_k h^k)=\arg c_k+K\arg h=\pi,$$

որտեղից՝

$$\arg h=\frac{\pi-\mathrm{arh}c_k}{k}, \qquad (10)$$

h-ի այսպիսի ընտրության դեպքում $c_k h^k$ թիվը իր բացարձակ արժեքից կտարբերվի միայն նշանով՝

$$c_k h^k=-|c_k h^k|,$$

այդ պատճառով, օգտվելով (7)-ից, մենք կարող ենք գրել՝

$$|1+c_k h^k|=|1-|c_k h^k||=1-|c_k h^k|.$$

Հետևապես, h-ը ընտրելով (8) և (10) պայմաններով, (9) անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right|<1-|c_k h^k|+\frac{1}{2}|c_k h^k|=1-\frac{1}{2}|c_k h^k|,$$

այսինքն՝ առավել ևս՝

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right|=\frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|}<1,$$

որտեղից հետևում է՝

$$|f(x_0)+h)|<|f(x_0)|,$$

որը և ապացուցում է Դալամբերի լեմման։

Վերը տրված երկրաչափական պատկերման օգնությամբ կարելի է Դալամբերի լեմման լուսաբանել հետևյալ կերպ։ Տված է, որ $|f(x_0)|>0$։ Այդ նշանակում է, որ x_0 կետում կոմպլեքս հարթությանը կանգնեցրած ուղղահայացի երկարությունը զրոյից տարբեր է։ Այդ դեպքում, ըստ Դալամբերի լեմմայի, կարելի է գտնել այնպիսի $x_1=x_0+h$ կետ, որ $|f(x_1)|<|f(x_0)|$, այսինքն՝ x_1 կետում կանգնեցրած ուղղահայացն ավելի կարճ է քան x_0 կետում կանգնեցրած ուղղահայացը և, հետևապես, ուղղահայացների ծայրերով կազմված մակերևույթը այդ կետում կլինի որոշ չափով ավելի մոտ կոմպլեքս հարթությանը։ Ինչպես ցույց է տալիս լեմմայի ապացույցը, h-ի մոդուլը կարելի է համարել ցանկացած չափով փոքր, այսինքն՝ x_1 կետը կարելի է ընտրել x_0 կետին ցանկացած չափով մոտ, սակայն մենք հետագայում չենք օգտվելու մեր այս դիտողությունից։

Պարզ է, որ $f(x)$ բազմանդամի արմատներ կլինեն այն կոմպլեքս

թվերը (այսինքն՝ կոմպլեքս հարթության այն կետերը), որոնցում ուղղահայացների ծայրերով առաջացած մակերևույթը շոշափում է կոմպլեքս հարթությանը։ Հենվելով միայն Դալամբերի լեմմայի վրա, այդպիսի կետերի գոյությունը հնարավոր չէ ապացուցել։ Իրոք, ըստ այդ լեմմայի, կարելի է միայն ընտրել x_0, $x_1, \dots$ կետերի այնպիսի անվերջ հաջորդականություն, որ

$$|f(x_0)|>|f(x_1)|>|(f(x_2)|>\dots. \qquad (11)$$

Բայց այդտեղից երբեք չի բխում այնպիսի $\bar{x}$ կետի գոյությունը, որ $f(\bar{x})=0$, առավել ևս, որ իրական դրական թվերի անվերջ նվազող (11) հաջորդականությունը երբեք էլ պարտավոր չէ զրոյի ձգտելու։

Հետագա ուսումնասիրությունը հիմնված կլինի կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մի թեորեմայի վրա, որը հանդիսանում է Վայերշտրասի թեորեմայի ընդհանրացումը, որ հայտնի է ընթերցողին մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից։ Այն վերաբերում է կոմպլեքս փոփոխականի իրական ֆունկցիաներին, այսինքն՝ կոմպլեքս փոփոխականի այնպիսի ֆունկցիաներին, որոնք ընդունում են միայն իրական արժեքներ։ Այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ է ծառայում բազմանդամի մոդուլը։ Այդ թեորեմայի ձևակերպման մեջ պարզության համար կխոսենք E փակ շրջանի մասին, դրա տակ հասկանալով կոմպլեքս հարթության մի շրջան, որին միացված են նրա եզրագծի բոլոր կետերը։

Եթե x կոմպլեքս փոփոխականի $g(x)$ իրական ֆունկցիան անընդհատ է E փակ շրջանի բոլոր կետերում, ապա E շրջանում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ E-ի ամեն մի x կետի համար տեղի ունի $g(x)\geqslant g(x_0)$ անհավասարությունը։ Հետևապես, այդպիսի x_0 կետը հանդիսանում է $g(x)$-ի համար մինիմումի կետ E շրջանում։

Այս թեորեմայի ապացույցը կարելի է գտնել կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության ցանկացած դասընթացում, ուստի մենք այն չենք բերելու։

Սահմանափակվելով այն դեպքով, երբ E շրջանի բոլոր կետերում $g(x)$ ֆունկցիան բացասական չէ (միայն այդ դեպքն էլ այժմ մեզ հետաքրքրում է), լուսաբանենք այդ թեորեման այն երկրաչափական պատկերման միջոցով, որն արդեն օգտագործվել է վերևում։ E շրջանի ամեն մի x_0 կետում կանգնեցնենք ուղղահայաց՝ $g(x_0)$ երկարությամբ։ Այդ ուղղահայացների ծայրերը կազմում են E շրջանի վրա մի կտոր անընդհատ մակերևույթ, ըստ որում, E շրջանի փակության շնորհիվ, այդ մի կտոր մակերևույթի համար մինիմումի կետերի գոյությունը երկրաչափորեն դառնում է բավականին պարզ։ Այս լուսաբանումը, իհարկե, չի փոխարինում թեորեմայի ապացույցին։

Այժմ մենք ի վիճակի ենք անցնելու հիմնական թեորեմալի անմիջական ապացույցին։ Դիցուք տված է n աստիճանի $(n \geqslant 1)$ $f(x)$ բազմանդամը։ Եթե նրա ազատ անդամը a_n-ն է, ապա պարզ է, որ $f(0)=a_n$։ Մեր բազմանդամի նկատմամբ կիրառենք բազմանդամի մոդուլի աճման լեմման՝ ընդունելով $M=|f(0)|=|a_n|$։ Գոյություն ունի, հետևապես, այնպիսի N, որ $|x|>N$ դեպքում կլինի $|f(x)|>|f(x_0)|$։ Պարզ է, այնուհետև, որ Վայերշտրասի թեորեմայի վերը բերված ընդհանրացումը կիրառելի է $|f(x)|$ ֆունկցիայի նկատմամբ ցանկացած E շրջանում։ Որպես E շրջան մենք վերցնենք O կենտրոնով և N շառավիղ ունեցող փակ շրջանը։ Դիցուք x_0 կետը $|f(x)|$ ֆունկցիայի համար մինիմումի կետ է E շրջանում, որտեղից, մասնավորապես, բխում է, որ $|f(x_0)| \leqslant |f(0)|$։

Հեշտ է տեսնել, որ x_0-ն իրոք կհանդիսանա $|f(x)|$-ի համար մինիմումի կետ ամբողջ կոմպլեքս հարթությունում. եթե x' կետը E-ից դուրս է, ապա $|x'|>N$ և դրա համար՝

$$|f(x')|>|f(0)|\geqslant|f(x_0)|.$$

Այստեղից հետևում է, վերջապես, որ $f(x_0)=0$, այսինքն՝ x_0-ն $f(x)$-ի համար արմատ է. եթե լիներ $f(x_0)\neq 0$, ապա, համաձայն Դալամբերի լեմմայի, գոյություն կունենար այնպիսի x_1 կետ, որ $|f(x_1)|<|f(x)_0|$։ Բայց այդ հակասում է x_0 կետի հենց նոր ցույց տրված հատկությանը։

Նկատենք, որ հիմնական թեորեմայի մի ուրիշ ապացույց կտրվի § 55-ում։

§ 24. Հետևանքներ հիմնական թեորեմայից

Դիցուք տրված է n-րդ աստիճանի $(n\geqslant 1)$ ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

բազմանդամը։ Մենք նորից այն դիտարկում ենք որպես ձևական-հանրահաշվական արտահայտություն, որը լրիվին որոշվում է իր գործակիցների կարգավորված հավաքածուով։ Նախորդ պարագրաֆում ապացուցված արմատի գոյության մասին հիմնական թեորեման թույլ է տալիս պնդելու, որ $f(x)$ բազմանդամի համար գոյություն ունի α_1 իրական կամ կոմպլեքս արմատ։ Այդ պատճառով, $f(x)$ բազմանդամը վերլուծվում է

$$f(x)=(x-\alpha_1)\varphi(x)$$

տեսքով։ Այստեղ $\varphi(x)$ բազմանդամի գործակիցները նորից իրական

կամ կոմպլեքս թվեր են և այդ պատճառով $\varphi(x)$-ն ունի α_2 արմատ, որտեղից՝

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\psi(x).$$

Շարունակելով այդպես, վերջավոր թվով քայլերից հետո մենք կստանանք n-րդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամի վերլուծումը n գծային արտադրիչների՝

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n). \qquad (2)$$

a_0 գործակիցը հանդես եկավ հետևյալ պատճառով. եթե (2) արտահայտության աջ կողմում լիներ մի b գործակից, ապա փակագծերը բացելուց հետո $f(x)$-ի ավագ անդամը կունենար bx^n տեսքը, մինչդեռ իրականում, ըստ (1)-ի, այն հանդիսանում է a_0x^n անդամը։ Այդ պատճառով $b=a_0$։

(2) վերլուծումը հանդիսանում է $f(x)$ բազմանդամի այդ տեսքի միակ վերլուծումը արտադրիչների կարգի ճշտությամբ։

Իրոք, դիցուք գոյություն ունի

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n) \qquad (3)$$

վերլուծումը ևս։ Համաձայն (2) և (3) հավասարությունների, կստանանք

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n) \qquad (4)$$

հավասարությունը։ Եթե α_i արմատը լիներ բոլոր β_j-րից, $(j=1, 2, \dots, n)$ տարբեր, ապա (4)-ում անհայտի տեղ տեղադրելով α_i, մենք կստանայինք ձախ մասում զրո, իսկ աջ մասում՝ զրոյից տարբեր թիվ։ Այսպիսով, ամեն մի α_i արմատ հավասար է որևէ β_j արմատի և հակառակը։

Այստեղից դեռևս չի բխում (2) և (3) վերլուծումների համընկնումը։ Իրոք, α_i արմատների մեջ $(i=1, 2, \dots, n)$ կարող են լինել իրար հավասարներ։ Օրինակի համար, α_1 արմատին հավասար կարող են լինել α_i արմատներից s հատ, իսկ β_j $(j=1, 2 \dots, n)$ արմատներից՝ t հատ, Մենք պետք է ապացուցենք, որ $s=t$։

Քանի որ բազմանդամների արտադրյալի աստիճանը հավասար է արտադրիչների աստիճանների գումարին, ապա զրոյից տարբեր երկու բազմանդամների արտադրյալը չի կարող հավասար լինել զրոյի։ Այստեղից բխում է, որ եթե բազմանդամների երկու արտադրյալներ հավասար են իրար, ապա հավասարության երկու մասն էլ կարելի է կրճատել ընդհանուր արտադրիչով. եթե՝

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$$

և $\varphi(x)\neq 0$, ապա՝

$$[f(x)-g(x)]\varphi(x)=0$$

հավասարությունից բխում է՝

$$f(x)-g(x)=0$$

այսինքն՝

$$f(x)=g(x)։$$

Այս կիրառենք (4) հավասարությանը. եթե, օրինակի համար, $s>t$, ապա (4) հավասարության երկու մասերը կրճատելով $(x-\alpha_1)^t$-ով, մենք կգանք այնպիսի հավասարության, որի ձախ մասը դեռևս կպարունակի $x-\alpha_1$ արտադրիչ, իսկ աջ մասը չի պարունակի այդպիսին։ Բայց վերևում ցույց ենք տվել, որ այդ բերում է հակասության։ Այսպիսով, $f(x)$ բազմանդամի համար (2) վերլուծման միակությունը ապացուցված է։

(2) վերլուծման մեջ միատեսակ արտադրիչները մի տեղ հավաքելով, այն կարտագրենք հետևյալ տեսքով.

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l}, \tag{5}$$

որտեղ՝

$$k_1+k_2+\dots+k_l=n,$$

ընդ որում համարում ենք, որ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ արմատների մեջ արդեն հավասարներ չկան։

Ապացուցենք, որ (5)-ից վերցրած k_i թիվը $(i=1, 2, \dots, l)$ α_i արմատի բազմապատիկությունն է։ Իրոք, եթե այդ բազմապատիկությունը հավասար է s_i-ի, ապա $k_i\leqslant s_i$։ Դիցուք $k_i<s_i$։ Արմատի բազմապատիկության սահմանման համաձայն, $f(x)$-ի համար տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը.

$$f(x)=(x-\alpha_i)^{s_i}\varphi(x)։$$

Այս վերլուծման մեջ $\varphi(x)$-ը փոխարինելով իր գծային արտադրիչների արտադրյալով, մենք $f(x)$-ի համար կստանայինք գծային արտադրիչների այնպիսի վերլուծում, որը կանխահայտորեն տարբեր կլիներ (2) վերլուծումից, այսինքն՝ կհանգեինք հակասության վերն ապացուցած վերլուծման միակությանը, ուստի $k_i=s_i$։

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք հետևյալ կարևոր արդյունքը.

Ցանկացած թվային գործակիցներով ամեն մի n-րդ աստիճանի $(n\geqslant 1)$ բազմանդամ ունի n հատ արմատ, եթե յուրաքանչյուր արմատը հաշվենք այնքան անգամ, որքան նրա բազմապատիկությունն է։

Նկատենք, որ մեր թեորեման ճիշտ է նաև $n=0$ դեպքում, քանի որ զրո աստիճանի բազմանդամը, պարզ է, արմատներ չունի։ Այդ թեորեման կիրառելի չէ միայն 0 բազմանդամի նկատմամբ, որն աստիճան չունի և x-ի ցանկացած արժեքի համար հավասար է զրոյի։ Մենք կօգտվենք այս վերջին դիտողությունից հետևյալ թեորեման ապացուցելիս.

Եթե $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները, որոնց աստիճանները n-ից մեծ չեն, x անհայտի n-ից ավելի թվով արժեքների համար ընդունում են հավասար արժեքներ, ապա $f(x)=g(x)$։

Իրոք, $f(x)-g(x)$ բազմանդամը, ըստ պայմանի, ունի ավելի քան n արմատ, բայց նրա աստիճանը չի անցնում n-ից, ուստի տեղի ունի $f(x)-g(x)=0$։

Այսպիսով, հաշվի առնելով, որ տարբեր թվերի քանակն անվերջ շատ է, կարելի է պնդել, որ **ցանկացած երկու $f(x)$ և $g(x)$ տարբեր բազմանդամների համար կգտնվեն անհայտի այնպիսի c արժեքներ, որ $f(c)\neq g(c)$**։ Այդպիսի c արժեքներ կարելի է գտնել ոչ միայն կոմպլեքս թվերի մեջ, այլ նաև իրական թվերի, ռացիոնալ թվերի և մինչև անգամ՝ ամբողջ թվերի մեջ։

Հետևապես, թվային գործակիցներով երկու բազմանդամները, որոնք x անհայտի որևէ աստիճանի մոտ ունեն տարբեր գործակիցներ, կլինեն x կոմպլեքս փոփոխականի տարբեր կոմպլեքս ֆունկցիաներ։ Դրանով, վերջապես, ապացուցված է թվային գործակիցներով բազմանդամների համար § 20-ում բերված նրանց հավասարության երկու տարբեր՝ հանրահաշվական և տեսաբանական-ֆունկցիոնալ սահմանումների հավասարազորությունը։

Վերն ապացուցած թեորեման հնարավորություն է տալիս պնդելու, որ **n-ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամը լրիվ որոշվում է իր այնպիսի արժեքներով, որոնք նա ստանում է x անհայտի n-ից ավելի թվով իրարից տարբեր ցանկացած արժեքների դեպքում**։ Կարելի՞ է արդյոք բազմանդամի այդ արժեքները տալ կամայական կերպով։ Եթե ընդունենք, որ տրվում են բազմանդամի արժեքները անհայտի $n+1$ տարբեր արժեքների համար, ապա այդ հարցի պատասխանը կլինի դրական, այսինքն՝ միշտ գոյություն ունի n-ից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ, որն անհայտի տրված $(n+1)$ հատ տարբեր արժեքների համար ընդունում է նախապես տրված $(n+1)$ հատ արժեքները։

Իսկապես, դիցուք պահանջվում է կառուցել n-ից ոչ ավելի աստիճանի բազմանդամ, որը x անհայտի $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ իրարից տարբեր արժեքների համար ընդունում է համապատասխանաբար $c_1, c_2, \dots, c_{n+}$ արժեքները։ Այդպիսի բազմանդամ կլինի՝

$$f(x=\sum_{i=1}^{n+}\frac{c_i(x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_{n+1})}, \tag{6}$$

Իրոք, նրա աստիճանը n-ից մեծ չէ և $f(a_i)$ արժեքը հավասար է c_i-ի։

Այդ (6) բանաձևը կոչվում է **Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բա-**

ճառն։ «Ինտերպոլյացիոն» անվանումը կապված է այն բանի հետ, որ այդ բանաձևով կարելի է հաշվել բազմանդամի արժեքները ցանկացած կետերում, եթե միայն հայտնի են նրա արժեքները $n+1$ կետերում։

Վիետի բանաձևերը։ Դիցուք տված է n-րդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը, որի ավագ անդամի գործակիցը հավասար է մեկի՝

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \tag{7}$$

և դիցուք $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ թվերը նրա արմատներն են[1]։ Այդ դեպքում $f(x)$-ն ունի հետևյալ վերլուծումը՝

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)։$$

Բազմապատկելով աջ կողմում եղած փակագծերը, միացնելով նման անդամները և համեմատելով ստացված գործակիցները (7)-ի գործակիցների հետ, մենք կստանանք հետևյալ հավասարությունները, որոնք կոչվում են Վիետի բանաձևեր և արտահայտում են բազմանդամի գործակիցները նրա արմատների միջոցով՝

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n),$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\dots\alpha_{n-1}\alpha_n,$$
$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\dots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_n+\dots+\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n)$$
$$a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n։$$

Այսպիսով, k-րդ հավասարության մեջ $(k=1, 2, \dots, n)$ աջ մասում գրված է այդ n արմատներից բոլոր k-ական արմատների արտադրյալների գումարը, վերցրած դրական կամ բացասական նշանով, կախված k-ի զույգ կամ կենտ լինելուց։

$n=2$ դեպքում այդ բանաձևերը տալիս են տարրական հանրահաշվից հայտնի քառակուսի եռանդամի գործակիցների և արմատների կապը։ $n=3$ դեպքում, այսինքն՝ խորանարդ բազմանդամի համար, այդ բանաձևերը ընդունում են հետևյալ տեսքը.

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \qquad a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3, \qquad a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3։$$

Վիետի բանաձևերը հեշտացնում են բազմանդամի գրելը նրա տրված արմատների միջոցով։ Այսպես, գտնենք չորրորդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը, եթե նրա

[1] Այստեղ ամեն մի արմատը վերցված է համապատասխան բազմապատիկությամբ։

պարզ արմատներն են 5-ը և −2-ը, իսկ կրկնապատիկ արմատ է 3-ը։ Մենք կստանանք՝

$$a_1=-(5-2+3+3)=-9,$$
$$a_2=-5\cdot(-2)+5\cdot3+5\cdot3+(-2)\cdot3+(-2)\cdot3+3\cdot3=17,$$
$$a_3=-[5\cdot(-2)\cdot3+5\cdot(-2)\cdot3+5\cdot3\cdot3+(-)\cdot3\cdot3]=33,$$
$$a_4=5\cdot(-2)\cdot3\cdot3=-90,$$

դրա համար էլ՝

$$f(x)=x^4-9x^3+17x^2+33x-90։$$

Եթե $f(x)$ բազմանդամի ավագ անդամի a_0 գործակիցը տարբեր է 1-ից, ապա Վիետի թեորեման կիրառելու համար նախապես հարկավոր է բոլոր գործակիցները բաժանել a_0-ի վրա, որ բազմանդամի արմատների վրա, պարզ է, չի ազդում։ Այսպիսով, այդ դեպքում Վիետի բանաձևերը տալիս են բոլոր գործակիցների հարաբերությունները ավագ անդամի գործակցին։

Իրական գործակիցներով բազմանդամներ։ Այժմ կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի հիմնական թեորեմայից կարտածենք մի քանի հետևանքներ, որոնք վերաբերում են իրական գործակիցներով բազմանդամներին։ Ըստ էության հենց այդ հետևանքների վրա է հիմնված հիմնական թեորեմայի այն մեծ նշանակությունը, որի մասին ասվեց վերևում։

Դիցուք իրական գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

բազմանդամը ունի α կոմպլեքս արմատը, այսինքն՝

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\dots+a_{n-1}\alpha+a_n=0։$$

Մենք գիտենք, որ վերջին հավասարությունը չի խախտվի, եթե նրա մեջ բոլոր թվերը փոխարինենք իրենց համալուծներով։ Բայց բոլոր $a_0, a_1, \dots, a_n$ գործակիցները, ինչպես և աջ մասում գրված 0-ն իրական թվեր են և այդ փոխարինման ժամանակ մնում են անփոփոխ և մենք ստանում ենք

$$a_0\bar{\alpha}^n+a_1\bar{\alpha}^{n-1}+\dots+a_{n-1}\bar{\alpha}+a_n=0$$

հավասարությունը, այսինքն՝

$$f(\bar{\alpha})=0։$$

Այսպիսով, եթե α կոմպլեքս (բայց ոչ իրական) թիվը հանդիսանում է $f(x)$ իրական գործակիցներով բազմանդամի արմատ, ապա նրա համալուծը ևս կհանդիսանա $f(x)$ բազմանդամի արմատ։

Հետևապես, $f(x)$ բազմանդամը կբաժանվի

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha} \tag{8}$$

քառակուսի եռանդամի վրա, որի գործակիցները, ինչպես մենք գիտենք § 18-ից, իրական են: Օգտվելով դրանից, ցույց տանք, որ α և $\bar{\alpha}$ արմատները $f(x)$ բազմանդամի մեջ ունեն նույն բազմապատիկությունը:

Դիցուք այդ արմատները համապատասխանաբար ունեն k և l բազմապատիկությունները և թող, օրինակի համար, $k>l$: Այդ դեպքում $f(x)$-ը կբաժանվի $\varphi(x)$ բազմանդամի l աստիճանի վրա՝

$$f(x)=\varphi^l(x)g(x).$$

Քանի որ $f(x)$ և $\varphi^l(x)$ բազմանդամների գործակիցները իրական են, ապա $q(x)$ բազմանդամը, որպես այդ բազմանդամների քանորդ, նույնպես կլինի իրական գործակիցներով բազմանդամ, բայց ի հակասություն վերը ապացուցածի, $q(x)$-ը ունի α $(k-l)$-պատիկ արմատը, բայց որի համար $\bar{\alpha}$-ը արմատ չի հանդիսանում: Այստեղից հետևում է, որ $k=l$:

Այսպիսով, այժմ կարելի է ասել, որ ամեն մի իրական գործակիցներով բազմանդամի կոմպլեքս արմատները զույգ առ զույգ համալուծ են: Այստեղից և բազմանդամը (2) տեսքով վերլուծելու միակությունից, որ ապացուցեցինք վերևում, բխում է հետևյալ վերջնական արդյունքը.

Իրական գործակիցներով ամեն մի բազմանդամ ներկայացվում է ընդ որում՝ արտադրիչների կարգի ճշտությամբ միակ կերպով, որպես $x-\alpha$ տեսքի գծային երկանդամների, (8) տեսքի քառակուսի եռանդամների և ավագ գործակցի արտադրյալ, որտեղ $x-\alpha$ տեսքի երկանդամները համապատասխանում են նրա իրական արմատներին, իսկ (8) տեսքի քառակուսի եռանդամները՝ համալուծ կոմպլեքս արմատների զույգերին:

Հետագայի համար օգտակար է ընդգծել, որ իրական գործակիցներով բազմանդամների մեջ, որոնց ավագ անդամի գործակիցը հավասար է 1-ի, ավելի ցածր աստիճանի արտադրիչների չեն վերածվում կամ, ինչպես մենք կասենք՝ անվերածելի բազմանդամներ են միայն $x-\alpha$ տեսքի գծային և (8) տեսքի քառակուսի բազմանդամները:

§ 25*. Ռացիոնալ կոտորակներ

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում, բացի ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիաներից, որոնք մենք բազմանդամներ անվանեցինք, ուսումնասիրվում են նաև կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաները. դրանք կլինեն երկու ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիաների հարաբերություն՝ $\frac{f(x)}{g(x)}$, որտեղ $g(x)\neq 0$: Այդ ֆունկցիաների հետ կատարում

են հանրահաշվական գործողությունները այնպես, ինչպես ռացիոնալ թվերի հետ, այսինքն՝ ինչպես ամբողջ հայտարար և համարիչ ունեցող կոտորակների հետ: Երկու կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաների կամ, ինչպես հետագայում կասենք՝ ռացիոնալ կոտորակների հավասարությունը նույնպես այն իմաստով է հասկացվում, ինչ որ թվաբանության մեջ կոտորակների հավասարությունը: Որոշակիության համար մենք կդիտարկենք իրական գործակիցներով ռացիոնալ կոտորակները: Ընթերցողը առանց դժվարության կնկատի, որ այս պարագրաֆի ամբողջ բովանդակությունը կարելի է համարյա բառ առ բառ շարադրել կոմպլեքս գործակիցներով ռացիոնալ կոտորակների համար:

Ռացիոնալ կոտորակը կոչվում է անկրճատելի, եթե նրա համարիչը փոխադարձաբար պարզ է հայտարարի հետ:

Ամեն մի ռացիոնալ կոտորակ հավասար է մի որոշ անկրճատելի կոտորակի, որը որոշվում է համարիչի և հայտարարի համար միևնույն զրո աստիճանի արտադրիչի ճշտությամբ:

Իրոք, յուրաքանչյուր ռացիոնալ կոտորակ կարելի է կրճատել համարիչի և հայտարարի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարով, որից հետո կստացվի նրան հավասար անկրճատելի կոտորակ: Այնուհետև, եթե $\frac{f(x)}{g(x)}$ և $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ անկրճատելի կոտորակներն իրար հավասար են, այսինքն՝

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x), \tag{1}$$

ապա $f(x)$-ի և $g(x)$-ի փոխադարձ պարզությունից, ըստ § 21-ի բ) հատկության, հետևում է, որ $\varphi(x)$-ը բաժանվում է $f(x)$-ի վրա, իսկ $\varphi(x)$-ի և $\psi(x)$-ի փոխադարձ պարզությունից բխում է, որ $f(x)$-ն էլ բաժանվում է $\varphi(x)$-ի վրա: Այսպիսով, $f(x)=c\varphi(x)$ և այդ դեպքում (1)-ից հետևում է, որ $g(x)=c\psi(x)$:

Ռացիոնալ կոտորակը կոչվում է կանոնավոր, եթե համարիչի աստիճանը փոքր է հայտարարի աստիճանից: Եթե կանոնավոր կոտորակների թվին վերագրենք նաև 0 բազմանդամը, ապա արդարացի է հետևյալ թեորեման.

Ամեն մի ռացիոնալ կոտորակ ներկայացնելի է, ընդ որում միակ եղանակով, բազմանդամի և կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով:

Իրոք, եթե տված է $\frac{f(x)}{g(x)}$ ռացիոնալ կոտորակը և եթե, համարիչը հայտարարի վրա բաժանելով, մենք ստանում ենք

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

հավասարությունը, որտեղ $r(x)$-ի աստիճանը փոքր է $g(x)$-ի աստիճանից, ապա, ինչպես հեշտ է ստուգել,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

Եթե տեղի ունենա նաև

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\bar{q}(x)+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

հավասարությունը, որտեղ $\varphi(x)$-ի աստիճանը $\psi(x)$-ի աստիճանից փոքր է, ապա մենք կունենանք

$$q(x)-\bar{q}(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)g(x)-\psi(x)r(x)}{\psi(x)g(x)}$$

հավասարությունը: Քանի որ ձախ կողմում բազմանդամ է, իսկ ինչպես հեշտ է տեսնել, աջ կողմում՝ կանոնավոր կոտորակ, ապա մենք կստանանք $q(x)-\bar{q}(x)=0$ և

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=0:$$

Կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակները կարելի է ենթարկել հետագա ուսումնասիրման: Այդ կապակցությամբ հիշենք, որ, ինչպես նշված է նախորդ պարագրաֆի վերջում, անվերածելի իրական բազմանդամները լինում են $x-\alpha$ տեսքի, որտեղ α-ն իրական թիվ է, և $x^2-(\beta+\bar{\beta})x+\beta\bar{\beta}$ տեսքի, որտեղ β-ն և $\bar{\beta}$-ը համալուծ կոմպլեքս թվեր են: Ինչպես հեշտ է ստուգել, կոմպլեքս գործակիցների դեպքում նման դեր են կատարում $x-\alpha$ տեսքի բազմանդամները, որտեղ α-ն ցանկացած կոմպլեքս թիվ է:

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակը կոչվում է* պարզագույն *կոտորակ, եթե նրա $g(x)$ հայտարարը հանդիսանում է մի $p(x)$ անվերածելի բազմանդամի աստիճան՝*

$$g(x)=p^k(x), \qquad k\geqslant 1,$$

իսկ $f(x)$ համարիչի աստիճանն էլ փոքր է $p(x)$-ի աստիճանից: Արդարացի է հետևյալ հ ի մ ն ա կ ա ն թ ե ո ր ե մ ա ն.

Ամեն մի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ վերլուծվում է պարզագույն կոտորակների գումարի:

Ա պ ա ց ու յ ց: Նախ դիտարկենք $\dfrac{f(x)}{g(x)h(x)}$ *կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակը, որտեղ, $g(x)$ և $h(x)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են՝*

$$(g(x),\ h(x))=1:$$

Հետևաբար, համաձայն § 21-ի գոյություն ունեն այնպիսի $\bar{u}(x)$և $\bar{v}(x)$ բազմանդամները, որ՝

$$g(x)\bar{u}(x)+h(x)\bar{v}(x)=1:$$

Այստեղից՝

$$g(x)[\bar{u}(x)f(x)]+h(x)[\bar{v}(x)f(x)]=f(x): \tag{2}$$

Դիցուք, $\bar{u}(x)f(x)$-ը $h(x)$-ի վրա բաժանելիս, ստանում ենք $u(x)$ մնացորդը, որի աստիճանը փոքր է $h(x)$-ի աստիճանից: Այդ դեպքում (2) հավասարությունը կարելի է արտագրել այսպես՝

$$g(x)u(x)+h(x)v(x)=f(x), \tag{3}$$

որտեղ $v(x)$ բազմանդամի արտահայտությունը կարելի է առանց դժվարության գրել: Քանի որ $g(x)u(x)$ արտադրյալի աստիճանը փոքր է $g(x)h(x)$ արտադրյալի աստիճանից և նույն բանը, ըստ պայմանի, ճիշտ է նաև $f(x)$ բազմանդամի համար, ապա $h(x)v(x)$ արտադրյալի աստիճանը նույնպես փոքր է $g(x)\,h(x)$-ի աստիճանից, այդ պատճառով էլ $v(x)$-ի աստիճանը փոքր է $g(x)$-ի աստիճանից: Այժմ (3)-ից բխում է

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}=\frac{v(x)}{g(x)}+\frac{u(x)}{h(x)}$$

հավասարությունը, որի աջ մասն էլ հանդիսանում է հենց կանոնավոր կոտորակների գումար:

Եթե $g(x)$ և $h(x)$ հայտարարներից գոնե մեկը վերածվում է փոխադարձ պարզ արտադրիչների, ապա կարելի է կատարել հետագա վերածում: Շարունակելով այդպես, մենք կստանանք, որ ամեն մի կանոնավոր կոտորակ վերլուծվում է մի քանի կանոնավոր կոտորակների գումարի, որոնցից յուրաքանչյուրի հայտարարը մի որոշ անվերածելի բազմանդամի աստիճան է:

Ավելի ճիշտ, եթե տված է $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *կանոնավոր կոտորակը, որի հայտարարը վերածված է անվերածելի բազմանդամների արտադրյալի՝*

$$g(x)=p_1^{k_1}(x)\cdot p_2^{k_2}(x)\dots p_l^{k_l}(x)$$

(միշտ կարելի է համարել, որ ռացիոնալ կոտորակի հայտարարի ավագ անդամի գործակիցը հավասար է մեկի), ըստ որում $p_i(x)\neq p_j(x)$, երբ $i\neq j$, ապա՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}+\frac{u_2(x)}{p_2^{k_2}(x)}+\dots+\frac{u_l(x)}{p_l^{k_l}(x)},$$

որի աջ մասի բոլոր գումարելիները կանոնավոր կոտորակներ են:

Մեզ մնում է դիտարկել $\dfrac{u(x)}{p^k(x)}$ *տեսքի կանոնավոր կոտորակը, որտեղ $p(x)$-ը անվերածելի բազմանդամ է: Կիրառելով մնացորդով բաժանման* ալգորիթմը, $u(x)$-ը բաժանենք $p^{k-1}(x)$-ի վրա, ստացված մնացորդը բաժանենք $p^{k-2}(x)$-ի վրա և այլն։

Մենք կհանգենք հետևյալ հավասարություններին.

$$\begin{aligned} u(x)&=p^{k-1}(x)s_1(x)+u_1(x),\\ u_1(x)&=p^{k-2}(x)s_2(x)+u_2(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{k-2}(x)&=p(x)s_{k-1}(x)+u_{k-1}(x)։\end{aligned}$$

Քանի որ $u(x)$-ի աստիճանը, ըստ պայմանի, փոքր է $p^k(x)$-ի աստիճանից, և $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$ մնացորդներից յուրաքանչյուրի աստիճանը փոքր է համապատասխան $p^{k-i}(x)$ բաժանարարի աստիճանից, ապա բոլոր $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., $s_{k-1}(x)$ քանորդների աստիճանները կլինեն խստորեն փոքր $p(x)$-ի աստիճանից։ Վերջին $u_{k-1}(x)$ մնացորդի աստիճանը նույնպես կլինի $p(x)$-ի աստիճանից փոքր։ Ստացված հավասարություններից հետևում է՝

$$u(x)=p^{k-1}(x)s_1(x)+p^{k-2}(x)s_2(x)+\ldots+p(x)s_{k-1}(x)+u_{k-1}(x)։$$

Այստեղից մենք հանգում ենք $\dfrac{u(x)}{p^k(x)}$ ռացիոնալ կոտորակի ներկայացմանը պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով՝

$$\frac{u(x)}{p^k(x)}=\frac{u_{k-1}(x)}{p^k(x)}+\frac{s_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)}+\ldots+\frac{s_2(x)}{p^2(x)}+\frac{s_1(x)}{p(x)},$$

Հիմնական թեորեմն ապացուցված է։ Այն կարելի է լրացնել հետևյալ *միակության թեորեմով*.

Ամեն մի կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ միակ կերպով է վերլուծվում պարզագույն կոտորակների գումարի։

Դիցուք որևէ կանոնավոր կոտորակ երկու տարբեր ձևով ներկայացվում է որպես պարզագույն կոտորակների գումար։ Հանելով այդ ներկայացումներից մեկից մյուսը և կատարելով նման անդամների միացում, մենք կստանանք պարզագույն կոտորակների գումարը նույնությամբ հավասար զրոյի։ Թո՛ղ այդ գումարը կազմող պարզագույն կոտորակների հայտարարները լինեն $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)$ անվերածելի բազմանդամների որոշ աստիճանները և թո՛ղ այդ հայտարարները հանդիսացող $p_i(x)$ բազմանդամի ամենաբարձր աստիճանը լինի $p_i^{k_i}(x)$-ն, $i=1, 2, \ldots, s$։ Բազմապատկենք ստացված հավասարության երկու մասն էլ $p^{k_1-1}(x)\cdot p_2^{k_2}(x)\ldots p_s^{k_s}(x)$ արտադրյալով։ Մեր գումարի բոլոր գումարելիները, բացի մեկից, կդառնան բազմանդամներ։ Ինչ վերաբերում է $\dfrac{u(x)}{p_1^{k_1}(x)}$ գումարելիին, ապա այն կմնա կոտորակ, որի հայտարարը կլինի $p_1(x)$-ը, իսկ համարիչը՝ $u(x)p_2^{k_2}(x)\cdot p_3^{k_3}(x)\ldots p_s^{k_s}(x)$ արտադրյալը։ Համարիչը լրիվ չի բաժանվում հայտարարի վրա, որովհետև

$p_1(x)$-ը անվերածելի է, իսկ համարիչի բոլոր արտադրիչները փոխադարձաբար պարզ են $p_i(x)$-ի հետ։ Կատարելով մնացորդով բաժանումը, մենք վերջում կստանանք, որ բազմանդամի և զրոյից տարբեր կանոնավոր կոտորակի գումարը հավասար է զրոյի, որ, սակայն, հնարավոր չէ։

Օրինակ։ Վերածել պարզագույն կոտորակների գումարի $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ իրական կանոնավոր կոտորակը. որտեղ,

$$\begin{aligned} f(x)&=2x^4-10x^3+7x^2+4x+3\\ g(x)&=x^5-2x^3+2x^2-3x+2։\end{aligned}$$

Հեշտ է ստուգել, որ

$$g(x)=(x+2)(x-1)^2(x^2+1),$$

ըստ որում $(x+2)$, $(x-1)$, (x^2+1) բազմանդամներից յուրաքանչյուրն անվերածելի է։ Վերը շարադրած տեսություններից բխում է, որ որոնելի վերլուծումը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}, \tag{4}$$

որտեղ A, B, C, D և E թվերը պետք է դեռ որոշվեն։

(4)-ից բխում է, որ՝

$$\begin{aligned} f(x)=A(x-1)^2(x^2+1)+B(x+2)(x^2+1)+C(x+2)(x-1)(x^2+1)+\\ +Dx(x+2)(x-1)^2+E(x+2)(x-1)^2։\end{aligned} \tag{5}$$

Հավասարեցնելով x-ի միևնույն աստիճանի գործակիցները (5) հավասարման աջ և ձախ մասերում, մենք կստանանք հինգ գծային հավասարումներ հինգ՝ A, B, C, D, E անհայտների նկատմամբ, ըստ որում, ինչպես հայտնի է վերը ապացուցածից այդ սիստեմն ունի լուծում, այն էլ՝ միակը։ Բայց մենք գնանք այլ ճանապարհով։

(5) հավասարման մեջ ընդունելով $x=-2$, մենք կհանգենք $45A=135$ հավասարմանը, որտեղից՝

$$A=3։ \tag{6}$$

Այնուհետև (5)-ում ընդունելով $x=1$, մենք կստանանք $6B=6$, այսինքն՝

$$B=1։ \tag{7}$$

Դրանից հետո, (5) հավասարման մեջ հաջորդաբար ընդունենք $x=0$, $x=-1$։ Օգտվելով (6)-ից և (7)-ից, մենք կստանանք հետևյալ հավասարումները.

$$\left.\begin{aligned} -2C+2E&=-2,\\ -4C-4D+4E&=-8,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

որտեղից՝

$$D=1։ \tag{9}$$

Վերջապես, (5) հավասարման մեջ ընդունենք $x=2$, օգտվելով (6), (7) և (9)-ից, մենք կստանանք՝

$$20C+4E=-52,$$

որը (8) հավասարումներից առաջինի հետ տալիս է՝

$$C=-2,\quad E=-3։$$

Այսպիսով՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{x-3}{x^2+1},$$

ԳԼՈՒԽ ՎԵՑԵՐՈՐԴ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ

§ 26. Քառակուսային ձևի բերումը կանոնական տեսքի

Քառակուսային ձևերի տեսության արմատները գտնվում են անալիտիկ երկրաչափության մեջ, այն է՝ երկրորդ կարգի կորերի (և մակերևույթների) տեսության մեջ։ Հայտնի է, որ հարթության վրա երկրորդ կարգի կենտրոնավոր կորի հավասարումը, երբ կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխում ենք այդ կորի կենտրոնը, ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=D. \qquad (1)$$

Հայտնի է նաև, որ կարելի է կատարել կոորդինատների առանցքների այնպիսի պտտում մի որոշ α անկյան տակ, այսինքն՝ կատարել այնպիսի անցում x, y կոորդինատներից x', y' կոորդինատներին՝

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

որ մեր կորի հավասարումը այդ նոր կոորդինատների նկատմամբ ունենա «կանոնական» տեսք՝

$$A'x'^2+C'y'^2=D. \qquad (3)$$

այս հավասարման մեջ $x'\cdot y'$ արտադրյալի գործակիցը հավասար է զրոյի։ Կոորդինատների (2) ձևափոխությունը կարելի է մեկնաբանել որպես անհայտների գծային ձևափոխություն (տե՛ս § 13), այն էլ չվերասերված, քանի որ նրա գործակիցներից կազմված դետերմինանտը հավասար է մեկի։ Այդ ձևափոխությունը կիրառվում է (1) հավասարման ձախ մասին՝ այդ պատճառով էլ կարելի է ասել, որ (1) հավասարման ձախ մասը (2) գծային չվերասերված ձևափոխությամբ բերվում է (3) հավասարման ձախ մասին։

Բազմաթիվ կիրառությունները պահանջում են ստեղծել նման տեսություն այն դեպքի համար, երբ անհայտների թիվը երկուսի փոխարեն հավասար է ցանկացած n-ի, իսկ գործակիցներն էլ իրական կամ ցանկացած կոմպլեքս թվեր են։

Ընդհանրացնելով (1) հավասարման ձախ մասում եղած արտահայտությունը, մենք հանգում ենք հետևյալ հասկացությանը.

Դիցուք տրված են x_1, $x_2, \ldots, x_n$ անհայտները։ **Քառակուսային** f **ձև** այդ n անհայտներից կոչվում է այն գումարը, որի անդամներ հանդիսանում են այդ անհայտների քառակուսիները և երկու տարբեր անհայտների արտադրյալները՝ վերցրած որոշ թվային գործակիցներով։ Քառակուսային ձևը կոչվում է **իրական** կամ **կոմպլեքս**, կախված նրանից, իրակա՞ն են քառակուսային ձևի գործակիցները, թե՞ կամայական կոմպլեքս թվեր են։

Համարելով, որ f քառակուսային ձևում արդեն կատարված է նման անդամների միացումը, այդ ձևի համար մուծենք գործակիցների հետևյալ նշանակումները. x_i^2-ու գործակիցը նշանակենք a_{ii}-ով, իսկ $x_ix_j(i\neq j)$ արտադրյալի գործակիցը՝ $2a_{ij}$-ով (համեմատե՛լ (1)-ի հետ)։ Քանի որ $x_ix_j=x_jx_i$, ապա այդ արտադրյալի գործակիցը հնարավոր է նաև նշանակել $2a_{ji}$-ով, այսինքն՝ մեր մուծած նշանակումներում համարվում է իրավացի

$$a_{ji}=a_{ij} \qquad (4)$$

հավասարությունը։

Այժմ $2a_{ij}x_ix_j$ անդամը կարելի է գրել այսպես՝

$$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i,$$

իսկ ամբողջ f քառակուսային ձևը գրել որպես բոլոր հնարավոր $a_{ij}x_ix_j$ տեսքի անդամների գումար, որտեղ i-ն և j-ն արդեն իրարից անկախ ընդունում են 1-ից n արժեքները՝

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad (5)$$

մասնավորաբար, $i=j$ դեպքում ստացվում է $a_{ii}x_i^2$ անդամը։

a_{ij} գործակիցներից կարելի է կազմել n-րդ կարգի $A=(a_{ij})$ քառակուսի մատրից. այն կոչվում է f **քառակուսային ձևի մատրից**, իսկ նրա r ռանգը՝ **քառակուսային ձևի ռանգ**։ Եթե, մասնավորաբար $r=n$, այսինքն՝ մատրիցը չվերասերվող է, ապա քառակուսային ձևն էլ կոչվում է **չվերասերվող**։ Համաձայն (4) հավասարության, A մատրիցի մեջ գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ սիմետրիկ էլեմենտներն իրար հավասար են, այսինքն՝ A մատրիցը **սիմետրիկ** է։ Հակադարձաբար, n-րդ կարգի ամեն մի սիմետրիկ մատրիցի համար կարելի է նշել լիովին որոշակի մի (5) քառակուսային ձև n անհայտներից, որին գործակիցներ են ծառայում A մատրիցի էլեմենտները։

Օգտվելով § 14-ում շարադրած ուղղանկյուն մատրիցների բազմապատկումից, կարելի է (5) քառակուսային ձևը գրել այլ տեսքով։ Նախ պայմանավորվենք կատարել հետևյալ նշանակումը. եթե տված է քառակուսի կամ ընդհանրապես ուղղանկյուն A մատրիցը, ապա A′-ով նշանակենք A մատրիցի շրջումից առաջացած մատրիցը։ Եթե A և B մատրիցները այնպիսիք են, որ նրանց արտադրյալը սահմանված է, ապա տեղի ունի

$$(AB)'=B'A' \tag{6}$$

հավասարությունը, այսինքն՝ **արտադրյալի շրջումից առաջացած մատրիցը հավասար է արտադրիչների շրջումից առաջացած մատրիցների արտադրյալին՝** արտադրիչները վերցրած հակառակ կարգով։

Իրոք, եթե AB արտադրյալը սահմանված է, ապա դժվար չէ ստուգել, որ սահմանված կլինի նաև B′A′ արտադրյալը. B′ մատրիցի սյուների քանակը հավասար է A′ մատրիցի տողերի քանակին։ (AB)′ մատրիցի i-րդ տողում և j-րդ սյունում գտնվող էլեմենտը AB մատրիցում գտնվում է j-րդ տողում և i-րդ սյունում։ Այդ պատճառով, այն հավասար է A մատրիցի j-րդ տողի և B մատրիցի i-րդ սյան համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարին, այսինքն՝ հավասար է A′ մատրիցի j-րդ սյան և B′ մատրիցի i-րդ տողի համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարին։ Դրանով (6) հավասարությունը ապացուցված է։

Նկատենք, որ A **մատրիցը այն և միայն այն ժամանակ է սիմետրիկ, եթե նա համընկնում է** իր շրջվածի հետ, **այսինքն՝ եթե**

$$A'=A:$$

Նշանակենք X-ով $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից կազմված սյունը՝

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

X-ը հանդիսանում է n տողերով և մեկ սյունով մատրից։ Շրջելով այդ մատրիցը, կստանանք մեկ տողից կազմված մատրից՝

$$X'=(x_1, x_2, \cdot \cdot \cdot, x_n).$$

$A=(a_{ij})$ մատրիցով (5) քառակուսային ձևն այժմ կարելի է գրել հետևյալ արտադրյալի տեսքով.

$$f=X'AX. \tag{7}$$

Իրոք, AX արտադրյալը կլինի մեկ սյունանի մատրից՝

$$AX=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

Այդ մատրիցը ձախից բազմապատկելով X′ մատրիցով, կստանանք մեկ տողանի և մեկ սյունանի «մատրից», որը (5) հավասարության աջ մասն է։

Ինչ տեղի կունենա f քառակուսային ձևի հետ, եթե նրա մեջ մտնող $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների նկատմամբ կիրառվի $Q=(q_{ik})$ մատրիցով

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} q_{ik}y_k, \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

գծային ձևափոխությունը։ Ըստ որում ընդունում ենք, որ եթե f ձևը իրական է, ապա Q մատրիցի էլեմենտները ևս իրական են։ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ անհայտներով կազմված սյունը նշանակելով Y-ով, մենք (8) գծային ձևափոխությունը կարող ենք գրել մատրիցային հավասարության տեսքով՝

$$X=QY. \tag{9}$$

որտեղից, ըստ (6)-ի,

$$X'=Y'Q'. \tag{10}$$

(9)-ը և (10)-ը տեղադրելով (7)-ում, կստանանք՝

$$f=Y'(Q'AQ)Y,$$

կամ՝

$$f=Y'BY,$$

որտեղ՝

$$B=Q'AQ.$$

B մատրիցը սիմետրիկ է, քանի որ, ըստ (6) հավասարության, որն, ակներևաբար, ճիշտ է ցանկացած թվով արտադրիչների համար, և A′=A հավասարության, որը համարժեք է A մատրիցի սիմետրիկության, կունենանք՝

$$B'=Q'A'Q=Q'AQ=B.$$

Այսպիսով, ապացուցված է հետևյալ թեորեման.

n անհայտներից քառակուսային ձևը, որն ունի A մատրիցը, անհայտների նկատմամբ Q մատրիցով գծային ձևափոխություն կատարելուց հետո, դառնում է նոր անհայտների նկատմամբ այնպիսի քառակուսային ձև, որի մատրից է ծառայում $Q'AQ$ արտադրյալ մատրիցը:

Դիցուք այժմ մենք կիրառում ենք չվերասերված գծային ձևափոխություն, այսինքն՝ Q մատրիցը, և դրա համար էլ նաև Q' մատրիցը չվերասերված են։ $Q'AQ$ արտադրյալը այդ դեպքում ստացվում է A մատրիցը չվերասերվող մատրիցներով բազմապատկելով և այդ պատճառով, ինչպես հետևում է § 14-ից, $Q'AQ$ արտադրյալի ռանգը հավասար է A մատրիցի ռանգին։ Այսպիսով, քառակուսային ձևի ռանգը չի փոխվում չվերասերված գծային ձևափոխություն կատարելով:

Սույն պարագրաֆի սկզբում նշված երկրորդ կարգի կենտրոնավոր կորի հավասարումը (3) կանոնական տեսքին բերելու երկրաչափական խնդրի նմանությամբ, այժմ դիտարկենք քառակուսային ձևը որևէ չվերասերված գծային ձևափոխության օգնությամբ անհայտների քառակուսիների գումարի տեսքի բերելու հարցը, այսինքն՝ այնպիսի տեսքի բերելու հարցը, որտեղ տարբեր անհայտների արտադրյալների բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի. քառակուսային ձևի այդ հատուկ տեսքը կոչվում է կանոնական տեսք։ Նախ ենթադրենք, թե $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից f քառակուսային ձևը չվերասերվող գծային ձևափոխության օգնությամբ արդեն բերված է կանոնական տեսքի՝

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2, \tag{11}$$

որտեղ $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ը նոր անհայտներ են։ Իհարկե, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ գործակիցներից ոմանք կարող են հավասար լինել զրոյի։ Ապացուցենք, որ (11)-ում զրոյից տարբեր գործակիցների թիվը հավասար է f ձևի ռանգին:

Իրոք, քանի որ մենք (11) տեսքին հանգեցինք չվերասերվող գծային ձևափոխության օգնությամբ, ապա (11) հավասարության աջ մասում գտնվող քառակուսային ձևը նույնպես պետք է ունենա r ռանգը։ Իսկ այդ քառակուսային ձևի մատրիցն անկյունագծային տեսք ունի՝

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & O \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{pmatrix},$$

ուստի այդ մատրիցի ռանգի r լինելը հավասարազոր է նրա գլխավոր անկյունագծի վրա ճիշտ r հատ զրոյից տարբեր էլեմենտներ լինելուն։

Անցնենք քառակուսային ձևերի մասին հետևյալ հիմնական թեորեմայի ապացուցմանը.

Ամեն մի քառակուսային ձև կարելի է չվերասերվող գծային ձևափոխության միջոցով բերել կանոնական տեսքի: Ընդ որում, եթե դիտարկվում է իրական քառակուսային ձև, ապա նիշյալ գծային ձևափոխության բոլոր գործակիցները կարելի է համարել նույնպես իրական:

Այդ թեորեման ճիշտ է մեկ անհայտից քառակուսային ձևի համար, որովհետև այդպիսի ամեն մի ձև ունի ax^2 տեսքը, որը կանոնական տեսք է։ Հետևապես, մենք կարող ենք ապացույցը տանել ինդուկցիայի մեթոդով՝ ըստ անհայտների թվի, այսինքն՝ թեորեման ճիշտ համարել n-ից քիչ անհայտներից բոլոր քառակուսային ձևերի համար և ապացուցել այն n անհայտներից քառակուսային ձևերի համար։

Դիցուք տրված է $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{12}$$

քառակուսային ձևը։ Մենք ձգտենք գտնել այնպիսի չվերասերվող գծային ձևափոխություն, որը f-ից անջատեր որևէ անհայտի քառակուսին, այսինքն՝ f-ը բերեր այդ անհայտի քառակուսու և մնացած անհայտներից որևէ քառակուսային ձևի գումարի տեսքի։ Այդ բանին հեշտ է հասնել, եթե $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ գործակիցների մեջ, որոնք ընկած են A մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա, կա զրոյից տարբեր գործակից, այսինքն՝ եթե (12)-ի մեջ կա զրոյից տարբեր գործակցով գոնե մեկ x_i անհայտի քառակուսի։

Դիցուք, օրինակի համար, $a_{11}\neq 0$։ Այն ժամանակ, ինչպես դժվար չէ ստուգել, $a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2$ արտահայտությունը, որը քառակուսային ձև է, պարունակում է x_1 անհայտով այնպիսի անդամներ, ինչպիսիք պարունակում է մեր f ձևը, ուստի

$$f-a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)^2=g$$

տարբերությունը կլինի միայն $x_2, x_3, \ldots, x_n$ անհայտները պարունակող քառակուսային ձև։ Այստեղից՝

$$f=a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)^2+g.$$

Եթե մենք կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\quad y_i=x_i,\ i=2,3,\ldots,n, \tag{13}$$

ապա կստանանք՝

$$f=a_{11}^{-1}y_1^2+g, \tag{14}$$

որտեղ g-ն այժմ կլինի քառակուսային ձև $y_2, y_3, \ldots, y_n$ անհայտներից։ Հենց (14) արտահայտությունը կլինի որոնելի արտահայտությունը f քառակուսային ձևի համար, քանի որ այն (12)-ից ստացվել է գծային չվերասերվող ձևափոխությամբ, այն է՝ (13) գծային ձևափոխության հակադարձ գծային ձևափոխությամբ, որի դետերմինանտը հավասար է $a_{11}^{-1}\neq 0$ և այդ պատճառով վերասերված չէ։

Իսկ եթե տեղի ունեն $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$, ապա նախապես հարկավոր է կատարել օժանդակ գծային (չվերասերվող) ձևափոխություն, որը մեր f ձևից առաջացնի անհայտի քառակուսի պարունակող նոր քառակուսային ձև։ Քանի որ f քառակուսային ձևում պետք է լինի զրոյից տարբեր գործակցով անդամ (հակառակ դեպքում ոչինչ չէր մնա ապացուցելու), ուստի թո՛ղ, օրինակ, $a_{12}\neq 0$, այսինքն՝ f-ը հանդիսանում է $2a_{12}x_1x_2$ անդամի և մնացած անդամների գումար, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է $x_3, x_4, \ldots, x_n$ անհայտներից գոնե մեկը։

Այժմ կատարենք հետևյալ գծային ձևափոխությունը.

$$x_1=z_1-z_2,\quad x_2=z_1+z_2,\quad x_i=z_i,\quad i=3, 4, \ldots, n. \tag{15}$$

Այն կլինի չվերասերվող, քանի որ նրա դետերմինանտը

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Այդ ձևափոխության հետևանքով $2a_{12}x_1x_2$ անդամը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$2a_{12}x_1x_2=2a_{12}(z_1-z_2)(z_1+z_2)=2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2,$$

այսինքն՝ նոր քառակուսային ձևում արդեն հանդես կգան մի անդամից երկու անհայտի քառակուսիներ, որոնց գործակիցները զրո չեն, ըստ որում նրանք մնացած ոչ մի անդամի հետ չեն կարող կրճատվել, քանի որ այդ անդամներից յուրաքանչյուրում պարունակվում է $z_3, z_4, \ldots, z_n$ անհայտներից գոնե մեկը։ Այժմ մենք գտնվում ենք այն պայմաններում, ինչ որ քիչ առաջ ուսումնասիրված դեպքում էր, այսինքն՝ ևս մեկ գծային չվերասերվող ձևափոխությամբ մեր f քառակուսային ձևը կբերվի (14) տեսքին։

Ապացույցն ավարտելու համար մնում է նշել, որ g քառակուսային ձևը կախված է n-ից քիչ թվով անհայտներից և այդ պատճառով, համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, $y_2, y_3, \ldots, y_n$ անհայտների

նկատմամբ չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ այն կարելի է բերել կանոնական տեսքի։ Այդ ձևափոխությունը (դժվար չէ նկատել, որ չվերասերվող է), որը կարելի է դիտել որպես բոլոր n անհայտների այնպիսի ձևափոխություն, որի ժամանակ y_i-ը մնում է տեղում, մեր քառակուսային (14) ձևը բերում է, հետևապես, կանոնական տեսքի։ Այսպիսով՝ f քառակուսային ձևը երկու կամ երեք չվերասերվող գծային ձևափոխությունների օգնությամբ (որոնք, իհարկե, կարելի է փոխարինել մեկ չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ՝ այդ ձևափոխությունների արտադրյալով), բերվում է կանոնական տեսքի։ Կանոնական տեսքի մեջ մտնող անհայտների քառակուսիների թիվը, ինչպես մենք գիտենք, հավասար է f-ի r ռանգին։ Եթե, բացի դրանից, քառակուսային ձևը իրական է, ապա ինչպես f քառակուսային ձևի կանոնական տեսքում, այնպես էլ f-ն այդ տեսքին բերող գծային չվերասերվող ձևափոխության մեջ, գործակիցները իրական թվեր կլինեն. իրոք, և՛ (13) գծային ձևափոխության հակադարձ ձևափոխության գործակիցները, և՛ (15) գծային ձևափոխության գործակիցները իրական են։

Հիմնական թեորեմայի ապացույցն ավարտվեց։ Այդ ապացույցում օգտագործված մեթոդը կարելի է կիրառել կոնկրետ օրինակներում՝ քառակուսային ձևերը փաստորեն կանոնական տեսքի բերելու համար։ Հարկավոր է միայն ինդուկցիայի փոխարեն, որը մենք օգտագործեցինք թեորեմն ապացուցելիս, վերը նշված ձևով հաջորդաբար առանձնացնել անհայտների քառակուսիները։

Օ ր ի ն ա կ։ Բերել կանոնական տեսքի հետևյալ քառակուսային ձևը.

$$f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1. \tag{16}$$

Հաշվի առնելով, որ այդ ձևում չկա որևէ անհայտի քառակուսի, մենք սկզբում կիրառենք հետևյալ չվերասերված գծային ձևափոխությունը՝

$$x_1=y_1-y_2,\quad x_2=y_1+y_2,\quad x_3=y_3,$$

որի մատրիցն է

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

որից հետո կստանանք՝

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3-8y_2y_3.$$

Այժմ y_1^2-ու գործակիցը տարբեր է զրոյից և դրա համար էլ կարելի է մեր ձևից անջատել մեկ անհայտի քառակուսին։ Ընդունելով՝

$$z_1=2y_1-2y_3,\quad z_2=y_2,\quad z_3=y_2,$$

այսինքն՝ կատարելով այնպիսի գծային ձևափոխություն, որի հակադարձի մատրիցն է

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը, մենք f քառակուսային ձևը կբերենք հետևյալ տեսքի.

$$f=\frac{1}{2} z_1^2-2z_2^2-2z_3^2-8z_2z_3.$$

Առայժմ անջատված է միայն z_1 անհայտի քառակուսին, որովհետև ձևը դեռևս պարունակում է մյուս երկու անհայտների արտադրյալը։ Օգտվելով այն հանգամանքից, որ ձևը պարունակում է z_2 անհայտի քառակուսին, ևս մեկ անգամ կկիրառենք վերը շարադրված մեթոդը՝ կատարելով հետևյալ ձևափոխությունը.

$$t_1=z_1, \quad t_2=-2z_2-4z_3, \quad t_3=z_3,$$

որի հակադարձի մատրիցն է

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը, մենք f քառակուսային ձևը կբերենք, վերջապես,

$$f=\frac{1}{2} t_1^2-\frac{1}{2} t_2^2+6 t_3^2 \qquad (17)$$

կանոնական տեսքին։

Այն գծային ձևափոխությունը, որը միանգամից (16)-ը բերում է (17) տեսքին, որպես մատրից կունենա

$$ABC=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

արտադրյալ մատրիցը։

Կարելի է նաև անմիջական տեղադրման միջոցով ստուգել, որ հետևյալ չվերասերվող (քանի որ դետերմինանտը հավասար է $-\frac{1}{2}$-ի) գծային ձևափոխությունը՝

$$x_1=\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+3t_3,$$
$$x_2=\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2-t_3,$$
$$x_3=t_3$$

(16)-ը բերում է (17)-ին։

Քառակուսային ձևը կանոնական տեսքի բերելու տեսությունը կապված է երկրորդ կարգի կենտրոնավոր կորերի երկրաչափական տեսության նմանությամբ, բայց չի կարելի համարել այդ վերջինի ընդհանրացումը։ Իրոք, մեր տեսության մեջ թույլատրելի է օգտագործել ցանկացած չվերասերվող գծային ձևափոխություններ, այնինչ երկրորդ կարգի կորի հավասարումը կանոնական տեսքի բերելը հաջողվում է միայն չափազանց մասնավոր՝ (2) տեսքի գծային ձևափոխության միջոցով, որը հանդիսանում է հարթության պտույտ։ Այդ երկրաչափական տեսությունը, սակայն, կարելի է ընդհանրացնել n անհայտներով *իրական* գործակիցներով քառակուսային ձևերի համար։ Այդ ընդհանրացումը, որն անվանում են *քառակուսային ձևի բերում գլխավոր առանցքներին*, կշարադրվի 8-րդ գլխում։

§ 27. Իներցիայի օրենքը

Այն կանոնական տեսքը, որին բերվում է տվյալ քառակուսային ձևը, նրանով միարժեք կերպով չի որոշվում։ Ամեն մի քառակուսային ձև կարելի է կանոնական տեսքի բերել իրարից տարբեր շատ եղանակներով։ Այսպես, նախորդ պարագրաֆում դիտարկված $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$ քառակուսային ձևը հետևյալ չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ՝

$$x_1=t_1+3t_2+2t_3$$
$$x_2=t_1-t_2-2t_3$$
$$x_3=t_2$$

բերվում է այսպիսի կանոնական տեսքի՝

$$f=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2,$$

որը տարբեր է նախորդ ստացածից։

Հարց է առաջ գալիս, ընդհանուր ի՞նչ կա այն տարբեր կանոնական տեսքերի միջև, որոնց բերվում է տվյալ քառակուսային ձևը։ Այդ հարցը, ինչպես մենք կտեսնենք, սերտ կերպով կապված է հետևյալ հարցի հետ. ի՞նչ պայմանների առկայության դեպքում երկու քառակուսային ձևերից մեկը կարելի է բերել մյուսին գծային չվերասերվող ձևափոխության օգնությամբ։ Այդ հարցերի պատասխանը կախված է այն բանից, թե ինչպիսի՞ քառակուսային ձևեր ենք դիտարկում՝ իրական, թե՞ կոմպլեքս։

Սկզբում ենթադրենք, թե դիտարկվում են ցանկացած *կոմպլեքս* քառակուսային ձևեր և, դրա հետ միասին, թույլատրվում են ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով չվերասերվող գծային ձևափոխություններ։

Մենք գիտենք, որ n անհայտներից ամեն մի քառակուսային ձև, որն ունի r ռանգ, բերվում է կանոնական տեսքի՝

$$f=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\cdots+c_ry_r^2,$$

որտեղ $c_1, c_2, \ldots, c_r$ բոլոր գործակիցները զրոյից տարբեր են։ Օգտվելով այն բանից, որ ամեն մի կոմպլեքս թվից քառակուսի արմատ է հանվում, կատարենք հետևյալ չվերասերվող գծային ձևափոխությունը.

$$z_i=\sqrt{c_i}\,y_i,\ \text{երբ}\ i=1, 2, \ldots, r,\quad z_j=y_j,\ \text{երբ}\ j=r+1, \ldots, n.$$

Այն տրված f քառակուսային ձևը բերում է

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2 \tag{1}$$

տեսքին, որը կոչվում է նորմալ տեսք. այդ պարզապես r անհայտների քառակուսիների գումարն է (որոնց գործակիցները հավասար են մեկի)։

Քառակուսային ձևի նորմալ տեսքը կախված է միայն նրա r ռանգից, այսինքն՝ r ռանգի բոլոր քառակուսային ձևերը բերվում են միևնույն (1) նորմալ տեսքին։ Հետևապես, եթե ունենք n անհայտներով r ռանգի f և g երկու քառակուսային ձևեր, ապա f-ը կարելի է բերել (1) տեսքին, իսկ հետո՝ (1)-ը բերել g-ին, այսինքն՝ գոյություն ունի չվերասերվող գծային ձևափոխություն, որը f-ը բերում է g-ին։ Քանի որ, մյուս կողմից, ոչ մի չվերասերվող գծային ձևափոխություն չի կարող փոխել քառակուսային ձևի ռանգը, ուստի մենք գալիս ենք հետևյալ արդյունքին.

n անհայտներից երկու կոմպլեքս քառակուսային ձևեր կոմպլեքս գործակիցներով գծային չվերասերվող ձևափոխությունների օգնությամբ այն և միայն այն ժամանակ են բերվում մեկը մյուսին, եթե այդ ձևերը ունեն միևնույն ռանգը։

Այս թեորեմայից առանց դժվարության հետևում է, որ r ռանգի **կոմպլեքս քառակուսային ձևի համար կանոնական տեսք կարող է ծառայել r անհայտների քառակուսիների ամեն մի գումար՝ զրոյից տարբեր ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով։**

Դրությունը մի քիչ ավելի բարդ է այն դեպքում, երբ դիտարկվում են իրական քառակուսային ձևեր և, որ ամենից կարևորն է, թույլատրվում են միայն իրական գործակիցներով գծային ձևափոխություններ։ Այդ դեպքում արդեն ոչ բոլոր քառակուսային ձևերը կարելի է բերել (1) տեսքին, քանի որ այն կարող է պահանջել բացասական թվից քառակուսի արմատ հանել։ Բայց եթե մենք այժմ քառակուսային ձևի նորմալ տեսք անվանենք մի քանի անհայտների քառակուսիների գումարը՝ գումարելիները վերցրած +1 կամ −1 գործակիցներով, ապա

հեշտ է ցույց տալ, որ **ամեն մի իրական քառակուսային ձև իրական գործակիցներով չվերասերվող գծային ձևափոխության օգնությամբ կարելի է բերել նորմալ տեսքի։**

Իրոք, n անհայտներից r ռանգի f ձևը բերվում է կանոնական տեսքի, որը կարելի է (եթե հարկ է՝ փոխելով անհայտների համարները) գրել հետևյալ կերպ.

$$f=c_1y_1^2+\cdots+c_ky_k^2-c_{k+1}y_{k+1}^2-\cdots-c_ry_r^2,\quad 0\leq k\leq r,$$

որտեղ $c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_r$ բոլոր գործակիցները զրոյից տարբեր դրական թվեր են։ Այդ դեպքում իրական գործակիցներով

$$z_i=\sqrt{c_i}\,y_i,\quad i=1, 2, \ldots, r,\quad z_j=y_j,\ j=r+1, \ldots, n$$

գծային չվերասերվող ձևափոխությունը f-ը բերում է

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2$$

նորմալ տեսքին։

Այստեղ մտնող քառակուսիների ընդհանուր թիվը հավասար է ձևի ռանգին։

Իրական քառակուսային ձևը կարելի է նորմալ տեսքի բերել իրարից տարբեր շատ ձևափոխություններով, բայց անհայտների համարակալման ճշտությամբ, այն բերվում է միայն մեկ նորմալ տեսքի։ Այդ հաստատվում է հետևյալ կարևոր թեորեմայով, որը կոչվում է **իրական քառակուսային ձևերի իներցիայի օրենք.**

Նորմալ տեսքում, որին բերվում է տվյալ իրական քառակուսային ձևը իրական չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ, դրական քառակուսիների թիվը և բացասական քառակուսիների թիվը կախված չեն այդ ձևափոխության ընտրությունից։

Դիցուք, իսկապես, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից r ռանգի f քառակուսային ձևը նորմալ տեսքի է բերված երկու եղանակով՝

$$f=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_r^2=$$

$$=z_1^2+\cdots+z_l^2-z_{l+1}^2-\cdots-z_r^2. \tag{2}$$

Քանի որ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից $y_1, y_2, \ldots, y_n$ անհայտներին անցումը կատարված է չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ, ապա, հակադարձաբար, երկրորդ անհայտները նույնպես գծայնորեն կարտահայտվեն առաջին անհայտների միջոցով, ըստ որում զրոյից տարբեր դետերմինանտով՝

$$y_i=\sum_{s=1}^{n}a_{is}x_s,\quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Նման ձևով՝

$$z_j = \sum_{t=1}^{u} b_{jt} x_t, \quad j=1, \; 2, \cdots, n, \tag{4}$$

ըստ որում այստեղ ևս գործակիցներից կազմած դետերմինանտը տարբեր է զրոյից: Գործակիցները, ինչպես (3)-ում, այնպես էլ (4)-ում, իրական թվեր են:

Համարենք, թե $k<l$ և գրենք հետևյալ հավասարությունների սիստեմը.

$$y_1=0, \cdots, \quad y_k=0, \quad z_{l+1}=0, \cdots, \quad z_r=0, \cdots, \quad z_n=0: \tag{5}$$

Եթե այդ հավասարությունների ձախ մասերը փոխարինվեն (3)-ից և (4)-ից վերցրած իրենց արտահայտություններով, մենք կստանանք $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներով $n-l+k$ գծային համասեռ հավասարումների սիստեմ: Այդ սիստեմում հավասարումների թիվը փոքր է անհայտների թվից, ուստի, ինչպես մենք գիտենք § 1-ից, մեր սիստեմն ունի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ոչզրոյական իրական լուծում:

Այժմ (2) հավասարությունում բոլոր y-ները և z-երը փոխարինենք (3)-ից և (4)-ից վերցրած իրենց արտահայտություններով, որից հետո անհայտների փոխարեն տեղադրենք իրենց $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ արժեքները: Եթե, կարճության համար y_i և z_i անհայտների համար այդպիսի տեղադրումից ստացվող արժեքները նշանակենք $y_i(\alpha)$ և $z_j(\alpha)$, ապա շնորհիվ (5)-ի, (2)-ի փոխարեն ստացվում է

$$-y_{k+1}^2(\alpha) - \cdots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \cdots + z_l^2(\alpha) \tag{6}$$

հավասարությունը: Քանի որ (3)-ում և (4)-ում բոլոր գործակիցները իրական են, ապա (6) հավասարության մեջ մտնող բոլոր քառակուսիները դրական են, ուստի և (6)-ից հետևում է, որ բոլոր այդ քառակուսիները հավասար են զրոյի: Այստեղից հետևում են

$$z_1(\alpha)=0, \cdots, \quad z_l(\alpha)=0 \tag{7}$$

հավասարությունները: Մյուս կողմից, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ թվերի ընտրության համաձայն,

$$z_{l+1}(\alpha)=0, \cdots, z_r(\alpha)=0, \cdots, z_n(\alpha)=0: \tag{8}$$

Այսպիսով, n անհայտներով

$$z_i=0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

n գծային համասեռ հավասարումների սիստեմը, համաձայն (7)-ի և (8)-ի, ունի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ոչզրոյական լուծումը, այսինքն՝ այդ սիս-

տեմի դետերմինանտը պետք է հավասար լինի զրոյի: Բայց այդ հակասում է (4) գծային ձևափոխության չվերասերվող լինելուն: Այդպիսի հակասության կգանք նաև այն դեպքում, եթե ենթադրենք $l<k$: Այստեղից հետևում է, որ $k=l$: Թեորեման ապացուցված է:

Դրական քառակուսիների թիվն այն նորմալ ձևում, որին բերվում է տվյալ իրական քառակուսային ձևը, կոչվում է այդ ձևի իներցիայի դրական ինդեքս, բացասական քառակուսիների թիվը՝ իներցիայի բացասական ինդեքս, իսկ իներցիայի դրական և բացասական ինդեքսների տարբերությունը կոչվում է f ձևի սիգնատուր:

Պարզ է, որ տված ռանգի դեպքում վերը սահմանած երեք թվերից որևէ մեկը արդեն լրիվ որոշում է մյուս երկուսին, դրա համար էլ հետագա ձևակերպումների մեջ կարելի է խոսել այդ երեք թվերից որևէ մեկի մասին:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեման.

Իրական գործակիցներով n անհայտներից երկու քառակուսային ձևեր այն և միայն այն ժամանակ կարելի է բերել մեկը մյուսին իրական գծային չվերասերվող ձևափոխության օգնությամբ, եթե այդ ձևերն ունեն նույն ռանգը և նույն սիգնատուրը:

Իրոք, դիցուք f ձևը բերվում է g ձևին իրական չվերասերվող ձևափոխությամբ: Մենք գիտենք, որ այդ ձևափոխությունը չի փոխում ձևի ռանգը: Այն չի կարող փոխել և սիգնատուրը, քանի որ, հակառակ դեպքում, f-ը և g-ն կբերվեին տարբեր նորմալ տեսքերի, իսկ այդ դեպքում f ձևը, հակառակ իներցիայի օրենքին, կբերվեր այդ երկու նորմալ տեսքերին: Հակադարձաբար, եթե f և g ձևերն ունեն նույն ռանգը և նույն սիգնատուրը, ապա նրանք բերվում են միևնույն նորմալ տեսքին, այդ պատճառով էլ նրանք կարող են բերվել մեկը մյուսին:

Եթե տրված է g քառակուսային ձևը կանոնական տեսքով՝

$$g = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_r y_r^2, \tag{9}$$

որի գործակիցները զրոյից տարբեր իրական թվեր են, ապա պարզ է, որ այդ ձևի ռանգը հավասար է r-ի: Այնուհետև, օգտվելով այդպիսի ձևը նորմալ տեսքի բերելու վերը նշված եղանակից, հեշտ է տեսնել, որ g ձևի իներցիայի դրական ինդեքսը հավասար է (9) հավասարության աջ մասի դրական գործակիցների թվին: Այստեղից և նախորդ թեորեմայից բխում է այսպիսի եզրակացություն՝

f քառակուսային ձևն այն և միայն այն ժամանակ (9) ձևը կունենա որպես իր կանոնական տեսք, եթե f ձևի ռանգը հավասար է r-ի և այդ ձևի իներցիայի դրական ինդեքսը հավասար է (9)-ի դրական գործակիցների թվին:

Տրոհվող քառակուսային ձևեր։ *Բազմապատկելով n անհայտներից ցանկացած երկու գծային ձևեր՝*

$$\varphi=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\quad \psi=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n,$$

մենք, պարզ է, կստանանք ինչ-որ քառակուսային ձև։ Ոչ բոլոր քառակուսային ձևերը կարելի է ներկայացնել երկու գծային ձևերի արտադրյալի տեսքով, և մենք ձգտում ենք գտնել այն պայմանները, որոնց դեպքում այդ տեղի ունի, այսինքն՝ որոնց դեպքում քառակուսային **ձևը տրոհվող է:**

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կոմպլեքս քառակուսային ձևը տրոհվում է այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրա ռանգը փոքր կամ հավասար է երկուսի: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ իրական քառակուսային ձևը տրոհվում է այն և միայն այն ժամանակ, երբ կամ նրա ռանգը մեծ չէ մեկից, կամ ռանգը հավասար է երկուսի, իսկ սիգնատուրը՝ զրոյի:

Նախ դիտարկենք φ և ψ գծային ձևերի արտադրյալը։ Եթե այդ ձևերից գոնե մեկը զրոյական է, ապա նրանց արտադրյալը կլինի զրո գործակիցներով քառակուսային ձև, այսինքն՝ նրա ռանգը 0 է։ Եթե φ և ψ գծային ձևերը համեմատական են՝

$$\psi = c\varphi,$$

ընդ որում $c\neq 0$ և φ ձևը զրոյական չէ, ապա թող, օրինակի համար, a_1 գործակիցը լինի զրոյից տարբեր։ Այդ դեպքում գծային չվերասերվող

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\quad y_i=x_i,\ \text{երբ}\ i=2, 3, \dots, n$$

ձևափոխությունը $\varphi\psi$ քառակուսային ձևը բերում է

$$\varphi\psi=cy_1^2$$

տեսքի։ Աջ կողմում գրված է 1 ռանգի քառակուսային ձև, այդ պատճառով էլ $\varphi\psi$ քառակուսային ձևը նույնպես ունի 1 ռանգը։

Իսկ եթե, վերջապես, φ և ψ գծային ձևերը համեմատական չեն, ապա թող, օրինակի համար,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Այդ դեպքում

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$
$$y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n,$$
$$y_i=x_i\ \ \text{երբ}\ \ i=3, 4, \dots, n$$

գծային ձևափոխությունը կլինի չվերասերվող և այն $\varphi\psi$ քառակուսային ձևը բերում է

$$\varphi\psi = y_1y_2$$

տեսքի։ Աջ մասում գրված է 2 ռանգի քառակուսային ձև, որը իրական գործակիցների դեպքում ունի 0 սիգնատուրը։

Անցնենք հակադարձ պնդման ապացույցին։ Եթե քառակուսային ձևի ռանգը հավասար է 0-ի, ապա այն, անշուշտ, կարելի է դիտել որպես երկու գծային ձևերի արտադրյալ, որոնցից մեկը զրոյական է։ Հետո, 1 ռանգի $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ քառակուսային ձևը չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ բերվում է

$$f=cy_1^2,\quad c\neq 0$$

տեսքի, այսինքն՝

$$f = (cy_1)y_1$$

տեսքի։ y_1-ը գծայնորեն արտահայտելով $x_1, x_2, \dots, x_n$-ով, մենք f քառակուսային ձևը կներկայացնենք երկու գծային ձևերի արտադրյալի տեսքով։ Վերջապես, 2 ռանգի և 0 սիգնատուրի $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ քառակուսային ձևը չվերասերվող գծային ձևափոխությամբ բերվում է

$$f = y_1^2 - y_2^2$$

տեսքի. այդ տեսքին կբերվի նաև 2 ռանգի ցանկացած կոմպլեքս քառակուսային ձևը։ Սակայն՝

$$y_1^2-y_2^2=(y_1-y_2)(y_1+y_2),$$

որտեղ y_1-ը և y_2-ը $x_1, x_2, \dots, x_n$-ի միջոցով գծային արտահայտություններով փոխարինելուց հետո, աջ մասում կստացվի երկու գծային ձևերի արտադրյալ։ Թեորեմն ապացուցված է։

§ 28. Դրական որոշյալ ձևեր

Ի ր ա կ ա ն գործակիցներով n անհայտներից կազմված f քառակուսային ձևը կոչվում է դրական որոշյալ ձև, *եթե այն բերվում է n դ ր ա կ ա ն քառակուսիներից կազմված նորմալ տեսքի, այսինքն՝ եթե այդ ձևի և՛ ռանգը, և՛ իներցիայի դրական ինդեքսը հավասար են անհայտների թվին։*

Հետևյալ թեորեման հնարավորություն է տալիս բնորոշելու դրական որոշյալ քառակուսային ձևերը, առանց այդ ձևերը կանոնական կամ նորմալ տեսքի բերելու։

Իրական գործակիցներով $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտներից քառակուսային ձևն այն և միայն այն ժամանակ կլինի դրական որոշյալ ձև, երբ այդ անհայտների ցանկացած իրական արժեքների դեպքում, որոնցից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, այդ ձևը ընդունում է դրական արժեքներ:

Ապացույց։ Դիցուք f ձևը դրական որոշյալ ձև է, այսինքն՝ բերվում է

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 \qquad (1)$$

նորմալ տեսքի, ըստ որում՝

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\ldots,n, \qquad (2)$$

որի a_{ij} գործակիցները իրական թվեր են և $|a_{ij}|$ դետերմինանտը զրոյից տարբեր է։ Եթե մենք ցանկանում ենք f-ում $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներին տալ ցանկացած իրական արժեքներ, որոնցից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա կարելի է նախ այդ արժեքները տեղադրել (2)-ի մեջ և հետո y_i-ի համար ստացած արժեքները տեղադրել (1)-ի մեջ։ Նկատենք, որ (2)-ից ստացված $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ի արժեքները չեն կարող միաժամանակ բոլորը հավասար լինել զրոյի, քանի որ հակառակ դեպքում մենք կստանայինք, որ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\ldots,n$$

գծային համասեռ հավասարումների սիստեմը կունենար ոչզրոյական լուծում, այնինչ նրա դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի։ $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ի համար գտած արժեքները տեղադրելով (1)-ի մեջ, մենք կստանանք f ձևի արժեքը, որը հավասար է n իրական թվերի քառակուսիների գումարին, որոնք ոչ բոլորն են հավասար զրոյի. հետևապես, այդ արժեքը խստորեն դրական է։

Հակադարձաբար, դիցուք f ձևը դրական որոշյալ ձև չէ, այսինքն՝ նրա կամ ռանգը, կամ իներցիայի դրական ինդեքսը փոքր է n-ից։ Այդ նշանակում է, որ այդ ձևի նորմալ տեսքում, որին բերվում է այն, ասենք թե (2) գծային չվերասերվող ձևափոխության օգնությամբ, նոր անհայտներից գոնե մեկի, օրինակ՝ y_n-ի, քառակուսին կամ իսպառ բացակայում է, կամ պարունակվում է բացասական նշանով։ Ցույց տանք, որ այդ դեպքում կարելի է $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների համար ընտրել այնպիսի իրական արժեքներ, որոնք ոչ բոլորն են հավասար զրոյի, և f ձևի արժեքն այդ դեպքում կամ հավասար է զրոյի, կամ նույնիսկ բացասական է։ Այդպիսի արժեքներ կլինեն, օրինակի համար, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների այն արժեքները, որոնք մենք կստանանք, եթե Կրամերի կանոնով լուծենք այն գծային հավասարումների սիստեմը, որոնք (2)-ից ստացվում են $y_1=y_2=\ldots=y_{n-1}=0$, $y_n=1$ դեպքում։ Իրոք, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների այդ արժեքների դեպքում f ձևի արժեքը հավասար է զրոյի, եթե y_n^2-ն չի մտնում այդ ձևի նորմալ տեսքի մեջ, և հավասար է —1-ի, եթե y_n^2-ն մտնում է նրա նորմալ տեսքի մեջ բացասական նշանով։

Այս թեորեման օգտագործվում է ամեն տեղ, ուր կիրառվում են դրական որոշյալ քառակուսային ձևերը։ Բայց այդ թեորեմայի միջոցով հնարավոր չէ, ելնելով ձևի գործակիցներից, դատել նրա դրական որոշյալ լինելու մասին։ Այդ նպատակին է ծառայում մի ուրիշ թեորեմա, որը մենք կձևակերպենք և կապացուցենք մի օժանդակ հասկացություն մուծելուց հետո։

Դիցուք տված է n անհայտներով և $A=(a_{ij})$ մատրիցով քառակուսային f ձևը։ Այդ մատրիցի 1, 2, …, n-րդ կարգի մինորները, որոնք ընկած են նրա վերին ձախ անկյունում, այսինքն՝

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

մինորները, որոնցից վերջինը, ակներևաբար, համընկնում է A մատրիցի դետերմինանտի հետ, կոչվում են f ձևի գլխավոր մինորներ։

Իրավացի է հետևյալ թեորեման.

Իրական գործակիցներով n անհայտներից f քառակուսային ձևը այն և միայն այն ժամանակ կլինի դրական որոշյալ ձև, եթե նրա բոլոր գլխավոր մինորները խստորեն դրական են։

Ապացույց։ n=1 դեպքում թեորեման ճիշտ է, քանի որ f-ը այդ դեպքում ունի ax^2 տեսքը և, հետևապես, դրական որոշյալ ձև է այն և միայն այն ժամանակ, երբ $a>0$։ Ուստի, թեորեման մենք կապացուցենք n անհայտների դեպքի համար, ընդունելով, որ (n—1) անհայտներից քառակուսային ձևերի համար այն արդեն ապացուցված է։

Նախապես անենք հետևյալ դիտողությունը.

Եթե A մատրից կազմող իրական գործակիցներով f քառակուսային ձևի նկատմամբ կիրառվում է Q իրական մատրից ունեցող չվերասերվող գծային ձևափոխություն, ապա քառակուսային ձևի դետերմինանտը (այսինքն՝ նրա մատրիցի դետերմինանտը) իր նշանը չի փոխում։

Իրոք, ձևափոխությունից հետո մենք ստանում ենք $Q'AQ$ մատրից ունեցող քառակուսային ձև և, քանի որ $|Q'|=|Q|$, ապա $|Q'AQ|=|Q'||A||Q|=|A|\cdot|Q|^2$, այսինքն՝ $|A|$ դետերմինանտը բազմապատկվում է դրական թվով։

Դիցուք այժմ տված է

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

քառակուսային ձևը։ Այն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$f=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2, \tag{3}$$

որտեղ φ-ն կլինի $n-1$ անհայտներից քառակուսային ձև, որը կազմված է f ձևի x_n անհայտը չպարունակող անդամներից։ Այդ φ ձևի գլխավոր մինորներն, ակներևաբար, համընկնում են f ձևի գլխավոր մինորների հետ, բացի, իհարկե, վերջինից։

Դիցուք f ձևը դրական որոշյալ ձև է։ Այդ դեպքում φ ձևը նույնպես կլինի դրական որոշյալ ձև. եթե գոյություն ունենային $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների համար այնպիսի արժեքներ, որոնք ոչ բոլորն են հավասար զրոյի, և որոնց դեպքում φ ձևը ստանում է ոչ խիստ դրական արժեք, ապա, լրացուցիչ կերպով ընդունելով $x_n=0$, մենք, համաձայն (3)-ի, կստանայինք f ձևի համար նույնպես ոչ խիստ դրական արժեք, չնայած $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտները ոչ բոլորն են միաժամանակ հավասար զրոյի։ Այդ պատճառով, ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն, φ ձևի բոլոր գլխավոր մինորները, այսինքն՝ f ձևի բոլոր գլխավոր մինորները, բացի վերջինից, խստորեն դրական են։ Ինչ վերաբերում է f ձևի վերջին գլխավոր մինորին, այսինքն՝ A մատրիցի դետերմինանտին, ապա նրա դրական լինելը բխում է հետևյալ նկատառումներից. f ձևի դրական որոշյալ լինելուց բխում է, որ գծային չվերասերվող ձևափոխության օգնությամբ նրան կարելի է բերել n դրական քառակուսիներից կազմված նորմալ տեսքի։ Այդ նորմալ տեսքի դետերմինանտը խստորեն դրական է, ուստի, ըստ վերը կատարած դիտողության, դրական է նաև f քառակուսային ձևի դետերմինանտը։

Հակադարձաբար, դիցուք այժմ խստորեն դրական են f ձևի բոլոր գլխավոր մինորները։ Այստեղից բխում է φ ձևի բոլոր գլխավոր մինորների խստորեն դրական լինելը, այսինքն, համաձայն ինդուկտիվ ընդունելության, φ ձևի դրական որոշյալ լինելը։ Ուստի, գոյություն ունի $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ անհայտներից այնպիսի չվերասերվող գծային ձևափոխություն, որը φ ձևը բերում է $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ նոր $n-1$ անհայտների քառակուսիների գումարին։ Այդ գծային ձևափոխությունը կարելի է լրացնել մինչև բոլոր $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ անհայտներից գծային (չվերասերվող) ձևափոխությունը՝ համարելով $x_n=y_n$։ (3)-ի շնորհիվ, f ձևը նշված ձևափոխությամբ բերվում է

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2 \tag{4}$$

տեսքի. b_{in} գործակիցների ճիշտ արտահայտությունները մեզ համար էական նշանակություն չունեն։ Քանի որ՝

$$y_i^2+2b_{in}y_iy_n=(y_i+b_{in}y_n)^2-b_{in}^2y_n^2,$$

ապա

$$z_i=y_i+b_{in}y_n, \quad i=1, 2, \cdots, n-1,$$

$$z_n=y_n$$

չվերասերվող գծային ձևափոխությունը, համաձայն (4)-ի, f ձևը բերում է

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2+cz_n^2 \tag{5}$$

կանոնական տեսքի։

Որպեսզի ապացուցենք f ձևի դրական որոշյալ ձև լինելը, մնում է ապացուցել c թվի դրական լինելը։ Ինչպես տեսնում ենք, (5)-ի աջ մասում գրված ձևի դետերմինանտը հավասար է c-ի։ Սակայն այդ դետերմինանտը պետք է լինի դրական, քանի որ (5) հավասարության աջ մասն ստացվել է f-ից երկու գծային չվերասերվող ձևափոխությունների օգնությամբ, իսկ f ձևի դետերմինանտը, որպես գլխավոր մինորներից վերջինը, դրական էր։ Թեորեմայի ապացույցն ավարտված է։

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր։

1) $$f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

քառակուսային ձևը դրական որոշյալ ձև է, քանի որ նրա գլխավոր մինորները դրական են՝

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1.$$

2) $$f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

քառակուսային ձևը դրական որոշյալ ձև չի լինի, քանի որ նրա երկրորդ գլխավոր մինորը բացասական է՝

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Նկատենք, որ դրական որոշյալ քառակուսային ձևերի նման, կարելի է խոսել նաև բացասական որոշյալ քառակուսային ձևերի մասին, այսինքն՝ իրական գործակիցներ ունեցող այնպիսի չվերասերվող քառակուսային ձևերի մասին, որոնց նորմալ տեսքը պարունակում է անհայտների միայն բացասական քառակուսիներ։ Այնպիսի վերասերվող քառակուսային ձևերը, որոնց նորմալ տեսքը կազմված է միայն միևնույն նշանի քառակուսիներից, երբեմն կոչվում են կիսաորոշյալ ձևեր։ Վերջապես անորոշ քառակուսային ձևեր կլինեն այնպիսի ձևերը, որոնց նորմալ տեսքը պարունակում է անհայտների ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական քառակուսիներ։

ԳԼՈՒԽ ՅՈԹԵՐՈՐԴ

ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 29. Գծային տարածության սահմանումը: Իզոմորֆիզմ

Մենք § 8-ում n-չափանի վեկտորական տարածության սահմանումն սկսեցինք n-չափանի վեկտորի սահմանումով, որպես n թվերի կարգավորված սիստեմ։ Դրանից հետո, n-չափանի վեկտորների համար մուծվեցին գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները, որ և մեզ բերեց n-չափանի վեկտորական տարածության հասկացությանը։ Վեկտորական տարածության առաջին օրինակներ ծառայեցին վեկտոր-հատվածների բազմությունները, որոնք դուրս են գալիս կոորդինատների սկզբնակետից հարթության վրա կամ երեքչափանի տարածության մեջ։ Բայց, երկրաչափության դասընթացում հանդիպելով այդ օրինակներին, մենք միշտ չէ, որ անհրաժեշտ ենք համարում վեկտորները տալ իրենց բաղադրիչների միջոցով մի որոշ անշարժ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ, քանի որ վեկտորների գումարումը և նրանց բազմապատկումը սկալյարով սահմանվում են երկրաչափորեն, անկախ կոորդինատների սիստեմի ընտրությունից։ Այսպես, վեկտորների գումարումը հարթության վրա կամ տարածության մեջ կատարվում է զուգահեռագծի կանոնով, իսկ վեկտորի բազմապատկումը α թվով նշանակում է այդ վեկտորի ձգումը α անգամ (α-ի բացասական լինելու դեպքում՝ ուղղության փոփոխմամբ)։ Նպատակահարմար է նաև ընդհանուր դեպքում տալ վեկտորական տարածության «անկոորդինատ» սահմանումը, այսինքն՝ այնպիսի սահմանում, որը չի պահանջում վեկտորը տալ n թվերի կարգավորված սիստեմներով։ Այժմ կտրվի այդպիսի սահմանում։ Այդ սահմանումը ա ք ս ի ո մ ա տ ի կ սահմանում է. նրանում ոչինչ չի ասվելու առանձին վեկտորների սեփական հատկությունների մասին, բայց թվարկված կլինեն այն հատկությունները, որոնցով օժտված կլինեն վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները։

Դիցուք տրված է V բազմությունը․ Նրա էլեմենտները կնշանակվեն լատինական փոքրատառերով՝ a, b, c,... [1]։ Դիցուք, այնուհետև, V բազմության մեջ սահմանված են գումարման գործողությունը, որը V բազմության a, b էլեմենտների յուրաքանչյուր զույգին համապատասխանեցնում է այդ բազմության մեջ միարժեքորեն որոշվող մի $a+b$ էլեմենտ, որ կոչվում է a և b էլեմենտների գումար, և իրական թվով բազմապատկման գործողություն, ըստ որում α թվի և a էլեմենտի αa արտադրյալը միարժեքորեն որոշված է և պատկանում է V-ին։

V բազմության էլեմենտները կկոչվեն վեկտորներ, իսկ ինքը՝ V-ն՝ իրական գծային (կա՛մ վեկտորական, կա՛մ աֆինային) տարածություն, եթե նշված գործողությունները բավարարում են հետևյալ I—VIII պայմաններին.

I. Գումարումը տեղափոխելի է՝ $a+b=b+a$։

II. Գումարումը զուգորդելի է՝

$$(a+b)+c=a+(b+c)։$$

III. V-ում գոյություն ունի 0 զրոյական էլեմենտ, որը բավարարում է $a+0=a$ պայմանին՝ V-ից վերցրած բոլոր a-երի համար։

Օգտվելով I-ից, հեշտ է ապացուցել զրոյական էլեմենտի միակությունը՝ եթե 0_1-ը և 0_2-ը երկու զրոյական էլեմենտներ են, ապա

$$0_1+0_2=0_1$$

$$0_1+0_2=0_2+0_1=0_2,$$

որտեղից՝ $0_1=0_2$։

IV. Ամեն մի a էլեմենտի համար V-ում գոյություն ունի $-a$ հակադիր էլեմենտ, որը բավարարում է $a+(-a)=0$ պայմանին։

Ելնելով II և I աքսիոմաներից, հեշտ է ստուգել հակադիր էլեմենտի միակությունը. եթե $(-a)_1$-ը և $(-a)_2$-ը a էլեմենտի երկու հակադիր էլեմենտներն են, ապա՝

$$(-a)_1+[a+(-a)_2]=(-a)_1+0=(-a)_1,$$

$$[(-a)_1+a]+(-a)_2=0+(-a)_2=(-a)_2,$$

[1] Ի տարբերություն 2-րդ գլխում ընդունվածից, մենք այս և հաջորդ գլուխներում վեկտորները կնշանակենք լատինական փոքրատառերով, իսկ թվերը՝ հունական փոքրատառերով։

որտեղից՝

$$(-a)_1=(-a)_2։$$

I—IV աքսիոմաներից բխեցվում է $a-b$ տարբերության գոյությունը և միակությունը, այսինքն՝ այնպիսի էլեմենտի գոյությունն ու միակությունը, որը բավարարում է

$$b+x=a \tag{1}$$

պայմանին։ Իրոք, կարելի է համարել

$$a-b=a+(-b),$$

քանի որ՝

$$b+[a+(-b)]=[b+(-b)]+a=0+a=a։$$

Եթե գոյություն ունենար էլի մեկ այդպիսի c էլեմենտ, որը բավարարեր (1) հավասարմանը, այսինքն՝

$$b+c=a,$$

ապա այդ հավասարության երկու մասին էլ գումարելով $-b$ էլեմենտը, կստանայինք՝

$$c=a+(-b)։$$

Հետագա V—VIII աքսիոմները (համեմատե՛լ § 8-ի հետ) թվով բազմապատկումը կապում են գումարման և թվերի հետ կատարվող գործողությունների հետ։ Այն է՝ V-ին պատկանող ցանկացած a, b էլեմենտների, ցանկացած α, β իրական թվերի և 1 իրական թվի համար պետք է տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները.

V. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b,$

VI. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a,$

VII. $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a),$

VIII. $1\cdot a=a։$

Նշենք այդ աքսիոմաների մի քանի պարզագույն հետևանքները։

[1]. $\alpha\cdot 0=0։$

Իրոք, V-ից վերցրած որևէ a-ի համար՝

$$\alpha a=\alpha(a+0)=\alpha a+\alpha\cdot 0,$$

այսինքն՝

$$\alpha\cdot 0=\alpha\cdot a-\alpha\cdot a=\alpha a+(-\alpha a)=0։$$

[2]. $0\cdot a=0,$

որտեղ ձախ մասում 0 թիվն է, իսկ աջ մասում՝ V-ի զրոյական էլեմենտը։

Ապացույցի համար վերցնենք որևէ α թիվ։ Այդ դեպքում՝

$$\alpha a=(\alpha+0)a=\alpha a+0\cdot a,$$

որտեղից՝

$$0\cdot a=\alpha a-\alpha a=0.$$

[3]. Եթե $\alpha a=0$, ապա կամ $\alpha=0$, կամ $a=0$։

Իրոք, եթե $\alpha\neq 0$, այսինքն՝ α^{-1} թիվը գոյություն ունի, ապա՝

$$a=1\cdot a=(\alpha^{-1}\alpha)a=\alpha^{-1}(\alpha a)=\alpha^{-1}\cdot 0=0.$$

(4).
$$\alpha(-a)=-\alpha a.$$

Իրոք՝

$$\alpha a+\alpha(-a)=\alpha[a+(-a)]=\alpha\cdot 0=0,$$

այսինքն՝ $\alpha(-a)$ էլեմենտը հակադիր է αa էլեմենտին։

[5].
$$(-\alpha)a=-\alpha a.$$

Իրոք,

$$\alpha a+(-\alpha)a=[\alpha+(-\alpha)]a=0\cdot a=0,$$

այսինքն՝ $(-\alpha)a$-ն հակադիր է αa էլեմենտին։

[6].
$$\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b.$$

Իրոք, համաձայն (4)-ի՝

$$\alpha(a-b)=\alpha[a+(-b)]=\alpha a+\alpha(-b)=\alpha a+(-\alpha b)=\alpha a-\alpha b.$$

[7].
$$(\alpha-\beta)a=\alpha a-\beta a.$$

Իրոք,

$$(\alpha-\beta)a=[\alpha+(-\beta)]a=\alpha a+(-\beta)a=\alpha a+(-\beta a)=\alpha a-\beta a.$$

Նկատենք, որ թվարկված աքսիոմները և նրանցից բխող հետևանքները մենք հետագայում կօգտագործենք առանց հատուկ հիշեցման։

Վերը տրված է իրական գծային տարածության սահմանումը։ Եթե մենք ենթադրեինք, որ V բազմության մեջ սահմանված է ոչ միայն իրական թվով բազմապատկման գործողությունը, այլև ցանկացած կոմպլեքս թվով բազմապատկումը, ապա, պահպանելով նույն I—VIII աքսիոմները, մենք կստանայինք կոմպլեքս գծային տարածության սահմանումը։ Որոշակիության համար, ստորև դիտարկվելու են իրական գծային տարածությունները, բայց այն բոլորը, ինչ ասվելու է այս գլխում, բառացիորեն փոխանցվում է կոմպլեքս գծային տարածությունների դեպքի վրա։

Իրական գծային տարածության օրինակներ կարելի է նշել հեշտությամբ։ Դրանցից են, ամենից առաջ, այն n-չափանի իրական

վեկտորական տարածությունները, որոնք կազմված են վեկտոր-տողերից և ուսումնասիրվել են երկրորդ գլխում։ Գծային տարածություններ կլինեն նաև կոորդինատների սկզբնակետից ելնող վեկտոր-հատվածների բազմությունները, հարթության վրա կամ եռաչափանի տարածության մեջ, եթե գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները հասկանանք այն երկրաչափական իմաստով, որը նշված է պարագրաֆի սկզբում։

Գոյություն ունեն նաև, այսպես ասած, «անվերջչափանի» գծային տարածության օրինակներ։ Դիտարկենք իրական թվերից կազմված բոլոր հնարավոր հաջորդականությունները. նրանք ունեն

$$a=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots)$$

տեսքը։ Հաջորդականությունների հետ գործողությունները կկատարենք ըստ բաղադրիչների. եթե

$$b=(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots),$$

ապա՝

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n,\ \ldots).$$

մյուս կողմից, ամեն մի իրական γ թվի համար՝

$$\gamma a=(\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n,\ \ldots).$$

Բոլոր I—VIII աքսիոմները բավարարվում են, այսինքն՝ մենք ստանում ենք իրական գծային տարածություն։

Անվերջչափանի գծային տարածության օրինակ է ծառայում նաև իրական փոփոխականի բոլոր հնարավոր իրական ֆունկցիաների բազմությունը, եթե ֆունկցիաների գումարումը և ֆունկցիան իրական թվով բազմապատկելը հասկանանք այնպես, ինչպես այդ ընդունված է ֆունկցիաների տեսության մեջ, այսինքն՝ որպես ֆունկցիաների արժեքների գումարում կամ թվով բազմապատկում՝ անկախ փոփոխականի ամեն մի արժեքի համար։

Իզոմորֆիզմ։ Մեր մոտակա նպատակն է՝ բոլոր գծային տարածություններից առանձնացնել այնպիսիները, որոնք բնականաբար կարելի է անվանել վերջավորչափանի։ Նախ մուծենք մի ընդհանուր հասկացողություն։

Գծային տարածության սահմանման մեջ խոսվեց վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների հատկությունների մասին, բայց ոչ մի խոսք չասվեց իրենց՝ վեկտորների հատկությունների մասին. դրա շնորհիվ կարող է պատահել, որ չնայած տված որևէ երկու գծային տարածությունների վեկտորներն իրենց բնույթով միանգամայն տարբեր են, բայց գործողությունների հատկությունների տեսակետից այդ տարածությունները իրարից չտարբերվեն։ Ստույգ ձևակերպումը հետևյալն է.

Երկու V և V' իրական գծային տարածությունները կոչվում են իզոմորֆ (միաձև, նույնաձև) տարածություններ, եթե նրանց վեկտորների միջև հաստատված է փոխմիարժեք համապատասխանություն (V տարածության ամեն մի a վեկտորի համապատասխանեցված է V'-ի մի a' վեկտոր՝ a վեկտորի պատկերը, ըստ որում՝ V տարածության տարբեր վեկտորներ ունեն տարբեր պատկերներ և V'-ի ամեն վեկտոր հանդիսանում է V-ի որևէ վեկտորի պատկերը) և եթե այդ համապատասխանության մեջ երկու վեկտորների գումարի պատկեր հանդիսանում է այդ վեկտորների պատկերների գումարը՝

$$(a+b)'=a'+b',$$

իսկ վեկտորի ու թվի արտադրյալի պատկեր հանդիսանում է այդ վեկտորի պատկերը՝ բազմապատկած նույն այդ թվով՝

$$(\alpha a)'=\alpha a'. \qquad (3)$$

Նշենք, որ V և V' տարածությունների (2) և (3) պայմաններին բավարարող փոխմիարժեք համապատասխանությունը կոչվում է իզոմորֆ (միաձև, նույնաձև) համապատասխանություն:

Այսպես, հարթության վրա սկզբնակետից դուրս եկող վեկտոր-հատվածների տարածությունը իզոմորֆ է երկչափանի վեկտորական տարածությանը, որը բաղկացած է իրական թվերի կարգավորված զույգերից. մենք կստանանք այդ տարածությունների միջև իզոմորֆ համապատասխանություն, եթե հարթության վրա վերցնենք որևէ կոորդինատային անշարժ սիստեմ և ամեն մի վեկտոր-հատված համապատասխանության մեջ դնենք իր կոորդինատների կարգավորված զույգի հետ:

Ապացուցենք գծային տարածությունների իզոմորֆության հետևյալ հատկությունը.

V և V' տարածությունների իզոմորֆ համապատասխանության ժամանակ V տարածության զրոյի պատկեր հանդիսանում է V' տարածության զրոն:

Իրոք, դիցուք a-ն V տարածության որևէ վեկտոր է, իսկ a'-ը՝ նրա պատկերը V'-ում: Այդ դեպքում, համաձայն (2)-ի,

$$a'=(a+0)'=a'+0',$$

այսինքն՝ $0'$-ը կլինի V'-ի զրոն:

§ 30. Վերջավորչափանի տարածություններ: Բազիս

Ինչպես ընթերցողը հեշտությամբ կարող է ստուգել, վեկտոր-տողերի գծային կախման այն երկու սահմանումներում, որոնք տրվեցին § 9-ում, ինչպես և այդ սահմանումների համարժեքության ապացույցում, օգտագործվեցին միայն վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները, ուստի դրանք կարելի է տարածել ցանկացած գծային տարածությունների դեպքի վրա: Աքսիոմատիկորեն սահմանված գծային տարածություններում կարելի է, հետևապես, խոսել գծայնորեն անկախ վեկտորների սիստեմների մասին, գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմների մասին՝ եթե այդպիսիք գոյություն ունեն և այլն:

Եթե V և V' գծային տարածությունները իզոմորֆ են, ապա V-ից վերցրած $a_1, a_2, \ldots, a_k$ վեկտորների սիստեմն այն և միայն այն ժամանակ կլինի գծայնորեն կախյալ, երբ նրանց $a_1', a_2', \ldots, a_k'$ պատկերների սիստեմը V'-ում գծայնորեն կախյալ է:

Նախ նկատենք, որ եթե $a \to a'$ համապատասխանությունը (V-ի բոլոր a-երի համար) իզոմորֆ համապատասխանություն է V և V' տարածությունների միջև, ապա $a' \to a$ հակադարձ համապատասխանությունը նույնպես իզոմորֆ է: Այդ պատճառով, բավական է դիտարկել այն դեպքը, երբ գծայնորեն կախյալ է $a_1, a_2, \ldots, a_k$ վեկտորների սիստեմը: Դիցուք գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ թվեր, որոնք ոչ բոլորն են հավասար զրոյի և տեղի ունի

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_k a_k=0$$

պայմանը: Աջ մասի պատկերը դիտարկվող իզոմորֆիզմի ժամանակ, ինչպես մենք գիտենք, հանդիսանում է V' տարածության զրոն՝ $0'$-ը: Վերցնելով ձախ մասի պատկերը և մի քանի անգամ կիրառելով (2)-ը և (3)-ը, կստանանք՝

$$\alpha_1 a_1'+\alpha_2 a_2'+\cdots+\alpha_k a_k'=0',$$

այսինքն՝ $a_1', a_2', \ldots, a_k'$ վեկտորների սիստեմը նույնպես հանդիսացավ գծայնորեն կախյալ սիստեմ:

Վերջավորչափանի տարածություններ: V գծային տարածությունը կոչվում է վերջավորչափանի, եթե նրանում կարելի է գտնել գծայնորեն անկախ վեկտորների վերջավոր առավելագույն սիստեմ: Ամեն մի այդպիսի սիստեմ կոչվում է V տարածության բազիս: Վերջավորչափանի տարածությունը կարող է ունենալ իրարից տարբեր շատ բազիսներ: Այսպես, օրինակ, հարթության վրա վեկտոր-հատվածների տարածության մեջ բազիս է ծառայում զրոյից տարբեր և մի ուղիղի վրա չգտնվող երկու վեկտորների յուրաքանչյուր զույգ: Նկատենք, որ վերջավորչափանի տարածության մեր կողմից տրված սահմանումը դեռևս պատասխան չի տալիս այն հարցին, թե կարող են արդյոք այդ տարածության մեջ գոյություն ունենալ բազիսներ, որոնք բաղկացած են տարբեր թվով վեկտորներից։ Ավելին, կարող էինք նույնիսկ ենթադրել, որ որոշ վերջավորչափանի տարածություններում կարող են գոյություն ունենալ ցանկացած չափով մեծ թվով վեկտորներ ունեցող բազիսներ։ Հիմա մենք կպարզենք, թե ինչպիսի՞ն է դրությունը իրականում։

Դիցուք V գծային տարածությունը օժտված է

$$e_1, e_2, \dots, e_n \tag{1}$$

բազիսով, որը կազմված է n վեկտորներից։ Եթե a-ն V տարածության ցանկացած վեկտորն է, ապա (1) սիստեմի առավելագույնը լինելուց հետևում է, որ a-ն գծայնորեն արտահայտվում է այդ վեկտորների միջոցով՝

$$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n. \tag{2}$$

Մյուս կողմից, (1) սիստեմի գծայնորեն անկախ լինելուց բխում է, որ (2) արտահայտությունը a վեկտորի համար կլինի միակը. եթե լիներ նաև՝

$$a=\alpha'_1e_1+\alpha'_2e_2+\dots+\alpha'_ne_n,$$

ապա կունենայինք՝

$$(\alpha_1-\alpha'_1)e_1-(\alpha_2-\alpha'_2)e_2+\dots+(\alpha_n-\alpha'_n)e_n=0$$

որտեղից կստացվեր՝

$$\alpha_i=\alpha'_i,\quad i=1, 2, \dots, n.$$

Այսպիսով, a վեկտորին միարժեքորեն համապատասխանում է գործակիցների

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \tag{3}$$

տողը (1) բազիսի նկատմամբ նրա (2) արտահայտության մեջ կամ, ինչպես մենք կասենք, նրա կոորդինատների տողը (1) բազիսում։ *Հակադարձաբար, (3) տեսքի ամեն մի տող, այսինքն՝ n-չափանի յուրաքանչյուր վեկտոր, 2-րդ գլխում սահմանված իմաստով, ծառայում է որպես V տարածության մի որոշ վեկտորի կոորդինատների տող (1) բազիսում, հենց այն վեկտորի, որը (1) բազիսի նկատմամբ գրվում է (2) տեսքով։*

Մենք, հետևապես, ստացանք փոխմիարժեք համապատասխանություն V տարածության բոլոր վեկտորների և n-չափանի վեկտորական տարածության բոլոր վեկտոր-տողերի միջև։ Ապացուցենք, որ այդ համապատասխանությունը, որն, իհարկե, կախված է (1) բազիսի ընտրությունից, իզոմորֆ համապատասխանություն է։

Վերցնենք V տարածությունում, (1) բազիսի նկատմամբ (2) տեսքով գրվող a վեկտորից բացի, նաև մի b վեկտոր, որը (1) բազիսի նկատմամբ գրվում է

$$b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\dots+\beta_ne_n$$

տեսքով։ Այդ դեպքում՝

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1)e_1+(\alpha_2+\beta_2)e_2+\dots+(\alpha_n+\beta_n)e_n,$$

այսինքն՝ a և b վեկտորների գումարին համապատասխանում է (1) բազիսում նրանց կոորդինատների տողերի գումարը։
Մյուս կողմից,

$$\gamma\cdot a=(\gamma\alpha_1)e_1+(\gamma\alpha_2)e_2+\dots+(\gamma\alpha_n)e_n,$$

այսինքն՝ a վեկտորի և γ թվի արտադրյալին համապատասխանում է (1) բազիսում նրա կոորդինատների տողի և γ թվի արտադրյալը։

Դրանով ապացուցված է հետևյալ թեորեման.

n *վեկտորներից բաղկացած բազիս ունեցող* ամեն մի գծային տարածություն իզոմորֆ է տողերի n-չափանի վեկտորական տարածությանը։

Ինչպես մենք գիտենք, գծային տարածությունների իզոմորֆ համապատասխանության ժամանակ գծայնորեն կախյալ վեկտորների սիստեմին համապատասխանում է գծայնորեն կախյալ վեկտորների սիստեմ և հակառակը. դրա համար էլ գծայնորեն անկախ սիստեմին կհամապատասխանի գծայնորեն անկախ սիստեմ։ Այստեղից հետևում է, որ իզոմորֆ համապատասխանության ժամանակ բազիսին *համապատասխանում է* բազիս:

Իրոք, դիցուք V և V′ տարածությունների իզոմորֆ համապատասխանության ժամանակ V տարածության $e_1, e_2, \dots, e_n$ բազիսին համապատասխանում է V′ տարածության $e'_1 e'_2, \dots, e'_n$ վեկտորների սիստեմը, որը չնայած գծայնորեն անկախ սիստեմ է, բայց առավելագույն սիստեմ չէ։ Հետևապես, V′-ում կարելի է գտնել այնպիսի f′ վեկտոր, որ $e'_1, e'_2, \dots, e'_n, f'$ վեկտորների սիստեմը նույնպես լինի գծայնորեն անկախ։ Բայց f′ վեկտորը դիտարկվող իզոմորֆ համապատասխանության ժամանակ ծառայում է U տարածության որևէ f վեկտորի պատկեր։ Մենք ստանում ենք, որ $e_1, e_2, \dots, e_n, f$ վեկտորների սիստեմը պետք է լինի գծայնորեն անկախ սիստեմ, որ հակասում է բազիսի սահմանմանը։

Մենք գիտենք, այնուհետև (տես § 9), որ n-չափանի վեկտոր-տողերի տարածության մեջ բոլոր գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմները բաղկացած են n վեկտորներից, որ n+1 վեկտորների ամեն մի սիստեմ գծայնորեն կախյալ սիստեմ է, և որ վեկտորների յուրաքանչյուր գծայնորեն անկախ սիստեմ պարունակվում է որևէ գծայնորեն անկախ առավելագույն սիստեմում։ Օգտվելով իզոմորֆ համապատասխանության վերը հաստատված հատկություններից, մենք գալիս ենք հետևյալ արդյունքներին.

V վերջավորչափանի գծային տարածության բոլոր բազիսները բաղկացած են միևնույն թվով վեկտորներից։ *Եթե այդ թիվը հավա-*

սար է n-ի, ապա V-ն կոչվում է n-չափանի գծային տարածություն, իսկ n-ը՝ այդ տարածության չափականությունը։

$n+1$ վեկտորների յուրաքանչյուր սիստեմ n-չափանի գծային տարածության մեջ գծայնորեն կախյալ սիստեմ է։

n-չափանի գծային տարածության մեջ վեկտորների ամեն մի գծային անկախ սիստեմ պարունակվում է այդ տարածության որևէ բազիսում։

Այժմ հեշտ է տեսնել, որ վերը նշված իրական գծային տարածության օրինակները (հաջորդականությունների տարածությունը և ֆունկցիաների տարածությունը) վերջավորչափանի տարածություններ չեն. այդ տարածություններից յուրաքանչյուրում ընթերցողն առանց դժվարության կարող է գտնել այնպիսի գծային անկախ սիստեմներ, որոնք բաղկացած են ցանկացած չափով շատ վեկտորներից։

Կապը բազիսների միջև: *Մեր ուսումնասիրման առարկա հանդիսանում են վերջավորչափանի գծային տարածությունները։ Հասկանալի է, որ ուսումնասիրելով n-չափանի գծային տարածությունները, մենք ըստ էության ուսումնասիրում ենք այն n-չափանի վեկտոր-տողերի տարածությունը, որը մենք մուծել էինք դեռևս 2-րդ գլխում։ Միայն առաջ այդ տարածության մեջ դիտարկված էր մի բազիս, այն է՝ միավոր վեկտորներից կազմված բազիսը, այսինքն՝ այնպիսի վեկտորներից, որոնց մեկ կոորդինատը հավասար է մեկի, իսկ մնացած կոորդինատները՝ զրոյի, և տարածության բոլոր վեկտորները տրվում էին իրենց կոորդինատների տողերով այդ բազիսում. այժմ արդեն տարածության բոլոր բազիսները մեզ համար իրավահավասար են։*

Տեսնենք, թե որքան շատ բազիսներ կարելի է գտնել n-չափանի գծային տարածության մեջ և ինչպես են այդ բազիսները կապված մեկը մյուսի հետ։

Դիցուք n-չափանի V-գծային տարածության մեջ տրված են

$$e_1, e_2, \cdots, e_n \tag{4}$$

և

$$e_1', e_2', \cdots, e_n' \tag{5}$$

բազիսները։ Ինչպես V տարածության ամեն մի վեկտոր, այնպես էլ (5) բազիսի յուրաքանչյուր վեկտոր, միակ կերպով կարտահայտվի (4) բազիսի միջոցով՝

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j, \quad i=1, 2, \cdots, n。 \tag{6}$$

Կազմենք

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որի տողերը (5) վեկտորների կոորդինատների տողերն են (4) բազիսում. այն կոչվում է (4) բազիսից (5) բազիսին անցման մատրից։

Անցման T մատրիցի և (4) ու (5) բազիսների միջև եղած կապը, համաձայն (6)-ի, կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային հավասարության տեսքով.

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

կամ, (4) և (5) բազիսները, գրված սյուներով, համապատասխանաբար նշանակելով e և e' հետևյալ տեսքով.

$$e' = Te。$$

Մյուս կողմից, եթե T'-ը հանդիսանում է (5) բազիսից (4) բազիսին անցման մատրիցը, ապա՝

$$e = T'e',$$

որտեղից՝

$$e = (T'T)e,$$
$$e' = (TT')e'$$

և, քանի որ e և e' բազիսները գծայնորեն անկախ են, ապա՝

$$T'T = TT' = E,$$

որտեղից՝

$$T' = T^{-1}。$$

Դրանով ապացուցված է, որ մի բազիսից մի այլ բազիսի անցման մատրիցը միշտ չվերասերված մատրից է։

Ամեն մի n-րդ կարգի իրական էլեմենտներով չվերասերվող քառակուսի մատրից ծառայում է որպես n-չափանի իրական գծային տարածության տվյալ բազիսից մի այլ բազիսի անցման մատրից։

Իրոք, դիցուք տված է (4) բազիսը և n-րդ կարգի չվերասերվող T մատրիցը։ Վերցնենք որպես (5) այն վեկտորների սիստեմը, որոնց համար (4) բազիսում կոորդինատային տողեր են ծառայում T մատրիցի տողերը, հետևապես, տեղի ունի (7) հավասարությունը։ Այդ (5) վեկտորները գծայնորեն անկախ են, քանի որ այդ վեկտորների գծային կախվածությունից կբխեր T մատրիցի տողերի գծային կախվածությունը, որը կհակասեր T մատրիցի չվերասերվող լինելուն։ Այդ պատճառով, (5) սիստեմը, որպես n վեկտորներից բաղկացած գծայնորեն անկախ սիստեմ, մեր տարածության բազիս է, իսկ T մատրիցը ծառայում է (4) բազիսից (5) բազիսի անցման մատրից։

Մենք տեսնում ենք, որ n-չափանի գծային տարածության մեջ կարելի է գտնել նույնքան շատ տարբեր բազիսներ, որքան շատ գոյություն ունեն n-րդ կարգի չվերասերվող քառակուսի մատրիցներ։ Ճիշտ է, այդ դեպքում երկու բազիսներ, որոնք կազմված են միևնույն վեկտորներից, բայց տարբեր դասավորությամբ, համարվում են տարբեր։

Վեկտորի կոորդինատների ձևափոխումը։ *Դիցուք n-չափանի գծային տարածության մեջ տված են (4) և (5) բազիսները՝* $T=(\tau_{ij})$ *անցման մատրիցով՝*

$$e'=Te.$$

Գտնենք այդ բազիսներում a *կամայական վեկտորի կոորդինատների տողերի միջև եղած կապը։*

Դիցուք՝

$$a=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j, \quad a=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i e'_i. \tag{8}$$

Օգտվելով (6)-ից, կստանանք՝

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\left(\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij}\right)e_j.$$

Համեմատելով (8)-ի հետ և օգտվելով վեկտորը տվյալ բազիսի միջոցով գրելու միակությունից, կստանանք՝

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij}, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

այսինքն՝ տեղի ունի

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)T$$

մատրիցային հավասարությունը։

Այսպիսով, a վեկտորի կոորդինատների տողը e բազիսում հավասար է այդ վեկտորի կոորդինատների տողին e′ բազիսում՝ աջից բազմապատկված e բազիսից e′ բազիսին անցման T մատրիցով։

Այստեղից, հասկանալի է, հետևում է

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)T^{-1}$$

հավասարությունը։

Օ ր ի ն ա կ։ Դիտարկենք երեքչափանի իրական գծային տարածությունը

$$e_1, e_2, e_3 \tag{9}$$

բազիսով։

$$\left.\begin{aligned} e'_1&=5e_1-e_2-2e_3,\\ e'_2&=2e_1+3e_2,\\ e'_3&=-2e_1+e_2+e_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

վեկտորները նույնպես կազմում են բազիս այդ տարածության մեջ, ընդ որում (9) բազիսից (10) բազիսին անցման մատրից ծառայում է

$$T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որտեղից՝

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Այդ պատճառով,

$$a=e_1+4e_2-e_3$$

վեկտորի կոորդինատային տողը (10) բազիսում կլինի՝

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)=(1, 4, -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13, 6, -27),$$

այսինքն՝

$$a=-13e'_1+6e'_2-27e'_3.$$

§ 31. Գծային ձևափոխություններ

Մենք 3-րդ գլխում արդեն հանդիպել ենք անհայտների գծային ձևափոխության գաղափարին։ Այն գաղափարը, որին մենք հիմա կանգնենք, կրում է նույն անունը, բայց ունի այլ բնույթ։ Իմիջիայլոց, որոշ կապեր այդ համանուն հասկացությունների միջև հնարավոր է նշել։

Դիցուք տված է n-չափանի գծային իրական մի տարածություն, որը նշանակենք V_n*-ով։ Դիտարկենք այդ տարածության* ձևափոխությունը, *այսինքն՝ այնպիսի արտապատկերում, որը* V_n *տարածության յ ո ւ ր ա ք ա ն չ յ ո ւ ր* a *վեկտոր բերում է նույն այդ տարածության որևէ* a′ *վեկտորի։ Այդ* a′ *վեկտորը կոչվում է* a *վեկտորի* պատկեր *դիտարկվող ձևափոխության ժամանակ։*

Եթե ձևափոխությունը նշանակված է φ*-ով, ապա* a *վեկտորի պատկերը պայմանավորվենք նշանակել ոչ թե* φ(a)*-ով կամ* φa*-ով, որն ընթերցողի համար ավելի սովորական կլիներ, այլ* aφ*-ով։ Այսպիսով,*

$$a=a\varphi.$$

V_n *գծային տարածության* φ *ձևափոխությունը կոչվում է այդ տարածության* գծային ձևափոխություն, *եթե կամայական* a *և* b *վեկտորների գումարը այնփոխանցում է այդ վեկտորների պատկերների գումարին՝*

$$(a+b)\varphi=a\varphi+\varphi b, \tag{1}$$

իսկ կամայական a վեկտորի և որևէ α թվի արտադրյալը փոխանցում է a վեկտորի պատկերի և այդ α թվի արտադրյալին՝

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)։ \qquad (2)$$

Այս սահմանումից անմիջապես բխում է, որ գծային տարածության գծային ձևափոխությունը տված $a_1, a_2, \ldots, a_k$ վեկտորների ցանկացած գծային կոմբինացիան փոխանցում է այդ վեկտորների պատկերների գծային կոմբինացիային (նույն գործակիցներով)՝

$$(\alpha_1 a_2+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_k a_k)\varphi=\alpha_1(a_1\varphi)+\alpha_2(a_2\varphi)+\cdots+\alpha_k(a_k\varphi)։ \qquad (3)$$

Ապացուցենք հետևյալ պնդումը.

V_n գծային տարածության ցանկացած φ գծային ձևափոխության ժամանակ այդ տարածության 0 վեկտորը մնում է անշարժ՝

$$0\varphi=0,$$

իսկ տված a վեկտորի հակադիր վեկտորի պատկեր է ծառայում տված a վեկտորի պատկերի հակադիր վեկտորը՝

$$(-a)\varphi=-a\varphi։$$

Իրոք, եթե b-ն կամայական վեկտոր է, ապա, (2)-ի համաձայն,

$$0\varphi=(0\cdot b)\varphi=0(b\varphi)=0։$$

Մյուս կողմից՝

$$(-a)\varphi=[(-1)a]\varphi=(-1)(a\varphi)=-a\varphi։$$

Գծային տարածության գծային ձևափոխության հասկացությունը ծագել է որպես անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից հայտնի՝ հարթության կամ եռաչափանի տարածության աֆինական ձևափոխության հասկացության ընդհանրացում. իրոք, (1) և (2) պայմանները աֆինական ձևափոխությունների համար բավարարվում են։ Այդ պայմանները բավարարվում են նաև հարթության վրա կամ եռաչափանի տարածության մեջ վեկտորների պրոյեկցիաների համար մի որոշ ուղիղի (կամ մի որոշ հարթության) վրա։ Այսպես, օրինակ, կոորդինատների սկզբնակետից ելնող հատված-վեկտորների եռչափանի գծային տարածության մեջ, այնպիսի ձևափոխությունը, որը վեկտոր-հատվածներից յուրաքանչյուրը փոխանցում է այդ վեկտորի պրոյեկցիային սկզբնակետից դուրս եկող որևէ առանցքի վրա, կլինի գծային ձևափոխություն։

Կամայական V_n տարածության մեջ գծային ձևափոխության օրինակ են ծառայում ε նույնական ձևափոխությունը, որը ցանկացած a վեկտորին թողնում է իր տեղը՝

$$a\varepsilon=a$$

և ω զրոյական ձևափոխությունը, որն ամեն մի a վեկտոր արտապատկերում է զրոյի վրա՝

$$a\omega=0։$$

Այժմ կտրվի V_n գծային տարածության բոլոր գծային ձևափոխությունների որոշ ընդհանուր ակնարկ։ Դիցուք

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \qquad (4)$$

այդ տարածության բազիս է․ ինչպես և առաջ, (4) բազիսը, դասավորված սյունակով, կնշանակենք e-ով։ Քանի որ V_n տարածության ամեն մի a վեկտոր միակ կերպով է ներկայացվում (4) բազիսի վեկտորների գծային կոմբինացիայի տեսքով, ապա, ըստ (3)-ի, a վեկտորի պատկերը (4) վեկտորների պատկերների միջոցով արտահայտվում է նույն գործակիցների գծային կոմբինացիայով։ Այլ խոսքով, V_n տարածության ամեն մի φ գծային ձևափոխություն միարժեք կերպով որոշվում է (4) անփոփոխ բազիսի բոլոր վեկտորների $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ պատկերների տրմամբ։

Ինչպիսին էլ լինի V_n տարածության n հատ վեկտորների

$$c_1, c_2, \ldots, c_n \qquad (5)$$

կարգավորված սիստեմը, գոյություն ունի, այն էլ միակը, V_n տարածության այնպիսի φ գծային ձևափոխություն, որի ժամանակ (5)-ը ծառայում է որպես (4) բազիսի վեկտորների պատկերների սիստեմ՝

$$e_i\varphi=c_i, \quad i=1, 2, \ldots n։ \qquad (6)$$

Վերևում արդեն ապացուցված է φ ձևափոխության միակությունը, մեզ մնում է ապացուցել նրա գոյությունը։

φ ձևափոխությունը սահմանենք հետևյալ կերպ. եթե a-ն տարածության կամայական վեկտոր է և

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\text{-ն}$$

նրա արտահայտությունն է (4) բազիսի նկատմամբ, ապա ընդունենք

$$a\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i։ \qquad (7)$$

Ապացուցենք այդ ձևափոխության գծային լինելը։ Եթե

$$b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\text{-ն}$$

այդ տարածության մի այլ ցանկացած վեկտոր է, ապա՝

$$(a+b)\varphi=\left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i\right]\varphi=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)c_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i c_i=a\varphi+b\varphi.$$

Իսկ եթե γ-ն որևէ թիվ է, ապա՝

$$(\gamma a)\varphi=\left[\sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i)e_i\right]\varphi=\sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i)c_i=\gamma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i=\gamma(a\varphi).$$

Ինչ վերաբերում է (6) հավասարության արդարացիությանը, ապա այն բխում է φ ձևափոխության (7) սահմանումից, քանի որ e_i վեկտորի բոլոր կոորդինատները (4) բազիսում, բացի i-րդից, հավասար են զրոյի, իսկ i-րդը հավասար է մեկի։

Հետևապես, մեր կողմից հաստատված է փոխմիարժեք համապատասխանություն V_n տարածության բոլոր գծային ձևափոխությունների և այդ տարածության n-ական վեկտորների բոլոր (5) տեսքի կարգավորված սիստեմների միջև։

Սակայն, ամեն մի c_i վեկտոր (4) բազիսի միջոցով գրվում է միակ ձևով՝

$$c_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{8}$$

Կարելի է (4) բազիսի նկատմամբ c_i վեկտորի կոորդինատներից կազմել

$$A=(\alpha_{ij}) \tag{9}$$

քառակուսի մատրիցը՝ որպես նրա i-րդ տող վերցնելով c_i վեկտորի ($i=1,2,\dots,n$) կոորդինատային տողը։ Քանի որ (5) սիստեմը կամայական սիստեմ էր, ապա A մատրիցը կլինի n-րդ կարգի կամայական մատրից իրական էլեմենտներով։

Այսպիսով, ստացանք փոխմիարժեք համապատասխանություն V_n տարածության բոլոր գծային ձևափոխությունների և բոլոր n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների միջև. այդ համապատասխանությունը, անշուշտ, կախված է (4) բազիսի ընտրությունից։

Կասենք, որ A մատրիցը տալիս է φ գծային ձևափոխությունը (4) բազիսում կամ, կարճ՝ **A մատրիցը φ գծային ձևափոխության մատրիցն է** (4) բազիսում։ Եթե $e\varphi$-ով նշանակենք (4) բազիսի վեկտորների պատկերներից կազմած սյունը, ապա (6)-ից, (8)-ից և (9)-ից բխում է հետևյալ մատրիցային հավասարությունը

$$e\varphi=Ae, \tag{10}$$

որը լրիվ նկարագրում է φ գծային ձևափոխության e բազիսի և e բա-

զիսում այդ գծային ձևափոխությունը տվող A մատրիցի միջև եղած կապը։

Ցույց տանք, թե ինչպես, գիտենալով (4) բազիսում φ գծային ձևափոխության A մատրիցը, այդ բազիսի նկատմամբ a վեկտորի կոորդինատների միջոցով կարելի է գտնել $a\varphi$ պատկերի կոորդինատները։ Եթե

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,$$

ապա՝

$$a\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i (e_i\varphi),$$

որը հավասարազոր է

$$a\varphi=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)(e\varphi)$$

մատրիցային հավասարությանը։ Օգտվելով (10)-ից և հաշվի առնելով, որ մատրիցների բազմապատկման զուգորդելիությունը տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ մատրիցներից որևէ մեկը հանդիսանում է վեկտորներից կազմված սյուն, մենք կստանանք՝

$$a\varphi=[(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A]e.$$

Այստեղից հետևում է, **որ $a\varphi$ վեկտորի կոորդինատային տողը հավասար է a վեկտորի կոորդինատային տողին, աջից բազմապատկած φ գծային ձևափոխության A մատրիցով (բոլորը (4) բազիսում)։**

Օ ր ի ն ա կ։ Դիցուք երեքչափանի գծային տարածության e_1, e_2, e_3 բազիսում φ գծային ձևափոխությունը տրված է

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

մատրիցով։ Եթե

$$a=5e_1+e_2-2e_3,$$

ապա՝

$$(5,\ 1,\ -2)\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}=(-9,\ 16,\ 0).$$

այսինքն՝

$$a\varphi=-9e_1+16e_2.$$

Կապը տարբեր բազիսներում գծային ձևափոխության մատրիցների միջև։ Ինքնստինքյան հասկանալի է, որ գծային ձևափոխությունը տվող մատրիցը կախված է բազիսի ընտրությունից։ Տեսնենք թե ինչպիսի կապ կա տարբեր բազիսներում նույն գծային ձևափոխությունը տվող մատրիցների միջև։

Դիցուք տված են e և e' բազիսները անցման T մատրիցով՝

$$e' = Te \qquad (11)$$

և դիցուք φ գծային ձևափոխությունը տրվում է այդ բազիսներում համապատասխանաբար A և A' մատրիցներով՝

$$e\varphi = Ae, \quad e'\varphi = A'e'. \qquad (12)$$

Այդ (12) հավասարումներից երկրորդը, համաձայն (11)-ի, տալիս է

$$(Te)\varphi = A'(Te).$$

Սակայն՝

$$(Te)\varphi = T(e\varphi).$$

Իրոք, եթե $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{in})$-ը T մատրիցի i-րդ տողն է, ապա՝

$$(\tau_{i1}e_1+\tau_{i2}e_2+\cdots\tau_{in}e_n)\varphi = \tau_{i1}(e_1\varphi)+\tau_{i2}(e_2\varphi)+\cdots+\tau_{in}(e_n\varphi).$$

Այսպիսով, ըստ (12)-ի,

$$(Te)\varphi = T(e\varphi) = T(Ae) = (TA)e,$$
$$A'(Te) = (A'T)e,$$

այսինքն՝

$$(TA)e = (A'T)e.$$

Եթե գոնե մեկ i-ի համար $(1 \leqslant i \leqslant n)$ TA մատրիցի i-րդ տողը տարբեր լինի $A'T$ մատրիցի i-րդ տողից, ապա $e_1, e_2, \ldots, e_n$ վեկտորների երկու տարբեր գծային կոմբինացիաները կլինեն իրար հավասար, որը հակասում է e բազիսի գծային անկախությանը։ Այսպիսով,

$$TA = A'T,$$

որտեղից T անցման մատրիցի չվերասերվող լինելու շնորհիվ,

$$A' = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}A'T. \qquad (13)$$

Նկատենք, որ B և C քառակուսի մատրիցները կոչվում են նման, եթե նրանք կապված են

$$C = Q^{-1}BQ$$

առնչությամբ, որտեղ Q-ն մի որոշ չվերասերվող մատրից է։ Այդպիսի դեպքում ասում են, որ C մատրիցն ստացվել է B-ից՝ փոխակերպելով Q մատրիցի միջոցով։

Վերևում ապացուցած (13) հավասարությունները այժմ կարելի է ձևակերպել հետևյալ կարևոր թեորեմայի տեսքով.

Տարբեր բազիսներում միևնույն φ գծային ձևափոխությունը տվող մատրիցները նման են իրար։ Ըստ որում φ գծային ձևափոխության մատրիցը e' բազիսում ստացվում է e բազիսում այդ գծային ձևափոխության մատրիցից՝ փոխակերպվելով e' բազիսից e բազիսին անցման մատրիցի միջոցով։

Ընդգծենք, որ եթե A մատրիցը հանդիսանում է φ գծային ձևափոխության մատրիցը e բազիսում, ապա A մատրիցին նման ցանկացած B մատրիցը՝

$$B = Q^{-1}AQ,$$

նույնպես տալիս է φ գծային ձևափոխություն մի որոշ բազիսում, այն է՝ այն բազիսում, որն ստացվում է e բազիսից Q^{-1} անցման մատրիցի միջոցով։

Գործողություններ գծային ձևափոխությունների հետ։ V_n տարածության ամեն մի գծային ձևափոխություն զուգադրելով իր մատրիցի հետ մի որոշ անշարժ բազիսում, մենք կստանանք, ինչպես ապացուցված է, փոխմիարժեք համապատասխանություն բոլոր գծային ձևափոխությունների և բոլոր n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների միջև։ Բնական է սպասել, որ մատրիցների գումարման, բազմապատկման և մատրիցը թվով բազմապատկելու գործողություններին պետք է համապատասխանեն համանման գործողություններ գծային ձևափոխությունների նկատմամբ։

Դիցուք V_n տարածության մեջ տված են φ և ψ գծային ձևափոխությունները։ Այդ ձևափոխությունների գումար անվանենք $\varphi+\psi$ ձևափոխությունը, որը սահմանվում է

$$a(\varphi+\psi) = a\varphi + a\psi \qquad (14)$$

հավասարությամբ. հետևապես, այդ $\varphi+\psi$ ձևափոխությունն ամեն մի a վեկտոր բերում է φ և ψ ձևափոխություններում ստացվող նրա պատկերների գումարին։

$\varphi+\psi$ ձևափոխությունը գծային ձևափոխություն է։ Իրոք, ցանկացած a և b վեկտորների և կամայական α թվի համար՝

$$(a+b)(\varphi+\psi) = (a+b)\varphi + (a+b)\psi = a\varphi + b\varphi + a\psi + b\psi = a(\varphi+\psi) + b(\varphi+\psi).$$
$$(\alpha a)(\varphi+\psi) = (\alpha a)\varphi + (\alpha a)\psi = \alpha(a\varphi) + \alpha(a\psi) = \alpha(a\varphi + a\psi) = \alpha[a(\varphi+\psi)].$$

Մյուս կողմից, φ և ψ ձևափոխությունների արտադրյալ անվանենք

$$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi \qquad (15)$$

հավասարությամբ սահմանվող $\varphi\psi$ ձևափոխությունը, այսինքն՝ այնպիսի ձևափոխությունը, որն ստացվում է որպես φ և ψ ձևափոխությունների հաջորդաբար կիրառման արդյունք։ **Այդ $\varphi\psi$ ձևափոխությունը գծային ձևափոխություն է՝**

$$(a+b)(\varphi\psi) = [(a+b)\varphi]\psi = (a\varphi + b\varphi)\psi = (a\varphi)\psi + (b\varphi)\psi = a(\varphi\psi) + b(\varphi\psi);$$
$$(\alpha a)(\varphi\psi) = (\alpha a)\varphi]\psi = [\alpha(a\varphi)\psi] = \alpha[a(\varphi\psi)].$$

Անվանենք, վերջապես, φ **գծային ձևափոխության և χ թվի արտադրյալ** այն $\chi\varphi$ ձևափոխությունը, որը որոշվում է

$$a(\varkappa\varphi) = \varkappa(a\varphi) \qquad (16)$$

համապատասխանությամբ։ Հետևապես, բոլոր վեկտորների φ ձևափոխությամբ ստացվող պատկերները բազմապատկվում են χ թվով։

Այդ ϰφ ձևափոխությունը գծային ձևափոխություն է՝

$$(a+b)(\varkappa\varphi)=\varkappa[(a+b)\varphi]=\varkappa(a\varphi+b\varphi)=\varkappa(a\varphi)+\varkappa(b\varphi)=a(\varkappa\varphi)+b(\varkappa\varphi)\text{․}$$
$$(\alpha a)(\varkappa\varphi)=\varkappa[(\alpha a)\varphi]=\varkappa[\alpha(a\varphi)]=\alpha[\varkappa(a\varphi)]=\alpha(a(\varkappa\varphi))\text{․}$$

Դիցուք $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *բազիսում φ և ψ ձևափոխությունները տրըված են համապատասխանաբար* $A=(\alpha_{ij})$ *և* $B=(\beta_{ij})$ *մատրիցներով՝*

$$e\varphi=Ae,\quad e\psi=Be\text{․}$$

Այդ դեպքում, համաձայն (14)-ի՝

$$e_i(\varphi+\psi)=e_i\varphi+e_i\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}e_j=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})e_j\text{․}$$

այսինքն՝

$$e(\varphi+\psi)=(A+B)e\text{․}$$

Այսպիսով, գծային ձևափոխությունների գումարի մատրիցը ցանկացած բազիսում հավասար է այդ ձևափոխությունների մատրիցների գումարին նույն բազիսում։

Մյուս կողմից, համաձայն (15)-ի՝

$$e_i(\varphi\psi)=(e_i\varphi)\psi=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j\right)\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(e_j\psi)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{jk}\right)e_k,$$

այսինքն՝

$$e(\varphi\psi)=(AB)e\text{․}$$

Այլ խոսքով, գծային ձևափոխությունների արտադրյալի մատրիցը ցանկացած բազիսում հավասար է այդ գծային ձևափոխությունների մատրիցների արտադրյալին նույն բազիսում։

Վերջապես, համաձայն (16)-ի՝

$$e_i(\varkappa\varphi)=\varkappa(e_i\varphi)=\varkappa\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j=\sum_{j=1}^{n}(\varkappa\alpha_{ij})e_j,$$

այսինքն՝

$$e(\varkappa\varphi)=(\varkappa A)e\text{․}$$

Հետևապես, φ գծային ձևափոխության և ϰ թվի արտադրյալը տվող մատրիցը որևէ բազիսում հավասար է այդ նույն բազիսում տվյալ φ գծային ձևափոխության մատրիցի և նույն ϰ թվի արտադրյալին։

Ստացված արդյունքներից բխում է, որ գծային ձևափոխությունների հետ կատարվող գործողություններն օժտված են նույն հատկություններով, ինչ որ մատրիցների հետ կատարվող գործողությունները։ Այսպես, գծային ձևափոխությունների գումարումը տեղափոխելի և զուգորդելի է, իսկ բազմապատկումը զուգորդելի է, սակայն $n>1$ *դեպքում տեղափոխելի չէ։ Գծային ձևափոխությունների համար գոյություն ունի հանման միարժեք գործողություն։ Նշենք նաև, որ ε* նույնական ձևափոխությունը գծային ձևափոխությունների մեջ խաղում է միավորի դերը, իսկ ω զրոյական ձևափոխությունը՝ զրոյի դերը։ *Իրոք, ցանկացած բազիսում ε ձևափոխությունը տրվում է միավոր մատրիցով, իսկ ω ձևափոխությունը՝ զրոյական մատրիցով։*

§ 32*. Գծային ենթատարածություններ

V *գծային տարածության* L *ենթաբազմությունը կոչվում է* V *տարածության* գծային ենթատարածություն, *եթե նա ինքը նույնպես հանդիսանում է գծային տարածություն V-ում սահմանված վեկտորների գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկելու գործողությունների նկատմամբ։ Այսպես, եռաչափանի Էվկլիդեսյան տարածության մեջ այն բոլոր վեկտորների բազմությունը, որոնք դուրս են գալիս սկզբնակետից և ընկած են սկզբնակետով անցնող որևէ հարթության (կամ որևէ ուղիղի) վրա, կազմում են գծային ենթատարածություն։*

Որպեսզի V տարածության ոչ դատարկ L ենթաբազմությունը լինի նրա գծային ենթատարածություն, բավական է, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

1. Եթե a և b վեկտորները պատկանում են L-ին, ապա L-ին է պատկանում նաև a+b վեկտորը։

2. Եթե a վեկտորը պատկանում է L-ին, ապա L-ում պարունակվում է նաև αa վեկտորը՝ α-ի ցանկացած արժեքի համար։

Իրոք, համաձայն 2-րդ պայմանի, L բազմությունը պարունակում է զրո վեկտոր՝ եթե a վեկտորը պատկանում է L-ին, ապա L-ը պարունակում է նաև $0\cdot a=0$ *վեկտորը։ Հետո, նույնպես ըստ 2-րդ պայմանի, L-ը իր ամեն մի a վեկտորի հետ միասին պարունակում է նաև նրա* $-a=(-1)\cdot a$ *հակադիր վեկտորը, այդ պատճառով էլ, համաձայն 1-ին պայմանի, L-ը պարունակում է իր ցանկացած երկու վեկտորների տարբերությունը։ Ինչ վերաբերում է մնացած բոլոր պահանջներին, որոնք մտնում են գծային տարածության սահմանման մեջ, ապա նրանք, քանի որ բավարարվում են V-ում, կբավարարվեն նաև L-ում։*

V գծային տարածության ենթատարածությունների օրինակ են հանդիսանում նախ ինքը՝ V-ն, ինչպես նաև միայն զրոյական էլեմենտից կազմված բազմությունը, այսպես կոչված՝ զրոյական ենթատարածությունը: Ավելի հետաքրքիր է հետևյալ օրինակը. վերցնենք V տարածության մեջ վեկտորների ցանկացած վերջավոր սիստեմ՝

$$a_1, a_2, \dots, a_r \tag{1}$$

և նշանակենք L-ով այն բոլոր վեկտորների բազմությունը, որոնք հանդիսանում են (1) սիստեմի վեկտորների գծային կոմբինացիաներ: Ապացուցենք, որ L-ը կլինի գծային ենթատարածություն: Իրոք, եթե

$$b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_r a_r, \quad c=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_r a_r,$$

ապա

$$b+c=(\alpha_1+\beta_1)a_1+(\alpha_2+\beta_2)a_2+\dots+(\alpha_r+\beta_r)a_r,$$

այսինքն՝ $b+c$ վեկտորը պատկանում է L-ին. L-ին է պատկանում նաև

$$\gamma b=(\gamma\alpha_1)a_1+(\gamma\alpha_2)a_2+\dots+(\gamma\alpha_r)a_r$$

վեկտորը ցանկացած γ թվի համար:

Ասում են, որ այդ L գծային ենթատարածությունը առաջացել է վեկտորների (1) սիստեմով. L-ին են պատկանում, մասնավորապես, նաև (1) վեկտորները:

Իմիջիայլոց, վերջավորչափանի գծային տարածության ամեն մի գծային ենթատարածություն առաջանում է վեկտորների վերջավոր սիստեմով, քանի որ, եթե այն չի հանդիսանում զրոյական տարածություն, ապա օժտված է անգամ վերջավոր բազիսով: L գծային ենթատարածության չափականությունը մեծ չէ V_n տարածության n չափականությունից, ըստ որում՝ հավասար է n-ի միայն $L=V_n$ դեպքում: Զրոյական ենթատարածության չափականություն, իհարկե, պետք է համարել 0 թիվը:

Ամեն մի k-ի համար $(0<k<n)$ V_n տարածության մեջ գոյություն ունեն k-չափանի գծային ենթատարածություններ: Բավական է վերցնել ցանկացած k գծայնորեն անկախ վեկտորներով առաջացած ենթատարածությունը:

Դիցուք V տարածության մեջ տված են L_1 և L_2 ենթատարածությունները: Այն բոլոր վեկտորների L_0 բազմությունը, որոնք պատկանում են ինչպես L_1-ին, այնպես էլ L_2-ին, ինչպես հեշտ է ստուգել, կլինի գծային ենթատարածություն. այն կոչվում է L_1 և L_2 ենթատարածությունների փոխհատում: Մյուս կողմից, գծային ենթատարածություն կլինի նաև L_1 և L_2 ենթատարածությունների $\bar{L}$ գումարը, այսինքն՝ V տարածության այն բոլոր վեկտորների բազմությունը, որոնք ներկայացվում են երկու գումարելիների գումարի տեսքով, մեկը՝ L_1-ից,

մյուսը՝ L_2-ից: Եթե L_1, L_2, L_0 և $\bar{L}$ ենթատարածությունների չափականությունները, համապատասխանաբար, d_1, d_2, d_0 և $\bar{d}$ թվերն են, ապա տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$\bar{d}=d_1+d_2-d_0: \tag{2}$$

Այսինքն՝ երկու ենթատարածությունների գումարի չափականությունը հավասար է այդ ենթատարածությունների չափականությունների գումարին՝ հանած նրանց փոխհատման չափականությունը:

Ապացուցման համար վերցնենք L_0 ենթատարածության որևէ բազիս՝

$$a_1, a_2, \dots, a_{d_0} \tag{3}$$

և լրացնենք այն մինչև L_1 ենթատարածության

$$a_1, a_2, \dots, a_{d_0}, b_{d_0+1}, \dots, b_{d_1} \tag{4}$$

բազիսը և մինչև L_2 ենթատարածության

$$a_1, a_2, \dots, a_{d_0}, c_{d_0+1}, \dots, c_{d_2} \tag{5}$$

բազիսը: Օգտվելով $\bar{L}$ ենթատարածության սահմանումից, հեշտ է նկատել, որ այդ ենթատարածությունն առաջանում է

$$a_1, a_2, \dots, a_{d_0}, a_{d_0+1}, \dots, b_{d_1}, c_{d_0+1}, \dots c_{d_2} \tag{6}$$

վեկտորների սիստեմով: Հետևապես, (2) բանաձևը ապացուցած կլինենք, եթե ապացուցենք (6) սիստեմի գծային անկախությունը: Դիցուք տեղի ունի, որոշ թվային գործակիցներով, հետևյալ հավասարությունը.

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_{d_0} a_{d_0}+\beta_{d_0+1} b_{d_0+1}+\dots+\beta_{d_1} b_{d_1}+ \gamma_{d_0+1} c_{d_0+1}+\dots+\gamma_{d_2} c_{d_2}=0:$$

Այդ դեպքում՝

$$d=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_{d_0} a_{d_0}+\beta_{d_0+1} b_{d_0+1}+\dots+\beta_{d_1} b_{d_1}= =-\gamma_{d_0+1} c_{d_0+1}-\dots-\gamma_{d_2} c_{d_2}: \tag{7}$$

Այդ հավասարության ձախ մասը պարունակվում է L_1-ում, աջ մասը՝ L_2-ում, այդ պատճառով d վեկտորը, որը հավասար է ինչպես աջ մասին, այնպես էլ ձախ մասին, պատկանում է L_0-ին և, հետևապես, գծայնորեն է արտահայտվում (3) բազիսի միջոցով: Սակայն, (7) հավասարության աջ մասը ցույց է տալիս, որ d վեկտորը գծայնորեն է արտահայտվում նաև $c_{d_0+1}, \dots, c_{d_2}$ վեկտորների միջոցով: Այստեղից, քանի որ (5) սիստեմի վեկտորները գծայնորեն անկախ են, ապա բոլոր $\gamma_{d_0+1}, \dots, \gamma_{d_2}$ գործակիցները հավասար են զրոյի, այսինքն՝ $d=0$ և, այդ դեպքում, (4) սիստեմի գծային անկախությունից հետևում է, որ բոլոր $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d_0}, \beta_{d_0+1}, \dots, \beta_{d_1}$ գործակիցները նույնպես հավասար են զրոյի։ Դրանով ապացուցված է (6) սիստեմի գծային անկախությունը։

Ընթերցողին առաջարկվում է ստուգել, որ մեր ապացույցը մնում է ուժի մեջ նաև այն դեպքում, երբ L_0-ն հանդիսանում է զրոյական ենթատարածություն, այսինքն՝ $d_0=0$։

Գծային ձևափոխության արժեքների տիրույթը և կորիզը։ Դիցուք V_n գծային տարածության մեջ տված է φ գծային ձևափոխությունը։ Եթե L-ը V_n տարածության որևէ գծային ենթատարածություն է, ապա L ենթատարածության բոլոր վեկտորների՝ φ ձևափոխության ժամանակ ստացվող պատկերների $L\varphi$ բազմությունը նույնպես կլինի գծային ենթատարածություն, ինչպես անմիջականորեն բխում է գծային ենթատարածության և գծային ձևափոխության սահմանումներից։ Մասնավորապես, գծային ենթատարածություն կլինի նաև V_n տարածության բոլոր վեկտորների պատկերների $V_n\varphi$ բազմությունը. այն կոչվում է φ գծային ձևափոխության **արժեքների տիրույթ**։

Գտնենք արժեքների տիրույթի չափականությունը։ Դրա համար նկատենք հետևյալը. քանի որ տարբեր բազիսներում φ գծային ձևափոխությանը տվող բոլոր մատրիցները նման են իրար, ապա, համաձայն § 14-ի վերջին թեորեմայի, նրանք բոլորն էլ ունեն միևնույն ռանգը. այդ թիվը, հետևապես, կարելի է անվանել φ գծային ձևափոխության **ռանգ**։

φ գծային ձևափոխության արժեքների տիրույթի չափականությունը հավասար է այդ ձևափոխության ռանգին։

Իրոք, դիցուք φ-ն $e_1, e_2, \dots, e_n$ բազիսում տրված է A մատրիցով։ Արժեքների տիրույթը, այսինքն՝ $V_n\varphi$ ենթատարածությունն առաջանում է

$$e_1\varphi,\ d_2\varphi,\ \dots,\ e_n\varphi \tag{8}$$

վեկտորներով, և այդ պատճառով $V_n\varphi$ ենթատարածության բազիս կծառայի, մասնավորապես, (8) սիստեմի յուրաքանչյուր գծայնորեն անկախ առավելագույն ենթասիստեմ։ Սակայն, (8) սիստեմում գծայնորեն անկախ վեկտորների առավելագույն թիվը հավասար է A մատրիցի գծայնորեն անկախ տողերի առավելագույն թվին, այսինքն՝ հավասար է այդ մատրիցի ռանգին։ Թեորեմն ապացուցված է։

Մենք գիտենք, որ φ գծային ձևափոխության ժամանակ զրոյական վեկտորը փոխանցվում է ինքն՝ իրեն։ Հետևապես, V_n տարածության այն բոլոր վեկտորների $N(\varphi)$ բազմությունը, որոնք φ գծային ձևափոխությամբ արտապատկերվում են զրոյական վեկտորին, կլինի ոչ դատարկ և, պարզ է, որ կհանդիսանա գծային ենթատարածություն։ Այդ ենթատարածությունը կոչվում է φ ձևափոխության **կորիզ**, իսկ նրա չափականությունը՝ այդ ձևափոխության **արատ (դեֆեկտ)**։

V_n գծային տարածության ամեն մի φ գծային ձևափոխության համար, ձևափոխության ռանգի և արատի գումարը հավասար է ամբողջ տարածության n չափականությանը։

Իրոք, եթե φ-ն լինի V_n տարածության մեջ r ռանգի գծային ձևափոխություն, ապա $V_n\varphi$ ենթատարածությունը կունենա r հատ վեկտորներից կազմված բազիս՝

$$a_1, a_2, \dots, a_r\text{։} \tag{9}$$

V_n տարածության մեջ կարելի է ընտրել այնպիսի

$$b_1, b_2, \dots, b_r \tag{10}$$

վեկտորներ, որ՝

$$b_i\varphi=a_i, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

պարզ է, որ (10) վեկտորների ընտրությունը, ընդհանրապես, միարժեք չէ։ Եթե (10) վեկտորների որևէ ոչտրիվիալ գծային կոմբինացիա φ գծային ձևափոխությամբ արտապատկերվեր զրոյին, մասնավորապես, եթե (10) վեկտորները լինեին գծայնորեն կախյալ, ապա (9) վեկտորները իրենք կլինեին գծայնորեն կախյալ՝ հակառակ ենթադրությանը։ Այդ պատճառով, (10) վեկտորներով առաջացած L գծային ենթատարածությունը ունի r չափականությունը, իսկ նրա փոխհատումը $N(\varphi)$ ենթատարածության հետ հավասար է զրոյի։

Մյուս կողմից, L և $N(\varphi)$ ենթատարածությունների գումարը համընկնում է ամբողջ V_n տարածության հետ։ Իրոք, եթե c-ն տարածության որևէ վեկտոր է, ապա $d=c\varphi$-ն, իհարկե, պատկանում է $V_n\varphi$ ենթատարածությանը։ Այդ դեպքում L ենթատարածության մեջ կգտնվի այնպիսի b վեկտոր, որ

$$b\varphi=d.$$

b վեկտորը (10) սիստեմում գրվում է այն գործակիցներով, ինչ գործակիցներով գրվում է d վեկտորը (9) բազիսի միջոցով։ Այստեղից՝

$$c=b+(c-b),$$

ըստ որում $c-b$ վեկտորը պարունակվում է $N(\varphi)$ ենթատարածությունում, քանի որ

$$(c-b)\varphi=c\varphi-b\varphi=d-d=0\text{։}$$

Ստացված արդյունքներից և վերն ապացուցած (2) բանաձևից բխում է թեորեմայի պնդումը։

Չվերասերվող գծային ձևափոխություններ։ V_n գծային տարածության φ գծային ձևափոխությունը կոչվում է չվերասերվող, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններից որևէ մեկին, որոնց համարժեքությունը անմիջապես բխում է վերը ապացուցած թեորեմներից։

1. φ գծային ձևափոխության ռանգը հավասար է n-ի։

2. φ գծային ձևափոխության արժեքների տիրույթը համընկնում է ամբողջ V_n տարածության հետ։

3. φ գծային ձևափոխության արատը հավասար է զրոյի։

Չվերասերվող գծային ձևափոխությունների համար կարելի է նշել բազմաթիվ այլ սահմանումներ ևս, մասնավորապես, օրինակ, 4—6 սահմանումները։

4. V_n գծային տարածության տարբեր վեկտորները φ ձևափոխության ժամանակ ունեն տարբեր պատկերներ։

Իրոք, եթե φ ձևափոխությունը օժտված է 4-րդ հատկությամբ, ապա այդ ձևափոխության կորիզը կազմված է միայն զրոյական վեկտորից, այսինքն՝ բավարարվում է նաև 3-րդ պայմանը։ Իսկ եթե a և b վեկտորները այնպիսիք են, որ $a\neq b$, բայց $a\varphi=b\varphi$, ապա $a-b\neq 0$, իսկ $(a-b)\varphi=0$, այսինքն՝ հակասում է 3-րդ պայմանին։

2-րդ և 4-րդ պայմաններից բխում է՝

5. φ գծային ձևափոխությունը հանդիսանում է V_n տարածության փոխմիարժեք արտապատկերումը իր վրա։

Վերջինից բխում է, որ չվերասերվող φ գծային ձևափոխության համար գոյություն ունի φ^{-1} հակադարձ ձևափոխությունը, որը ամեն մի $a\varphi$ վեկտոր բերում է a վեկտորին՝

$$(a\varphi)\varphi^{-1}=a.$$

φ^{-1} հակադարձ ձևափոխությունը կլինի գծային, քանի որ

$$(a\varphi+b\varphi)\varphi^{-1}=[(a+b)\varphi]\varphi^{-1}=a+b,$$

$$[\alpha(a\varphi)]\varphi^{-1}=[(\alpha a)\varphi]\varphi^{-1}=\alpha a.$$

φ^{-1} հակադարձ ձևափոխության սահմանումից բխում է, որ

$$\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=\varepsilon. \tag{11}$$

այս (11) հավասարությունները կարելի է դիտել նույնպես φ^{-1} հակադարձ ձևափոխության սահմանում։ Այստեղից և նախորդ պարագրաֆի վերջին արդյունքներից բխում է, որ եթե φ չվերասերվող գծային ձևափոխությունը որևէ բազիսում տրվում է A մատրիցով, որը, ըստ 1-ին հատկության, չվերասերվող մատրից է, ապա φ^{-1}-ը այդ բազիսում տրվում է A^{-1} մատրիցով։

Մենք, այսպիսով, հանգում ենք չվերասերվող գծային ձևափոխության հետևյալ սահմանմանը.

6. φ գծային ձևափոխության համար գոյություն ունի φ^{-1} հակադարձ ձևափոխություն։

§ 33. Բնութագրիչ արմատներ և սեփական արժեքներ

Դիցուք $A=(a_{ij})$-ն n-րդ կարգի քառակուսի մատրից է իրական գործակիցներով։ Մյուս կողմից, թող λ-ն լինի որևէ անհայտ։ Այդ դեպքում, $A-\lambda E$ մատրիցը, որտեղ E-ն n-րդ կարգի միավոր մատրիցն է, կոչվում է A մատրիցի բնութագրիչ (խարակտերիստիկ) մատրից։ Քանի որ λE մատրիցում գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվում է λ-ն, իսկ մնացած բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի, ապա՝

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Բնութագրիչ մատրիցի դետերմինանտը կլինի λ-ի նկատմամբ բազմանդամ, ըստ որում՝ n աստիճանի։ Իրոք, գլխավոր անկյունագծի վրա դասավորված էլեմենտների արտադրյալը կլինի λ-ի նկատմամբ բազմանդամ $(-1)^n\lambda^n$ ավագ անդամով, իսկ դետերմինանտի մնացած բոլոր անդամները չեն պարունակում գլխավոր անկյունագծի վրայի առնվազն երկու էլեմենտներ, այդ պատճառով նրանց աստիճանը λ-ի նկատմամբ չի անցնում $(n-2)$-ից։ Այդ բազմանդամի գործակիցները կարելի է հեշտությամբ գտնել. այսպես, օրինակ λ^{-1}-ի գործակիցը հավասար է $(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn})$, իսկ ազատ անդամը համընկնում է մատրիցի դետերմինանտի հետ։

n-րդ աստիճանի այդ $|A-\lambda E|$ բազմանդամը կոչվում է A մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամ, իսկ նրա արմատները, որոնք կարող են լինել ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս թվեր, կոչվում են այդ մատրիցի բնութագրիչ արմատներ։

Նման մատրիցներն ունեն միևնույն բնութագրիչ բազմանդամները ուստի և միևնույն բնութագրիչ արմատները։

Իրոք, դիցուք՝

$$B=Q^{-1}AQ.$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով, որ λE մատրիցը տեղափոխելի է Q մատրիցի հետ և $|Q^{-1}|=|Q|^{-1}$, կստանանք՝

$$|B-\lambda E|=|Q^{-1}AQ-\lambda E|=|Q^{-1}(A-\lambda E)Q|=$$
$$=|Q|^{-1}\cdot|A-\lambda E|\cdot|Q|=|A-\lambda E|,$$

ինչ որ պետք էր ապացուցել։

Այստեղից և տարբեր բազիսներում գծային ձևափոխության մատրիցների միջև եղած կապի մասին § 31-ում ապացուցված թեորեմայից հետևում է, որ չնայած φ գծային ձևափոխությունը տարբեր բազիսներում տրվում է տարբեր մատրիցներով, այնուհանդերձ բոլոր այդ մատրիցներն ունեն միևնույն բնութագրիչ արմատները: Այդ արմատները, հետևապես, կարելի է անվանել հենց իր՝ φ գծային ձևափոխության բնութագրիչ արմատներ: Այդ բնութագրիչ արմատների համախումբը, ըստ որում՝ յուրաքանչյուր արմատը վերցրած այն բազմապատիկությամբ, ինչ բազմապատիկությամբ այն մտնում է բնութագրիչ բազմանդամի մեջ, կոչվում է φ գծային ձևափոխության սպեկտր:

Գծային ձևափոխությունների ուսումնասիրության ընթացքում բնութագրիչ արմատները մեծ դեր են խաղում: Ընթերցողը շատ անգամ հնարավորություն կունենա այդ բանում համոզվելու: Բնութագրիչ արմատների մի կիրառություն մենք հիմա կբերենք:

Դիցուք V_n իրական գծային տարածության մեջ տված է φ գծային ձևափոխությունը: Եթե զրոյից տարբեր b վեկտորը φ գծային ձևափոխությամբ բերվում է իրեն՝ b վեկտորին համեմատական վեկտորի՝

$$b\varphi=\lambda_0 b, \tag{1}$$

որտեղ λ_0-ն որևէ իրական թիվ է, ապա b վեկտորը կոչվում է φ ձևափոխության սեփական վեկտոր, իսկ λ_0 թիվը՝ այդ ձևափոխության սեփական արժեք, ըստ որում ասում են, որ b սեփական վեկտորը վերաբերում է λ_0 սեփական արժեքին:

Քանի որ $b\neq0$, ապա (1) պայմանին բավարարող λ_0 թիվը b վեկտորի համար որոշվում է միարժեք կերպով: Ընդգծենք, այնուհետև, որ զրոյական վեկտորը չի համարվում φ ձևափոխության սեփական վեկտոր, չնայած այն բավարարում է (1) պայմանին, այն էլ ամեն մի λ_0-ի համար:

Էվկլիդյան հարթության պտտումը սկզբնակետի շուրջը π-ին ոչ բազմապատիկ անկյան տակ հանդիսանում է գծային ձևափոխության այնպիսի օրինակ, որը չունի սեփական վեկտոր: Մյուս ծայրահեղ դեպքի օրինակ է հանդիսանում հարթության ձգումը, որի ժամանակ հարթության սկզբնակետից դուրս եկող բոլոր վեկտորները ձգվում են, ասենք՝ հինգ անգամ: Այդ կլինի գծային ձևափոխություն, որի համար հարթության զրոյից տարբեր բոլոր վեկտորները կլինեն սեփական վեկտորներ, նրանք բոլորը վերաբերում են 5 սեփական արժեքին:

φ գծային ձևափոխության իրական բնութագրիչ արմատները, եթե նրանք գոյություն ունեն, և միայն նրանք են ծառայում այդ գծային ձևափոխության սեփական արժեքներ:

Իրոք, դիցուք φ գծային ձևափոխության մատրիցը $e_1, e_2, \ldots, e_n$ բազիսում $A=(\alpha_{ij})$-ն է և դիցուք

$$b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i$$

վեկտորը φ ձևափոխության սեփական վեկտորն է՝

$$b\varphi=\lambda_0 b. \tag{2}$$

Ինչպես ապացուցված է § 31-ում,

$$b\varphi=[(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A]e. \tag{3}$$

Այդ (2) և (3) հավասարությունները բերում են հետևյալ հավասարությունների սիստեմին՝

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1\alpha_{11}+\beta_2\alpha_{31}+\cdots+\beta_n\alpha_{n1}=\lambda_0\beta_1,\\
&\beta_1\alpha_{12}+\beta_2\alpha_{23}+\cdots+\beta_n\alpha_{n3}=\lambda_0\beta_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\beta_1\alpha_{1n}+\beta_2\alpha_{2n}+\cdots+\beta_n\alpha_{nn}=\lambda_0\beta_n.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Քանի որ $b\neq0$, ապա ոչ բոլոր $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ թվերն են հավասար զրոյի: Այսպիսով, ըստ (4)-ի,

$$\left.\begin{aligned}
&(\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\alpha_{21}x_3+\cdots+\alpha_{n1}x_n=0,\\
&\alpha_{12}x_2+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\cdots+\alpha_{n2}x_n=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\alpha_{1n}x_1+\alpha_{2n}x_2+\cdots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n=0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

գծային հավասարումների սիստեմն ունի ոչզրոյական լուծում, դրա համար էլ նրա դետերմինանտը հավասար է զրոյի՝

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11}-\lambda_0, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}\\
\alpha_{12}, & \alpha_{22}-\lambda_0, & \ldots, & \alpha_{n3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_{1n}, & \alpha_{2n}, & \ldots, & \alpha_{nn}-\lambda_0
\end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Շրջելով այն, կստանանք՝

$$|A-\lambda_0 E|=0, \tag{7}$$

այսինքն՝ λ_0 սեփական արժեքն իրոք հանդիսացավ A մատրիցի և, հետևապես, φ գծային ձևափոխության բնութագրիչ արմատ, այն էլ՝ իրական:

Դիցուք, հակադարձաբար, λ_0-ն φ գծային ձևափոխության և, հետևապես, A մատրիցի ցանկացած իրական բնութագրիչ արմատ է: Այդ դեպքում տեղի ունի (7) հավասարությունը, հետևապես, նաև նրանից շրջման միջոցով ստացվող (6) հավասարությունը: Այստեղից հետևում է, որ (5) գծային համասեռ հավասարումների սիստեմն ունի ոչզրոյական լուծում, այն էլ՝ իրական, քանի որ այդ սիստեմի բոլոր գործակիցներն իրական են։ Եթե այդ լուծումը նշանակենք

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n), \tag{8}$$

ապա տեղի ունեն (4) հավասարությունները։ V_n տարածության $e_1, e_2, \ldots, e_n$ բազիսի նկատմամբ (8) կոորդինատային տողը ունեցող վեկտորը նշանակենք b-ով. պարզ է, որ $b \neq 0$։ Այդ դեպքում արդարացի է (3) հավասարությունը, իսկ (3)-ից և (4)-ից բխում է (2)-ը։ Այսպիսով, b վեկտորը պարզվեց որ հանդիսանում է φ ձևափոխության այն սեփական վեկտորը, որը վերաբերում է λ_0 սեփական արժեքին։ Թեորեման ապացուցված է։

Նկատենք, որ եթե մենք դիտարկեինք կոմպլեքս գծային տարածություն, ապա բնութագրիչ արմատի իրական լինելու պահանջն ավելորդ կլիներ, այսինքն՝ կապացուցեինք հետևյալ թեորեման. կոմպլեքս գծային տարածության գծային ձևափոխության բնութագրիչ արմատները և միայն նրանք են ծառայում այդ ձևափոխության սեփական արժեքներ: Այստեղից բխում է, որ կոմպլեքս գծային տարածության մեջ ամեն մի գծային ձևափոխություն ունի սեփական վեկտորներ։

Վերադառնալով մեր դիտարկած իրական դեպքին, նշենք, որ φ գծային ձևափոխության այն սեփական վեկտորների համախումբը, որոնք վերաբերում են λ_0 սեփական արժեքին, համընկնում է (5) գծային համասեռ հավասարումների սիստեմի ոչզրոյական իրական լուծումների համախմբի հետ։ Այստեղից հետևում է, որ φ գծային ձևափոխության λ_0 սեփական արժեքին վերաբերող բոլոր սեփական վեկտորների համախումբը՝ նրան ավելացնելով զրոյական վեկտորը, կլինի V_n տարածության գծային ենթատարածություն: Իրոք, § 12-ում ապացուցածից բխում է, որ n անհայտով գծային համասեռ հավասարումների ցանկացած սիստեմի բոլոր (իրական) լուծումների համախումբը կլինի V_n տարածության գծային ենթատարածություն:

Պարզ սպեկտրով գծային ձևափոխություններ: Շատ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում իմանալ, թե կարո՞ղ է տված φ գծային ձևափոխությունը որևէ բազիսում ունենալ անկյունագծային մատրից։ Ինչպես, ամենևին էլ ոչ բոլոր գծային ձևափոխությունները կարող են տրվել անկյունագծային մատրիցով։ Այդ բանի համար անհրաժեշտ և բավարար պայման կտրվի § 61-ում, իսկ հիմա մենք ցանկանում ենք բերել մի բավարար պայման։

Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումները.

φ գծային ձևափոխությունը $e_1, e_2, \ldots, e_n$ բազիսում այն և միայն այն ժամանակ է տրվում անկյունագծային մատրիցով, եթե այդ բազիսի բոլոր վեկտորները հանդիսանում են φ ձևափոխության սեփական վեկտորներ,

Իրոք,

$$e_i \varphi = \lambda_i e_i$$

հավասարությունը համազոր է այն բանին, որ տվյալ բազիսում φ գծային ձևափոխությունը տվող մատրիցի i-րդ տողի բոլոր էլեմենտները, բացի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող էլեմենտից, հավասար են զրոյի, իսկ գլխավոր անկյունագծի վրայի էլեմենտը (այսինքն՝ i-րդ էլեմենտը) հավասար է λ_i-ի։

φ գծային ձևափոխության տարբեր սեփական արժեքներին վերաբերող $b_1, b_2, \ldots, b_k$ սեփական վեկտորները կազմում են գծայնորեն անկախ սիստեմ:

Այդ պնդումը կապացուցենք ինդուկցիայով ըստ k-ի, քանի որ $k=1$ դեպքում այն արդարացի է. մեկ սեփական վեկտորը, լինելով զրոյից տարբեր, կազմում է գծայնորեն անկախ սիստեմ։

Թող

$$b_i \varphi = \lambda_i b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

և

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \text{ երբ } i \neq j.$$

Եթե գոյություն ունի գծային կախում՝

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k = 0, \tag{9}$$

որտեղ, օրինակ, $\alpha_1 \neq 0$, ապա (9) հավասարության երկու մասին էլ կիրառելով φ ձևափոխությունը, կստանանք՝

$$\alpha_1 \lambda_1 b_1 + \alpha_2 \lambda_2 b_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k b_k = 0,$$

հանելով այստեղից (9) հավասարությունը՝ բազմապատկած λ_k-ով, կըստանանք՝

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) b_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) b_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) b_{k-1} = 0,$$

որ տալիս է ոչտրիվիալ գծային կախում $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ վեկտորների միջև, քանի որ $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$։

Ասում են, որ V_n իրական գծային տարածության φ գծային ձևափոխությունն ունի պարզ սպեկտր, եթե նրա բոլոր բնութագրիչ արմատներն իրական են և տարբեր։ Հետևաբար, φ գծային ձևափոխությունն ունի n տարբեր սեփական արժեքներ և այդ պատճառով, ապացուցած թեորեմայի համաձայն, V_n տարածության մեջ գոյություն ունի այդ ձևափոխության սեփական վեկտորներից կազմված բազիս։ Այսպիսով, պարզ սպեկտրով յուրաքանչյուր գծային ձևափոխություն կարելի է տալ անկյունագծային մատրիցով:

Գծային ձևափոխություններից անցնելով նրանց տվող մատրիցներին, մենք կարող ենք ձևակերպել հետևյալ արդյունքը։

Ամեն մի մատրից, որի բոլոր բնութագրիչ արմատներն իրական են և տարբեր, նման է անկյունագծային մատրիցի կամ, ինչպես ասում են, այդպիսի մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի:

ԳԼՈՒԽ ՈՒԹԵՐՈՐԴ

ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 34. Էվկլիդյան տարածության սահմանումը: Օրթոնորմավորված բազիսներ

Գծային n-չափանի տարածության գաղափարը լիովին չի ընդհանրացնում հարթության կամ եռաչափ էվկլիդյան տարածության գաղափարները. n-չափանի տարածության դեպքում, երբ $n>3$, սահմանված չեն ոչ վեկտորի երկարությունը, ոչ վեկտորներով կազմված անկյունը և, հետևապես, անհնար է այն հարուստ երկրաչափական տեսության զարգացումը, որը լավ ծանոթ է ընթերցողին $n=2$ և $n=3$ դեպքերում: Պարզվում է, որ վիճակը կարող է շտկվել, ընդ որում հետևյալ ճանապարհով:

Անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից հայտնի է, որ և՛ հարթության, և՛ եռաչափ տարածության մեջ կարելի է մուծել վեկտորների սկալյար բազմապատկման գաղափարը: Այն սահմանվում է վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան օգնությամբ, սակայն, ինչպես պարզվում է, և՛ վեկտորի երկարությունը, և՛ վեկտորներով կազմված անկյունը իրենց հերթին կարող են արտահայտվել սկալյար արտադրյալի միջոցով: Այդ պատճառով ցանկացած n-չափանի գծային տարածության մեջ մենք կսահմանենք սկալյար բազմապատկման գաղափարը, ընդ որում կսահմանենք աքսիոմատիկորեն՝ որոշ հատկությունների օգնությամբ, որոնցով, ինչպես լավ հայտնի է, հարթության և եռաչափ տարածության վեկտորների սկալյար արտադրյալն իրոք որ օժտված է: Ընդ որում, հաշվի առնելով այն անմիջական նպատակները, հանուն որոնց այս բաժինը մտցված է բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացի մեջ, վեկտորի երկարության և վեկտորներով

կազմված անկյան սահմանումները մենք չենք մուծի: Այն ընթերցողը, որին հետաքրքրում է n-չափանի տարածության մեջ երկրաչափության կառուցումը, մենք հանձնարարում ենք դիմել մասնագիտական գրականության, առաջին հերթին՝ գծային հանրահաշվի վերաբերյալ ավելի ընդարձակ գրքերի:

Նշենք, որ այս գլխում ամենուրեք, բացի ներկա պարագրաֆի վերջից, դիտարկվում են *իրական* գծային տարածություններ:

Կասենք, որ n-չափանի V_n իրական գծային տարածության մեջ սահմանված է **սկալյար բազմապատկում**, եթե a, b վեկտորների ամեն մի զույգին համապատասխանության մեջ է դրված մի իրական թիվ, որը նշանակվում է (a, b) սիմվոլով և կոչվում է a և b վեկտորների **սկալյար արտադրյալ**, ընդ որում բավարարվում են հետևյալ պայմանները (այստեղ a, b, c—ն V_n տարածության ցանկացած վեկտորներ են, α-ն ցանկացած իրական թիվ է).

I. $(a, b)=(b, a)$,

II. $(a+b, c)=(a, c)+(b, c)$,

III. $(\alpha a, b)=\alpha(a, b)$.

IV. Եթե $a\neq 0$, ապա a վեկտորի սկալյար քառակուսին խստորեն դրական է՝

$$(a, a)>0.$$

Նշենք, որ III պայմանից, երբ $\alpha=0$, բխում է

$$(0, b)=0 \tag{1}$$

հավասարությունը, այսինքն՝ **զրոյական վեկտորի սկալյար արտադրյալը ցանկացած վեկտորի հետ հավասար է զրոյի. մասնավորապես, զրոյի է հավասար զրոյական վեկտորի սկալյար քառակուսին:**

II և III պայմաններից անմիջապես բխում է *հետևյալ բանաձևը վեկտորների երկու սիստեմների գծային կոմբինացիաների սկալյար արտադրյալի համար*՝

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i,\ \sum_{j=1}^{l}\beta_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j(a_i, b_j). \tag{2}$$

Եթե n-չափանի գծային տարածության մեջ սահմանված է սկալյար բազմապատկում, ապա այդ տարածությունը կոչվում է n-չափանի **էվկլիդյան տարածություն:**

Ցանկացած n-ի դեպքում n-չափանի V_n գծային տարածության մեջ կարելի է սահմանել սկալյար բազմապատկում, այսինքն՝ կարելի է այդ տարածությունը դարձնել էվկլիդյան:

Իրոք, V_n տարածության մեջ վերցնենք ցանկացած $e_1, e_2, \dots, e_n$ բազիս։ Եթե

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\quad b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i,$$

ապա ընդունենք՝

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i. \tag{3}$$

Հեշտությամբ ստուգվում է, որ I—IV պայմանները կբավարարվեն, այսինքն՝ (3) հավասարությունը V_n տարածության մեջ որոշում է սկալյար բազմապատկում։

Մենք տեսնում ենք, որ n-չափանի գծային տարածության մեջ սկալյար բազմապատկումը կարող է տրվել, ընդհանրապես ասած՝ բազմաթիվ տարբեր եղանակներով. (3) սահմանումը, հասկանալի է, կախված է բազիսի ընտրությունից, սակ այն, բացի դրանից մենք դեռ չգիտենք՝ չի՞ կարելի արդյոք սկալյար բազմապատկումը մուծել նաև սկզբունքորեն որևէ այլ եղանակով։ Մեր մոտակա նպատակն է՝ n-չափանի գծային տարածությունն էվկլիդյան տարածության վերածվելու բոլոր հնարավոր եղանակների դիտարկումը և այն փաստի հաստատումը, որ, որոշ իմաստով, ամեն մի n-ի համար գոյություն ունի միայն մեկ n-չափանի էվկլիդյան տարածություն։

Դիցուք տված է կամայական n-չափանի էվկլիդյան E_n տարածություն, այսինքն՝ n-չափանի գծային տարածության մեջ կամայական եղանակով մուծված է սկալյար բազմապատկում։ a և b վեկտորները կոչվում են օրթոգոնալ, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի՝

$$(a, b)=0.$$

(1)-ից հետևում է, որ զրոյական վեկտորն օրթոգոնալ է ցանկացած վեկտորին. սակայն կարող են գոյություն ունենալ և ոչզրոյական օրթոգոնալ վեկտորներ։

Վեկտորների սիստեմը կոչվում է օրթոգոնալ սիստեմ, եթե նրա բոլոր վեկտորները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են իրար։

Ոչզրոյական վեկտորների յուրաքանչյուր օրթոգոնալ սիստեմ գծայնորեն անկախ սիստեմ է:

Իրոք, դիցուք E_n-ում տված է $a_1, a_2, \dots, a_k$ վեկտորների սիստեմը, ընդ որում

$$a_i\neq 0,\ i=1, 2, \dots, r \ \text{և}\ (a_i, a_j)=0,\ \text{երբ}\ i\neq j. \tag{4}$$

Եթե

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_ka_k=0,$$

ապա, սկալյարորեն բազմապատկելով այս հավասարության երկու մասերն էլ $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$ վեկտորով և նկատի ունենալով (1), (2) և (4) հավասարությունները, ստանում ենք՝

$$0=(0, a_i)=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots+\alpha_ka_k, a_i)=$$
$$\alpha_1(a_1, a_i)+\alpha_2(a_2, a_i)+\dots+\alpha_k(a_k, a_i)=\alpha_i(a_i, a_i).$$

Այստեղից, քանի որ ըստ IV պայմանի $(a_i, a_i)>0$, բխում է, որ $\alpha_i=0$, $i=1, 2, \dots, k$, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ շարադրենք *օրթոգոնալացման պրոցեսը*, այսինքն՝ նկարագրենք մի որոշ եղանակ, որով կարելի է էվկլիդյան E_n տարածության

$$a_1, a_2, \dots, a_k \tag{5}$$

k վեկտորների ցանկացած գծայնորեն անկախ սիստեմից անցնել մի օրթոգոնալ սիստեմի, որը նույնպես կազմված է k ոչզրոյական վեկտորներից. այդ վեկտորները նշանակենք $b_1, b_2, \dots, b_k$։

Ընդունենք $b_1=a_1$, այսինքն՝ (5) *սիստեմի առաջին վեկտորը թող մտնի նաև մեր կողմից կառուցվող օրթոգոնալ սիստեմի մեջ*։ Այնուհետև ընդունենք՝

$$b_2=\alpha_1b_1+a_2.$$

Քանի որ $b_1=a_1$, իսկ a_1 և a_2 վեկտորները գծայնորեն անկախ են, ապա b_2 վեկտորը ցանկացած α_1 թվի դեպքում տարբեր է զրոյից։ Ընտրենք այդ թիվն այնպես, որ b_2 վեկտորն օրթոգոնալ լինի b_1 վեկտորին՝

$$0=(b_1, b_2)=(b_1, \alpha_1b_1+a_2)=\alpha_1(b_1, b_1)+(b_1, a_2),$$

որտեղից, հաշվի առնելով IV պայմանը,

$$\alpha_1=-\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}.$$

Դիցուք արդեն կառուցված է $b_1, b_2, \dots, b_l$ ոչզրոյական վեկտորների օրթոգոնալ սիստեմը. լրացուցիչ կերպով ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր i-ի $(1\leqslant i\leqslant l)$ համար, b_i վեկտորը հանդիսանում է $a_1, a_2, \dots, a_i$ վեկտորների գծային կոմբինացիա։ Այն ժամանակ այդ ենթադրությունը բավարարված կլինի և b_{l+1} վեկտորի համար, եթե այն ընտրվի

$$b_{l+1}=\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\dots+\alpha_lb_l+a_{l+1}$$

տեսքով։ Ընդ որում, b_{l+1} վեկտորը կլինի զրոյից տարբեր, քանի որ (5) սիստեմը գծայնորեն անկախ է, իսկ a_{l+1} վեկտորը չի մտնում $b_1, b_2, \dots, b_l$ վեկտորների արտահայտության մեջ։ $\alpha_i(i=1, 2, \dots, l)$ գործակիցներն ընտրենք այնպես, որ b_{l+1} վեկտորն օրթոգոնալ լինի բոլոր $b_i, (i=1, 2, \dots, l)$ վեկտորներին՝

$$0=(b_i, b_{l+1})=(b_i, \alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\cdots+\alpha_l b_l+a_{l+1})=$$
$$=\alpha_1(b_i, b_1)+\alpha_2(b_i, b_2)+\cdots+\alpha_l(b_i, b_l)+(b_i, a_l),$$

այստեղից, քանի որ $b_1, b_2, \dots, b_l$ վեկտորներն օրթոգոնալ են իրար,

$$\alpha_i(b_i, b_i)+(b_i, a_{l+1})=0,$$

այսինքն՝

$$\alpha_i=-\frac{(b_i, a_{l+1})}{(b_i, b_i)}, \quad i=1, 2, \dots, l.$$

Շարունակելով այս պրոցեսը, մենք կկառուցենք որոնելի $b_1, b_2, \dots, b_k$ օրթոգոնալ սիստեմը:

Կիրառելով օրթոգոնալացման պրոցեսը E_n տարածության կամայական բազիսի նկատմամբ, մենք կստանանք n ոչզրոյական վեկտորների օրթոգոնալ սիստեմ, այսինքն, քանի որ, ըստ ապացուցածի, այդ սիստեմը գծայնորեն անկախ է, կստանանք օրթոգոնալ բազիս: Ընդ որում, օրթոգոնալացման պրոցեսի առաջին քայլի հետ կապված դիտողությունը օգտագործելով, ինչպես նաև հաշվի առնելով, որ յուրաքանչյուր ոչզրոյական վեկտոր կարելի է մտցնել տարածության մի որևէ բազիսի մեջ, կարելի է նույնիսկ ձևակերպել հետևյալ պնդումը.

Յուրաքանչյուր էվկլիդյան տարածություն ունի օրթոգոնալ բազիսներ, ընդ որում այդ տարածության ցանկացած ոչզրոյական վեկտոր մտնում է մի որոշ օրթոգոնալ բազիսի կազմի մեջ:

Հետագայում կարևոր դեր է խաղալու օրթոգոնալ բազիսների մի հատուկ տեսքը. այդ տեսքի բազիսները համապատասխանում են կոորդինատների ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմներին, որոնք օգտագործվում են անալիտիկ երկրաչափության մեջ:

b վեկտորն անվանենք նորմավորված, եթե նրա սկալյար քառակուսին հավասար է մեկի՝

$$(b, b)=1.$$

Եթե $a\neq 0$, որտեղից $(a, a)>0$, ապա a վեկտորի նորմավորում կոչվում է անցումն a վեկտորից

$$b=\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}a$$

վեկտորին: b վեկտորը կլինի նորմավորված, քանի որ

$$(b, b)=\left(\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}a, \frac{1}{\sqrt{(a, a)}}a\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\right)^2(a, a)=1.$$

Էվկլիդյան E_n տարածության $e_1, e_2, \dots, e_n$ բազիսը կոչվում է օրթոնորմավորված, եթե նա օրթոգոնալ է և նրա բոլոր վեկտորները նորմավորված են, այսինքն՝

$$(e_i, e_j)=0, \quad \text{երբ} \quad i\neq j,$$
$$(e_i, e_i)=1, \quad » \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Յուրաքանչյուր էվկլիդյան տարածություն ունի օրթոնորմավորված բազիսներ:

Ապացուցման համար բավական է վերցնել ցանկացած օրթոգոնալ բազիս և նրա բոլոր վեկտորները նորմավորել: Այդ ժամանակ բազիսը մնում է օրթոգոնալ, քանի որ ցանկացած α և β թվերի համար $(a, b)=0$ հավասարությունից բխում է

$$(\alpha a, \beta b)=\alpha\beta(a, b)=0.$$

Էվկլիդյան E_n տարածության $e_1, e_2, \dots, e_n$ բազիսը կլինի օրթոնորմավորված այն և միայն այն դեպքում, երբ տարածության ցանկացած երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար լինի նշված բազիսում այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների արտադրյալների գումարին, այսինքն, երբ

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \quad b=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j \tag{7}$$

հավասարություններից բխում է

$$(a, b)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_i \tag{8}$$

հավասարությունը:

Իսկապես, եթե մեր բազիսի համար բավարարվում են (6) հավասարությունները, ապա՝

$$(a, b)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\right)=\sum_{i, j=1}^{n}\alpha_i\beta_j(e_i, e_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i.$$

Հակադարձաբար, եթե մեր բազիսն այնպիսին է, որ նրանում (7) տեսքով գրված ցանկացած a և b վեկտորների համար ճիշտ է (8) հավասարությունը, ապա, a և b վեկտորների փոխարեն վերցնելով այդ բազիսի ցանկացած e_i և e_j իրարից տարբեր կամ հավասար երկու վեկտորներ, մենք (8)-ից կստանանք (6) հավասարությունները:

Հենց նոր ստացված արդյունքը համեմատելով ցանկացած n-ի համար n-չափանի էվկլիդյան տարածությունների գոյության ավելի վաղ շարադրված ապացույցի հետ, կարելի է արտահայտել հետևյալ պնդումը. եթե n-չափանի գծային V_n տարածության մեջ ընտրված է կամայական բազիս, ապա V_n-ում կարող է այնպես տրվել սկալյար բազմապատկումը, որ ստացվելիք էվկլիդյան տարածության մեջ ընտրված բազիսը լինի օրթոնորմավորված բազիսներից մեկը:

Էվկլիդյան տարածությունների իզոմորֆիզմը: Էվկլիդյան E և E′ տարածությունները կոչվում են մեկը մյուսին իզոմորֆ, եթե այդ տարածությունների վեկտորների միջև կարելի է սահմանել այնպիսի փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն, որ բավարարվեն հետևյալ պահանջները.

1) այդ համապատասխանությունը իզոմորֆ համապատասխանություն է E-ի և E′-ի միջև, դրանք դիտարկված որպես գծային տարածություններ (տես § 29).

2) այդ համապատասխանության դեպքում պահպանվում է սկալյար արտադրյալը. այլ կերպ ասած, եթե E տարածության a և b վեկտորների պատկերներն են E′-ի համապատասխանաբար a′ և b′ վեկտորները, ապա՝

$$(a, b)=(a', b'). \tag{9}$$

1) պայմանից անմիջապես հետևում է, որ միմյանց իզոմորֆ էվկլիդյան տարածություններն ունեն միևնույն չափականությունը: Ապացուցենք հակադարձ պնդումը՝

Էվկլիդյան ցանկացած E և E′ տարածությունները, որոնք ունեն միևնույն n չափականությունը, իզոմորֆ են իրար:

Իսկապես, E և E′ տարածությունների մեջ ընտրենք օրթոնորմավորված բազիսներ՝

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{10}$$

և համապատասխանաբար՝

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n. \tag{11}$$

E տարածության յուրաքանչյուր

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

վեկտորին համապատասխանեցնելով E′ տարածության

$$a'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e'_i$$

վեկտորը, որն ունի (11) բազիսում նույն կոորդինատները, ինչ որ a վեկտորը (10) բազիսում, մենք կստանանք, ակներևորեն, իզոմորֆ համապատասխանություն E և E′ գծային տարածությունների միջև: Ցույց տանք, որ բավարարվում է նաև (9) հավասարությունը. եթե

$$b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i, \qquad b'=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e'_i,$$

ապա, շնորհիվ (8)-ի (հաշվի առնել, որ (10) և (11) բազիսներն օրթոնորմավորված են)՝

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=(a', b').$$

Բնական կլինի միմյանց իզոմորֆ էվկլիդյան տարածությունները միմյանցից տարբեր չհամարել: Այդ պատճառով յուրաքանչյուր n-ի համար գոյություն ունի միակ n-չափանի էվկլիդյան տարածություն այն իմաստով, ինչ իմաստով յուրաքանչյուր n-ի համար գոյություն ունի միակ n-չափանի իրական գծային տարածություն:

Կոմպլեքս գծային տարածությունների դեպքի համար ներկա պարագրաֆի գաղափարները և արդյունքները փոխանցվում են հետևյալ կերպ: Կոմպլեքս գծային տարածությունը կոչվում է **ունիտար (միասնական, ամբողջական, տարածություն)**, եթե նրա մեջ տրված է սկալյար բազմապատկումը, ընդ որում (a, b)-ն կլինի, ընդհանրապես ասած, կոմպլեքս թիվ. միաժամանակ պետք է բավարարվեն II—IV աքսիոմները (վերջին աքսիոմայի ձևակերպման մեջ հարկավոր է ընդգծել, որ ոչ-զրոյական վեկտորի սկալյար քառակուսին իրական է և խստորեն դրական), իսկ I աքսիոման փոխարինել այսպիսի աքսիոմայով.

$$\mathrm{I}'\ (a, b)=\overline{(b, a)},$$

որտեղ գծիկը, ինչպես սովորաբար, նշանակում է անցում համալուծ կոմպլեքս թվին:

Սկալյար բազմապատկումը, հետևաբար, այլևս տեղափոխելի չի լինի: Այնուամենայնիվ, II աքսիոմայի սիմետրիկ հավասարությունը մնում է ճիշտ՝

$$\mathrm{II}'\ (a, b+c)=(a, b)+(a, c),$$

քանի որ,

$$(a, b+c)=\overline{(b+c, a)}=\overline{(b, a)+(c, a)}=\overline{(b, a)}+\overline{(c, a)}=(a, b)+(a, c).$$

Մյուս կողմից,

$$\mathrm{III}'\ (a, \alpha b)=\alpha(a, b),$$

քանի որ՝

$$(a, \alpha b)=\overline{(\alpha b, a)}=\overline{\alpha(b, a)}=\bar{\alpha}\,\overline{(b, a)}=\bar{\alpha}(a, b).$$

Վեկտորների սիստեմի օրթոգոնալության և օրթոնորմավորվածության գաղափարները առանց որևէ փոփոխության փոխանցվում են ունիտար տարածությունների դեպքի վրա: Ինչպես և վերևում, ապացուցվում է օրթոնորմավորված բազիսների գոյությունը յուրաքանչյուր վերջավորչափանի ունիտար տարածության մեջ: Ընդ որում, սակայն, եթե $e_1, e_2, \ldots, e_n$-ը օրթոնորմավորված բազիս է և a, b վեկտորներն այդ բազիսում գրվում են (7) տեսքով, ապա՝

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i.$$

Ներկա գլխի հետագա պարագրաֆների արդյունքները նույնպես կարելի էր էվկլիդյան տարածություններից փոխադրել ունիտար տարածությունների վրա: Մենք այդ չենք անի և հետաքրքրվող ընթերցողին կհանձնարարենք դիմել գծային հանրահաշվի վերաբերյալ մասնագիտական գրքերին:

§ 35. Օրթոգոնալ մատրիցներ, օրթոգոնալ ձևափոխություններ

Դիցուք տրված է n անհայտների հետևյալ իրական գծային ձևափոխությունը.

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} q_{ik}y_k,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

այս ձևափոխության մատրիցը նշանակենք Q-ով։ Այս ձևափոխությունը $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտների քառակուսիների գումարը, այսինքն՝ $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ քառակուսային ձևը, որը դրականապես որոշված քառակուսային ձևերի նորմալ տեսքն է (տես § 28), բերում է մի որոշ քառակուսային ձևի $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտներից։ Պատահաբար այդ նոր քառակուսային ձևն ինքը կարող է լինել $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտների քառակուսիների գումար, այսինքն՝ կարող է տեղի ունենալ

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2 \tag{2}$$

հավասարությունը, որը նույնություն է դառնում $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտներն իրենց (1) արտահայտություններով փոխարինելուց հետո։ Անհայտների այդ հատկությամբ օժտված (1) գծային ձևափոխությունը, այսինքն՝ այնպիսի ձևափոխությունը, որը, ինչպես ասում են, անհայտների քառակուսիների գումարը թողնում է անփոփոխ (ինվարիանտ) կոչվում է անհայտների օրթոգոնալ ձևափոխություն, իսկ նրա Q մատրիցը՝ օրթոգոնալ մատրից։

Գոյություն ունեն օրթոգոնալ ձևափոխության և օրթոգոնալ մատրիցի շատ այլ սահմանումներ, որոնք համարժեք են վերը բերվածին։ Նշենք դրանցից մի քանիսը, որոնք անհրաժեշտ են հետագայում։

§ 26-ից մենք գիտենք այն օրենքը, որով ձևափոխվում է քառակուսային ձևի մատրիցը՝ անհայտների գծային ձևափոխության կատարելիս։ Կիրառելով այն մեր դեպքում և նկատի ունենալով, որ բոլոր անհայտների քառակուսիների գումարը հանդիսացող քառակուսային ձևի մատրից հանդիսանում է E միավոր մատրիցը, մենք կստանանք, որ (2) հավասարությունը համարժեք է

$$Q'EQ=E$$

մատրիցային հավասարությանը, այսինքն՝

$$Q'Q=E. \tag{3}$$

Այստեղից՝

$$Q'=Q^{-1}, \tag{4}$$

ուստի ճիշտ է և

$$QQ'=E \tag{5}$$

հավասարությունը։

Այսպիսով, հաշվի առնելով (4)-ը, Q օրթոգոնալ մատրիցը կարելի է սահմանել որպես այնպիսի մատրից, որի համար Q' շրջված մատրիցը հավասար է Q^{-1} հակադարձ մատրիցին։ (3) և (5) հավասարություններից յուրաքանչյուրը նույնպես կարող է ընդունվել որպես օրթոգոնալ մատրիցի սահմանում։

Քանի որ Q' մատրիցի սյուները հանդիսանում են Q մատրիցի տողեր, ապա (5)-ից բխում է հետևյալ պնդումը. Q քառակուսի մատրիցը այն և միայն այն դեպքում է օրթոգոնալ, եթե նրա ցանկացած տողի բոլոր էլեմենտների քառակուսիների գումարը հավասար է մեկի, իսկ ցանկացած երկու տարբեր տողերի համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի։ (3)-ից հետևում է համանման պնդումը Q մատրիցի սյուների համար։

(3) հավասարության մեջ անցնելով դետերմինանտներին և հաշվի առնելով, որ $|Q'|=|Q|$, մենք կստանանք

$$|Q|^2=1$$

հավասարությունը։ Այստեղից հետևում է, որ օրթոգոնալ մատրիցի դետերմինանտը հավասար է ± 1-ի։ Այսպիսով, անհայտների յուրաքանչյուր օրթոգոնալ ձևափոխություն չվերասերված ձևափոխություն է։ Ինքնըստինքյան հասկանալի է, որ հակադարձը պնդել չի կարելի. նշենք նույնպես, որ բնավ էլ ոչ բոլոր մատրիցները, որոնք ունեն ± 1-ի հավասար դետերմինանտ, օրթոգոնալ կլինեն։

Օրթոգոնալ մատրիցի հակադարձ մատրիցը օրթոգոնալ մատրից է։ Իսկապես, (4)-ի մեջ անցնելով շրջված մատրիցներին, մենք կստանանք՝

$$(Q^{-1})'=(Q')'=Q=(Q^{-1})^{-1}.$$

Մյուս կողմից, օրթոգոնալ մատրիցների արտադրյալն օրթոգոնալ մատրից է։ Իրոք եթե Q և R մատրիցներն օրթոգոնալ են, ապա օգտագործելով (4)-ը, ինչպես նաև § 26-ից (6) հավասարությունը և համանման հավասարությունը, որն իրավացի է հակադարձ մատրիցի համար, մենք կստանանք՝

$$(QR)'=R'Q'=R^{-1}Q^{-1}=(QR)^{-1},$$

§ 37-ում կօգտագործվի հետևյալ պնդումը.

Էվկլիդյան տարածության օրթոնորմավորված բազիսից նրա ցանկացած այլ օրթոնորմավորված բազիսին անցման մատրիցը օրթոգոնալ մատրից է։

Իսկապես, դիցուք E_n տարածության մեջ տրված են երկու օրթոնորմավորված բազիսներ՝ $e_1, e_2, \dots, e_n$ և $e_1', e_2', \dots, e_n'$, $Q=(q_{ij})$ անցման մատրիցով՝ $$e'=Qe.$$
Քանի որ e բազիսն օրթոնորմավորված է, ապա ցանկացած երկու վեկտորների, մասնավորապես՝ e' բազիսից ցանկացած երկու վեկտորների

սկալյար արտադրյալը հավասար է այդ վեկտորների e բազիսում համապատասխան կոորդինատների արտադրյալների գումարին։ Սակայն, քանի որ e′ բազիսն էլ է օրթոնորմավորված, ապա e′ բազիսի յուրաքանչյուր վեկտորի սկալյար քառակուսին հավասար է մեկի, իսկ ցանկացած երկու տարբեր վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի։ Այստեղից e′ բազիսի վեկտորների e բազիսում կոորդինատների տողերի համար, այսինքն՝ Q մատրիցի տողերի համար, բխում են այն պնդումները, որոնք, ինչպես վերևում դուրս էին բերվել (5) հավասարություններից, բնորոշ են օրթոգոնալ մատրիցի համար։

Էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխությունները: Այժմ տեղին է ուսումնասիրել էվկլիդյան տարածության գծային ձևափոխությունների մի հետաքրքիր հատուկ տիպ, չնայած այդ տիպի ձևափոխություններ մեզ մոտ հետագայում չեն օգտագործվելու։

E_n էվկլիդյան տարածության φ գծային ձևափոխությունը կոչվում է **այդ էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխություն**, եթե այն պահպանում է յուրաքանչյուր վեկտորի սկալյար քառակուսին, այսինքն՝ ցանկացած a վեկտորի համար՝

$$(a\varphi, a\varphi)=(a, a). \qquad (6)$$

Այստեղից արտածվում է հետևյալ ավելի ընդհանուր պնդումը, որը, հասկանալի է, նույնպես կարող է ընդունվել որպես օրթոգոնալ ձևափոխության սահմանում.

Էվկլիդյան տարածության φ օրթոգոնալ ձևափոխությունը պահպանում է ցանկացած a և b երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝

$$(a\varphi, b\varphi)=(a, b). \qquad (7)$$

Իսկապես, հաշվի առնելով (6)-ը՝

$$((a+b)\varphi, (a+b)\varphi)=(a+b, a+b).$$

Սակայն,

$$((a+b)\varphi, (a+b)\varphi)=(a\varphi+b\varphi, a\varphi+b\varphi)=$$
$$=(a\varphi, a\varphi)+(a\varphi, b\varphi)+(b\varphi, a\varphi)+(b\varphi, b\varphi),$$

$$(a+b, a+b)=(a, a)+(a, b)+(b, a)+(b, b).$$

Այստեղից, օգտագործելով (6)-ը ինչպես a-ի համար, այնպես էլ b-ի համար, և հաշվի առնելով սկալյար արտադրյալի տեղափոխելիությունը, ստանում ենք՝

$$2(a\varphi, b\varphi)=2(a, b),$$

ուստի տեղի ունի և (7)-ը։

Էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխության դեպքում ցանկացած օրթոնորմավորված բազիսի բոլոր վեկտորների պատկեր-

ները իրենք կազմում են օրթոնորմավորված գծային բազիս: Հակադարձաբար, եթե էվկլիդյան տարածության գծային ձևափոխությունը գոնե մեկ օրթոնորմավորված բազիս փոխանցում է նորից օրթոնորմավորված բազիսի, ապա այդ ձևափոխությունն օրթոգոնալ է:

Իրոք, դիցուք φ-ն E_n տարածության օրթոգոնալ ձևափոխություն է, իսկ $e_1, e_2, \dots, e_n$-ը՝ այդ տարածության կամայական օրթոնորմավորված բազիսը։ Հաշվի առնելով (7)-ը,

$$(e_i, e_i)=1, \quad i=1, 2, \dots, n,$$
$$(e_i, e_j)=0, \text{ երբ } i\neq j$$

հավասարություններից բխում են

$$(e_i\varphi, e_i\varphi)=1, \quad i=1, 2, \dots, n,$$
$$(e_i\varphi, e_j\varphi)=0, \text{ երբ } i\neq j$$

հավասարությունները, այսինքն՝ $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ վեկտորների սիստեմը, պարզվում է, որ օրթոգոնալ է և նորմավորված, դրա համար էլ նա կլինի E_n տարածության օրթոնորմավորված բազիս։

Դիցուք, հակադարձաբար, E_n տարածության φ գծային ձևափոխությունը $e_1, e_2, \dots, e_n$ օրթոնորմավորված բազիսը նորից փոխանցում է օրթոնորմավորված բազիսի, այսինքն՝ $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ վեկտորների սիստեմը E_n տարածության օրթոնորմավորված բազիս է։ Եթե

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\text{-ն}$$

E_n տարածության կամայական վեկտոր է, ապա՝

$$a\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i (e_i\varphi),$$

այսինքն՝ $a\varphi$ վեկտորը $e\varphi$ բազիսում ունի նույն կոորդինատները, ինչ որ a վեկտորը e բազիսում։ Այս երկու բազիսներն էլ, սակայն, օրթոնորմավորված են, և այդ պատճառով էլ ցանկացած վեկտորի սկալյար քառակուսին հավասար է նրա՝ այդ բազիսներից ցանկացածում ունեցած կոորդինատների քառակուսիների գումարին: Այսպիսով,

$$(a, a)=(a\varphi, a\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,$$

այսինքն՝ (6) հավասարությունն իրոք բավարարվում է։

Էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխությունը ցանկացած օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է օրթոգոնալ մատրիցով: Հակադարձաբար, եթե էվկլիդյան տարածության գծային ձևափոխու-

թյունը թեկուզ մեկ օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է օրթոգոնալ մատրիցով, ապա այդ ձևափոխությունն օրթոգոնալ է:

Իսկապես, եթե φ *ձևափոխությունն օրթոգոնալ է, իսկ* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *բազիսն՝ օրթոնորմավորված, ապա* $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ *վեկտորների սիստեմը ևս կլինի օրթոնորմավորված բազիս: φ ձևափոխության A մատրիցը e բազիսում,*

$$e\varphi = Ae, \tag{8}$$

կլինի, հետևաբար, e օրթոնորմավորված բազիսից eφ օրթոնորմավորված բազիսին անցման մատրիցը, այսինքն՝ ինչպես ապացուցվել է վերևում, կլինի օրթոգոնալ մատրից:

Դիցուք, հակադարձաբար, φ *գծային ձևափոխությունը* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է A օրթոգոնալ մատրիցով. հետևաբար, տեղի ունի (8) հավասարությունը: Քանի որ e բազիսը օրթոնորմավորված է, ապա ցանկացած վեկտորների, մասնավորապես՝* $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ *սիստեմի ցանկացած վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է e բազիսում այդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատների արտադրյալների գումարին: Այդ պատճառով, քանի որ A մատրիցն օրթոգոնալ է, ապա՝*

$$(e_i\varphi, e_i\varphi) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$(e_i\varphi, e_j\varphi) = 0, \text{ երբ } i \neq j,$$

այսինքն՝ պարզվում է, որ $e\varphi$ *սիստեմն ինքը* E_n *տարածության օրթոնորմավորված բազիս է: Այստեղից բխում է* φ *ձևափոխության օրթոգոնալությունը:*

Ինչպես ընթերցողը գիտե անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից, հարթության բոլոր աֆինական ձևափոխությունների մեջ, որոնք թողնում են տեղում կոորդինատների սկզբնակետը, պտտումները (միացված, գուցե, հայելապատկերման հետ) միակն են, որոնք պահպանում են վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Այսպիսով, n-չափանի էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխությունները կարելի է դիտել որպես այդ տարածության «պտտումներ»:

Էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխությունների թվին է պատկանում, ակներևաբար, նույնական ձևափոխությունը: Մյուս կողմից օրթոգոնալ ձևափոխությունների և օրթոգոնալ մատրիցների միջև մեր կողմից հաստատված կապը, ինչպես նաև § 31-ում շարադրված կապը գծային ձևափոխությունների հետ և մատրիցների հետ կիրառվող գործողությունների միջև, թույլ են տալիս օրթոգոնալ մատրիցների հայտնի հատկություններից բխեցնել էվկլիդյան տարածության օրթոգոնալ ձևափոխությունների հետևյալ հատկությունները, որոնք հեշտությամբ ստուգվում են նաև անմիջականորեն:

Յուրաքանչյուր օրթոգոնալ ձևափոխություն չվերասերված ձևափոխություն է և նրա հակադարձ ձևափոխությունը նույնպես օրթոգոնալ է:

Ցանկացած օրթոգոնալ ձևափոխությունների արտադրյալն օրթոգոնալ ձևափոխություն է:

§ 36. Սիմետրիկ ձևափոխություններ

Էվկլիդյան n-չափանի տարածության φ *գծային ձևափոխությունը կոչվում է* **սիմետրիկ** *(կամ* **ինքնահամալուծ***), եթե այդ տարածության ցանկացած a, b վեկտորների համար տեղի ունի*

$$(a\varphi, b) = (a, b\varphi) \tag{1}$$

հավասարությունը, այսինքն՝ սկալյար բազմապատկման դեպքում սիմետրիկ ձևափոխության սիմվոլը կարելի է մի արտադրիչից տեղափոխել մյուսի վրա:

Սիմետրիկ ձևափոխությունների օրինակներ են ծառայում, ակներևաբար, ε նույնական ձևափոխությունը և ω զրոյական ձևափոխությունը: Ավելի ընդհանուր օրինակ է հանդիսանում այն գծային ձևափոխությունը, որի դեպքում յուրաքանչյուր վեկտոր բազմապատկվում է α հաստատուն թվով՝

$$a\varphi = \alpha a.$$

Իրոք, այդ դեպքում՝

$$(a\varphi, b) = (\alpha a, b) = \alpha(a, b) = (a, \alpha b) = (a, b\varphi).$$

Սիմետրիկ ձևափոխությունների դերը շատ մեծ է և մեզ անհրաժեշտ է նրանց ուսումնասիրել բավականաչափ մանրամասն:

Էվկլիդյան տարածության սիմետրիկ ձևափոխությունը ցանկացած օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է սիմետրիկ մատրիցով: Հակադարձաբար, եթե էվկլիդյան տարածության գծային ձևափոխությունը գոնե մեկ օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է սիմետրիկ մատրիցով, ապա այդ ձևափոխությունը սիմետրիկ է:

Իրոք, դիցուք φ *սիմետրիկ ձևափոխությունը* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է* $A = (\alpha_{ij})$ *մատրիցով: Նկատի ունենալով, որ օրթոնորմավորված բազիսում երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների արտադրյալների գումարին, մենք ստանում ենք՝*

$$(e_i\varphi, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, \; e_j\right) = \alpha_{ij},$$

$$(e_i, e_j\varphi) = \left(e_i, \; \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k\right) = \alpha_{ji},$$

այսինքն, հաշվի առնելով (1)-ը,

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$$

բոլոր i-երի և j-երի համար։ Այսպիսով, պարզվեց, որ A մատրիցը սիմետրիկ է։

Հակադարձաբար, դիցուք φ գծային ձևափոխությունը $e_1, e_2, \ldots, e_n$ օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է $A=(\alpha_{ij})$ սիմետրիկ մատրիցով՝

$$\alpha_{ij}=\alpha_{jj} \qquad (1)$$

բոլոր i-երի j-երի համար։ Եթե

$$b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i, \qquad c=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e_j$$

տարածության ցանկացած վեկտորներն են, ապա՝

$$b\varphi=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(e_i\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_j\alpha_{ij}\right)e_j,$$

$$c\varphi=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j(e_j\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\alpha_{ji}\right)e_i.$$

Օգտագործելով e բազիսի օրթոնորմավորվածությունը, ստանում ենք՝

$$(b\varphi, c)=\sum_{j,i=1}^{n}\beta_i\alpha_{ij}\gamma_j,$$

$$(b, c\varphi)=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\gamma_j\alpha_{ji}.$$

Հաշվի առնելով (2)-ը, վերջին հավասարությունների աջ մասերը համընկնում են և այդ պատճառով՝

$$(b\varphi, c)=(b, c\varphi),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ստացված արդյունքից բխում է սիմետրիկ ձևափոխությունների հետևյալ հատկությունը, որը հեշտությամբ ստուգվում է նաև անմիջականորեն։

Սիմետրիկ ձևափոխությունների գումարը, ինչպես նաև սիմետրիկ ձևափոխության արտադրյալը թվով հանդիսանում են սիմետրիկ ձևափոխություններ:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը.

Սիմետրիկ ձևափոխության բոլոր խարակտերիստիկ արմատները իրական են:

Քանի որ ցանկացած գծային ձևափոխության խարակտերիստիկ արմատները համընկնում են այդ ձևափոխության մատրիցի խարակտերիստիկ արմատների հետ ցանկացած բազիսում, իսկ սիմետրիկ ձևափոխությունը օրթոնորմավորված բազիսներում տրվում է սիմետրիկ մատրիցով, ապա բավական է ապացուցել հետևյալ պնդումը.

Սիմետրիկ մատրիցի բոլոր խարակտերիստիկ արմատները իրական են:

Իսկապես, դիցուք λ_0-ն $A=(\alpha_{ij})$ սիմետրիկ մատրիցի խարակտերիստիկ արմատն է (կարող է լինել կոմպլեքս)՝

$$|A-\lambda_0E|=0.$$

Այդ դեպքում կոմպլեքս գործակիցներով գծային համասեռ հավասարումների

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j-\lambda_0x_i, \quad i=1, 2, \ldots, n$$

սիստեմն ունի զրոյին հավասար դետերմինանտ, այսինքն՝ ունի ոչ-զրոյական $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ լուծում, ընդհանրապես ասած, կոմպլեքս. այսպիսով՝

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j=\lambda_0\beta_i, \quad i=1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

(3) հավասարություններից յուրաքանչյուր i-րդի երկու մասերն էլ բազմապատկելով β_i թվին համալուծ $\bar{\beta}_i$ թվով և ստացված բոլոր հավասարությունների աջ և ձախ մասերն առանձին-առանձին գումարելով, մենք կհանգենք հետևյալ հավասարությանը.

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\bar{\beta}_i=\lambda_0\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{\beta}_i. \qquad (4)$$

λ_0-ի գործակիցը (4)-ում զրոյից տարբեր իրական թիվ է, լինելով ոչբացասական իրական թվերի գումար, որոնցից գոնե մեկը խստորեն դրական է։ Այդ պատճառով λ_0 թվի իրական լինելը կապացուցվի, եթե մենք ապացուցենք (4) հավասարության ձա՛խ մասի իրական լինելը, որի համար բավական է ցույց տալ, որ այդ կոմպլեքս թիվը համընկնում է իր համալուծի հետ։ Այստեղ առաջին անգամ կօգտագործվի A (իրական) մատրիցի սիմետրիկությունը՝

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\bar{\beta}_i}=\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\beta_j\bar{\beta}_i}=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\bar{\beta}_j\beta_i=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ji}\bar{\beta}_j\beta_i=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\bar{\beta}_i\beta_j=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\bar{\beta}_i.$$

Նշենք, որ նախավերջին հավասարությունն ստացվել է գումարման ինդեքսների նշանակումների պարզ փոխարինմամբ՝ i-ի փոխարեն գրված է j, j-ի փոխարեն՝ i։ Թեորեմը, հետևաբար, ապացուցված է։

Էվկլիդյան E_n տարածության φ գծային ձևափոխությունը այն և միայն այն դեպքում կլինի սիմետրիկ, եթե E_n տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմավորված բազիս, որը կազմված է այդ ձևափոխության սեփական վեկտորներից:

Այս պնդումը մի ուղղությամբ համարյա ակներև է. եթե E_n-ում գոյություն ունի $e_1, e_2, \dots, e_n$ օրթոնորմավորված բազիս, ընդ որում

$$e_i\varphi=\lambda_i e_i, \qquad i=1, 2, \dots, n,$$

ապա e բազիսում φ ձևափոխությունը տրվում է

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

անկյունագծային մատրիցով: Սակայն, անկյունագծային մատրիցը սիմետրիկ է, և այդ պատճառով φ ձևափոխությունը e օրթոնորմավորված բազիսում տրվում է սիմետրիկ մատրիցով, այսինքն՝ սիմետրիկ է:

Թեորեմայի հիմնական, հակադարձ պնդումը մենք կապացուցենք ինդուկցիայով ըստ E_n տարածության n չափականության: Իրոք, $n=1$ դեպքում E_1 տարածության յուրաքանչյուր φ գծային ձևափոխություն անպայման ցանկացած վեկտոր բերում է նրան համեմատական վեկտորի: Այստեղից հետևում է, որ յուրաքանչյուր a ոչզրոյական վեկտոր կլինի φ-ի համար սեփական վեկտոր (ինչպես, իմիջիայլոց, հետևում է և այն, որ E_1 տարածության յուրաքանչյուր գծային ձևափոխություն կլինի սիմետրիկ): Նորմավորելով a վեկտորը, մենք կստանանք E_1 տարածության որոնելի օրթոնորմավորված բազիսը:

Դիցուք թեորեմայի պնդումն արդեն ապացուցված է $(n-1)$-չափանի էվկլիդյան տարածության համար և դիցուք E_n տարածության մեջ տված է φ սիմետրիկ ձևափոխությունը: Վերևում ապացուցված թեորեմայից բխում է φ-ի համար λ_0 իրական խարակտերիստիկ արմատի գոյությունը: Այդ թիվը կլինի, հետևաբար, սեփական արժեք φ ձևափոխության համար: Եթե a-ն φ ձևափոխության՝ այդ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է, ապա a վեկտորին համեմատական յուրաքանչյուր ոչզրոյական վեկտոր նույնպես կլինի φ-ի համար՝ նույն λ_0 սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտոր, քանի որ

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)=\alpha(\lambda_0 a)=\lambda_0(\alpha a).$$

Մասնավորապես, նորմավորելով a վեկտորը, մենք կստանանք այնպիսի e_1 վեկտոր, որ՝

$$e_1\varphi=\lambda_0 e_1,$$
$$(e_1, e_1)=1.$$

Ինչպես ապացուցված է § 34-ում, e_1 ոչզրոյական վեկտորը կարելի է մտցնել E_n տարածության

$$e_1, e_2', \dots, e_n' \qquad (5)$$

օրթոգոնալ բազիսի մեջ: Այն վեկտորները, որոնց առաջին կոորդինատը (5) բազիսում հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $\alpha_2 e_2'+\dots+\alpha_n e_n'$ տեսքի վեկտորները, կազմում են, ակներևաբար, E_n տարածության $(n-1)$-չափանի գծային ենթատարածություն, որը մենք կնշանակենք L-ով: Դա կլինի նույնիսկ $(n-1)$-չափանի էվկլիդյան տարածություն, քանի որ E_n-ի բոլոր վեկտորների համար սահմանված սկալյար արտադրյալը, մասնավորապես, սահմանված է նաև L-ի բոլոր վեկտորների համար ընդ որում օժտված է բոլոր անհրաժեշտ հատկություններով:

L ենթատարածությունը կազմված է E_n տարածության այն բոլոր վեկտորներից, որոնք օրթոգոնալ են e_1 վեկտորին: Իրոք, եթե

$$a=\alpha_1 e_1+\alpha_2' e_2'+\dots+\alpha_n' e_n',$$

ապա, շնորհիվ (5) բազիսի օրթոգոնալության և e_1 վեկտորի նորմավորվածության՝

$$(e_1, a)=\alpha_1(e_1, e_1)+\alpha_2'(e_1, e_2')+\dots+\alpha_n'(e_1, e_n')=\alpha_1,$$

այսինքն՝ $(e_1, a)=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha_1=0$:

Եթե a վեկտորը պատկանում է L ենթատարածությանը, այսինքն՝ $(e_1, a)=0$, ապա նաև $a\varphi$ վեկտորն է պարունակվում L-ի մեջ: Իրոք, φ ձևափոխության սիմետրիկության շնորհիվ՝

$$(e_1, a\varphi)=(e_1\varphi, a)=(\lambda_0 e_1, a)=\lambda_0(e_1, a)=\lambda_0\cdot 0=0,$$

այսինքն՝ $a\varphi$ վեկտորն օրթոգոնալ է e_1-ին և այդ պատճառով պարունակվում է L-ի մեջ: L ենթատարածության այդ հատկությունը, որը կոչվում է նրա անփոփոխականություն (ինվարիանտություն) φ ձևափոխության նկատմամբ, թույլ է տալիս φ-ն, դիտարկելով այն կիրառված միայն L-ին պատկանող վեկտորների նկատմամբ, համարել $(n-1)$-չափանի այդ էվկլիդյան տարածության գծային ձևափոխություն: Այն կլինի նույնիսկ L տարածության սիմետրիկ ձևափոխություն, քանի որ E_n-ի ցանկացած վեկտորների համար բավարարվող (1) հավասարությունը կբավարարվի, մասնավորապես, նաև L-ին պատկանող վեկտորների համար:

Ինդուկտիվ ենթադրության շնորհիվ L տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոնորմավորված բազիս, որը կազմված է φ ձևափոխության սեփական վեկտորներից. այն նշանակենք $e_2, \dots, e_n$: Բոլոր այս վեկտորներն օրթոգոնալ են e_1 վեկտորին, դրա պատճառով էլ $e_1, e_2, \dots, e_n$ սիստեմը կլինի E_n տարածության որոնելի օրթոնորմավորված բազիսը, որը կազմված է φ ձևափոխության սեփական վեկտորներից:

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 37. Քառակուսային ձևի բերումը գլխավոր առանցքներին: Ձևերի զույգեր

Նախորդ պարագրաֆի վերջին թեորեման կիրառենք հետևյալ մատրիցային թեորեման ապացուցելու համար՝

Յուրաքանչյուր A սիմետրիկ մատրիցի համար կարելի է գտնել այնպիսի Q օրթոգոնալ մատրից, որը A մատրիցը բերում է անկյունագծային տեսքի, այսինքն՝ $Q^{-1}AQ$ մատրիցը, որն ստացված է A մատրիցը Q մատրիցի միջոցով փոխակերպելով, կլինի անկյունագծային մատրից:

Իսկապես, դիցուք տված է n-րդ կարգի A սիմետրիկ մատրիցը: Եթե $e_1, e_2, \ldots e_n$-ը n-չափանի էվկլիդյան տարածության մի որոշ օրթոնորմավորված բազիս է, ապա A մատրիցը այդ բազիսում տալիս է φ սիմետրիկ ձևափոխությունը:

Ինչպես ապացուցված է, E_n-ում գոյություն ունի օրթոնորմավորված $f_1, f_2, \ldots, f_n$ բազիս, որը կազմված է φ ձևափոխության սեփական վեկտորներից. այդ բազիսում φ-ն տրվում է B անկյունագծային մատրիցով (տե՛ս § 33): Այդ դեպքում, ըստ § 31-ի,

$$B=Q^{-1}AQ, \tag{1}$$

որտեղ Q-ն f բազիսից e բազիսին անցման մատրիցն է՝

$$e=Qf: \tag{2}$$

Այդ մատրիցը, որպես մի օրթոնորմավորված բազիսից մի ուրիշ նույնպիսի բազիսի անցման մատրից, կլինի օրթոգոնալ (տե՛ս § 35): Թեորեման ապացուցված է:

Քանի որ Q օրթոգոնալ մատրիցի համար հակադարձ մատրիցը հավասար է իր շրջված մատրիցին՝ $Q^{-1}=Q'$, ապա (1) հավասարությունը կարելի է արտագրել այս տեսքով՝

$$B=Q'AQ: \tag{3}$$

Սակայն, § 26-ից հայտնի է, որ հենց այդպես է ձևափոխվում քառակուսային ձևի A սիմետրիկ մատրիցը, որը ենթարկված է անհայտների գծային ձևափոխության Q մատրիցով: Հաշվի առնելով նաև այն, որ անհայտների օրթոգոնալ մատրիցով գծային ձևափոխությունը օրթոգոնալ ձևափոխություն է (տե՛ս § 35) և, որ կանոնական տեսքի բերված քառակուսային ձևն ունի անկյունագծային մատրից, մենք նախորդ թեորեմայի հիման վրա ստանում ենք իրական քառակուսային ձևը գլխավոր առանցքներին բերելու վերաբերյալ հետևյալ թեորեման:

Յուրաքանչյուր $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ իրական քառակուսային ձևը

անհայտների մի որոշ օրթոգոնալ ձևափոխությամբ կարող է բերվել կանոնական տեսքի:

Չնայած կարող են գոյություն ունենալ անհայտների իրարից տարբեր շատ օրթոգոնալ ձևափոխություններ, որոնք տված քառակուսային ձևը բերում են կանոնական տեսքի, բայց և այնպես ինքը՝ այդ կանոնական տեսքն ըստ էության որոշվում է միարժեքորեն:

Ինչպիսին էլ լինի օրթոգոնալ ձևափոխությունը, որը A մատրից ունեցող $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ քառակուսային ձևը բերում է կանոնական տեսքի, այդ կանոնական տեսքի գործակիցները կլինեն A մատրիցի խարակտերիստիկ արմատները՝ վերցված իրենց բազմապատիկությամբ:

Իսկապես, դիցուք f ձևը մի որոշ օրթոգոնալ ձևափոխությամբ բերված է կանոնական տեսքի՝

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\ldots+\mu_ny_n^2:$$

Այս օրթոգոնալ ձևափոխությունն անհայտների քառակուսիների գումարը թողնում է անփոփոխ և այդ պատճառով էլ, եթե λ-ն նոր անհայտ է, ապա՝

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\mu_iy_i^2-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i^2:$$

Անցնելով այդ քառակուսային ձևերի դետերմինանտներին և նկատի ունենալով, որ գծային ձևափոխություն կատարելուց հետո քառակուսային ձևի դետերմինանտը բազմապատկվում է ձևափոխման դետերմինանտի քառակուսով (տե՛ս § 28), իսկ օրթոգոնալ ձևափոխության դետերմինանտի քառակուսին հավասար է մեկի (տե՛ս § 35), մենք հանգում ենք հետևյալ հավասարությանը.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} \mu_1-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2-\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n-\lambda \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda),$$

որից էլ բխում է թեորեմայի պնդումը:

Այս արդյունքին կարելի է տալ նաև մատրիցային ձևակերպում՝

Ինչպիսին էլ լինի օրթոգոնալ մատրիցը, որը A սիմետրիկ մատրիցը բերում է անկյունագծային տեսքի, ստացված անկյունագծային մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա դասավորված կլինեն A մատրիցի խարակտերիստիկ արմատները՝ վերցված իրենց բազմապատիկությամբ:

Քառակուսային ձևը գլխավոր առանցքներին բերող օրթոգոնալ ձևափոխությունը գործնականորեն գտնելը: *Որոշ խնդիրներում անհրաժեշտ է իմանալ ոչ միայն այն կանոնական տեսքը, որին բերվում է իրական քառակուսային ձևն օրթոգոնալ ձևափոխությամբ, այլ և այդ բերումն իրականացնող օրթոգոնալ ձևափոխությունը: Դժվար* կլիներ փնտրել այդ ձևափոխությունը՝ օգտագործելով գլխավոր առանցքների բերման մասին թեորեմայի ապացույցը, և մենք ուզում ենք նըշել ուրիշ ճանապարհ։ Հարկավոր է միայն սովորել տված սիմետրիկ մատրիցն անկյունագծային տեսքի բերող Q սիմետրիկ մատրիցը գտնելը կամ, որ նույնն է, գտնել նրա հակադարձ՝ Q^{-1} մատրիցը։ (2)-ի շնորհիվ դա կլինի e բազիսից f բազիսին անցման մատրիցը, այսինքն՝ նրա տողերը հանդիսանում են A մատրիցով e բազիսում որոշվող φ սիմետրիկ ձևափոխության n սեփական վեկտորների օրթոնորմավորված սիստեմի կոորդինատական տողերը (e բազիսում)։ Մնում է գտնել սեփական վեկտորների այդպիսի սիստեմ։

Դիցուք λ_0-ն A մատրիցի ցանկացած խարակտերիստիկ արմատն է և դիցուք նրա բազմապատիկությունը հավասար է k_0-ի։ § 33-ից մենք գիտենք, որ φ ձևափոխության λ_0 սեփական արժեքին վերաբերող բոլոր սեփական վեկտորների կոորդինատային տողերի համախմբությունը համընկնում է

$$(A-\lambda_0 E)X=0 \qquad (3)$$

գծային համասեռ հավասարումների ոչզրոյական լուծումների համախմբության հետ. A մատրիցի սիմետրիկությունը թույլ է տալիս այստեղ A'-ի փոխարեն գրել A։ A սիմետրիկ մատրիցն անկյունագծային տեսքի բերող օրթոգոնալ մատրիցի գոյության վերաբերյալ վերևում ապացուցված թեորեմաներից և այդ անկյունագծային տեսքի միակությունից բխում է, որ (3) սիստեմի համար, համենայն դեպս, կարելի է գտնել k գծայնորեն անկախ լուծումներ։ Լուծումների այդպիսի սիստեմ կփընտրենք § 12-ից հայտնի մեթոդներով, իսկ հետո ստացված սիստեմը կօրթոգոնալացնենք և կնորմավորենք § 34-ին համապատասխան։

Հերթով որպես λ_0 վերցնելով A սիմետրիկ մատրիցի բոլոր տարբեր խարակտերիստիկ արմատները և նկատի ունենալով, որ այդ արմատների բազմապատիկությունների գումարը հավասար է n-ի, մենք կստանանք φ ձևափոխության n սեփական վեկտորների սիստեմ, որոնք տրված են իրենց կոորդինատներով e բազիսում։ Ապացուցելու համար, որ դա կլինի սեփական վեկտորների որոնելի օրթոնորմավորված սիստեմը, մնում է ապացուցել հետևյալ լեմման.

Սիմետրիկ ձևափոխության տարբեր սեփական արժեքներին վերաբերող սեփական վեկտորներն իրար օրթոգոնալ են։

Իսկապես, դիցուք

$$b\varphi=\lambda_1 b, \qquad c\varphi=\lambda_2 c,$$

ընդ որում $\lambda_1\neq\lambda_2$։ Քանի որ

$$(b\varphi,\ c)=(\lambda_1 b,\ c)=\lambda_1(b,\ c),$$
$$(b,\ c\varphi)=(b,\ \lambda_2 c)=\lambda_2(b,\ c),$$

ապա՝

$$(b\varphi,\ c)=(b,\ c\varphi)$$

հավասարությունից հետևում է

$$\lambda_1(b,\ c)=\lambda_2(b,\ c)$$

կամ, հաշվի առնելով, որ $\lambda_1\neq\lambda_2$,

$$(b,\ c)=0,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Օրինակ։ Հետևյալ քառակուսային ձևը բերել գլխավոր առանցքներին՝

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4:$$

Այս քառակուսային ձևի A մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Գտնենք նրա խարակտերիստիկ բազմանդամը՝

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3):$$

Այսպիսով, A մատրիցն ունի 1 եռապատիկ խարակտերիստիկ արմատը և −3 պարզ խարակտերիստիկ արմատը։ Հետևապես, մենք արդեն կարող ենք գրել այն կանոնական տեսքը, որին բերվում է f քառակուսային ձևը օրթոգոնալ ձևափոխությամբ՝

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2:$$

Գտնենք այս բերումն իրականացնող օրթոգոնալ ձևափոխությունը։ Գծային համասեռ հավասարումների (3) սիստեմը $\lambda_0=1$ դեպքում ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Այս սիստեմի ռանգը հավասար է 1-ի և այդ պատճառով նրա համար կարելի է գտնել գծայնորեն անկախ երեք լուծում։ Այդպիսիք կլինեն, օրինակ, հետևյալ վեկտորները.

$$b_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$b_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$b_3=(-1,\ 0,\ 0,\ 1):$$

Օրթոգոնալացնելով վեկտորների այս սիստեմը, մենք կստանանք վեկտորների հետևյալ սիստեմը՝

$$c_1=b_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$c_2=-\frac{1}{2}c_1+b_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right),$$
$$c_3=\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_3+b_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ 1\right):$$

Մյուս կողմից, գծային համասեռ հավասարումների (3) սիստեմը $\lambda_0=-3$ դեպքում ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_3+3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=0: \end{cases}$$

Այս սիստեմի ռանգը հավասար է 3-ի։ Նրա ոչզրոյական լուծում է ծառայում

$$c_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$$

վեկտորը։

c_1, c_2, c_3, c_4 վեկտորների սիստեմն օրթոգոնալ է։ Նորմավորելով այն, մենք հանգում ենք վեկտորների հետևյալ օրթոնորմավորված սիստեմին.

$$c'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,0\right),$$
$$c'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\right),$$
$$c'_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$c'_4=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right):$$

Այսպիսով, f քառակուսային ձևը բերվում է գլխավոր առանցքներին հետևյալ օրթոգոնալ ձևափոխությամբ.

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,$$
$$y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1-\frac{1}{\sqrt{6}}x_2+\sqrt{\frac{2}{3}}x_3,$$
$$y_3=-\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{2\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}x_4,$$
$$y_4=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4:$$

Անհրաժեշտ է նշել, որ բազմապատիկ սեփական արժեքին վերաբերող գծայնորեն անկախ սեփական վեկտորների սիստեմի ընտրությունը ամենևին միարժեք չէ, հետևապես գոյություն ունեն շատ տարբեր օրթոգոնալ ձևափոխություններ, որոնք f ձևը բերում են կանոնական տեսքի։ Մենք գտանք նրանցից միայն մեկը։

Ձևերի զույգեր: Դիցուք տված են մի զույգ իրական քառակուսային ձևեր n անհայտներից՝ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$։ Գոյություն ունի՞ արդյոք $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների այնպիսի չվերասերվող գծային ձևափոխություն, որն այդ երկու ձևերն էլ միաժամանակ բերի կանոնական տեսքի։

Ընդհանուր դեպքում պատասխանը կլինի բացասական։ Դիտարկենք, օրինակ՝

$$f(x_1,\ x_2)=x_1^2, \quad g(x_1,\ x_2)=x_1x_2$$

ձևերի զույգը։ Դիցուք գոյություն ունի չվերասերվող

$$\left.\begin{aligned} x_1&=c_{11}y_1+c_{12}y_2 \\ x_2&=c_{21}y_1+c_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

գծային ձևափոխություն, որն այդ երկու ձևերն էլ բերում է կանոնական տեսքի։ Որպեսզի f ձևը (4) ձևափոխությամբ կարողանա բերվել կանոնական տեսքի, c_{11}, c_{12} գործակիցներից մեկը պետք է հավասար լինի զրոյի, այլապես կմնանակցեր $2c_{11}c_{12}y_1y_2$ անդամը։ Եթե հարկ կա, փոխելով y_1, y_2 անհայտների համարակալումը, կարելի է ենթադրել, որ $c_{12}=0$ և, հետևապես, $c_{11}\neq 0$։ Այժմ, սակայն, մենք կստանանք, որ

$$g(x_1,\ x_2)=c_{11}y_1(c_{21}y_1+c_{22}y_2)=c_{11}c_{21}y_1^2+c_{11}c_{22}y_1y_2:$$

Քանի որ g ձևը նույնպես պետք է բերվեր կանոնական տեսքի, ուրեմն $c_{11}c_{22}=0$, այսինքն՝ $c_{22}=0$, որը $c_{12}=0$ պայմանի հետ միասին հակասում է (4) գծային ձևափոխության չվերասերվող լինելուն։

Իրադրությունը կլինի այլ, եթե մենք ենթադրենք, որ մեր ձևերից գոնե մեկը, օրինակ՝ $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ը, դրականապես որոշյալ ձև է[1]։ Այսինքն՝ ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

Եթե f-ը և g-ն մի զույգ իրական քառակուսային ձևեր են n անհայտներից, ընդ որում նրանցից երկրորդը դրականապես որոշյալ ձև է, ապա գոյություն ունի չվերասերվող գծային ձևափոխություն, որը միաժամանակ g ձևը բերում է նորմալ տեսքի, իսկ f ձևը՝ կանոնական տեսքի:

Ապացուցման համար սկզբում կատարենք $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների այնպիսի չվերասերվող գծային ձևափոխություն՝

$$X=TY,$$

---

1 Այս պայմանը, իհարկե, անհրաժեշտ պայման չէ. այսպես՝ $x_1^2+x_2^2-x_3^2$ և $x_1^2-x_2^2-x_3^2$ ձևերը երկուսն էլ արդեն ունեն կանոնական տեսք, չնայած նրանցից ոչ մեկը դրականապես որոշյալ ձև չէ։

որը դրականապես որոշված g ձևը բերում է նորմալ տեսքի՝

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)=y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2.$$

Այդ դեպքում f ձևը կփոխակերպվի ինչ-որ φ ձևի՝ նոր անհայտներից

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Այժմ կատարենք $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտների այնպիսի օրթոգոնալ ձևափոխություն՝

$$Y=QZ,$$

որը φ ձևը բերում է գլխավոր առանցքներին՝

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\dots+\lambda_n z_n^2.$$

Այս ձևափոխությունը (տես սահմանումը § 35-ում) $y_1, y_2, \dots, y_n$ անհայտների քառակուսիների գումարը բերում է $z_1, z_2, \dots, z_n$ անհայտների քառակուսիների գումարին։ Արդյունքում մենք կստանանք՝

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\dots+\lambda_n z_n^2,$$
$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)=z_1^2+z_2^2+\dots+z_n^2,$$

այսինքն՝

$$X=(TQ)Z$$

գծային ձևափոխությունը որոնելի ձևափոխությունն է։

ԳԼՈՒԽ ԻՆՆԵՐՈՐԴ

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

§ 38*. Երկրորդ, երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումներ

§ 23-ում ապացուցված հիմնական թեորեմը հաստատում է թվային գործակիցներով n-րդ աստիճանի ցանկացած բազմանդամի համար n հատ կոմպլեքս արմատների գոյությունը։ Նրա ապացույցները (ինչպես վերևում բերվածը, այնպես էլ այժմ հայտնիներից յուրաքանչյուրը), սակայն, չեն տալիս այդ արմատները գործնականորեն գտնելու ոչ մի մեթոդ՝ հանդիսանալով մաքուր «գոյության ապացույցներ»։ Այդպիսի մեթոդների որոնումները, բնականաբար, սկսվեցին քառակուսի հավասարման լուծման բանաձևին նման բանաձևեր արտածելու փորձերից։ Քառակուսի հավասարման լուծման բանաձևը իրական գործակիցների դեպքի համար ընթերցողին հայտնի է հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից։ Մենք հիմա ցույց կտանք, որ այդ բանաձևը ճիշտ է մնում նաև կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսի հավասարման համար և որ համանման բանաձևեր (չնայած շատ ավելի մեծածավալ) կարելի է արտածել նաև երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների համար։

Քառակուսի հավասարումներ: Դիցուք տրված է

$$x^2+px+q=0$$

քառակուսի հավասարումը՝ ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով. ավագ գործակիցն, առանց ընդհանրությունը սահմանափակելու, կարելի է համարել հավասար մեկի։ Այս հավասարումը կարելի է արտագրել

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0$$

տեսքով։ Ինչպես մենք գիտենք, $\frac{p^2}{4}-q$ կոմպլեքս թվից կարելի է քառակուսի արմատ հանել՝ առանց դուրս գալու կոմպլեքս թվերի սիստեմի սահմաններից։ Այդ արմատի երկու արժեքները, որոնք իրարից տարբերվում են միայն նշանով, մենք կգրենք $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ տեսքով։ Ուստի՝

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

այսինքն՝ տված հավասարման արմատները կարելի է գտնել սովորական բանաձևով՝

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}:$$

Օրինակ։ Լուծել

$$x^2-3x+(3-i)=0$$

հավասարումը։ Կիրառելով արտածված բանաձևը, ստանում ենք՝

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-(3-i)}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3+4i}\,;$$

§ 19-ի մեթոդների օգնությամբ մենք կգտնենք՝

$$\sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i),$$

նշանակում է՝

$$x_1=2+i,\quad x_2=1-i:$$

Խորանարդ հավասարումներ: Ի տարբերություն քառակուսի հավասարումների դեպքից, մինչև այժմ մենք չենք ունեցել խորանարդ հավասարումների լուծման մեթոդ նույնիսկ իրական գործակիցների դեպքում։ Այժմ մենք կարտածենք բանաձև խորանարդ հավասարումների համար, որը համանման է քառակուսի հավասարումների համար եղած բանաձևին, ընդ որում միանգամից կենթադրենք, որ գործակիցները ցանկացած կոմպլեքս թվեր են։

Դիցուք տված է

$$y^3+ay^2+by+c=0 \tag{1}$$

խորանարդ հավասարումը ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով։ (1) հավասարման մեջ y անհայտը փոխարինելով x նոր անհայտով, որը կապված է y-ի հետ

$$y=x-\frac{a}{3} \tag{2}$$

հավասարությունով, մենք կստանանք x անհայտի նկատմամբ այնպիսի հավասարում, որը, ինչպես հեշտ է ստուգել, չի պարունակում այդ անհայտի քառակուսին, այսինքն՝

$$x^3+px+q=0 \tag{3}$$

տեսքի հավասարում։ Եթե գտնենք (3) հավասարման արմատները, ապա, հաշվի առնելով (2)-ը, մենք կստանանք նաև տված (1) հավասարման արմատները։ Հետևաբար, մեզ մնում է սովորել լուծել (3) «թերի» խորանարդ հավասարումը՝ ցանկացած կոմպլեքս գործակիցներով։

Ըստ հիմնական թեորեմայի (3) հավասարումն ունի երեք կոմպլեքս արմատներ։ Դիցուք x_0-ն այդ արմատներից որևէ մեկն է։ Մուծենք u օժանդակ անհայտը և դիտարկենք

$$f(u)=u^2-x_0u-\frac{p}{3}$$

բազմանդամը։ Նրա գործակիցները կոմպլեքս թվեր են և, հետևապես, այն ունի երկու՝ α և β կոմպլեքս արմատներ, ընդ որում, ըստ Վիետի բանաձևերի,

$$\alpha+\beta=x_0, \tag{4}$$

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}: \tag{5}$$

(3)-ի մեջ տեղադրելով x_0 արմատի (4) արտահայտությունը, մենք կստանանք՝

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$

կամ

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0\,;$$

Սակայն, (5)-ից հետևում է, որ $(3\alpha\beta+p=0)$ և, հետևապես, մենք կստանանք՝

$$\alpha^3+\beta^3=-q: \tag{6}$$

Մյուս կողմից, (5)-ից բխում է՝

$$\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}, \tag{7}$$

(6) և (7) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ α^3 և β^3 թվերը հանդիսանում են կոմպլեքս գործակիցներով

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \tag{8}$$

քառակուսի հավասարման արմատները։

Լուծելով (8) հավասարումը, մենք կստանանք՝

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

որտեղից՝[1]

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\qquad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \tag{9}$$

[1] Կարևոր չէ, թե (8) հավասարման արմատներից որն ընդունենք որպես α^3 և որը՝ β^3, քանի որ α-ն և β-ն (6) և (7) հավասարությունների մեջ, ինչպես նաև x_0-ի (4) արտահայտության մեջ, մտնում են սիմետրիկ կերպով։

Մենք հանգում ենք Կարդանոյի հետևյալ բանաձևին, որը (3) հավասարման արմատներն արտահայտում է նրա գործակիցների միջոցով քառակուսի և խորանարդ արմատանշանների օգնությամբ՝

$$x_0=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}:$$

Քանի որ խորանարդ արմատը կոմպլեքս թվերի դաշտում ունի երեք արժեք, ապա (9) բանաձևերը տալիս են երեք արժեք α-ի համար և երեք արժեք՝ β-ի: Սակայն, Կարդանոյի բանաձևը կիրառելով չի կարելի α արմատի ցանկացած արժեքը զուգակցել β արմատի ցանկացած արժեքի հետ. α-ի տված արժեքի համար անհրաժեշտ է վերցնել β-ի երեք արժեքներից միայն այն, որը բավարարում է (5) պայմանին: Դիցուք α_1-ը α-ի երեք արժեքներից որևէ մեկն է: Այդ դեպքում մյուս երկուսը կարելի է ստանալ, ինչպես ապացուցված է § 19-ում, α_1-ը բազմապատկելով միավորից խորանարդ արմատի ε և ε^2 արժեքներով՝

$$\alpha_2=\alpha_1\varepsilon, \qquad \alpha_3=\alpha_1\varepsilon^2:$$

β_1-ով նշանակենք β-ի երեք արժեքներից այն, որը (5)-ի հիման վրա համապատասխանում է α-ի α_1 արժեքին, այսինքն՝ $\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3}$: β-ի մյուս երկու արժեքները կլինեն՝

$$\beta_2=\beta_1\varepsilon, \quad \beta_3=\beta_1\varepsilon^2:$$

Քանի որ, նկատի ունենալով $\varepsilon^3=1$ պայմանը,

$$\alpha_2\beta_3=\alpha_1\varepsilon\cdot\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1\beta_1\varepsilon^3=\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3},$$

ապա α-ի α_2 արժեքին համապատասխանում է β-ի β_3 արժեքը. Ճիշտ այդպես էլ, α_3 արժեքին համապատասխանում է β_2 արժեքը: Այսպիսով, (3) հավասարման բոլոր երեք արմատները կարող են գրվել հետևյալ կերպ.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\alpha_1+\beta_1,\\ x_2&=\alpha_2+\beta_3=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2,\\ x_3&=\alpha_3+\beta_2=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon: \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Իրական գործակիցներով խորանարդ հավասարումներ: Տեսնենք, թե ինչ կարելի է ասել

$$x^3+px+q=0 \tag{11}$$

թերի խորանարդ հավասարման արմատների մասին, երբ նրա գործակիցներն իրական են: Պարզվում է, որ այս դեպքում հիմնական դեր

խաղում է Կարդանոյի բանաձևի մեջ քառակուսի արմատի տակ գրված $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ արտահայտության նշանը: Նշենք, որ այդ արտահայտության նշանը հակադիր է (11) հավասարման դիսկրիմինանտ կոչվող

$$D=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$$

արտահայտության նշանին (հմմ. ստորև, § 54). Հետագա ձևակերպումների մեջ կօգտագործվի դիսկրիմինանտի նշանը:

1) Դիցուք $D<0$: Այս դեպքում Կարդանոյի բանաձևի մեջ քառակուսի արմատներից յուրաքանչյուրի տակ ստացվում է դրական թիվ և, հետևապես, խորանարդ արմատներից յուրաքանչյուրի տակ ստացվում են իրական թվեր: Սակայն, իրական թվից խորանարդ արմատն ունի մեկ իրական և երկու համալուծ կոմպլեքս արժեքներ: Դիցուք α_1-ը α-ի իրական արժեքն է. այդ դեպքում β-ի β_1 արժեքը, որը համապատասխանում է α_1-ին (5)-ի հիման վրա, նույնպես կլինի իրական՝ p-ի իրական լինելու հետևանքով: Այսպիսով, (11) հավասարման $x_1=\alpha_1+\beta_1$ արմատը ստացվում է իրական: Մյուս երկու արմատները մենք կգտնենք այս պարագրաֆի (10) բանաձևերի մեջ մեկից խորանարդ արմատի $\varepsilon=\varepsilon_1$ և $\varepsilon^2=\varepsilon_2$ արժեքները փոխարինելով § 19-ի իրենց (7) արտահայտություններով՝

$$x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1-\beta_1}{2},$$

$$x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}.$$

այս երկու արմատները, α_1-ի և β_1-ի իրական լինելու շնորհիվ, ստացվում են կոմպլեքս համալուծ թվեր, ընդ որում կեղծ մասի գործակիցը զրոյից տարբեր է, քանի որ $\alpha_1\neq\beta_1$. այս թվերը տարբեր խորանարդ արմատների արժեքներ են:

Այսպիսով, եթե $D<0$, ապա (11) հավասարումն ունի մեկ իրական և երկու համալուծ կոմպլեքս արմատներ:

2) Դիցուք $D=0$: Այս դեպքում

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \qquad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}:$$

Դիցուք α_1-ը α-ի իրական արժեքն է. այդ դեպքում β_1-ը, շնորհիվ (5)-ի, նույնպես կլինի իրական թիվ, ընդ որում $\alpha_1=\beta_1$։ (10) բանաձևերի մեջ β_1-ը փոխարինելով α_1-ով և, օգտագործելով $\varepsilon+\varepsilon^2=-1$ ակնհայտ հավասարությունը, մենք կստանանք՝

$$x_1=2\alpha_1,\quad x_2=\alpha_1(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha_1,\quad x_3=\alpha_1(\varepsilon^2+\varepsilon)=-\alpha_1:$$

Այսպիսով, եթե $D=0$, ապա (11) հավասարման բոլոր արմատները իրական են, ընդ որում նրանցից երկուսը միմյանց հավասար են:

3) Դիցուք, վերջապես, $D>0$։ Այդ դեպքում Կարդանոյի բանաձևի մեջ քառակուսի արմատի նշանի տակ գտնվում է բացասական իրական թիվ, նշանակում է խորանարդ արմատների նշանների տակ գտնվում են համալուծ կոմպլեքս թվեր։ Այսպիսով, α-ի և β-ի բոլոր արժեքներն այժմ կլինեն կոմպլեքս։ (11) հավասարման արմատների մեջ, այնուամենայնիվ, պետք է պարունակվի գոնե մեկ իրական արմատ։ Թո՛ղ դա լինի

$$x_1=\alpha_0+\beta_0$$

արմատը։ Քանի որ իրական են α_0 և β_0 թվերի և՛ գումարը, և՛ արտադրյալը, որը հավասար է $-\frac{p}{3}$-ին, ապա α_0 և β_0 թվերը իրար համալուծ են որպես իրական գործակիցներով քառակուսի հավասարման արմատներ։ Բայց այդ դեպքում իրար համալուծ են նաև $\alpha_0\varepsilon$ ու $\beta_0\varepsilon^2$ թվերը, ինչպես նաև՝ $\alpha_0\varepsilon^2$ և $\beta_0\varepsilon$ թվերը, որտեղից հետևում է, որ (11) հավասարման

$$x_2=\alpha_0\varepsilon+\beta_0\varepsilon^2,\qquad x_3=\alpha_0\varepsilon^2+\beta_0\varepsilon$$

արմատները նույնպես կլինեն իրական թվեր։

Մենք ստացանք, որ (11) հավասարման բոլոր երեք արմատներն էլ իրական են, ընդ որում հեշտ է ցույց տալ, որ նրանց մեջ միմյանց հավասարներ չկան։ Իսկապես, հակառակ դեպքում x_1 արմատի ընտրությունը կարելի էր այնպես իրականացնել, որպեսզի տեղի ունենար $x_2=x_3$ հավասարությունը, որտեղից կստացվեր

$$\alpha_0(\varepsilon-\varepsilon^2)=\beta_0(\varepsilon-\varepsilon^2),$$

այսինքն՝ $\alpha_0=\beta_0$, որը բացահայտորեն անհնար է։

Այսպիսով, եթե $D>0$, ապա (11) հավասարումն ունի երեք տարբեր իրական արմատներ:

Դիտարկված վերջին դեպքը ցույց է տալիս, որ Կարդանոյի բանաձևի պրակտիկ նշանակությունն այնքան էլ մեծ չէ։ Իսկապես, չնայած $D>0$ դեպքում իրական գործակիցներով (11) հավասարման բոլոր արմատներն իրական թվեր են, այնուամենայնիվ, Կարդանոյի բանաձևով դրանք գտնելը պահանջում է կոմպլեքս թվերից խորանարդ արմատ հանել, որ մենք կարող ենք կատարել միայն այդ թվերի եռանկյունաչափական տեսքին անցնելով։ Հետևապես, արմատների գրառումը արմատանշանների օգնությամբ կորցնում է պրակտիկ նշանակությունը։

Մեր գրքի սահմաններից դուրս եկող մեթոդներով կարելի էր ապացուցել, որ ուսումնասիրվող դեպքում (11) հավասարման արմատներն ընդհանրապես ոչ մի եղանակով չեն կարող արտահայտվել հավասարման գործակիցների միջոցով այնպիսի արմատանշանների օգնությամբ, որոնց արմատատակ արտահայտություններն իրական են։ (11) հավասարման լուծման այս դեպքը կոչվում է չբերվող դեպք *(չշփոթել՝ բազմանդամների չբերվող լինելու հետ)։*

Օրինակներ. 1. Լուծել

$$y^3+3y^2-3y-14=0$$

հավասարումը։ $y=x-1$ տեղադրությունը այդ հավասարումը բերում է

$$x^3-6x-9=0 \tag{12}$$

տեսքի։ Այստեղ $p=-6$, $q=-9$, ուստի՝

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{49}{4}>0,$$

այսինքն՝ (12) հավասարումն ունի մեկ իրական և երկու կոմպլեքս համալուծ արմատներ։ (9)-ի համաձայն

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{8},\qquad \beta=\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{1}:$$

Նշանակում է $\alpha_1=2$, $\beta_1=1$, այսինքն՝ $x_1=3$։ Մյուս երկու արմատները կգտնենք (10) բանաձևերով՝

$$x_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad x_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}:$$

Այստեղից հետևում է, որ տված հավասարման արմատներ են հանդիսանում հետևյալ թվերը.

$$y_1=2,\qquad y_2=-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad y_3=-\frac{5}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}:$$

2. Լուծել

$$x^3-12x+16=0$$

հավասարումը։ Այստեղ $p=-12$, $q=16$, ուստի՝

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0:$$

Այստեղից հետևում է՝ $\alpha=\sqrt[3]{-8}$, այսինքն՝ $\alpha_1=-2$։ Հետևապես՝

$$x_1=-4,\quad x_2=x_3=2:$$

3. Լուծել

$$x^3-19x+30=0$$

հավասարումը։ Այստեղ $p=-19$, $q=30$, հետևապես՝

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{784}{27}<0:$$

Այսպիսով, եթե մնանք իրական թվերի տիրույթում, ապա Կարդանոյի բանաձևն այս հավասարման նկատմամբ կիրառելի չէ, չնայած նրա արմատներն են հանդիսանում 2, 3 և —5 իրական թվերը։

Չորրորդ աստիճանի հավասարումներ: Կամայական կոմպլեքս գործակիցներով

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0 \tag{13}$$

չորրորդ աստիճանի հավասարման լուծումը բերվում է երրորդ աստիճանի մի օժանդակ հավասարման լուծման։ Դա ստացվում է Ֆերրարիին պատկանող հետևյալ մեթոդով։

Նախապես (13) հավասարումը $y=x-\frac{a}{4}$ տեղադրմամբ բերվում է

$$x^4+px^2+qx+r=0 \tag{14}$$

տեսքին։ Այնուհետև այդ հավասարման ձախ մասը α օժանդակ պարամետրի օգնությամբ նույնաբար ձևափոխման է ենթարկվում հետևյալ կերպ.

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha x^2-p\alpha$$

կամ՝

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha_2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0: \tag{15}$$

Այժմ α-ն ընտրենք այնպես, որպեսզի քառակուսի փակագծերում գտնվող բազմանդամը լինի լրիվ քառակուսի։ Դրա համար նա պետք է ունենա մեկ կրկնապատիկ արմատ, այսինքն՝ պետք է տեղի ունենա

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0 \tag{16}$$

հավասարությունը։ (16) հավասարությունը α անհայտի նկատմամբ կոմպլեքս գործակիցներով խորանարդ հավասարում է։ Այդ հավասարումը, ինչպես մենք գիտենք, ունի երեք կոմպլեքս արմատ։ Թող α_0-ն լինի նրանցից մեկը։ Կարդանոյի բանաձևի համաձայն, այն արմատանշանների օգնությամբ արտահայտվում է (16) հավասարման գործակիցներով, այսինքն՝ (14) հավասարման գործակիցներով։

α-ի համար այս արժեքի ընտրության դեպքում (15)-ի քառակուսի փակագծերում գրված բազմանդամն ունի $\frac{q}{4\alpha_0}$ կրկնապատիկ արմատը և, հետևապես, (15) հավասարումը կընդունի

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0$$

տեսքը, այսինքն՝ նա տրոհվում է երկու քառակուսի հավասարումների՝

$$\left.\begin{aligned} &x^2-\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0,\\ &x^2+\sqrt{2\alpha_0}\,x+\Bigl(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}=0: \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Քանի որ (14) հավասարումից (17) հավասարումներին մենք եկանք նույնական ձևափոխությունների օգնությամբ, ապա (17) հավասարումների արմատները արմատներ կծառայեն նաև (14) հավասարման համար։ Դրա հետ մեկտեղ հեշտ է տեսնել, որ (14) հավասարման արմատներն արտահայտվում են գործակիցների միջոցով՝ արմատանշանների օգնությամբ։ Մենք չենք գրի համապատասխան բանաձևերը՝ նրանց ծավալուն և պրակտիկորեն անօգտակար լինելը նկատի ունենալով, ինչպես նաև առանձին չենք քննարկի այն դեպքը, երբ (14) հավասարումն ունի իրական գործակիցներ։

Դիտողություններ բարձր աստիճանի հավասարումների վերաբերյալ: Այն դեպքում, երբ քառակուսի հավասարման լուծման մեթոդներին տիրապետում էին դեռևս հին հույները, երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումների վերը շարադրված մեթոդների հայտնագործումը պատկանում է XVI դարին։ Դրանից հետո համարյա երեք հարյուրամյակ շարունակվեցին ապարդյուն փորձերը հաջորդ քայլը կատարելու համար, այսինքն՝ գտնելու հինգերորդ աստիճանի ցանկացած հավասարման (այսինքն՝ տառային գործակիցներով հինգերորդ աստիճանի հավասարման) արմատները նրա գործակիցների միջոցով արմատանշանների օգնությամբ արտահայտող բանաձևեր։ Այդ փորձերը դադարեցվեցին միայն այն բանից հետո, երբ անցյալ դարի քսանական թվականներին Աբելն ապացուցեց, որ այդպիսի բանաձևեր n-րդ աստիճանի հավասարումների համար ցանկացած $n\geqslant 5$ դեպքում կանխահայտորեն չեն կարող գտնվել։

Աբելի այս արդյունքը, սակայն, չէր բացառում այն բանի հնարավորությունը, որ թվային գործակիցներով յուրաքանչյուր կոնկրետ բազմանդամի արմատները համենայն դեպս ինչ-որ եղանակով արտահայտվում են նրա գործակիցների միջոցով՝ արմատանշանների մի որևէ կոմբինացիայի օգնությամբ, այսինքն՝ ինչպես ընդունված է ասել, յուրաքանչյուր հավասարում լուծելի է արմատանշաններով։ Այն պայմանների հարցը, որոնց առկայության դեպքում տված հավասարումը լուծելի է արմատանշաններով, սպառիչ կերպով հետազոտվեց անցյալ դարի երեսնական թվականներին՝ Գալուայի կողմից։ Պարզվեց, որ յուրաքանչյուր n-ի համար, սկսած $n=5$-ից, կարելի է նշել n-րդ աստիճանի նույնիսկ ամբողջ գործակիցներով հավասարումներ, որոնք լուծելի չեն արմատանշաններով: Այդպիսին կլինի, օրինակ՝

$$x^5-4x-2=0$$

հավասարումը:

Գալուայի հետազոտությունները վճռական ազդեցություն թողեցին հանրահաշվի հետագա զարգացման վրա: Սակայն, նրանց շարադրումը չի մտնում մեր խնդիրների մեջ:

§ 39. Արմատների սահմանները

Մենք գիտենք, որ գոյություն չունի թվային գործակիցներով բազմանդամների արմատների ճշգրիտ արժեքները գտնելու մեթոդ: Այնուամենայնիվ, մեխանիկայի, ֆիզիկայի և տեխնիկայի բազմազան ճյուղերի ամենատարբեր պրոբլեմները բերվում են բազմանդամների (ընդ որում՝ երբեմն բավական բարձր աստիճանի) արմատների հարցին: Այս հանգամանքն առիթ հանդիսացավ բազմաթիվ հետազոտությունների, որոնց նպատակն էր՝ կարողանալ այս կամ այն կարծիքն արտահայտել թվային գործակիցներով բազմանդամների արմատների մասին՝ չիմանալով այդ արմատները: Ուսումնասիրվեց, օրինակ, կոմպլեքս հարթության վրա արմատների դասավորության հարցը (պայմաններ, որոնց դեպքում բոլոր արմատներն ընկած են միավոր շրջանի ներսը, այսինքն՝ մոդուլով փոքր են մեկից, կամ պայմաններ նրա համար, որպեսզի բոլոր արմատներն ընկած լինեն ձախ կիսահարթության մեջ, այսինքն՝ ունենան բացասական իրական մաս և այլն): Իրական գործակիցներով բազմանդամների համար մշակվեցին նրանց իրական արմատների թիվը որոշող մեթոդներ, որոնվում էին այն սահմանները, որոնց միջև այդ արմատները կարող են գտնվել և այլն: Վերջապես, շատ հետազոտություններ նվիրվեցին արմատների մոտավոր հաշվման մեթոդներին. տեխնիկական կիրառություններում սովորաբար բավական է իմանալ միայն արմատների մոտավոր արժեքները՝ նախապես տված մի որոշ ճշտությամբ և եթե, օրինակ, բազմանդամի արմատները նույնիսկ գրված են արմատանշաններով, միևնույն է, դրանք պետք է փոխարինվեն իրենց մոտավոր արժեքներով:

Բոլոր այս հետազոտություններն իր ժամանակին կազմում էին բարձրագույն հանրահաշվի հիմնական բովանդակությունը: Մենք մտցնում ենք մեր դասընթացի մեջ այս արդյունքներին վերաբերող միայն մի ոչ շատ մեծ մաս, ընդ որում, հաշվի առնելով կիրառությունների առաջնահերթ պահանջները, սահմանափակվում ենք իրական գործակիցներով բազմանդամների և նրանց իրական արմատների դեպքով՝ միայն երբեմն դուրս գալով այդ շրջանակներից: Այդ ժամանակ մենք

իրական գործակիցներով f(x) բազմանդամը սիստեմատիկորեն կդիտենք որպես x իրական փոփոխականի (անընդհատ) իրական ֆունկցիա և ամենուրեք, որտեղ դա օգտակար կլինի, կկիրառենք մաթեմատիկական անալիզի արդյունքներն ու մեթոդները:

Իրական գործակիցներով f(x) բազմանդամի իրական արմատների հետազոտությունն օգտակար է սկսել այդ բազմանդամի գրաֆիկի դիտարկումից. բազմանդամի իրական արմատներ կլինեն, ակներևորեն, x-երի առանցքի հետ նրա գրաֆիկի հատման կետերի աբսցիսները և միայն նրանք:

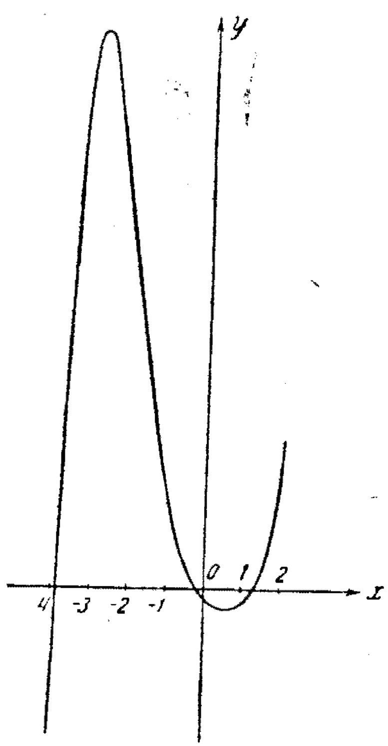
Դիտարկենք, օրինակ՝

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

հինգերորդ աստիճանի բազմանդամը: § 24-ի արդյունքների հիման վրա այս բազմանդամի արմատների մասին կարելի է պնդել հետևյալը. քանի որ նրա աստիճանը կենտ է, ապա h(x)-ն ունի գոնե մեկ իրական արմատ. իսկ եթե իրական արմատների թիվը մեծ է մեկից, ապա այն հավասար է երեքի կամ հինգի, քանի որ կոմպլեքս արմատները զույգ առ զույգ համալուծ են:

h(x) բազմանդամի գրաֆիկի զննումը թույլ է տալիս նրա արմատների մասին ասել ավելին: Կառուցենք այդ գրաֆիկը (գծ. 9)[1] վերցնելով միայն x-ի ամբողջ արժեքները և հաշվելով h(x)-ի համապատասխան արժեքները թեկուզ Հորների մեթոդով:

x	h(x)
.	.
.	.
.	.
−4	−39
−3	144
−2	83
−1	18
0	−3
1	−4
2	39
.	.
.	.



Գծ. 9.

Մենք տեսնում ենք, որ h(x) բազմանդամը համենայն դեպս ունի երեք

[1] Գծագրի վրա y առանցքով մասշտաբը վերցրած է տասն անգամ ավելի փոքր, քան x առանցքով:

իրական արմատներ՝ α_1 դրական արմատ և α_2 ու α_3 երկու բացասական արմատներ, ընդ որում

$$1<\alpha_1<2, \quad -1<\alpha_3<0, \quad -4<\alpha_3<-3:$$

Բազմանդամի (իրական) արմատների մասին տեղեկությունը, որ ստացվում է գրաֆիկի զննումից, գործնականորեն սովորաբար ստացվում է շատ գոհացուցիչ։ Սակայն, յուրաքանչյուր անգամ մնում է կասկածելի, իսկապե՞ս մենք գտել ենք բոլոր արմատները։ Այսպես, դիտարկված օրինակում մենք ցույց չտվեցինք, որ $x=2$ կետից աջ և $x=-4$ կետից ձախ արդեն բազմանդամի արմատներ չկան։ Դեռ ավելին, քանի որ մենք վերցրինք x-ի միայն ամբողջաթիվ արժեքները, ապա կարող է պատահել, որ մեր կառուցած գրաֆիկը ոչ լրիվ ճիշտ է արտահայտում $h(x)$ ֆունկցիայի իսկական վարքը, հաշվի չի առնում, թերևս, նրա ավելի մանր տատանումները, և ուստի բաց է թողնում որոշ արմատները։

Ճիշտ է, գրաֆիկը կառուցելիս կարելի էր վերցնել x-ի ոչ միայն ամբողջաթիվ արժեքներ, այլև արժեքներ մինչև 0,1 կամ 0,01 ճշտությամբ։ Դրանով, սակայն, չափազանց կբարդանար $h(x)$-ի արժեքների հաշվումը, այն դեպքում, երբ վերը նշված կասկածները բնավ վերացված չէին լինի։ Մյուս կողմից, կարելի էր մաթեմատիկական անալիզի մեթոդներով հետազոտել $h(x)$ ֆունկցիան մաքսիմումի և մինիմումի տեսանկյունով և այդ ճանապարհով համեմատել մեր գրաֆիկը ֆունկցիայի իսկական վարքի հետ. սակայն, դա հանգեցնում է $h'(x)$ ածանցյալի արմատների հարցին, այսինքն՝ նույնպիսի խնդրի, ինչպիսի խնդրով մենք զբաղվում ենք։

Այստեղից բխում է այն սահմանների որոնման համար, որոնց միջև դասավորված են իրական գործակիցներով բազմանդամի իրական արմատները, և այդ արմատների թվի որոշման համար ավելի կատարելագործված մեթոդների պահանջը։ Այժմ մենք կզբաղվենք **իրական արմատների սահմանների** հարցով, նրանց թվի վերաբերյալ հարցը թողնելով հաջորդ պարագրաֆներին։

Ավագ անդամի մոդուլի վերաբերյալ լեմմայի ապացույցը (տե՛ս § 23) արդեն տալիս է ինչ-որ սահման բազմանդամի արմատների մոդուլների համար։ Իսկապես, § 23-ի (3) անհավասարության մեջ ընդունելով $k=1$, մենք կստանանք, որ

$$|x| \geqslant 1+\frac{A}{|a_0|} \tag{1}$$

դեպքում, որտեղ a_0-ն ավագ գործակիցն է, իսկ A-ն մնացած գործակիցների մոդուլներից մեծագույնն է, բազմանդամի ավագ անդամի մո-

դուլը մեծ է մնացած բոլոր անդամների գումարի մոդուլից, հետևապես (1) անհավասարությանը բավարարող ոչ մի x արժեք չի կարող այդ բազմանդամի արմատ հանդիսանալ։

Այսպիսով, ցանկացած թվային գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամի համար $1+\frac{A}{|a_0|}$ թիվը վերին սահման է նրա իրական և կոմպլեքս բոլոր արմատների մոդուլների համար։ Այսպես, վերը դիտարկված $h(x)$ բազմանդամի համար, նկատի ունենալով, որ $a_0=1$, $A=8$, այդ սահմանը կլինի 9 թիվը։

Այդ սահմանը, սակայն, սովորաբար չափազանց բարձր է ստացվում, հատկապես եթե մենք հետաքրքրվում ենք միայն իրական արմատների սահմաններով։ Այժմ կշարադրվեն այլ, ավելի ճշգրիտ մեթոդներ։ Միաժամանակ հարկավոր է հիշել, որ եթե նշվում են այն սահմանները, որոնց միջև պետք է պարունակվեն բազմանդամի իրական արմատները, ապա **դրանով բոլորովին էլ չի հաստատվում, որ այդպիսի արմատներ իրոք որ գոյություն ունեն**։ Նախ ցույց տանք, որ բավական է կարողանալ գտնել ցանկացած բազմանդամի միայն դրական արմատների վերին սահմանը։ Իսկապես, դիցուք տված է n-րդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը և թո՛ղ N_0-ն լինի նրա դրական արմատների վերին սահմանը։ Դիտարկենք

$$\varphi_1(x)=x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x)=f(-x),$$

$$\varphi_3(x)=x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

բազմանդամները և գտնենք նրանց դրական արմատների վերին սահմանները. Թո՛ղ դրանք լինեն, համապատասխանաբար, N_1, N_2, N_3 թվերը։ Այն ժամանակ $\frac{1}{N_1}$ թիվը կլինի $f(x)$ բազմանդամի դրական արմատների ստորին սահմանը. Եթե α-ն $f(x)$-ի դրական արմատն է, ապա $\frac{1}{\alpha}$-ն կլինի դրական արմատ $\varphi_1(x)$-ի համար, և $\frac{1}{\alpha}<N_1$-ից հետևում է $\alpha>\frac{1}{N_1}$։ Նման ձևով, $-N_2$ և $-\frac{1}{N_3}$ թվերը հանդիսանում են $f(x)$ բազմանդամի բացասական արմատների համապատասխանաբար ստորին և վերին սահմանները։ Այսպիսով, $f(x)$ բազմանդամի բոլոր դրական արմատները բավարարում են $\frac{1}{N_1}<x<N_0$ անհավասարություններին, բոլոր բացասական արմատները՝ $-N_2<x<-\frac{1}{N_3}$ անհավասարություններին։

Դրական արմատների վերին սահմանի որոշման համար կարելի է կիրառել հետևյալ մեթոդը. Դիցուք տված է իրական գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

բազմանդամը, ընդ որում $a_0>0$։ Թո՛ղ, այնուհետև, a_k-ն ($k\geqslant 1$) լինի բացասական գործակիցներից առաջինը. Եթե այդպիսի գործակիցներ չլինեին, ապա $f(x)$ բազմանդամն ընդհանրապես չէր կարող դրական արմատներ ունենալ։ Վերջապես, թո՛ղ B-ն լինի բացասական գործակիցների բացարձակ արժեքներից ամենամեծը։ Այն ժամանակ

$$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

թիվը կհանդիսանա $f(x)$ բազմանդամի դրական արմատների վերին սահմանը։

Իրոք, ենթադրելով, որ $x>1$ և $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ գործակիցներից յուրաքանչյուրը փոխարինելով զրոյով, իսկ $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ գործակիցներից յուրաքանչյուրը՝ $-B$ թվով, մենք կարող ենք միայն փոքրացնել բազմանդամի արժեքը, այսինքն՝

$$f(x)\geqslant a_0x^n-B(x^{n-k}+x^{n-k+1}+\dots+x+1)=$$
$$=a_0x^n-B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1},$$

այսինքն, նկատի ունենալով, որ $x>1$,

$$f(x)>a_0x^n-\frac{Bx^{n-k+1}}{x-1}=\frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1)-B]: \qquad (2)$$

Եթե

$$x\geqslant 1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \qquad (3)$$

ապա, քանի որ

$$a_0x^{k-1}(x-1)-B\geqslant a_0(x-1)^k-B,$$

(2) բանաձևի մեջ քառակուսի փակագծերում եղած արտահայտությունը ստացվում է դրական, այսինքն, նկատի ունենալով (2)-ը, $f(x)$-ի արժեքը կլինի խստորեն դրական։ Այսպիսով, (3) անհավասարությանը բավարարող x-ի արժեքները չեն կարող հանդիսանալ $f(x)$-ի համար արմատներ, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Վերևում դիտարկված $h(x)$ բազմանդամի համար, նկատի ունենալով, որ $k=2$ և $B=7$, այս մեթոդը տալիս է որպես դրական արմատների վերին սահման $1+\sqrt{7}$ թիվը, որը կարելի է փոխարինել իրենից մեծ մոտակա ամբողջ թվով, որ կլինի 4-ը։

Դրական արմատների վերին սահմանը որոնելու բազմաթիվ այլ մեթոդներից մենք կշարադրենք ևս միայն մեկը՝ Նյուտոնի մեթոդը։ Այս մեթոդն ավելի մեծածավալ է, քան վերևում շարադրվածը, բայց դրա փոխարեն սովորաբար տալիս է շատ լավ արդյունք։

Դիցուք տված է իրական գործակիցներով և a_0 դրական ավագ գործակցով $f(x)$ բազմանդամը։ Եթե $x=c$ դեպքում $f(x)$ բազմանդամը և նրա բոլոր $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ հաջորդական ածանցյալները ընդունում են դրական արժեքներ, ապա c թիվը հանդիսանում է դրական արմատների վերին սահման։

Իրոք, ըստ Թեյլորի բանաձևի (տե՛ս § 23)

$$f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+(x-c)^2\frac{f''(c)}{2!}+\dots+(x-c)^n\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Մենք տեսնում ենք, որ եթե $x\geqslant c$, ապա աջ մասում կլինի խստորեն դրական թիվ, այսինքն՝ x-ի այդպիսի արժեքները չեն կարող լինել $f(x)$-ի համար արմատներ։

Տված $f(x)$ բազմանդամի համար համապատասխան c թիվը որոնելիս օգտակար է վարվել հետևյալ կերպ. $f^{(n)}(x)=n!a_0$ ածանցյալը դրական թիվ է, հետևապես $f^{(n-1)}(x)$ բազմանդամը x-ի աճող ֆունկցիա է։ Հետևաբար, գոյություն ունի այնպիսի c_1 թիվ, որ $x\geqslant c_1$ դեպքում $f^{(n-1)}(x)$ ածանցյալը դրական է։ Այստեղից հետևում է, որ $x\geqslant c_1$ դեպքում $f^{(n-2)}(x)$ ածանցյալն x-ի աճող ֆունկցիան է, նշանակում է գոյություն ունի այնպիսի c_2 թիվ, $c_2\geqslant c_1$, որ $x\geqslant c_2$ դեպքում $f^{(n-2)}(x)$ ածանցյալը նույնպես կլինի դրական։ Շարունակելով այդպես, մենք կհասնենք, վերջապես, մինչև որոնելի c թիվը։

Նյուտոնի մեթոդը կիրառենք վերևում դիտարկված $h(x)$ բազմանդամի նկատմամբ։ Մենք ունենք՝

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$
$$h'(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,$$
$$h''(x)=20x^3+24x^2-30x+16,$$
$$h'''(x)=60x^2+48x-30,$$
$$h^{IV}(x)=120x+48,$$
$$h^{V}(x)=120:$$

Հեշտ է ստուգել (թեկուզ Հորների մեթոդով), որ բոլոր այս բազմանդամները դրական են $x=2$ դեպքում։ Այսպիսով, 2 թիվը հանդիսանում է $h(x)$ բազմանդամի դրական արմատների վերին սահմանը, մի արդյունք, որը շատ ավելի ճշգրիտ է, քան վերևում ուրիշ մեթոդներով ստացվածները։

h(x) բազմանդամի բացասական արմատների ստորին սահմանը գտնելու համար դիտարկենք $\varphi_2(x)=-h(-x)$ բազմանդամը[1]։ Քանի որ

$$\varphi_2(x)=x^5-2x^4-5x^3-8x^2-7x+3,$$
$$\varphi'_2(x)=5x^4-8x^3-15x^2-16x-7,$$
$$\varphi_2''(x)=20x^3-24x^2-30x-16,$$
$$\varphi_2'''(x)=60x^2-48x-30,$$
$$\varphi_2^{IV}(x)=120x-48,$$
$$\varphi_2^{V}(x)=120,$$

իսկ բոլոր այդ բազմանդամները, ինչպես հեշտ է ստուգել, դրական են, $x=4$ դեպքում, ուրեմն 4 թիվը հանդիսանում է $\varphi_2(x)$-ի համար դրական արմատների վերին սահման, և այդ պատճառով -4 թիվը կլինի h(x)-ի համար բացասական արմատների ստորին սահման։

Դիտարկելով, վերջապես,

$$\varphi_1(x)=-x^5h\left(\frac{1}{x}\right)=3x^5+7x^4-8x^3+5x^2-2x-1,$$

$$\varphi_3(x)=-x^5h\left(-\frac{1}{x}\right)=3x^5-7x^4-8x^3-5x^2-2x+1$$

բազմանդամները, նորից կիրառելով Նյուտոնի մեթոդը, մենք նրանց համար որպես դրական արմատների վերին սահմաններ կգտնենք համապատասխանաբար 1 և 4 թվերը, հետևապես h(x) բազմանդամի դրական արմատների ստորին սահման կհանդիսանա $\frac{1}{1}=1$ թիվը, բացասական արմատների վերին սահման՝ $-\frac{1}{4}$ թիվը։

Այսպիսով, h(x) բազմանդամի դրական արմատները դասավորված են 1 և 2 թվերի միջև, բացասական արմատները՝ -4 և $-\frac{1}{4}$ թվերի միջև։ Այս արդյունքը շատ լավ համաձայնեցվում է այն արդյունքի հետ, որը գտնվեց վերևում գրաֆիկը դիտարկելիս։

§ 40. Շտուրմի թեորեման

Այժմ մենք անցնում ենք իրական գործակիցներով f(x) բազմանդամի իրական արմատների թվի հարցին։ Ընդ որում մենք կհետաքրքրվենք ինչպես իրական արմատների ընդհանուր թվով, այնպես էլ դրական արմատների թվով ու բացասական արմատների թվով առանձին և, ընդհանրապես, տված a ու b սահմանների միջև գտնվող արմատների թվով։ Գոյություն ունեն արմատների ճշգրիտ թիվը որոնելու մի քանի մեթոդներ, ընդ որում նրանք բոլորն էլ սաստիկ մեծածավալ են. Նրանց մեջ առավել հարմարը Շտուրմի մեթոդն է, որը և այժմ կշարադրվի։

Նախ մուծենք մի սահմանում, որը կօգտագործվի նաև հաջորդ պարագրաֆում։

Դիցուք տված է զրոյից տարբեր իրական թվերի մի կարգավորված վերջավոր սիստեմ, օրինակ՝

$$1,\ 3,\ -2,\ 1,\ -4,\ -8,\ -3,\ 4,\ 1: \qquad (1)$$

Հաջորդաբար գրենք այդ թվերի նշանները՝

$$+,\ +,\ -,\ +,\ -,\ -,\ -,\ +,\ +. \qquad (2)$$

Մենք տեսնում ենք, որ նշանների (2) սիստեմի մեջ չորս անգամ իրար կողքի գտնվում են հակադիր նշաններ։ Նկատի ունենալով այս, ասում են, որ (1) կարգավորված սիստեմում տեղի ունի չորս նշանափոխություն։ Նշանափոխությունների թիվը, հասկանալի է, կարելի է հաշվել զրոյից տարբեր իրական թվերի ամեն մի կարգավորված վերջավոր սիստեմի համար։

Այժմ դիտարկենք իրական գործակիցներով f(x) բազմանդամը, ընդ որում ենթադրելու ենք, որ f(x) բազմանդամը բազմապատիկ արմատներ չունի, քանի որ, այլապես, մենք կարող էինք այն բաժանել իր և իր ածանցյալի ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարի վրա։ Իրական գործակիցներով զրոյից տարբեր բազմանդամների

$$f(x)=f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x) \qquad (3)$$

վերջավոր կարգավորված սիստեմը կոչվում է Շտուրմի սիստեմ f(x) բազմանդամի համար, եթե բավարարվում են հետևյալ պահանջները.

1) (3) սիստեմի հարևան բազմանդամները չունեն ընդհանուր արմատներ։

2) $f_s(x)$ վերջին բազմանդամը չունի իրական արմատներ։

3) Եթե α-ն (3) սիստեմի $f_k(x)$ $(1\leqslant k\leqslant s-1)$ միջանկյալ բազմանդամներից մեկի իրական արմատ է, ապա $f_{k-1}(\alpha)$-ն և $f_{k+1}(\alpha)$-ն ունեն տարբեր նշաններ։

4) Եթե α-ն f(x) բազմանդամի իրական արմատ է, ապա $f(x)f_1(x)$ արտադրյալը փոխում է նշանը մինուսից պլյուս, երբ x-ն աճելով անցնում է α կետով։

Այն հարցը, թե արդյոք յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի՞ Շտուրմի սիստեմ, կդիտարկվի ստորև, իսկ այժմ, ենթադրելով, որ f(x)-ը այդպիսի սիստեմ ունի, ցույց տանք, թե ինչպես կարող է այն օգտագործվել իրական արմատների թիվը գտնելու համար։

1 Մենք h(−x)-ի փոխարեն վերցնում ենք −h(−x), որովհետև Նյուտոնի մեթոդի կիրառելիության համար ավագ գործակիցը պետք է դրական լինի։ $\varphi_2(x)$ բազմանդամի արմատների վրա, հասկանալի է, նշանի այդ փոփոխությունը ոչ մի ազդեցություն չի թողնում։

Եթե c *իրական թիվը տված* $f(x)$ *բազմանդամի արմատ չէ, իսկ (3)-ն այդ բազմանդամի համար Շտուրմի սիստեմ է, ապա վերցնենք*

$$f(c),\ f_1(c),\ f_2(c),\ \cdots,\ f_3(c)$$

իրական թվերի սիստեմը, նրանցից ջնջենք զրոյին հավասար բոլոր թվերը և մնացած սիստեմում նշանափոխությունների թիվը նշանակենք $W(c)$*-ով.* $W(c)$*-ն կանվանենք* նշանների փոփոխության թիվ $f(x)$ բազմանդամի Շտուրմի (3) սիստեմում $x=c$ դեպքում[1]։

Իրավացի է հետևյալ առաջադրությունը։

Շտուրմի թեորեմա. Եթե a և b իրական թվերը $(a<b)$ բազմապատիկ արմատներ չունեցող $f(x)$ բազմանդամի արմատները չեն, ապա $W(a)\geqslant W(b)$ և $W(a)-W(b)$ տարբերությունը հավասար է $f(x)$ բազմանդամի a և b թվերի միջև ընկած իրական արմատների թվին։

Այսպիսով, $f(x)$ *բազմանդամի* a *և* b *թվերի միջև ընկած իրական արմատների թիվը որոշելու համար (հիշեցնում ենք, որ, ըստ պայմանի,* $f(x)$*-ը բազմապատիկ արմատներ չունի) հարկավոր է միայն որոշել, թե այդ բազմանդամի Շտուրմի սիստեմի մեջ նշանափոխությունների թիվը որքա՞ն է փոքրանում* a *թվից* b *թվին անցնելիս։*

Թեորեմայի ապացուցման համար տեսնենք, թե ինչպե՞ս է փոխվում $W(x)$ *թիվը* x*-ի աճման դեպքում։ Քանի դեռ* x*-ը աճելով չի հանդիպել Շտուրմի (3) սիստեմի բազմանդամներից ոչ մեկի արմատին, այդ սիստեմի բազմանդամների նշանները չեն փոխվի, հետևապես,* $W(x)$ *թիվը կմնա անփոփոխ։ Շնորհիվ դրա, ինչպես և նկատի ունենալով Շտուրմի սիստեմի սահմանումից 2) պայմանը, մեզ մնում է քննության առնել երկու դեպք.* x*-ի անցումը* $f_k(x)(1\leqslant k\leqslant s-1)$ *միջանկյալ բազմանդամներից մեկի արմատով և* x*-ի անցումը հենց իր՝* $f(x)$ *բազմանդամի արմատով։*

Թո՛ղ α*-ն լինի* $f_k(x)(1\leqslant k\leqslant s-1)$ *բազմանդամի արմատ։ Այդ դեպքում, համաձայն 1) պայմանի,* $f_{k-1}(\alpha)$*-ն և* $f_{k+1}(\alpha)$*-ն զրոյից տարբեր են։ Հետևաբար, կարելի է գտնել այնպիսի դրական* ε *թիվ, գուցե և շատ փոքր, որ* $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ *հատվածում* $f_{k-1}(x)$ *և* $f_{k+1}(x)$ *բազմանդամները չունենան արմատներ, ուստի և պահպանեն հաստատուն նշաններ, ընդ որում, համաձայն 3) պայմանի, այդ նշանները տարբեր են։ Այստեղից հետևում է, որ*

$$f_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\quad f_k(\alpha-\varepsilon),\quad f_{k+1}(\alpha-\varepsilon) \tag{4}$$

և

$$f_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\quad f_k(\alpha+\varepsilon),\quad f_{k+1}(\alpha+\varepsilon) \tag{5}$$

[1] *Ինքնին հասկանալի է, որ* $f(x)$ *բազմանդամի Շտուրմի սիստեմում նշանների փոփոխությունն ընդհանուր ոչինչ չունի իր՝* $f(x)$ *բազմանդամի նշանի փոփոխության հետ, որ տեղի է ունենում* x*-ի՝ այդ բազմանդամի արմատի վրայով անցնելիս։*

թվերի սիստեմներից յուրաքանչյուրն ունի ճիշտ մեկ նշանափոխություն՝ անկախ այն բանից, թե ինչպիսին են $f_k(\alpha-\varepsilon)$ *և* $f_k(\alpha+\varepsilon)$ *թվերի նշանները։ Այսպես, օրինակ, եթե* $f_{k+1}(x)$ *բազմանդամը դիտարկվող հատվածում բացասական է, իսկ* $f_{k+1}(x)$ *բազմանդամը՝ դրական և եթե* $f_k(\alpha-\varepsilon)>0$, $f_k(\alpha+\varepsilon)<0$, *ապա (4) և (5) սիստեմներին համապատասխանում են նշանների հետևյալ սիստեմները.*

$$-,\ +,\ +;\quad -,\ -,\ +:$$

Այսպիսով, երբ x*-ն անցնում է Շտուրմի սիստեմի միջանկյալ բազմանդամներից մեկի արմատով, այդ սիստեմում նշանափոխությունները կարող են միայն տեղափոխվել, բայց ոչ նորից առաջանում են և ոչ էլ անհետանում, և այդ պատճառով* $W(x)$ *թիվն այդպիսի անցման դեպքում չի փոխվում։*

Դիցուք, մյուս կողմից, α*-ն հենց տված* $f(x)$ *բազմանդամի արմատ է։ Համաձայն 1) պայմանի,* α*-ն* $f_1(x)$*-ի համար արմատ չի լինի։ Հետևաբար, գոյություն ունի այնպիսի դրական* ε *թիվ, որ* $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ *հատվածը չի պարունակում* $f_1(x)$ *բազմանդամի արմատներ, և այդ պատճառով* $f_1(x)$*-ը այդ հատվածում պահպանում է հաստատուն նշան։ Եթե այդ նշանը դրական է, ապա, ըստ 4) պայմանի, ինքը՝* $f(x)$ *բազմանդամը,* x*-ը* α*-ով անցում կատարելիս, նշանը փոխում է մինուսից պլյուս, այսինքն՝* $f(\alpha-\varepsilon)<0$, $f(\alpha+\varepsilon)>0$: *Թվերի*

$$f(\alpha-\varepsilon),\quad f_1(\alpha-\varepsilon)\ \text{և}\ f(\alpha+\varepsilon),\quad f_1(\alpha+\varepsilon) \tag{6}$$

սիստեմներին համապատասխանում են, հետևաբար, նշանների

$$-,\ +\ \text{և}\ +,\ +$$

սիստեմները, այսինքն՝ Շտուրմի սիստեմում կորչում է մեկ նշանափոխություն։

Իսկ եթե $f_1(x)$*-ի նշանը* $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ *հատվածում բացասական է, ապա, դարձյալ 4) պայմանի շնորհիվ,* x*-ի* α*-ով անցնելիս* $f(x)$ *բազմանդամը փոխում է նշանը պլյուսից մինուս, այսինքն՝* $f(\alpha-\varepsilon)>0$, $f(\alpha+\varepsilon)<0$, *թվերի (6) սիստեմներին այժմ համապատասխանում են նշանների*

$$+,\ -\ \text{և}\ -,\ -$$

սիստեմները, այսինքն՝ Շտուրմի սիստեմում նորից կորչում է մեկ նշանափոխություն։

Այսպիսով, $W(x)$ թիվը փոխվում է (x-ի աճման դեպքում) միայն $f(x)$ բազմանդամի արմատով x-ը անցնելիս, ընդ որում այդ դեպքում $W(x)$-ը փոքրանում է ճիշտ մեկով։

Սրանով, ակներևորեն, Շտուրմի թեորեման ապացուցվեց։ Որպեսզի այդ թեորեմայից օգտվենք $f(x)$ բազմանդամի իրական արմատների ընդհանուր թիվը գտնելու համար, բավական է որպես a վերցնել բացասական արմատների ստորին սահմանը, իսկ որպես b՝ դրական արմատների վերին սահմանը: Սակայն, ավելի հեշտ է վարվել հետևյալ կերպ. շնորհիվ § 23-ում ապացուցված լեմմայի, գոյություն ունի այնպիսի դրական N թիվ, գուցե և շատ մեծ, որ $|x|>N$ դեպքում Շտուրմի սիստեմի բոլոր բազմանդամների նշանները կհամընկնեն իրենց ավագ անդամների նշանների հետ: Այլ խոսքով, գոյություն ունի x անհայտի այնքան մեծ դրական արժեք, որ Շտուրմի սիստեմի բոլոր բազմանդամների՝ դրան համապատասխանող արժեքների նշանները համընկնում են իրենց ավագ գործակիցների նշանների հետ. x-ի այդ արժեքը, որը հաշվելու անհրաժեշտություն չկա, պայմանականորեն նշանակվում է ∞ սիմվոլով: Մյուս կողմից, գոյություն ունի x-ի բացարձակ մեծությամբ այնքան մեծ բացասական արժեք, որ Շտուրմի սիստեմի բազմանդամների՝ դրան համապատասխանող արժեքների նշանները համընկնում են իրենց ավագ գործակիցների նշանների հետ զույգ աստիճանի բազմանդամների համար և ավագ գործակիցների հակադիր նշանների հետ՝ կենտ աստիճանի բազմանդամների համար. x-ի այդ արժեքը պայմանավորվենք նշանակել $-\infty$-ով: $(-\infty, \infty)$ հատվածում, ակներևորեն, պարունակվում են Շտուրմի սիստեմի բոլոր բազմանդամների բոլոր իրական արմատները և, մասնավորապես, $f(x)$ բազմանդամի բոլոր իրական արմատները: Կիրառելով Շտուրմի թեորեման այդ հատվածում, մենք կգտնենք այդ արմատների թիվը, իսկ Շտուրմի թեորեմայի կիրառումը $(-\infty, 0)$ և $(0, \infty)$ հատվածներում համապատասխանաբար տալիս է $f(x)$ բազմանդամի բացասական և դրական արմատների թիվը:

Մեզ մնում է ցույց տալ, որ իրական գործակիցներով, բազմապատիկ արմատներ չունեցող յուրաքանչյուր $f(x)$ բազմանդամ ունի Շտուրմի սիստեմ: Այդպիսի սիստեմի կառուցման համար օգտագործվող տարբեր մեթոդներից մենք կշարադրենք մեկը՝ ամենագործածականը: Ընդունենք $f_1(x)=f'(x)$, որով ապահովվում է Շտուրմի սիստեմի սահմանման 4) պայմանի բավարարվելը: Իսկապես, եթե α-ն $f(x)$ բազմանդամի իրական արմատ է, ապա $f'(\alpha)\neq 0$: Եթե $f'(\alpha)>0$, ապա $f'(x)>0$ α կետի շրջակայքում, հետևապես x-ը α-ով անցնելիս $f(x)$-ը նշանը փոխում է մինուսից պլյուս. այն ժամանակ դա ճիշտ կլինի նաև $f(x)f_1(x)$ արտադրյալի համար: Նույնանման դատողությունները կիրառելի են և $f'(\alpha)<0$ դեպքում: Բաժանենք, այնուհետև, $f(x)$-ը $f_1(x)$-ի վրա, և այդ բաժանման մնացորդը՝ վերցրած հակառակ նշանով, ընդունենք որպես $f_2(x)$, այսինքն՝

$$f(x)=f_1(x)q_1(x)-f_2(x):$$

Ընդհանրապես, եթե $f_{k-1}(x)$ և $f_k(x)$ բազմանդամներն արդեն գտնված

են, ապա $f_{k+1}(x)$-ը կլինի f_{k+1}-ի $f_k(x)$-ի վրա բաժանման մնացորդը՝ վերցված հակառակ նշանով՝

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x). \tag{7}$$

Այստեղ շարադրված մեթոդը տարբերվում է $f(x)$ և $f'(x)$ բազմանդամների նկատմամբ կիրառված Էվկլիդի ալգորիթմից միայն նրանով, որ մնացորդի մոտ ամեն անգամ նշանը փոխվում է, և հաջորդ բաժանումը կատարվում է արդեն հակադիր նշանով վերցրած այդ մնացորդի վրա: Քանի որ ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը որոնելիս նշանների այդպիսի փոփոխությունն էական չէ, ապա մեր պրոցեսը կանգ է առնում $f(x)$ և $f'(x)$ բազմանդամների ընդհանուր ամենամեծ բաժանարարը հանդիսացող մի որոշ $f_s(x)$-ի վրա, ընդ որում, $f(x)$-ի մոտ բազմապատիկ արմատների բացակայելու հետևանքով, այսինքն՝ նրա և $f'(x)$-ի փոխադարձաբար պարզ լինելուց, կհետևի, որ $f_s(x)$-ը փաստորեն զրոյից տարբեր մի իրական թիվ է:

Այստեղից բխում է, որ մեր կողմից կառուցված բազմանդամների

$$f(x)=f_0(x),\quad f'(x)=f_1(x),\quad f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x)$$

սիստեմը բավարարում է Շտուրմի սիստեմի սահմանման նաև 2) պայմանին: 1) պայմանի բավարարելն ապացուցելու համար ենթադրենք, թե $f_k(x)$ և $f_{k+1}(x)$ հարևան բազմանդամներն ունեն α ընդհանուր արմատ: Այն ժամանակ, ըստ (7)-ի, α-ն կլիներ արմատ և $f_{k-1}(x)$ բազմանդամի համար: Անցնելով

$$f_{k-2}(x)=f_{k-1}(x)q_{k-1}(x)-f_k(x)$$

հավասարությանը, մենք կստանայինք, որ α-ն հանդիսանում է արմատ և $f_{k-2}(x)$-ի համար: Շարունակելով այնուհետև, մենք կստանայինք, որ α-ն հանդիսանում է ընդհանուր արմատ $f(x)$-ի և $f'(x)$-ի համար, որը, սակայն, հակասում է մեր ենթադրություններին: Վերջապես, 3) պայմանի բավարարումը անմիջականորեն բխում է (7) հավասարությունից. եթե $f_k(\alpha)=0$, ապա $f_{k-1}(\alpha)=-f_{k+1}(\alpha)$:

Շտուրմի մեթոդը կիրառենք նախորդ պարագրաֆում դիտարկված

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

բազմանդամի նկատմամբ: Ընդ որում մենք նախապես չենք ստուգի, որ $h(x)$-ը բազմապատիկ արմատներ չունի, քանի որ Շտուրմի սիստեմի կառուցման վերևում շարադրված մեթոդը միաժամանակ ծառայում է բազմանդամի և նրա ածանցյալի փոխադարձ պարզ լինելը ստուգելու համար:

Կիրառելով նշված մեթոդը, գտնենք Շտուրմի սիստեմը $h(x)$-ի համար: Ընդ որում բաժանման պրոցեսում, ի տարբերություն Էվկլիդի ալգորիթմից, մենք կըբազմապատկենք և կկրճատենք միայն կամայական դրական թվերով, քանի որ մնացորդների նշանները Շտուրմի մեթոդում հիմնական դեր են խաղում։ Մենք կստանանք այսպիսի սիստեմ՝

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,\\
h_1(x) &= 5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,\\
h_2(x) &= 66x^3-150x^2+172x+61,\\
h_3(x) &= -464x^2+1135x+723,\\
h_4(x) &= -32\,599\,457x-8\,486\,093,\\
h_5(x) &= -1։
\end{aligned}
$$

Որոշենք այս սիստեմի բազմանդամների նշանները $x=-\infty$ և $x=\infty$ դեպքերում, որի համար, ինչպես նշվեց, հարկավոր է նայել միայն այդ բազմանդամների ավագ գործակիցների նշաններին և բազմանդամների աստիճաններին։ Մենք կստանանք այսպիսի աղյուսակ՝

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Նշանափոխությունների թիվը
$-\infty$	−	+	−	−	+	−	4
∞	+	+	+	−	−	−	1

Այսպիսով, x-ը $-\infty$-ից $+\infty$-ին անցնելիս, Շտուրմի սիստեմը կորցնում է երեք նշանափոխություն, հետևաբար, $h(x)$ բազմանդամն ունի ճիշտ երեք իրական արմատ։ Այստեղից երևում է, որ նախորդ պարագրաֆում այդ բազմանդամի գրաֆիկը կառուցելիս մենք բաց չենք թողել արմատներից և ոչ մեկը։

Շտուրմի մեթոդը կիրառենք մի ուրիշ, ավելի պարզ, բազմանդամի նկատմամբ։

Դիցուք տված է

$$f(x)=x^3+3x^2-1$$

բազմանդամը։ Գտնենք նրա իրական արմատների թիվը, նմանապես այն ամբողջ սահմանները, որոնց միջև ընկած է այդ արմատներից յուրաքանչյուրը, ընդ որում՝ նախապես այդ բազմանդամի գրաֆիկը չենք կառուցի։

Շտուրմի սիստեմը $f(x)$ բազմանդամի համար կլինի՝

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3+3x^2-1,\\
f_1(x) &= 3x^2+6x,\\
f_2(x) &= 2x+1\\
f_3(x) &= 1։
\end{aligned}
$$

Գտնենք նշանափոխությունների թիվն այդ սիստեմում $x=-\infty$ և $x=\infty$ դեպքերում՝

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Նշանափոխությունների թիվը
$-\infty$	−	+	−	+	3
∞	+	+	+	+	0

Հետևաբար, $f(x)$ բազմանդամն ունի երեք իրական արմատ։ Այդ արմատների ավելի ճշգրիտ դասավորությունը որոշելու համար շարունակենք նախորդ աղյուսակը.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Նշանափոխությունների թիվը
$x=-3$	−	+	−	+	3
$x=-2$	+	0	−	+	2
$x=-1$	+	−	−	+	2
$x=0$	−	0	+	+	1
$x=1$	+	+	+	+	0

Այսպիսով, $f(x)$ բազմանդամի Շտուրմի սիստեմը կորցնում է մեկական նշանափոխություն x-ը՝ -3-ից -2-ին, -1-ից 0-ին և 0-ից 1-ին անցնելիս։ Այդ բազմանդամի α_1, α_2 և α_3 արմատները, հետևաբար, բավարարում են

$$-3<\alpha_1<-2,\quad -1<\alpha_2<0,\quad 0<\alpha_3<1$$

անհավասարություններին։

§ 41. Այլ թեորեմաներ իրական արմատների թվի վերաբերյալ

Շտուրմի թեորեման լրիվ լուծում է բազմանդամի իրական արմատների թվի հարցը։ Նրա էական թերությունը, սակայն, հանդիսանում է Շտուրմի սիստեմը կառուցելիս կատարվող հաշվարկումների մեծածավալությունը, ինչպես ընթերցողը կարող է համոզվել, վերևում դիտարկված օրինակներից առաջինին վերաբերող բոլոր հաշվարկումները կատարելով։ Նկատի ունենալով այս, այժմ կապացուցվեն երկու թեորեմաներ, որոնք չեն տալիս իրական արմատների ճիշտ թիվը, այլ միայն սահմանափակում են այդ թիվը վ ե ր և ի ց։ Այդ թեորեմաները, կիրառվելով այն բանից հետո, երբ գրաֆիկի օգնությամբ իրական արմատների թիվն արդեն ն ե ր ք և ի ց սահմանափակված է, երբեմն թույլ են տալիս գտնել իրական արմատների ճիշտ թիվը՝ առանց Շտուրմի մեթոդին դիմելու։

Դիցուք տված է իրական գործակիցներով n-րդ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը, ընդ որում ընդունում ենք, որ այն կարող է ունենալ *բազմապատիկ արմատներ։ Դիտարկենք նրա հաջորդական ածանցյալների սիստեմը՝*

$$f(x)=f^{(0)}(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ \dots,\ f^{(n-1)}(x),\quad f^{(n)}(x), \qquad (1)$$

որոնցից վերջինը հավասար է $f(x)$ *բազմանդամի* a_0 *ավագ գործակցին՝ բազմապատկած* $n!$*-ով և, հետևապես, միշտ պահպանում է հաստատուն նշան։ Եթե* c *իրական թիվը չի հանդիսանում արմատ (1) սիստեմի բազմանդամներից և ոչ մեկի համար, ապա* $S(c)$*-ով նշանակենք նշանափոխությունների թիվը*

$$f(c),\quad f'(c),\quad f''(c),\ \dots,\ f^{(n-1)}(c),\quad f^{(n)}(c)$$

թվերի կարգավորված սիստեմում։ Այսպիսով, կարելի է դիտարկել ամբողջ արժեքներ ունեցող $S(c)$ *ֆունկցիան, որը որոշված է* x*-ի այն արժեքների համար, որոնք զրո չեն դարձնում (1) սիստեմի բազմանդամներից և ոչ մեկը,*

Տեսնենք, թե ինչպես է փոխվում $S(x)$ *թիվը* x*-ն աճելիս։ Քանի դեռ* x*-ը չի անցել (1) բազմանդամներից ոչ մեկի արմատով,* $S(x)$ *թիվը չի կարող փոխվել։ Նկատի ունենալով այս, մենք պետք է դիտարկենք երկու դեպք.* x*-ի անցումը* $f(x)$ *բազմանդամի արմատով և* x*-ի անցումը* $f^{(k)}(x)$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ *ածանցյալներից մեկի արմատով։*

Թո՛ղ α*-ն լինի* $f(x)$ *բազմանդամի* l*-ապատիկ արմատ* $(l\geqslant1)$*, այսինքն՝*

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(l-1)}(\alpha)=0,\quad f^{(l)}(\alpha)\neq0:$$

Դիցուք ε *դրական թիվն այնքան փոքր է, որ* $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ *հատվածը չի պարունակում* $f(x),\ f'(x),\ \dots,\ f^{(l-1)}(x)$ *բազմանդամների՝* α*-ից տարբեր արմատներ, նմանապես չի պարունակում* $f^{(l)}(x)$ *բազմանդամի ոչ մի արմատ։ Ապացուցենք, որ*

$$f(\alpha-\varepsilon),\quad f'(\alpha-\varepsilon),\ \dots,\ f^{(l-1)}(\alpha-\varepsilon),\quad f^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$$

թվերի սիստեմում յուրաքանչյուր երկու հարևան թվեր ունեն հակադիր նշաններ, այն ժամանակ, երբ բոլոր

$$f(\alpha+\varepsilon),\quad f'(\alpha+\varepsilon),\ \dots,\ f^{(l-1)}(\alpha+\varepsilon),\quad f^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$$

թվերն ունեն միևնույն նշանը։ Քանի որ (1) սիստեմի բազմանդամներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է նախորդ բազմանդամի ածանցյալը, ապա մեզ հարկավոր է միայն ապացուցել, որ եթե x*-ն անցնում է* $f(x)$ *բազմանդամի արմատով, ապա, անկախ այդ արմատի բազմապատիկությունից, մինչև անցումը* $f(x)$*-ը և* $f'(x)$*-ը ունեին տարբեր նշաններ, իսկ անցումից հետո նրանց նշանները համընկնում են։ Եթե* $f(\alpha-\varepsilon)>0$*, ապա* $f(x)$*-ը* $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha)$ *հատվածում նվազում է, ուստի*

$f'(\alpha-\varepsilon)<0$*, իսկ եթե* $f(\alpha-\varepsilon)<0$*, ապա* $f(x)$*-ն աճում է, ուստի* $f'(\alpha-\varepsilon)>0$*։ Հետևաբար, երկու դեպքում էլ նշանները տարբեր են։ Մյուս կողմից, եթե* $f(\alpha+\varepsilon)>0$*, ապա* $f(x)$*-ն աճում է* $(\alpha,\ \alpha+\varepsilon)$ *հատվածում այդ պատճառով* $f'(\alpha+\varepsilon)>0$*. Նույն ձևով* $f(\alpha+\varepsilon)<0$ *անհավասարությունից հետևում է, որ* $f'(\alpha+\varepsilon)<0$*։ Այսպիսով,* α *արմատով անցնելուց հետո* $f(x)$*-ի և* $f'(x)$*-ի նշանները պետք է համընկնեն։*

Ապացուցածից հետևում է, որ x*-ը* $f(x)$ *բազմանդամի* l*-ապատիկ արմատով անցնելիս*

$$f(x),\quad f'(x),\ \dots,\ f^{(l-1)}(x),\quad f^{(l)}(x)$$

սիստեմը կորցնում է l *նշանափոխություն։*

Թո՛ղ այժմ α*-ն լինի*

$$f^{(k)}(x),\quad f^{(k+1)}(x),\ \dots,\ f^{(k+l-1)}(x),\quad 1\leqslant k\leqslant n-1,\quad l\geqslant1,$$

ածանցյալների արմատ, բայց չլինի արմատ ո՛չ $f^{(k-1)}(x)$*-ի, ո՛չ էլ* $f^{(k+l)}(x)$*-ի համար։ Վերևում ապացուցածի համաձայն,* x*-ի* α*-ով անցմանը հետևում է* l *նշանափոխությունների կորուստ*

$$f^{(k)}(x),\quad f^{(k+1)}(x),\ \dots,\ f^{(k+l-1)}(x),\quad f^{(k+l)}(x)$$

սիստեմում։ Ճիշտ է, այդ անցումը, հնարավոր է, ստեղծում է նոր նշանափոխություն $f^{(k-1)}(x)$*-ի և* $f^{(k)}(x)$*-ի միջև, սակայն, քանի որ* $l\geqslant1$*,* x*-ը* α*-ով անցնելիս նշանափոխությունների թիվը*

$$f^{(k-1)}(x),\quad f^{(k)}(x),\quad f^{(k+1)}(x),\ \dots,\ f^{(k+l-1)}(x),\quad f^{(k+l)}(x),$$

սիստեմում կա՛մ չի փոխվում, կա՛մ թե փոքրանում է։ Ընդ որում նա կարող է փոքրանալ միայն զույգ թվով, քանի որ $f^{(k-1)}(x)$ *և* $f^{(k+l)}(x)$ *բազմանդամները* x*-ը* α *արժեքով անցնելիս չեն փոխում իրենց նշանները։*

Ստացված արդյունքներից բխում է, որ **եթե** a *և* b **թվերը** $(a<b)$ **չեն հանդիսանում (1) սիստեմի բազմանդամներից ոչ մեկի արմատներ, ապա** $f(x)$ **բազմանդամի այն իրական արմատների թիվը, որոնք ընկած են** a**-ի և** b**-ի միջև և յուրաքանչյուրը հաշված է այնքան անգամ, որքան նրա բազմապատիկությունն է, հավասար է** $S(a)-S(b)$ **տարբերությանը կամ փոքր է այդ տարբերությունից զույգ թվով:**

Որպեսզի թուլացնենք a *և* b *թվերի վրա դրված սահմանափակումները, մտցնենք հետևյալ նշանակումները։ Դիցուք* c *իրական թիվը* $f(x)$ *բազմանդամի համար արմատ չէ, չնայած, գուցե, արմատ է (1) սիստեմի որոշ այլ բազմանդամների համար։ Նշանակենք* $S_{+}(c)$*-ով նշանափոխությունների թիվը*

$$f(c),\quad f'(c),\quad f''(c),\ \dots,\ f^{(n-1)}(c),\quad f^{(n)}(c) \qquad (2)$$

թվերի սիստեմում՝ հաշված հետևյալ կերպ. եթե

$$f^{(k)}(c)=f^{(k+1)}=\dots=f^{(k+l-1)}(c)=0, \qquad (3)$$

բայց

$$f^{(k-1)}(c)\neq0,\quad f^{(k+l)}(c)\neq0, \qquad (4)$$

ապա ընդունում ենք, որ $f^{(k)}(c)$, $f^{(k+1)}(c)$, $\dots$, $f^{(k+l-1)}(c)$-ն ունեն այնպիսի նշան, ինչպիսին ունի $f^{(k+l)}(c)$-ն. այդ համարժեք է, ակներևորեն, այն բանին, որ (2) սիստեմում նշանների փոփոխության թիվը հաշվելիս զրոները ենթադրվում են ջնջված: Մյուս կողմից, $S_-(c)$-ով նշանակենք նշանափոխությունների թիվը (2) սիստեմում՝ հաշված հետևյալ կերպ. եթե տեղի ունեն (3) և (4) պայմանները, ապա ընդունում ենք, որ $f^{(k+i)}(c)$ $(0\leqslant i\leqslant l-1)$ ունի նույն նշանը, ինչպիսին և $f^{(k+l)}(c)$-ն, եթե $l-i$ տարբերությունը զույգ է, և՝ հակադիր նշանը, եթե այդ տարբերությունը կենտ է:

Եթե այժմ մենք ցանկանում ենք որոշել $f(x)$ բազմանդամի այն իրական արմատների թիվը, որոնք ընկած են a և b թվերի միջև $(a<b)$, ընդ որում a-ն և b-ն $f(x)$-ի արմատներ չեն, բայց հանդիսանում են, գուցե, (1) սիստեմի ուրիշ բազմանդամների համար արմատներ, ապա վարվում ենք հետևյալ կերպ: Դիցուք ε թիվն այնքան փոքր է, որ $(a, a+2\varepsilon)$ հատվածը չի պարունակում $f(x)$ բազմանդամի արմատներ, ինչպես նաև (1) սիստեմի բոլոր բազմանդամների a-ից տարբեր արմատներ. մյուս կողմից, դիցուք η թիվն այնքան փոքր է, որ $(b-2\eta, b)$ հատվածը նույնպես չի պարունակում $f(x)$-ի արմատներ և (1) սիստեմի մնացած բազմանդամների b-ից տարբեր արմատներ: Այդ դեպքում $f(x)$ բազմանդամի իրական արմատների՝ մեզ հետաքրքրող թիվը հավասար կլինի այդ բազմանդամի՝ $a+\varepsilon$ և $b-\eta$ թվերի միջև ընկած իրական արմատների թվին, այսինքն, համաձայն վերևում ապացուցածի, հավասար է $S(a+\varepsilon)-S(b-\eta)$ տարբերությանը կամ փոքր է այդ տարբերությունից զույգ թվով: Սակայն, հեշտ է տեսնել, որ

$$S(a+\varepsilon)=S_+(a),\quad S(b-\eta)=S_-(b):$$

Սրանով ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Բյուդանի-Ֆուրյեի թեորեմը: **Եթե a և b $(a<b)$ իրական թվերը իրական գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամի արմատներ չեն, ապա այդ բազմանդամի այն իրական արմատների թիվը, որոնք ընկած են a-ի և b-ի միջև և յուրաքանչյուրը հաշված է այնքան անգամ, որքան նրա բազմապատիկությունն է, հավասար է $S_+(a)-S_-(b)$ տարբերությանը կամ փոքր է այդ տարբերությունից զույգ թվով:**

Նշանակենք ∞ սիմվոլով x անհայտի այնքան մեծ դրական արժեքը, որ (1) սիստեմի բոլոր բազմանդամների՝ նրան համապատաս-

խանող արժեքների նշանները համընկնեն իրենց ավագ գործակիցների նշանների հետ: Քանի որ այդ գործակիցները հաջորդաբար կլինեն a_0, na_0, $n(n-1)a_0$, $\dots$, $n!a_0$ թվերը, որոնց նշանները համընկնում են, ապա $S(\infty)=S_-(\infty)=0$: Մյուս կողմից, քանի որ՝

$$f(0)=a_n,\quad f'(0)=a_{n-1},\quad f''(0)=a_{n-2}2!,$$
$$f'''(0)=a_{n-3}3!,\ \dots,\ f^{(n)}(0)=a_0\cdot n!,$$

որտեղ $a_0, a_1, \dots, a_n$ թվերը $f(x)$ բազմանդամի գործակիցներն են, ապա $S_+(0)$-ն համընկնում է $f(x)$ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների թվի հետ (ընդ որում, զրոյի հավասար գործակիցները հաշվի չեն առնվում): Այսպիսով, կիրառելով Բյուդանի-Ֆուրյեի թեորեման $(0, \infty)$ հատվածի նկատմամբ, մենք հանգում ենք հետևյալ թեորեմային.

Դեկարտի թեորեման: **$f(x)$ բազմանդամի դրական արմատների թիվը, յուրաքանչյուրը հաշված այնքան անգամ, ինչպիսին է նրա բազմապատիկությունը, հավասար է այդ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների թվին (ընդ որում, զրոյի հավասար գործակիցները հաշվի չեն առնվում) կամ փոքր է նրանից զույգ թվով:**

$f(x)$ բազմանդամի բացասական արմատների թիվը որոշելու համար, ակներևաբար, բավական է Դեկարտի թեորեման կիրառել $f(-x)$ բազմանդամի նկատմամբ: Այդ դեպքում, եթե $f(x)$ բազմանդամի գործակիցներից և ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի, ապա, ակներև է, որ $f(-x)$ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանների փոփոխումներին համապատասխանում են $f(x)$ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանների պահպանումները և հակառակը: Այսպիսով, **եթե $f(x)$ բազմանդամը չունի զրոյի հավասար գործակիցներ, ապա նրա բացասական արմատների թիվը (հաշված նրանց բազմապատիկությամբ) հավասար է գործակիցների սիստեմում նշանների պահպանումների թվին կամ փոքր է նրանից զույգ թվով:**

Նշենք Դեկարտի թեորեմայի մի ապացույց ևս, որը չի հենվում Բյուդանի-Ֆուրյեի թեորեմայի վրա: Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման.

Եթե $c>0$, ապա $f(x)$ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների թիվը $(x-c)f(x)$ արտադրյալի գործակիցների սիստեմի նշանափոխությունների թվից փոքր է կենտ թվով:

Իսկապես, հավաքելով փակագծերի մեջ իրար կողքի գրված միևնույն նշան ունեցող անդամները, $f(x)$ բազմանդամը, որի a_0

ավագ գործակիցը համարում ենք դրական, գրենք հետևյալ կերպ.

$$f(x)=(a_0x^n+\cdots+b_1x^{k_1+1})-(a_1x^{k_1}+\cdots+b_2x^{k_2+1})+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^s(a_sx^{k_s}+\cdots+b_{s+1}x^t]: \qquad (5)$$

Այստեղ $a_0>0,\ a_1>0,\dots,\ a_s>0$, այն դեպքում, երբ $b_1,\ b_2,\dots,\ b_s$ թվերը դրական են կամ հավասար զրոյի. սակայն b_{s+1}-ը համարում ենք խիստ դրական, այսինքն՝ x^t-ը, որտեղ $t\geqslant 0$, հանդիսանում է x անհայտի ամենափոքր աստիճանը, որը մտնում է $f(x)$ բազմանդամի մեջ զրոյից տարբեր գործակցով: Հետևյալ

$$(a_0x^n+\cdots+b_1x^{k_1+1})$$

փակագիծը պատահականորեն կարող է այդ դեպքում կազմված լինել միայն մեկ գումարելուց, այդ այն դեպքում, երբ $k_1+1=n$: Նույնանման դիտողությունը կիրառելի է և (5) բանաձևի մյուս փակագծերի նկատմամբ:

Այժմ գրենք $(x-c)f(x)$ արտադրյալին հավասար բազմանդամը, ընդ որում կառանձնացնենք միայն այն անդամները, որոնք պարունակում են x-ի $n+1,\ k_1+1,\dots,k_s+1$ և t աստիճանները: Մենք կստանանք՝

$$(x-c)f(x)=(a_0x^{n+1}+\cdots)-(a_1'x^{k_1+1}+\cdots)+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^s(a_s'x^{k_s+1}+\cdots-cb_{s+1}x^t), \qquad (6)$$

որտեղ $a_i'=a_i+cb_i$, $i=1,\ 2,\dots,\ s$ և, հետևապես, քանի որ $c>0$, բոլոր a_i' թվերը խիստ դրական են: Այսպիսով, $f(x)$ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում a_0x^n և $-a_1x^{k_1}$ անդամների միջև (ինչպես նաև $-a_1x^{k_1}$ և $a_2x^{k_2}$ անդամների միջև և այլն) եղել է նշանների մեկ փոփոխություն, իսկ $(x-c)f(x)$ բազմանդամի մոտ համապատասխան a_0x^{n+1} և $-a_1'x^{k_1+1}$ անդամների միջև (համապատասխանաբար $-a_1'x^{k_1+1}$ և $a_2x^{k_2-1}$ և այլն անդամների միջև) կլինի նշանների կամ մեկ փոփոխություն, կամ ավելի, բայց այդ դեպքում անպայման զույգ թվով: Նշանների այդ փոփոխությունների ստույգ տեղերը մեզ չեն հետաքրքրի. կարող է պատահել, օրինակ, որ (6)-ի մեջ x^{k_1+2}-ի գործակիցը բացասական լինի, ինչպես և $-a_1'$ գործակիցը, և, հետևապես, այդ երկու հարևան գործակիցների միջև չկա նշանների փոփոխություն, այսինքն՝ առաջին փակագծի մեջ նշանների փոփոխությունները դասավորված են ինչ-որ մի տեղ սկզբում: Այժմ նկատենք, որ (5)-ի մեջ վերջին փակագիծը չէր պարունակում նշանների և ոչ մի փոփոխություն այն դեպքում, երբ (6)-ի մեջ վերջին փակագիծը պարունակում է, ընդ որում՝ կենտ թվով. բավական է հաշվի առնել, որ $f(x)$ և $(x-c)f(x)$ բազմանդամների զրոյից տարբեր վերջին գործակիցները,

այսինքն՝ $(-1)^s b_{s+1}$-ը և $(-1)^{s+1}b_{s+1}c$-ն ունեն տարբեր նշաններ: Այսպիսով, $f(x)$ բազմանդամից $(x-c)f(x)$ բազմանդամին անցնելիս, գործակիցների սիստեմում նշանների փոփոխության ընդհանուր թիվն անպայման ավելանում է, ընդ որում, կենտ թվով (մի քանի գումարելիների գումարը, որոնցից մեկը կենտ է, իսկ մնացածները զույգ են, հասկանալի է, կլինի կենտ): Լեմման ապացուցված է:

Դեկարտի թեորեման ապացուցելու համար $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_k$-ով նշանակենք $f(x)$ բազմանդամի բոլոր դրական արմատները: Այսպիսով,

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\varphi(x),$$

որտեղ $\varphi(x)$-ն իրական գործակիցներով բազմանդամ է, որն արդեն չունի իրական դրական արմատներ: Այստեղից հետևում է, որ $\varphi(x)$ բազմանդամի զրոյից տարբեր առաջին և վերջին գործակիցները միևնույն նշանի են, այսինքն՝ այս բազմանդամի գործակիցների սիստեմը պարունակում է զույգ թվով նշանափոխություն: Կիրառելով այժմ վերևում ապացուցված լեմման հաջորդաբար

$$\varphi(x),\quad (x-\alpha_1)\varphi(x),\quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\varphi(x),\ \dots,\ f(x)$$

բազմանդամների նկատմամբ, մենք կստանանք, որ գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների թիվն ամեն անգամ ավելանում է կենտ թվով, այսինքն՝ միավոր գումարած զույգ թիվ, հետևաբար՝ $f(x)$ բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների թիվը k թվից մեծ է զույգ թվով:

Դեկարտի և Բյուդանի-Ֆուրյեի թեորեմները կիրառենք վերևում դիտարկված

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^8+8x^3-7x-3$$

բազմանդամի նկատմամբ:

Գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների թիվը հավասար է երեքի, և այդ պատճառով, ըստ Դեկարտի թեորեմայի, $h(x)$ բազմանդամը կարող է ունենալ երեք կամ մեկ դրական արմատ: Մյուս կողմից, $h(x)$-ը չունի զրոյի հավասար գործակիցներ, իսկ քանի որ գործակիցների սիստեմում կա նշանների երկու պահպանում, ապա $h(x)$-ը կա՛մ ունի երկու բացասական արմատ, կա՛մ ոչ մի հատ չունի: Համեմատելով նախկինում գրաֆիկի օգնությամբ ստացված արդյունքների հետ, մենք ստանում ենք, որ երկուսը մեր բազմանդամի բացասական արմատների ճշգրիտ թիվն է:

Դրական արմատների թվի ճշգրիտ որոշման համար օգտվենք Բյուդանի-Ֆուրյեի թեորեմայից, ընդ որում՝ այն կիրառենք $(1,\infty)$ հատվածի նկատմամբ, քանի որ § 39-ում արդեն ցույց է տրվել, որ 1-ը հանդիսանում է $h(x)$ բազմանդամի դրական արմատների ստորին սահմանը: $h(x)$ բազմանդամի հաջորդական ածանցյալները նույնպես արդեն գրվել են § 39-ում: Գտնենք նրանց նշանները $x=1$ և $x=\infty$ դեպքերում:

	$h(x)$	$h'(x)$	$h''(x)$	$h'''(h)$	$h^{IV}(x)$	$h^{V}(x)$	նշանափոխությունների թիվը
$x=1$	−	+	+	+	+	+	1
$x=\infty$	+	+	+	+	+	+	0

Այստեղից հետևում է, որ ածանցյալների սիստեմը, x-ը 1-ից մինչև ∞ անցնելիս, կորցնում է մեկ նշանափոխություն, հետևապես՝ h(x) բազմանդամն ունի ճիշտ մեկ դրական արմատ։

Այս օրինակի կապակցությամբ նկատենք, որ ընդհանրապես բազմանդամի իրական արմատների թիվը որոնելիս հարկավոր է սկսել գրաֆիկի կառուցումից և Դեկարտի ու Բյուդանի-Ֆուրյեի թեորեմների կիրառումից և միայն ծայրահեղ դեպքերում անցնել Շտուրմի սիստեմի կառուցմանը։

Դեկարտի թեորեման թույլ է տալիս որոշ ճշգրտումներ այն մասնավոր դեպքում, երբ նախապես հայտնի է, որ բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ինչպես այդ տեղի ունի, օրինակ, սիմետրիկ մատրիցի խարակտերիստիկ բազմանդամի համար։ Այն է՝

Եթե f(x) բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, իսկ ազատ անդամը զրոյից տարբեր է, ապա այդ բազմանդամի դրական արմատների k_1 թիվը հավասար է նրա գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների s_1 թվին, իսկ բացասական արմատների k_2 թիվը հավասար է f(−x) բազմանդամի գործակիցների սիստեմում նշանափոխությունների s_2 թվին:

Իրոք, մեր ենթադրությունների դեպքում

$$k_1+k_2=n, \tag{7}$$

որտեղ n-ը f(x) բազմանդամի աստիճանն է և, ըստ Դեկարտի թեորեմայի,

$$k_1\leqslant s_1, \quad k_2\leqslant s_2: \tag{8}$$

Ապացուցենք, որ

$$s_1+s_2\leqslant n: \tag{9}$$

Ապացույցը կկատարենք ինդուկցիայով ըստ n-ի, քանի որ n=1 դեպքում, նկատի ունենալով, որ $a_0\neq0$, $a_1\neq0$, նշանների փոփոխում կա

$$f(x)=a_0x+a_1, \quad f(-x)=-a_0x+a_1$$

բազմանդամներից միայն մեկի մոտ, այսինքն՝ այս դեպքի համար

$s_1+s_2=1$։ Դիցուք (9) բանաձևն արդեն ապացուցված է այն բազմանդամների համար, որոնց աստիճանը փոքր է n-ից։ Եթե

$$f(x)=a_0x^n+a_{n-l}x^l+\cdots+a_n,$$

որտեղ $l\leqslant n-1$, $a_{n-1}\neq0$, ապա ընդունենք՝

$$g(x)=a_{n-l}x^l+\cdots+a_n:$$

Այդ դեպքում

$$f(x)=a_0x^n+g(x),$$

$$f(-x)=(-1)^na_0x^n+g(-x):$$

Եթե s_1'-ը և s_2'-ը համապատասխանաբար g(x) և g(−x) բազմանդամների գործակիցների սիստեմներում նշանափոխությունների թվերն են, ապա, համաձայն ինդուկտիվ ենթադրության (պարզ է, որ $l\geqslant1$),

$$s_1'+s_2'\leqslant l:$$

Եթե $l=n-1$, ապա նշանների փոփոխում առաջին տեղում, այսինքն՝ (x)-ի համար a_0-ի և $a_1=a_{n-l}$-ի միջև, կլինի f(x) և f(−x) բազմանդամներից միայն մեկի մոտ, և այդ պատճառով՝

$$s_1+s_2=s_1'+s_2'+1\leqslant l+1=n:$$

Իսկ եթե $l\leqslant n-2$, ապա հնարավոր է նշանների փոփոխում առաջին տեղերում f(x) և f(−x) բազմանդամներից յուրաքանչյուրի մոտ էլ, սակայն նաև այդ դեպքում՝

$$s_1+s_2\leqslant s_1'+s_2'+2\leqslant l+2\leqslant(n-2)+2=n:$$

Համադրելով (7), (8) և (9) բանաձևերը, ստանում ենք, որ

$$k_1=s_1, \quad k_2=s_2,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

§ 42. Արմատների մոտավոր հաշվումը

Նախորդ պարագրաֆներում շարադրված մեթոդները թույլ են տալիս կատարելու իրական գործակիցներով f(x) բազմանդամի իրական արմատների առանձնացում, մեկուսացում, այսինքն՝ յուրաքանչյուր արմատի համար նշել այն սահմանները, որոնց միջև գտնվում է միայն այդ մեկ արմատը։ Եթե այդ սահմանները բավականաչափ նեղ են, ապա ցանկացած թիվ, որն ընկած է նրանց միջև, կարելի է համարել որոնելի արմատի մոտավոր արժեք։ Այսպիսով, այն բանից հետո, երբ

Շտուրմի մեթոդով (կամ որևէ այլ, ավելի ձեռնտու եղանակով) կհաստատվի, որ a և b ռացիոնալ թվերի միջև պարունակվում է f(x) բազմանդամի միայն մեկ արմատ, մնում է այնքան նեղացնել այդ սահմանները, որպեսզի a′ և b′ նոր սահմանների՝ նախապես պահանջված թվով առաջին տասնորդական նշանները համընկնեն. դրանով որոնելի արմատը հաշված կլինի տրված ճշգրտությամբ։

Գոյություն ունեն շատ մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս բավականին արագ գտնել արմատի մոտավոր արժեքը պահանջվող ճշգրտությամբ։ Մենք կնշենք նրանցից երկուսը, որոնք տեսականորեն ավելի պարզ են և ընդհանուր և համատեղ կիրառման դեպքում բավականին արագ հասցնում են նպատակին։ Հարկավոր է նշել, որ այն մեթոդները, որոնք այժմ կշարադրվեն, կիրառելի են ոչ միայն բազմանդամների նկատմամբ, այլև անընդհատ ֆունկցիաների ավելի լայն դասերի նկատմամբ։

Այսուհետև ենթադրելու ենք, որ α-ն f(x) բազմանդամի պարզ արմատն է (քանի որ բազմապատիկ արմատներից մենք միշտ կարող ենք ազատվել) և որ α արմատն արդեն անջատված է a և b սահմաններով՝ $a<\alpha<b$. այստեղից, մասնավորապես, բխում է, որ f(a)-ն և (b)-ն ունեն տարբեր նշաններ։

Գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդը (որը կոչվում է նույնպես կեղծ ենթադրության մեթոդ)։ Որպես α արմատի մոտավոր արժեք կարելի էր ընդունել, օրինակ, a և b սահմանների կիսագումարը՝ $\frac{a+b}{2}$, այսինքն՝ a և b ծայրերով հատվածի միջնակետը։ Սակայն, ավելի բնական կլինի ենթադրել, որ արմատն ավելի մոտ է գտնվում a և b սահմաններից նրան, որին համապատասխանում է բազմանդամի բացարձակ մեծությամբ ավելի փոքր արժեքը։ Գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդը կայանում է նրանում, որ որպես α արմատի մոտավոր արժեք վերցվում է այնպիսի c թիվ, որը (a, b) հատվածը բաժանում է f(a) և f(b) թվերի բացարձակ արժեքներին համեմատական մասերի, այսինքն՝

$$\frac{c-a}{b-c}=-\frac{f(a)}{f(b)}.$$

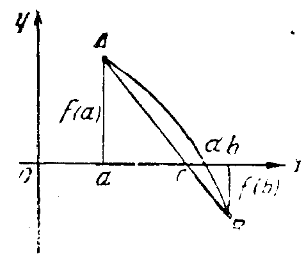
աջ մասում մինուս նշանը դրված է այն պատճառով, որ f(a) և f(b) թվերն ունեն տարբեր նշաններ։ Այստեղից՝

$$c=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}: \qquad (1)$$

Երկրաչափորեն, ինչպես ցույց է տալիս գծ. 10-ը, գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդը կայանում է նրանում, որ (a, b) հատվածի վրա

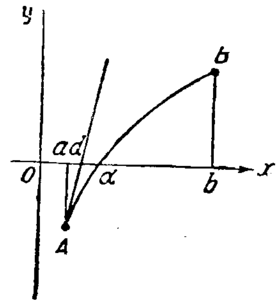
y=f(x) կորը փոխարինվում է նրա A(a, f(a)) և B(b, f(b)) կետերը միացնող լարով, և որպես α արմատի մոտավոր արժեք ընդունվում է այդ լարի՝ x-երի առանցքի հետ հատման կետի աբսցիսը։

Նյուտոնի մեթոդը։ Քանի որ α-ն f(x) բազմանդամի պարզ արմատ է, ապա $f'(\alpha)\neq 0$։ Ընդունենք, որ նույնպես և $f''(\alpha)\neq 0$, քանի որ այլապես հարցը բերվում է f″(x) բազմանդամի արմատի հաշվմանը, որն ունի ավելի ցածր աստիճան, քան f(x)-ը։ Այնուհետև ընդունենք, որ (a, b) հատվածը ոչ միայն չի պարունակում f(x) բազմանդամի α արմատից տարբեր արմատներ, այլև չի պարունակում f′(x) բազմանդամի ոչ մի արմատ, ինչպես նաև f″(x) բազմանդամի ոչ մի արմատ[1]։

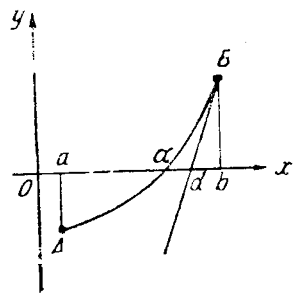


Գծ. 10.

Այսպիսով, ինչպես հետևում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից, y=f(x) կորը (a, b) հատվածի վրա կա՛մ մոնոտոն աճում է, կա՛մ մոնոտոն նվազում, նմանապես՝ այդ հատվածի բոլոր կետերում կա՛մ ուռուցիկությամբ ուղղված է դեպի վերև, կա՛մ ուղղված է դեպի ներքև։ Հետևաբար, (a, b) հատվածում կարող են հանդիպել կորի դասավորությունների չորս դեպքեր, որոնք պատկերված են 11—14-րդ գծագրերի վրա։



Գծ. 11.

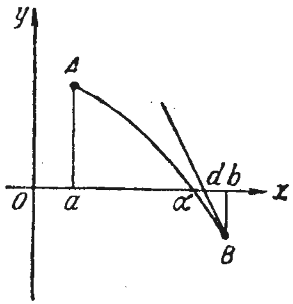


Գծ. 12.

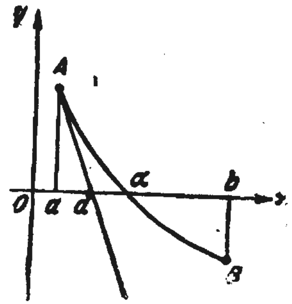
Նշանակենք a_0-ով a և b սահմաններից այն, որում f(x)-ի նշանը համընկնում է f″(x)-ի նշանի հետ։ Քանի որ f(a)-ն և f(b)-ն ունեն տարբեր նշաններ, իսկ f″(x)-ը պահպանում է նշանը ամբողջ (a, b) հատվածում, ապա այդպիսի a_0 կարելի է նշել։ 11-րդ և 14-րդ գծագրերում ներկայացված դեպքերում կլինի՝ $a_0=a$, մյուս երկու դեպքում՝ $a_0=b$։ y=f(x) կորի՝ a_0 աբսցիս ունեցող կետում,

[1] Սահմանների նեղացումը, որը բերում է այն բանին, որ այդ պայմանը բավարարվի, սովորաբար ստացվում է առանց որևէ դժվարության, քանի որ նախկինում շարադրված մեթոդները թույլ են տալիս որոշելու f′(x) և f″(x) բազմանդամների արմատների թիվը ցանկացած հատվածում։

այսինքն՝ $(a_0, f(a_0))$ կոորդինատներով կետում, տանենք այդ կորին շոշափող և այդ շոշափողի՝ x-երի առանցքի հետ հատման կետի աբսցիսը նշանակենք d-ով։ 11—14-րդ գծագրերը ցույց են տալիս, որ d թիվը կարելի է համարել α արմատի մոտավոր արժեք։ Հետևաբար, Նյուտոնի մեթոդը կայանում է նրանում, որ (a, b) հատվածում $y=f(x)$ կորը փոխարինվում է այդ հատվածի ծայրակետերից մեկում տարված շոշափողով։ a_0 կետի ընտրու-



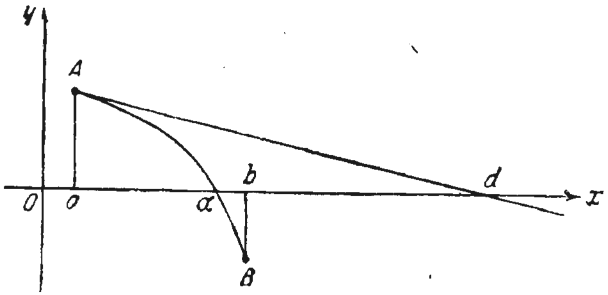
Գծ. 13.



Գծ. 14.

թյան վրա դրված պայմանը շատ էական է. գծ. 15-ը ցույց է տալիս, որ առանց այդ պայմանի պահպանման x-երի առանցքի հետ շոշափողի հատման կետը կարող է բոլորովին էլ չտալ որոնելի արմատի մոտավորությունը։

Արտածենք բանաձև, որով գտնվում է d թիվը։ Ինչպես հայտնի



Գծ. 15.

է, $y=f(x)$ կորի $(a_0, f(a_0))$ կետում տարված շոշափողի հավասարումը կարող է գրվել հետևյալ տեսքով.

$$y-f(a_0)=f'(a_0)(x-a_0):$$

Այստեղ տեղադրելով x-երի առանցքի հետ շոշափողի հատման կետի (d, 0) կոորդինատները, կստանանք՝

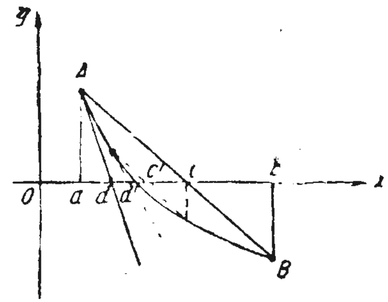
$$-f(a_0)=f'(a_0)(d-a_0), \qquad (2)$$

որտեղից՝

$$d=a_0-\frac{f(a_0)}{f'(a_0)}:$$

Եթե ընթերցողը 11—14-րդ գծագրերի վրա A և B կետերը միացնի լարերով, ապա կտեսնի, որ գծային ինտերպոլյացիայի և Նյուտոնի մեթոդները բոլոր դեպքերում տալիս են α արմատի իսկական արժեքի մոտավորությունը տարբեր կողմերից:

Դրա համար էլ, նպատակահարմար է, եթե (a, b) հատվածն այնպիսին է, ինչպիսին պահանջվում է Նյուտոնի մեթոդի մեջ, զուգակցել այդ երկու մեթոդները։ Այդ ճանապարհով α արմատի համար մենք կստանանք շատ ավելի նեղ c և d սահմաններ։ Եթե նրանք դեռևս չեն տալիս մոտավորության պահանջվելիք ճշգրտությունը, ապա այդ նոր սահմանների նկատմամբ հարկավոր



Գծ. 16.

է նորից կիրառել նշված երկու մեթոդները (տե՛ս գծ. 16) և այլն, ընդ որում, կարելի է ապացուցել, որ, այդ պրոցեսն իրոք որ թույլ է տալիս α արմատը հաշվել ցանկացած ճշգրտությամբ։

Այս մեթոդները կիրառենք նախորդ պարագրաֆներում դիտարկված

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

բազմանդամի նկատմամբ։

Մենք գիտենք, որ այդ բազմանդամն ունի α_1 պարզ արմատ, որն ընկած է $1<\alpha_1<2$ սահմանների միջև։ Նախապես կարելի է ասել, որ այդ սահմանները չափազանց լայն են նրա համար, որպեսզի գծային ինտերպոլյացիայի և Նյուտոնի մեթոդները մեկ անգամ կիրառելով կարողանային տալ լավ արդյունք։ Սակայն, կիրառենք դրանք, որպեսզի ունենանք բարդ հաշիվներ չպահանջող մի օրինակ։

Ինչպես մենք տեսանք նախորդ պարագրաֆում, $x=1$ դեպքում $h'(x)$, $h''(x), \ldots, h^{V}(x)$ ածանցյալներն ստանում են դրական արժեքներ։ Այստեղից, § 39-ի արդյունքների հիման վրա, ստանում ենք, որ $x=1$ արժեքը $h'(x)$-ի, ինչպես նաև $h''(x)$-ի համար դրական արմատների վերին սահման է։ (1,2) հատվածը, հետևաբար, չի պարունակում այդ ածանցյալների արմատներ, ուստի նրա նկատմամբ կարելի է կիրառել Նյուտոնի մեթոդը։ Բացի դրանից, $h''(x)$-ը այդ հատվածում ամենուրեք դրական է, իսկ քանի որ

$$h(1)=-4, \quad h(2)=39,$$

ապա հարկավոր է ընդունել $a_0=2$։ Հաշվի առնելով, որ $h'(2)=109$, մենք (2) բանաձևով ստանում ենք՝

$$d=2-\frac{39}{109}=\frac{179}{109}=1{,}64\ldots:$$

Մյուս կողմից, (1) բանաձևը տալիս է՝

$$c=\frac{2\cdot(-4)-1\cdot 39}{-4-39}=\frac{47}{43}=1{,}09\cdots$$

և, հետևաբար, α_1 արմատը սահմանափակված է

$$1{,}09<a_1<1{,}65$$

սահմաններում։

Մենք ստացանք սահմանների չափազանց աննշան նեղացում այն բանի համար, որպեսզի այդ արդյունքը համարենք բավարար։ Իհարկե, նոր ստացված սահմանների նկատմամբ կարելի էր մի անգամ ևս կիրառել մեր մեթոդները։ Սակայն, նպատակահարմար է հենց սկզբից α_1-ի համար գտնել բավականաչափ նեղ սահմաններ, օրինակ՝ մինչև 0,1 կամ նույնիսկ 0,01 ճշգրտությամբ, և ապա միայն կիրառել այդ մեթոդները։ Հասկանալի է, որ դա բոլոր հաշվումներն խիկույն կդարձնի սատիկ մեծածավալ, բայց կոնկրետ խնդիրներ լուծելիս, որոնք պահանջում են բավականաչափ ճշգրիտ իմանալ բազմանդամի արմատները, հարկ է լինում դիմել այդ բանին։

Վերադառնանք մեր $h(x)$ բազմանդամին և նրա α_1 արմատին, ընդ որում նշենք, որ բազմանդամների ներքևում բերված բոլոր արժեքները հաշվվում են Հորների մեթոդով։ Քանի որ

$$h(1{,}3)=-0{,}13987,\quad h(1{,}31)=0{,}0662923851,$$

ապա

$$1{,}3<\alpha_1<1{,}31,$$

այսինքն՝ մենք α_1 արմատի արժեքը գտանք մինչև 0,01 ճշգրտությամբ։ Այժմ այդ նոր սահմանների նկատմամբ կիրառենք գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդը՝

$$c=\frac{1{,}31\cdot(-0{,}13987)-1{,}3\cdot 0{,}0662923851}{-0{,}13987-0{,}0662923851}=\frac{0{,}26940980063}{0{,}2061623851}=1{,}30678\ldots։$$

Այդ նույն սահմանների նկատմամբ կիրառենք Նյուտոնի մեթոդը, ընդ որում հարկավոր է ընդունել $a_0=1{,}31$։ Քանի որ՝

$$h'(1{,}31)=20{,}92822405,$$

ապա

$$d=1{,}31-\frac{0{,}0662923851}{20{,}92822405}=\frac{27{,}3496811204}{20{,}92822405}=1{,}30683\cdots:$$

Այսպիսով՝

$$1{,}30678<\alpha_1<1{,}30684,$$

և ուստի, ընդունելով $\alpha_1=1{,}30681$, մենք կատարում ենք այնպիսի սխալ, որը փոքր է 0,00003-ից։

Մենք մինչև այժմ ցույց չենք տվել, որ վերևում շարադրված մեթոդները իրոք որ թույլ են տալիս արմատը հաշվել ցանկացած ճշգրտությամբ, այսինքն՝ չենք ապացուցել այդ մեթոդների զուգամիտությունը։ Ապացուցենք այդ թեկուզ հենց Նյուտոնի մեթոդի համար։

Դիցուք, ինչպես և վերևում, $f(x)$ բազմանդամի α պարզ արմատը պարունակվում է (a, b) հատվածում, որն ընտրված է այնպես, ինչպես դա անհրաժեշտ է Նյուտոնի մեթոդի կիրառման համար։ Այստեղից հետևում է, մասնավորապես, այնպիսի A և B դրական թվերի գոյությունը, որ (a, b) հատվածի վրա ամենուրեք լինի՝

$$|f'(x)|>A,\quad |f''(x)|<B: \tag{3}$$

Նշանակենք՝

$$C=\frac{B}{2A}$$

և ընդունենք, որ

$$C(b-a)<1: \tag{4}$$

Այս անհավասարության բավարարման համար, հավանաբար, հարկավոր կլինի α արմատի (a, b) սահմանները փոխարինել ավելի նեղ սահմաններով. սակայն դա չի անդրադառնա (3) անհավասարությունների իրավացիության վրա։ Դիցուք a_0-ն a և b սահմաններից այն է, որտեղ հարկավոր է կիրառել Նյուտոնի մեթոդը։ (2) բանաձևի հիման վրա, որպես α արմատի մոտավոր արժեքներ մենք հաջորդաբար կստանանք $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ թվերը, որոնք ընկած են (a, b) հատվածում և կապված են իրար հետ

$$a_k=a_{k-1}-\frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})},\qquad k=1,\ 2,\ldots \tag{5}$$

հավասարություններով։ Դիցուք՝

$$\alpha=a_k+h_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots։ \tag{6}$$

Այդ դեպքում՝

$$0=f(\alpha)=f(a_k)+h_kf'(a_k)+\frac{h_k^2}{2}f''(a_k+\theta h_k),$$

որտեղ $0<\theta<1$։ Քանի որ $f'(a_k)\neq 0$, (a, b) հատվածի վրա դրված պայմանի պատճառով, ապա, հաշվի առնելով (5) և (6) բանաձևերը, կստանանք՝

$$-\frac{h_k^2}{2}\,\frac{f''(a_k+\theta h_k)}{f'(a_k)}=h_k+\frac{f(a_k)}{f'(a_k)}=\alpha-\left(a_k-\frac{f(a_k)}{f'(a_k)}\right)=\alpha-a_{k+1}=h_{k+1}։$$

Այստեղից՝

$$|h_{k+1}|=h_k^2\left|\frac{f''(a_k+\theta h_k)}{2f'(a_k)}\right|<h_k^2\,\frac{B}{2A}=Ch_k^2,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots։$$

Այսպիսով,

$$|h_{k+1}|<Ch_k^2<C^3h_{k-1}^4<C^7h_{k-2}<\cdots<C^{2^{k+1}}-1h_0^{2^{k+1}}$$

կամ, քանի որ $|h_0| = |\alpha - a_0| < b - a$, վերջնականապես՝

$$|h_{k+1}| < C^{-1}[C(b-a)]^{2^{k+1}}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

Այստեղից, (4) պայմանի շնորհիվ, հետևում է, որ k-ն աճելիս, α արմատի և նրա՝ Նյուտոնի մեթոդի հաջորդական կիրառումով ստացվող a_k մոտավոր արժեքի h_k տարբերությունը ձգտում է զրոյի, որը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նշենք, որ (7) բանաձևը $k+1$-րդ քայլի համար տալիս է սխալի գնահատականը, որն էական է, եթե Նյուտոնի մեթոդը կիրառվում է մենակ և ոչ թե գծային ինտերպոլյացիայի մեթոդի հետ միասին:

Մոտավոր հաշվումների տեսության դասընթացներում ընթերցողը կարող է ծանոթանալ վերևում շարադրված մեթոդներում հաշվարկումների ավելի ռացիոնալ դասավորման եղանակների հետ, որոնք հեշտացնում են նրանց կիրառումը: Այդ նույն դասընթացներում կարելի է գտնել արմատների մոտավոր հաշվման շատ ուրիշ մեթոդների շարադրումը: Նրանց մեջ ամենից ավելի կատարյալը հանդիսանում է Լոբաչևսկու մեթոդը (որը երբեմն սխալմամբ անվանում են Գրեֆֆեի մեթոդ): Այդ մեթոդը թույլ է տալիս միանգամից գտնելու բոլոր արմատների մոտավոր արժեքները, այդ թվում և կոմպլեքս արմատների. ընդ որում չի պահանջում արմատների նախնական մեկուսացում: Սակայն, այն կապված է խիստ մեծածավալ հաշվարկումների հետ: Այդ մեթոդի հիմքում ընկած է ստորև՝ 11-րդ գլխում, շարադրվող սիմետրիկ բազմանդամների տեսությունը:

ԳԼՈՒԽ ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ

ԴԱՇՏԵՐ ԵՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

§ 43. Թվային օղակներ և դաշտեր

Դասընթացի նախորդ շատ բաժիններում մենք գտնվում էինք հետևյալ դրության մեջ. շարադրելով նյութը, մենք դիտարկման էինք ենթարկում կամ ցանկացած կոմպլեքս թվերը, կամ թե միայն իրական թվերը, բայց հետո պետք է դիտողություն անեինք, որ կամ՝ ստացված արդյունքները մնում են իրավացի, եթե սահմանափակվենք միայն իրական թվերով, կամ՝ որ նրանք բառացիորեն տեղափոխվում են ցանկացած կոմպլեքս թվերի դեպքի վրա: Որպես կանոն, այդ բոլոր դեպքերում կարելի էր նկատել, որ շարադրված տեսությունը ամբողջությամբ կպահպանվեր և այն դեպքում, եթե մենք դիտարկման ընդունեինք միայն ռացիոնալ թվերը: Եկել է ժամանակն ընթերցողին ցույց տալու այդ զուգահեռականության իսկական պատճառները, որպեսզի հետագա նյութը շարադրվի իր համար բնական ընդհանրությամբ, այսինքն՝ բոլորի կողմից ընդունված հանրահաշվական լեզվով: Այդ նպատակով մենք մուծում ենք *դ ա շ տ ի* գաղափարը, ինչպես նաև ավելի լայն, բայց մեր դասընթացում միայն օժանդակ դեր խաղացող, *օ ղ ա կ ի* գաղափարը:

Ակներև է, որ բոլոր կոմպլեքս թվերի, բոլոր իրական թվերի և բոլոր ռացիոնալ թվերի սիստեմները, համապատասխանաբար և բոլոր ամբողջ թվերի սիստեմը, օժտված են այն ընդհանուր հատկությամբ, որ նրանցից յուրաքանչյուրում ոչ միայն գումարումը և բազմապատկումը, այլև հանումը կարելի է կատարել՝ մնալով այդ նույն սիստեմի սահմաններում: Նշված թվային սիստեմների այդ հատկությունը նրանց տարբերում է, օրինակ, դրական ամբողջ թվերի կամ դրական իրական թվերի սիստեմներից:

Թվերի ամեն մի սիստեմ (կոմպլեքս թվերի կամ, մասնավորապես, իրական թվերի), որը պարունակում է իր ցանկացած երկու թվերի գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը, կոչվում է **թվային օղակ**։ Այսպիսով, բոլոր ամբողջ, ռացիոնալ, իրական և կոմպլեքս թվերի սիստեմները թվային օղակներ են։ Մյուս կողմից, դրական թվերի ոչ մի սիստեմ օղակ չի լինի, քանի որ եթե a-ն և b-ն երկու տարբեր դրական թվեր են, ապա կա՛մ $(a-b)$-ն, կա՛մ $(b-a)$-ն բացասական է։ Օղակ չի լինի նաև բացասական թվերի ոչ մի սիստեմ՝ թեկուզ հենց այն պատճառով, որ երկու բացասական թվերի արտադրյալը դրական է։

Թվային օղակներն ամենևին էլ չեն սպառվում վերևում դիտարկված չորս օրինակներով։ Այժմ ցույց կտրվեն մի քանի այլ օրինակներ, ընդ որում այն պնդման ստուգումը, որ թվերի դիտարկվող սիստեմն իրոք օղակ է, ամեն անգամ թողնվում է ընթերցողին։

Զույգ թվերը կազմում են օղակ. ընդհանրապես, ցանկացած բնական n-ի դեպքում, n-ի վրա առանց մնացորդի բաժանվող ամբողջ թվերի համախումբը կլինի օղակ։ Կենտ թվերն օղակ չեն կազմում, քանի որ երկու կենտ թվերի գումարը զույգ է։

Օղակ կլինի այն ռացիոնալ թվերի համախումբը, որոնց չկրճատվող կոտորակի տեսքով գրառման հայտարարները հանդիսանում են 2 թվի որևէ աստիճաններ. այդ համախմբին են պատկանում, մասնավորապես, բոլոր ամբողջ թվերը, քանի որ նրանց չկրճատվող գրառումներն ունեն 1 հայտարարը, այսինքն՝ երկուսը զրո աստիճանում։ Այդ օրինակի մեջ 2-ի փոխարեն կարելի է վերցնել, ինարկե, ցանկացած p պարզ թիվ։ Ընդհանրապես, վերցնելով պարզ թվերի ցանկացած բազմություն, վերջավոր կամ նույնիսկ անվերջ, և դիտարկելով այն ռացիոնալ թվերի սիստեմը, որոնց չկրճատվող գրառումների հայտարարները կարող են բաժանվել միայն վերցրած բազմությանը պատկանող պարզ թվերի վրա, մենք դարձյալ կստանանք օղակ։ Մյուս կողմից, այն ռացիոնալ թվերի համախումբը, որոնց չկրճատվող գրառումների հայտարարները չեն բաժանվում ոչ մի պարզ թվի քառակուսու վրա, օղակ չի լինի, քանի որ թվերի նշված հատկությունը չի պահպանվում նրանց բազմապատկման ժամանակ։

Անցնենք թվային այնպիսի օղակների օրինակներին, որոնք ամբողջովին չեն գտնվում ռացիոնալ թվերի օղակի մեջ։

$$a+b\sqrt{2} \tag{1}$$

տեսքի թվերի համախումբը, որտեղ a-ն և b-ն ցանկացած ռացիոնալ թվեր են, կլինի օղակ. այդ օղակին են պատկանում, մասնավորապես, բոլոր ռացիոնալ թվերը ($b=0$ դեպքում), ինչպես նաև $\sqrt{2}$ թիվը ($a=0$, $b=1$ դեպքում)։ Մենք դարձյալ օղակ կստանայինք, եթե սահ-

սահմանափակվեինք միայն ամբողջ a և b գործակիցներ ունեցող (1) տեսքի թվերով։ Այս օրինակների մեջ, ինարկե, $\sqrt{2}$ թվի փոխարեն կարելի է վերցնել $\sqrt{3}$ կամ $\sqrt{5}$ և այլն։

$$a+b\sqrt[3]{2} \tag{2}$$

տեսքի թվերի սիստեմը ցանկացած ռացիոնալ (կամ միայն ցանկացած ամբողջ) a և b գործակիցներով օղակ չի լինի, քանի որ $\sqrt[3]{2}$ թվի արտադրյալն ինքն իր հետ, ինչպես հեշտ է ստուգել, չի կարելի գրել (2) տեսքով[1]։

Սակայն,

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \tag{3}$$

տեսքի թվերի սիստեմը, ցանկացած a, b, c ռացիոնալ գործակիցներով, արդեն կլինի օղակ, և այդ նույնը տեղի ունի, եթե սահմանափակվենք ամբողջ գործակիցների դեպքով։

Այժմ դիտարկենք բոլոր այն իրական թվերը, որոնք կարելի է ստանալ, մի քանի անգամ կիրառելով գումարման, բազմապատկման և հանման գործողություններն ընթերցողին լավ հայտնի π թվի և որևէ ռացիոնալ թվի հետ։ Դրանք կլինեն այնպիսի թվեր, որոնք կարող են գրվել

$$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\ldots+a_n\pi^n \tag{4}$$

տեսքով, որտեղ a_0, a_1, ..., a_n թվերը ռացիոնալ են, $n\geqslant 0$։ Նկատենք, որ ոչ մի թիվ չի կարող ունենալ (4) տեսքի երկու տարբեր գրառում, հակառակ դեպքում, վերցնելով այդպիսի երկու գրառումների տար-

[1] Իրոք, դիցուք

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}, \tag{2'}$$

որտեղ a և b թվերը ռացիոնալ են։ Բազմապատկելով այս հավասարության երկու մասն էլ $\sqrt[3]{2}$-ով, կստանանք՝

$$2=a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}\,;$$

Տեղադրելով այստեղ $\sqrt[3]{4}$-ի համար (2′) արտահայտությունը, մենք ակնհայտ ձևափոխություններից հետո կգանք՝

$$(a+b^2)\sqrt[3]{2}=2-ab \tag{2''}$$

հավասարությանը։ Եթե $a+b^2\neq 0$, ապա

$$\sqrt[3]{2}=\frac{2-ab}{a+b^2},$$

որը հնարավոր չէ, քանի որ աջ մասում գրված է ռացիոնալ թիվ։ Իսկ եթե $a+b^2=0$, ապա (2″)-ի պատճառով նաև $2-ab=0$։ Այս երկու հավասարություններից բխում է՝ $b^3=-2$, որը նորից հնարավոր չէ b թվի ռացիոնալ լինելու հետևանքով։

բերությունը, մենք կստանայինք, որ π թիվը բավարարում է ռացիոնալ գործակիցներով մի հավասարման. մաթեմատիկական անալիզի մեթոդներով ապացուցվում է, սակայն, որ π թիվն իրականում չի կարող բավարարել ռացիոնալ գործակիցներով և ոչ մի հավասարման, այսինքն՝ տրանսցենդենտ թիվ է։ Չօգտագործելով, իմիջիայլոց, այս արդյունքը, այսինքն՝ չենթադրելով, որ թվի (4) տեսքի գրառումը միարժեք է, համենայն դեպս կարելի է ցույց տալ, որ (4) տեսքի թվերը կազմում են օղակ։

Օղակ կլինի նաև այն թվերի համախումբը, որոնք ստացվում են π թվից և ռացիոնալ թվերից գումարման, բազմապատկման, հանման և բաժանման գործողությունների օգնությամբ՝ կիրառված մի քանի անգամ։ Ապացուցման համար անհրաժեշտություն չկա դիտարկվող թվերի համար փնտրել ինչ-որ հատուկ լավ գրառում (չնայած այն կարող է և գտնվել). եթե α և β թվերը ստացված են π թվից և որոշ ռացիոնալ թվերից՝ նշված գործողություններով, ապա դա ճիշտ է, հասկանալի է, նաև $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ թվերի համար, նմանապես և ($\beta\neq 0$ դեպքում) $\frac{\alpha}{\beta}$ թվի համար։

Վերջապես, վերցնելով $a+bi$ կոմպլեքս թվերի համախումբը ցանկացած a, b ռացիոնալ գործակիցներով, մենք կստանանք օղակ. նույնը տեղի կունենա, եթե մենք սահմանափակվենք a, b ամբողջ գործակիցներով։

Դիտարկված օրինակները չեն կարող տալ լրիվ պատկերացում այն մասին, թե որքան բազմազան են լինում թվային օղակները։ Սակայն, մենք առժամանակ չենք շարունակի օրինակների մեր ցուցակը և կանգնենք թվային օղակների մի հատուկ և շատ կարևոր տիպի դիտարկմանը։ Մենք գիտենք, իհարկե, որ բոլոր ռացիոնալ, բոլոր իրական և բոլոր կոմպլեքս թվերի սիստեմներում կարելի է անսահմանափակորեն կատարել բաժանում (բացի զրոյի վրա բաժանելուց), այն դեպքում, երբ ամբողջ թվերի բաժանումը դուրս է բերում այդ թվերի սիստեմի սահմաններից։ Մինչև այժմ մենք լուրջ ուշադրություն չենք դարձրել այդ տարբերության վրա, այնինչ իրականում դա շատ էական է և բերում է հետևյալ սահմանմանը.

Թվային օղակը կոչվում է **թվային դաշտ** կամ **թվադաշտ**, եթե նա պարունակում է իր ցանկացած երկու թվերի քանորդը (բաժանարարը, իհարկե, ենթադրվում է զրոյից տարբեր)։

Կարելի է խոսել, հետևաբար, ռացիոնալ թվերի դաշտի, իրական թվերի դաշտի, կոմպլեքս թվերի դաշտի մասին, այն դեպքում, երբ ամբողջ թվերի օղակը դաշտ չի հանդիսանում։

Վերևում դիտարկված թվային օղակների օրինակներից մի քանիսն իրականում հանդիսանում են դաշտեր։ Նախ նկատենք, որ գոյություն չունեն այնպիսի թվադաշտեր, որոնք ռացիոնալ թվերի դաշտից տարբեր են և ամբողջովին պարունակվում են նրա մեջ (միայնակ զրոյից կազմված սիստեմը մենք դաշտ չենք համարի)։ Իրավացի է նույնիսկ հետևյալ ավելի ընդհանուր պնդումը.

Ռացիոնալ թվերի դաշտն ամբողջությամբ պարունակվում է ամեն մի թվային դաշտի մեջ։

Իրոք, դիցուք տված է մի որևէ թվային դաշտ, որը մենք կնշանակենք P տառով։ Եթե a-ն P դաշտի ցանկացած թիվն է, զրոյից տարբեր, ապա P դաշտը պարունակում է և a թիվն ինքն իր վրա բաժանելուց առաջացած քանորդը, այսինքն՝ մեկ թիվը։ Գումարելով մեկն ինքն իրեն մի քանի անգամ, մենք կստանանք, որ բոլոր բնական թվերը պարունակվում են P դաշտի մեջ։ Մյուս կողմից, P դաշտում պետք է պարունակվի $a-a$ տարբերությունը, այսինքն՝ զրո թիվը, դրա հետևանքով P դաշտին է պատկանում նաև ցանկացած բնական թիվը զրոյից հանելուց ստացված արդյունքը, այսինքն՝ ամեն մի ամբողջ բացասական թիվ։ Վերջապես, P դաշտում են գտնվում նաև ամբողջ թվերի քանորդները, այսինքն՝ ընդհանրապես բոլոր ռացիոնալ թվերը։

Կոմպլեքս թվերի դաշտում պարունակվում են զանազան շատ դաշտեր, և ռացիոնալ թվերի դաշտը նրանց մեջ կլինի միայն ամենափոքրը։ Այսպես, վերևում դիտարկված

$$a+b\sqrt{2} \tag{5}$$

տեսքի թվերի օղակը ցանկացած ռացիոնալ (բայց ոչ միայն ամբողջ) a, b գործակիցներով կլինի դաշտ։ Իրոք, դիտարկենք (5) տեսքի $a+b\sqrt{2}$ և $c+d\sqrt{2}$ երկու թվերի քանորդը, ըստ որում՝ երկրորդ թիվը համարենք զրոյից տարբեր. հետևաբար, զրոյից տարբեր է և $c-d\sqrt{2}$ թիվը, և այդ պատճառով՝

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^3-2d^2}\sqrt{2}.$$

Մենք ստացանք նորից (5) տեսքի թիվ, ընդ որում գործակիցները մնում են ռացիոնալ։ Այս օրինակում $\sqrt{2}$ թիվը, հասկանալի է, կարելի է փոխարինել քառակուսի արմատով այնպիսի ցանկացած ռացիոնալ թվից, որից ռացիոնալ թվերի դաշտում քառակուսի արմատ չի հանվում։ Այսպես, դաշտ են կազմում $a+bi$ տեսքի թվերը՝ ռացիոնալ a, b թվերի դեպքում։

§ 44. Օղակ

Մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում, ինչպես նաև տեխնիկայում և բնագիտության մեջ մաթեմատիկայի կիրառություններում շատ հաճախ հարկ է լինում հանդիպել այնպիսի վիճակի հետ, երբ հանրահաշվական գործողություններ են կատարվում ոչ թե թվերի, այլ բոլորովին այլ բնույթի օբյեկտների հետ։ Մեծ թվով այդպիսի օրինակներ կարելի է գտնել գրքի նախորդող գլուխներում. հիշեցնենք մատրիցների բազմապատկումը և գումարումը, վեկտորների գումարումը, գործողությունները բազմանդամների հետ գործողությունները գծային ձևափոխությունների հետ։ Հանրահաշվական գործողության ընդհանուր սահմանումը, որին բավարարում են գումարման և բազմապատկման գործողությունները թվային օղակներում, ինչպես նաև գործողությունները նշված օրինակներում, կայանում է հետևյալում։

Դիցուք տված է որևէ M բազմություն, որը կազմված է կամ թվերից, կա՛մ երկրաչափական բնույթի օբյեկտներից, ընդհանրապես՝ որոշ առարկաներից, որոնք մենք կանվանենք այդ բազմության էլեմենտները։ Ասում են, որ M բազմության մեջ սահմանված է հանրահաշվական գործողություն, եթե նշված է այն օրենքը, որով այդ բազմության a, b էլեմենտների ցանկացած զույգին միարժեքորեն համապատասխանեցվում է մի որոշ երրորդ c էլեմենտ՝ նույնպես M-ին պատկանող։ Այդ գործողությունը կարող է կոչվել գումարում, և այդ դեպքում c-ն կկոչվի a և b էլեմենտների գումար և կնշանակվի $c=a+b$ սիմվոլով, այդ գործողությունը կարող է կոչվել բազմապատկում, այսինքն՝ c-ն կլինի a և b էլեմենտների արտադրյալը՝ $c=ab$։ Վերջապես, հնարավոր է, որ M բազմության մեջ սահմանված գործողության համար մտցվի նոր տերմինաբանություն և սիմվոլիկա։

Թվային օղակներից յուրաքանչյուրում սահմանված են երկու անկախ գործողություններ՝ գումարում և բազմապատկում։ Իսկ ինչ վերաբերում է հանմանը և բաժանմանը, ապա նրանց չի կարելի համարել նոր գործողություններ, քանի որ նրանք հակադարձ գործողություններ են՝ համապատասխանաբար գումարման և բազմապատկման համար, եթե մենք ընդունենք հակադարձ գործողության հետևյալ ընդհանուր սահմանումը։

Դիցուք M բազմության մեջ սահմանված է հանրահաշվական մի գործողություն, օրինակ՝ գումարում։ Ասում են, որ այդ գործողության համար գոյություն ունի հակադարձ գործողություն՝ հանումը, եթե M-ին պատկանող a, b էլեմենտների ցանկացած զույգի համար M-ում գոյություն ունի այնպիսի d էլեմենտ, ընդ որում՝ միակը, որը բավարարում է $b+d=a$ հավասարությանը։ Այդ դեպքում d էլեմենտը

կոչվում է a և b էլեմենտների տարբերություն և նշանակվում է $d=a-b$ սիմվոլով։

Թվային դաշտերում հակադարձ գործողությամբ է օժտված, ակներևորեն, ինչպես գումարումը, այնպես էլ բազմապատկումը (վերջինը, ճիշտ է, սահմանափակ է՝ բաժանարարը պետք է տարբեր լինի զրոյից)։ Իսկ այնպիսի թվային օղակներում, որոնք դաշտեր չեն հանդիսանում (ինչպես, օրինակ, ամբողջ թվերի օղակում), հակադարձ գործողությամբ օժտված է միայն գումարումը։

Մյուս կողմից, x անհայտի բոլոր բազմանդամների սիստեմում, որոնց գործակիցները պատկանում են մի որոշակի P թվադաշտի, նույնպես սահմանված են երկու գործողություններ՝ գումարումը և բազմապատկումը, ընդ որում գումարումն օժտված է հակադարձ գործողությամբ՝ հանումով։

Ե՛վ թվային օղակներում, և՛ բազմանդամների սիստեմում գումարման և բազմապատկման գործողությունները, ինչպես հայտնի է, օժտված են հետևյալ հատկություններով (a-ն, b-ն, c-ն կամայական թվեր են դիտարկվող թվային օղակից, կամ կամայական բազմանդամներ են դիտարկվող սիստեմից).

I. Գումարումը տեղափոխելի է՝ $a+b=b+a$։

II. Գումարումը զուգորդելի է՝ $a+(b+c)=(a+b)+c$։

III. Բազմապատկումը տեղափոխելի է՝ $ab=ba$։

IV. Բազմապատկումը զուգորդելի է՝ $a(bc)=(ab)c$։

V. Գումարումը և բազմապատկումը կապված են բաշխելիության օրենքով՝

$$(a+b)c=ac+bc։$$

Մենք արդեն նախապատրաստված ենք օղակի գաղափարի, հանրահաշվի կարևորագույն գաղափարներից մեկի, ընդհանուր սահմանմանը։

R բազմությունը կոչվում է օղակ, եթե նրա մեջ սահմանված են երկու գործողություններ՝ գումարում և բազմապատկում, երկուսն էլ օժտված են տեղափոխելիության և զուգորդելիության հատկությամբ, ինչպես նաև կապված են բաշխելիության օրենքով, ընդ որում գումարումն օժտված է հակադարձ գործողությամբ՝ հանումով։

Այսպիսով, օղակների օրինակներ են հանդիսանում թվային օղակները և x անհայտի բազմանդամների օղակները՝ տված թվային դաշտից կամ նույնիսկ տված թվային օղակից վերցված գործակիցներով։ Նշենք ևս մի օրինակ, որը լավ պարզաբանում է օղակի գաղափարի լայն լինելը։

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացն սկսվում է x իրական փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանումով։ Դիտարկենք այն ֆունկցիաների համախմբությունը, որոնք որոշված են x-ի բոլոր իրական արժեքների համար և ընդունում են իրական արժեքներ, և հետևյալ կերպ սահմանենք հանրահաշվական գործողություններն այդ համախմբության մեջ. $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաների գումար կլինի մի ֆունկցիա, որի արժեքը ցանկացած $x=x_0$ դեպքում հավասար է տված ֆունկցիաների արժեքների գումարին, այսինքն՝ հավասար է $f(x_0)+g(x_0)$ գումարին. այդ ֆունկցիաների արտադրյալը մի ֆունկցիա է, որի արժեքը ամեն մի $x=x_0$ դեպքում հավասար է $f(x_0)\cdot g(x_0)$ արտադրյալին։ Գումարը և արտադրյալը գոյություն ունեն, ակներևորեն, դիտարկվող համախմբության ցանկացած երկու ֆունկցիաների համար։ I—V հատկությունների իրավացիությունը ստուգվում է առանց որևէ դժվարության. ֆունկցիաների գումարումը և բազմապատկումը բերվում են նրանց արժեքների գումարմանը և բազմապատկմանը ամեն մի x-ի դեպքում, այսինքն՝ իրական թվերի հետ կատարվող գործողություններին, որոնց համար I—V հատկությունները տեղի ունեն։ Վերջապես, $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների տարբերություն համարելով այն ֆունկցիան, որի արժեքն ամեն մի x-ի դեպքում հավասար է $f(x_0)-g(x_0)$ տարբերությանը, մենք հանգում ենք գումարմանը հակադարձ՝ հանման գործողությանը։ Սրանով ապացուցված է, որ բոլոր իրական x-երի համար որոշված ֆունկցիաների համախմբությունը, վերևում նկարագրված եղանակով գումարման և բազմապատկման գործողություններ մուծելուց հետո, դառնում է օղակ:

Ֆունկցիաների օղակների ուրիշ օրինակներ կարելի է ստանալ, պահպանելով ֆունկցիաների հետ կատարվող գործողությունների վերևում տված սահմանումները, բայց դիտարկելով՝այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են, օրինակ, x փոփոխականի միայն դրական արժեքների համար, կամ ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են $[0, 1]$ հատվածում գտնվող x-ի արժեքների համար։ Ընդհանրապես օղակ կլինի այն բոլոր ֆունկցիաների սիստեմը, որոնք ունեն որոշման ինչ-որ տված տիրույթ։ Օղակների օրինակներ կարելի էր ստանալ նաև դիտարկելով ոչ բոլոր ֆունկցիաները, որոնք որոշված են տվյալ տիրույթում, այլ միայն մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում ուսումնասիրվող անընդհատ ֆունկցիաները։ Մյուս կողմից, կարելի էր դիտարկել կոմպլեքս փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաներ։ Ընդհանրապես ֆունկցիաների տարբեր օղակներ, ինչպես և թվային տարբեր օղակներ, չափազանց շատ կան։

Անցնենք օղակների մի քանի պարզագույն հատկությունների արտածմանը, որոնք անմիջականորեն բխում են օղակի սահմանումից։ Այդ հատկությունները թվերի դեպքում միանգամայն սովորական են, սակայն ընթերցողին, թերևս, երբեմն թվան

անսպասելի, որ դրանք հանդիսանում են հետևանքները միայն I—V պայմանների և միարժեք հանման գոյության։

Նախ մի քանի դիտողություններ I—V պայմանների նշանակության մասին։ Տեղափոխելիության օրենքների դերը պարզաբանում չի պահանջում: Զուգորդելիության օրենքների նշանակությունը կայանում է հետևյալում. հանրահաշվական գործողության սահմանման մեջ խոսվում է միայն երկու էլեմենտների գումարի կամ արտադրյալի մասին։ Իսկ եթե մենք փորձենք որոշել, օրինակ, a, b, c երեք էլեմենտների արտադրյալը, ապա կհանդիպենք այսպիսի դժվարության հետ. au և vc արտադրյալները, որտեղ $bc=u$, $ab=v$, կարող են, ընդհանրապես ասած, չհամընկնել, այսինքն՝ $a(bc)\neq(ab)c$։ Զուգորդելիության օրենքը պահանջում է, որպեսզի այդ արտադրյալները հավասար լինեն օղակի միևնույն էլեմենտին. այդ էլեմենտը բնական է ընդունել որպես abc արտադրյալ՝ գրված արդեն առանց որևէ փակագծի։ Դեռ ավելին, զուգորդելիության օրենքը թույլ է տալիս արտադրյալը (համապատասխանաբար՝ գումարը) միարժեքորեն որոշել օղակի ցանկացած վերջավոր թվով էլեմենտների համար, այսինքն՝ թույլ է տալիս ապացուցելու ցանկացած n էլեմենտների արտադրյալի անկախությունը փակագծերի սկզբնական դասավորությունից։

Այս պնդումն ապացուցենք ինդուկցիայով ըստ n-ի։ $n=3$ համար դա արդեն ապացուցված է, այդ պատճառով ենթադրում ենք $n>3$, ընդ որում ընդունում ենք, որ n-ից փոքր բոլոր թվերի համար մեր պնդումն արդեն ապացուցված է։ Դիցուք տված են $a_1, a_2, \ldots, a_n$ էլեմենտները և դիցուք այդ սիստեմում մի ինչ-որ ձևով փակագծերը բաշխված են, որոնք ցույց են տալիս այն կարգը, որով պետք է կատարվի բազմապատկումը։ Վերջին քայլը կլինի առաջին k էլեմենտների $a_1, a_2, \ldots a$ (որտեղ $1\leqslant k\leqslant n-1$) արտադրյալի բազմապատկումը $a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n$ արտադրյալով։ Քանի որ այդ արտադրյալները կազմված են n-ից փոքր թվով արտադրիչներից և հետևաբար, ըստ ենթադրության, միարժեքորեն որոշված են, ապա մեզ մնում է ցանկացած k-ի և l-ի համար ապացուցել

$$(a_1a_2\ldots a_k)\,(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n)=(a_1a_2\ldots a_l)\,a_{l+1}a_{l+2}\ldots a_n)$$

հավասարությունը։ Դրա համար բավական է դիտարկել $l=k+1$ դեպքը։ Այդ դեպքում, սակայն, նշանակելով

$$a_1a_2\ldots a_k=b, \quad a_{k+2}a_{k+3}\ldots a_n=c,$$

զուգորդելիության օրենքի հիման վրա մենք ստանում ենք՝

$$b(a_{k+1}c)=(ba_{k+1})c.$$

Սրանով մեր պնդումն ապացուցված է։

Մասնավորապես կարելի է խոսել n հատ իրար հավասար էլեմենտների արտադրյալի մասին, այսինքն՝ մուծել a էլեմենտի n ՝ամբողջ դրական ցուցիչով a^n աստիճանի գաղափարը։ Հեշտ է ստուգել, որ ցուցիչների հետ գործողություններ կատարելու բոլոր սովորական կանոնները մնում են իրավացի ցանկացած օղակում։ Գումարման զուգորդելիության օրենքը համանման ձևով բերում է a էլեմենտի na բազմապատիկի գաղափարին՝ ամբողջ դրական n գործակցով։

Բաշխելիության օրենքը, այսինքն՝ փակագծերի բացման սովորական կանոնը, միակ պահանջն է օղակի սահմանման մեջ, որը կապում է գումարումը և բազմապատկումը. շնորհիվ միայն այդ օրենքի, նշված երկու գործողությունների ուսումնասիրությունը տալիս է ավելին, քան կարելի էր ստանալ նրանց անջատ ուսումնասիրման դեպքում։ Բաշխելիության օրենքի ձևակերպման մեջ մասնակցում է միայն երկու գումարելիների գումարը։ Առանց մի դժվարության ապացուցվում է սակայն,

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)b=a_1b+a_2b\ldots+a_kb$$

հավասարության իրավացիությունը ցանկացած k-ի դեպքում, իսկ հետո նաև գումարը գումարով բազմապատկելու ընդհանուր կանոնը։

Ամեն մի օղակում բաշխելիության օրենքը տեղի ունի նաև տարբերության համար։ Իսկապես, ըստ տարբերության սահմանման՝ $a-b$ էլեմենտը բավարարում է

$$b+(a-b)=a$$

հավասարությանը։ Այդ հավասարության երկու կողմն էլ բազմապատկելով c-ով և հավասարման ձախ մասի նկատմամբ կիրառելով բաշխելիության օրենքը, մենք ստանում ենք՝

$$bc+(a-b)c=ac.$$

Հետևաբար, $(a-b)c$ էլեմենտը հանդիսանում է ac և bc էլեմենտների տարբերությունը՝

$$(a-b)c=ac-bc.$$

Օղակների շատ կարևոր հատկություններ բխում են հանման գոյությունից։ Եթե a-ն R օղակի կամայական էլեմենտ է, ապա $a-a$ տարբերությունը կլինի օղակի միանգամայն որոշակի մի էլեմենտը։ Նրա դերը նույնանման է զրոյի դերին թվային օղակներում, սակայն, ըստ սահմանման, նա կարող է կախված լինել a էլեմենտի ընտրությունից և հետևաբար, մենք այն առայժմ կնշանակենք 0_a-ով։

Ապացուցենք, որ իրականում 0_a էլեմենտները բոլոր a-երի համար իրար հավասար են։ Իրոք, եթե b-ն R օղակի կամայական ուրիշ էլեմենտ է, ապա

$$a+(b-a)=b$$

հավասարման երկու մասերին էլ ավելացնելով 0_a էլեմենտը և օգտագործելով $0_a+a=a$ հավասարությունը, մենք ստանում ենք՝

$$0_a+b=0_a+a+(b-a)=a+(b-a)=b.$$

Այսպիսով՝

$$0_a=b-b=0_b.$$

Մենք ապացուցեցինք, որ ամեն մի R օղակ ունի միարժեքորեն որոշված մի էլեմենտ, որի գումարը այդ օղակի ցանկացած a էլեմենտի հետ հավասար է a-ի։ Այդ էլեմենտը կանվանենք R օղակի զրո և կնշանակենք 0 սիմվոլով՝ կարծելով, որ լուրջ վտանգ չկա այն շփոթելու զրո թվի հետ։ Այսպիսով՝

$$a+0=a$$

R օղակի բոլոր a էլեմենտների համար։

Այնուհետև, ամեն մի օղակում ցանկացած a էլեմենտի համար գոյություն ունի միարժեքորեն որոշված $-a$ հակադիր էլեմենտ, որը բավարարում է

$$a+(-a)=0$$

հավասարությանը. այդ էլեմենտը $0-a$ տարբերությունն է. միարժեքությունը հետևում է հանման միարժեքությունից։ Ակներև է, որ $-(-a)=a$։ Օղակի երկու ցանկացած էլեմենտների $b-a$ տարբերությունը այժմ կարելի է գրել

$$b-a=b+(-a)$$

տեսքով։ Իսկապես,

$$[b+(-a)]+a=b+[(-a)+a]=b+0=b.$$

Օղակի ցանկացած a էլեմենտի և ցանկացած ամբողջ դրական n թվի համար տեղի ունի

$$n(-a)=-(na)$$

հավասարությունը։ Իրոք, գումարելիների խմբավորումով ստանում ենք՝

$$na+n(-a)=n[a+(-a)]=n\cdot 0=0.$$

Մենք այժմ հնարավորություն ստացանք որոշելու օղակի էլեմենտի բացասական բազմապատիկները. եթե $n>0$, ապա իրար հավասար $n(-a)$ և $-(na)$ էլեմենտները կնշանակվեն $(-n)a$-ով։ Վերջապես, պայմանավորվենք ցանկացած a էլեմենտի $0\cdot a$ զրոյական բազմապատիկ համարել դիտարկվող օղակի զրոն։

Զրոյի սահմանումը մեր կողմից տրված է միայն գումարման և նրա հակադարձ գործողության օգնությամբ, այսինքն՝ առանց բազմապատկման օգտագործման։ Սակայն, թվերի դեպքում զրո թիվը բազմապատկման նկատմամբ ևս օժտված է մի բնորոշ և, ընդ որում, շատ կարևոր հատկությամբ։ Պարզվում է, որ այդ հատկությամբ օժտված է ցանկացած օղակի զրոն. ամեն մի օղակում ցանկացած էլեմենտի և զրոյի արտադրյալը հավասար է զրոյի։ Ապացույցն անմիջականորեն հենվում է բաշխելիության օրենքի վրա. եթե a-ն R օղակի կամայական էլեմենտ է, ապա, ինչպիսին էլ լինի այդ օղակի x օժանդակ էլեմենտը, մենք կստանանք՝

$$a \cdot 0 = a(x - x) = ax - ax = 0.$$

Օգտվելով զրոյի այս հատկությունից, կարելի է ապացուցել, որ ամեն մի օղակում ցանկացած a, b էլեմենտների համար իրավացի է

$$(-a)b = -ab$$

հավասարությունը։ Իսկապես,

$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0 \cdot b = 0.$$

Այստեղից հետևում է, որ բացասական թվերի բազմապատկման լավ հայտնի և, համենայն դեպս, որոշ չափով խորհրդավոր կանոնը՝ «մինուսը մինուսով տալիս է պլյուս», նույնպես հետևում է օղակի սահմանումից, այսինքն՝ ցանկացած օղակում տեղի ունի

$$(-a)(-b) = ab$$

հավասարությունը։ Իրոք՝

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-ab) = ab.$$

Ընթերցողն այժմ առանց դժվարության կապացուցի, որ ամեն մի օղակում ցանկացած էլեմենտի բազմապատիկների համար (այդ թվում նաև բացասական բազմապատիկների համար) իրավացի են մնում թվի բազմապատիկների հետ գործողություններ կատարելու բոլոր կանոնները։

Այսպիսով, կամայական օղակում հանրահաշվական գործողությունները օժտված են թվերի հետ կատարվող գործողությունների՝ մեզ համար սովորական շատ հատկություններով։ Սակայն, չպետք է կարծել, որ թվերի գումարման և բազմապատկման ցանկացած հատկությունը պահպանվում է ամեն մի օղակում։ Այսպես, թվերի բազմապատկումն օժտված է վերևում դիտարկված հատկության հակադարձ հատկությամբ՝ եթե երկու թվերի արտադրյալը հավասար է զրոյի, ապա արտադրիչներից գոնե մեկը հավասար է զրոյի։ Այս հատկությունն արդեն չի կարող տարածվել ցանկացած օղակների վրա. որոշ օղակներում կարելի է ցույց տալ զրոյից տարբեր էլեմենտների այնպիսի զույգեր, որոնց արտադրյալը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $a \neq 0$, $b \neq 0$, բայց $ab = 0$. այս հատկությունն ունեցող a և b էլեմենտները կոչվում են զրոյի բաժանարարներ։

Զրոյի բաժանարարներ ունեցող օղակների օրինակներ, հասկանալի է, չի կարելի գտնել թվային օղակների մեջ։ Զրոյի բաժանարարներ չեն պարունակում նաև թվային գործակիցներով բազմանդամների օղակնե-

րը։ Սակայն, ֆունկցիաների շատ օղակներ ունեն զրոյի բաժանարարներ։ Ամենից առաջ նկատենք, որ ֆունկցիաների ամեն մի օղակում զրո կլինի այն ֆունկցիան, որը հավասար է զրոյի x փոփոխականի բոլոր արժեքների համար։ Այժմ կառուցենք հետևյալ f(x) և g(x) ֆունկցիաները, որոնք որոշված են x-ի բոլոր իրական արժեքների համար՝

$$f(x) = 0 \quad \text{երբ} \quad x \leqslant 0, \qquad f(x) = x, \quad \text{երբ} \quad x > 0;$$
$$g(x) = x \quad \text{երբ} \quad x \leqslant 0, \qquad g(x) = 0, \quad \text{երբ} \quad x > 0:$$

Այս երկու ֆունկցիաներն էլ տարբեր են զրոյից, քանի որ նրանց արժեքները x-ի ոչ բոլոր արժեքների համար են հավասար զրոյի, իսկ այդ ֆունկցիաների արտադրյալը հավասար է զրոյի։

Օղակի սահմանման մեջ մտնող I—V պահանջներից ոչ բոլորն են միևնույն չափով անհրաժեշտ։ Գիտության զարգացումը ցույց է տալիս, որ այն ժամանակ, երբ գումարման I և II հատկությունները և V բաշխելիության օրենքը տեղի ունեն բոլոր կիրառություններում, օղակի սահմանման մեջ բազմապատկման III և IV հատկությունները մտցնելը հաճախ դառնում է չափից ավելի կաշկանդող, որը նեղացնում է այդ գաղափարի կիրառելիության հնարավոր բնագավառները։ Այսպես, իրական էլեմենտներով n-րդ կարգի քառակուսային մատրիցների բազմությունը՝ դիտարկված մատրիցների գումարման և բազմապատկման գործողությունների հետ միասին, բավարարում է օղակի սահմանման մեջ մտնող բոլոր պահանջներին, բացառությամբ բազմապատկման տեղափոխելիության օրենքի։ Ոչտեղափոխելի բազմապատկումների հետ հարկ է լինում հանդիպել այնքան հաճախ և այնպիսի կարևոր դեպքերում, որ ներկայումս «օղակ» տերմինի տակ սովորաբար հասկանում են ոչտեղափոխելի, ոչկոմուտատիվ օղակ (ավելի ճիշտ՝ ոչ անպայման տեղափոխելի օղակ՝ այն իմաստով, որ բազմապատկումը կարող է և տեղափոխելի չլինել), անվանելով տեղափոխելի կամ կոմուտատիվ օղակներ՝ օղակների այն մասնավոր տեսակը, որոնցում III պահանջը բավարարվում է։

Վերջին ժամանակներս ավելացել է հետաքրքրությունը նաև ոչզուգորդելի բազմապատկում ունեցող օղակների նկատմամբ և օղակների ընդհանուր տեսությունն այժմ արդեն կառուցվում է որպես ոչզուգորդելի (այսինքն՝ ոչ անպայման զուգորդելի) օղակների տեսություն։ Այդպիսի օղակների պարզագույն օրինակ է հանդիսանում էվկլիդյան եռաչափ տարածության վեկտորների բազմությունը՝ գումարման և (անալիտիկ երկրաչափության դասընթացից հայտնի) վեկտորների վեկտորական բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ։

§ 45. Դաշտ

Ինչպես թվային օղակների մեջ առանձնացվեցին և կոչվեցին թվային դաշտեր այն օղակները, որոնցում կարելի է կատարել բաժանում (բացի զրոյի վրա բաժանելուց), բնական է նման ձևով այդ անել և ընդհանուր դեպքում։ Նախ նկատենք, որ ոչ մի օղակում հնարավոր չէ բաժանում զրոյի վրա՝ բազմապատկման նկատմամբ զրոյի՝ վերևում ապացուցված հատկության պատճառով. a էլեմենտը զրոյի վրա բաժանել, նշանակում է օղակում գտնել այնպիսի x էլեմենտ, որ $0 \cdot x = a$, որը $a \neq 0$ դեպքում անհնար է, քանի որ ձախ մասը հավասար է զրոյի։

Մուծենք հետևյալ սահմանումը.

P օղակը կոչվում է դաշտ, եթե այն բաղկացած է ոչ միայն զրոյից և եթե՛ նրա մեջ բաժանումն իրագործելի է, այն էլ՝ միարժեքորեն, բոլոր դեպքերում, բացի զրոյի վրա բաժանելու դեպքից, այսինքն՝ եթե P օղակի a և b ցանկացած էլեմենտների համար, որոնցից b-ն տարբեր է զրոյից, P-ում գոյություն ունի այնպիսի q էլեմենտ, ընդ որում՝ միակը, որը բավարարում է $bq = a$ հավասարությանը։ q էլեմենտը կոչվում է a և b էլեմենտների քանորդ և նշանակվում է $q = \frac{a}{b}$ սիմվոլով[1]։

Դաշտերի օրինակներ են ծառայում, հասկանալի է, բոլոր թվային դաշտերը։ x անհայտի իրական կամ, ընդհանրապես, որևէ թվային դաշտից վերցված, գործակիցներով բազմանդամների օղակը դաշտ չի հանդիսանում. բազմանդամների համար գոյություն ունեցող մնացորդով բաժանումը տարբերվում է, իհարկե, դաշտի սահմանման մեջ ենթադրվող «ամբողջությամբ» (առանց մնացորդի) բաժանումից։ Մյուս կողմից, հեշտ է տեսնել, որ իրական գործակիցներով բոլոր կոտորակա-ռացիոնալ ֆունկցիաների (տե՛ս § 25) համախմբությունը դաշտ կլինի, որը պարունակում է բազմանդամների օղակը այնպես, ինչպես ռացիոնալ թվերի դաշտը պարունակում է ամբողջ թվերի օղակը։

Ֆունկցիաների օղակների թվում կարելի է նշել դաշտերի ուրիշ օրինակներ. սակայն մենք նրանց վրա կանգ չենք առնի և անցնում ենք բոլորովին այլ տեսակի օրինակների։

Բոլոր թվային օղակները և ընդհանրապես մինչև այժմ մեր դիտարկած բոլոր օղակները պարունակում են անվերջ բազմությամբ էլեմենտներ։ Սակայն, գոյություն ունեն օղակներ և նույնիսկ դաշտեր, որոնք բաղկացած են միայն վերջավոր թվով էլեմենտներից։ Վերջավոր օղակների և վերջավոր դաշտերի պարզագույն օրինակներ, որոնք հաճախ օգտագործվում են մաթեմատիկայի հատուկ ճյուղում՝ թվերի տեսության մեջ, կառուցվում են հետևյալ կերպ.

Վերցնում ենք 1-ից տարբեր ցանկացած n բնական թիվ։ a և b ամբողջ թվերը կոչվում են բաղդատելի ըստ n մոդուլի՝

$$a \equiv b \ (mod\ n),$$

[1] Դաշտում բաժանման միակությունը, ինչպես և օղակի սահմանման մեջ ենթադրված հանման միակությունը, իրականում կարող են առանց դժվարության ապացուցվել դաշտի, համապատասխանաբար օղակի սահմանման մեջ մտնող մյուս պահանջների օգնությամբ։

եթե այդ թվերը n-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը, այսինքն՝ եթե նրանց տարբերությունը բաժանվում է n-ի վրա առանց մնացորդի։ Ամբողջ թվերի ողջ օղակը տրոհվում է n հատ չհատվող դասերի՝

$$C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, \tag{1}$$

որոնք իրար հետ բաղդատելի են ըստ n մոդուլի, ընդ որում $C_k (k=0, 1, \ldots, n-1)$ դասը բաղկացած է այն թվերից, որոնք n-ի վրա բաժանելիս տալիս են k մնացորդ։ Պարզվում է, որ հնարավոր է միանգամայն բնական եղանակով սահմանել այդ դասերի գումարումը և բազմապատկումը։

Այդ նպատակով (1) սիստեմից վերցնենք ցանկացած (ընդսմին՝ ոչ անպայման տարբեր) C_k և C_l դասեր։ Գումարելով C_k դասի ցանկացած թիվը C_l դասի ցանկացած թվի հետ, մենք կստանանք թվեր, որոնք գտնվում են միանգամայն որոշակի մի դասում, այն է՝ C_{k+l} դասում, եթե $k+l<n$ կամ՝ C_{k+l-n} դասում, եթե $k+l \geqslant n$։ Դա հանգեցնում է դասերի գումարման այսպիսի սահմանման՝

$$\begin{aligned} C_k + C_l &= C_{k+l}, && \text{երբ } k+l<n, \\ C_k + C_l &= C_{k+l-n}, && \text{երբ } k+l \geqslant n. \end{aligned} \tag{2}$$

Մյուս կողմից, բազմապատկելով C_k դասի ցանկացած թիվը C_l դասի ցանկացած թվով, մենք կստանանք թվեր, որոնք դարձյալ գտնվում են միանգամայն որոշակի դասում, այն է՝ C_r դասում, որտեղ r-ը kl արտադրյալը n-ի վրա բաժանելուց առաջացած մնացորդն է։ Այդ պատճառով մենք ընդունում ենք դասերի բազմապատկման այսպիսի սահմանում՝

$$C_k \cdot C_l = C_r, \quad \text{որտեղ} \quad kl = nq + r, \quad 0 \leqslant r < n. \tag{3}$$

Ըստ n մոդուլի իրար հետ բաղդատելի ամբողջ թվերի դասերի (1) սիստեմը կլինի օղակ (2) և (3) պայմաններով որոշված գործողությունների նկատմամբ։ Իսկապես, օղակի սահմանման I—V պայմանների իրավացիությունն առանց դժվարության ապացուցվում է անմիջական ստուգումով, սակայն դա բխում է նաև ամբողջ թվերի օղակում այդ պայմանների իրավացիությունից և վերևում նշված այն կապից, որ գոյություն ունի ամբողջ թվերի հետ կատարվող գործողությունների և դասերի հետ կատարվող գործողությունների միջև։ Զրոյի դերը, ակներևորեն, կատարում է C_0 դասը, որը բաղկացած է n-ի վրա առանց մնացորդի բաժանվող թվերից։ $C_k (k=1, 2, \ldots, n-1)$ դասի համար հակադիր դաս կլինի C_{n-k} դասը։ Հետևաբար, դասերի (1) սիստեմում կարելի է որոշել հանումը, այսինքն՝ այդ սիստեմը բավարարում է օղակի սահմանման մեջ մտնող բոլոր պահանջներին: Պայմանավորվենք ստացված օղակը նշանակել Z_n-ով:

Եթե n-ը բաղադրյալ թիվ է, ապա Z_n օղակում կան զրոյի բաժանարարներ, ուստի և, ինչպես ցույց կտրվի ներքևում, չի կարող դաշտ լինել:

Իսկապես, եթե $n=kl$, որտեղ $1<k<n$, $1<l<n$, ապա C_k և C_l դասերը տարբեր են C_0 զրոյական դասից, բայց դասերի բազմապատկման սահմանման հիման վրա (տե՛ս § 3) $C_k \cdot C_l=C_0$:

Իսկ եթե n-ը պարզ թիվ է, ապա Z_n օղակը դաշտ կլինի: Իսկապես, դիցուք տված են C_k և C_m դասերը, ընդ որում $C_k \neq C_0$, այսինքն՝ $1 \leqslant k \leqslant n-1$: Հարկավոր է ցույց տալ, որ C_m-ը կարելի է բաժանել C_k-ի վրա, այսինքն՝ գտնել այնպիսի C_l դաս, որ $C_k \cdot C_l=C_m$: Եթե $C_m=C_0$, ապա նաև $C_l=C_0$: Իսկ եթե $C_m \neq C_0$, ապա դիտարկենք թվերի

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,(n-1)k \qquad (4)$$

սիստեմը: Բոլոր այս թվերը գտնվում են C_0 զրոյական դասից դուրս, քանի որ n պարզ թվից փոքր երկու բնական թվերի արտադրյալը չի կարող բաժանվել n-ի վրա: Այնուհետև, (4) սիստեմից ոչ մի երկու sk և $tk (s<t)$ թվեր չեն կարող գտնվել միևնույն դասի մեջ, քանի որ այդ դեպքում նրանց

$$tk-sk=(t-s)k$$

տարբերությունը կբաժանվեր n-ի վրա, որը նորից հակասում է n թվի պարզ լինելուն: Այսպիսով. յուրաքանչյուր ոչ զրոյական դասում գտնվում է ճիշտ մեկ թիվ (4) սիստեմից: Մասնավորապես, C_m դասում գտնվում է lk թիվը, որտեղ $1 \leqslant l \leqslant n-1$, այսինքն՝ $C_l \cdot C_k=C_m$, իսկ այդ դեպքում C_l դասը կլինի C_m-ը C_k-ի վրա բաժանումից առաջացած որոնելի քանորդը:

Այսպիսով, մենք ստացանք անվերջ շատ տարբեր վերջավոր դաշտեր՝ Z_2 դաշտը, որը բաղկացած է ընդամենը երկու էլեմենտից, ինչպես նաև Z_3, Z_5, Z_7, Z_{11} և այլ դաշտեր:

Անցնենք դաշտերի որոշ հատկությունների դիտարկմանը, որոնք բխում են բաժանման գոյությունից: Այդ հատկությունները համանման են օղակների այն հատկություններին, որոնք հիմնված էին հանման գոյության վրա և ապացուցվում են նույնպիսի դատողություններով. այդ պատճառով ապացույցների կատարումն առաջարկվում է ընթերցողին:

Ամեն մի P դաշտ ունի միարժեքորեն որոշված մի էլեմենտ, որի արտադրյալն այդ դաշտի ցանկացած a էլեմենտի հետ հավասար է a-ի: Այդ էլեմենտը, որը համընկնում է զրոյից տարբեր բոլոր a-երի համար $\frac{a}{a}$ իրար հավասար քանորդների հետ, կոչվում է P դաշտի միավոր և նշանակվում է 1 սիմվոլով: Այսպիսով՝

$$a \cdot 1=a$$

P դաշտի բոլոր a էլեմենտների համար:

Ամեն մի դաշտում զրոյից տարբեր ցանկացած a էլեմենտի համար գոյություն ունի միարժեքորեն որոշված a^{-1} հակադարձ էլեմենտ, որը բավարարում է

$$a \cdot a^{-1}=1$$

հավասարությանը, այն է՝ $a^{-1}=\frac{1}{a}$: Ակներև է, որ $(a^{-1})^{-1}=a$: $\frac{b}{a}$ քանորդն այժմ կարելի է գրել այս տեսքով՝

$$\frac{b}{a}=b \cdot a^{-1}.$$

Զրոյից տարբեր ցանկացած a էլեմենտի և ցանկացած n ամբողջական թվի համար տեղի ունի

$$(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}$$

հավասարությունը: Նշանակելով իրար հավասար այս էլեմենտները a^{-n}-ով, մենք հանգում ենք դաշտի էլեմենտի բացասական աստիճաններին, որոնց համար պահպանվում են գործողությունների սովորական կանոնները: Վերջապես, բոլոր a-երի համար ընդունենք $a^0=1$:

Միավորի գոյությունը դաշտերը բնորոշող հատկություն չէ. միավոր ունի, օրինակ, ամբողջ թվերի օղակը: Դրա հետ մեկտեղ, զույգ թվերի օղակի օրինակը ցույց է տալիս, որ ոչ բոլոր օղակները միավոր ունեն: Մյուս կողմից, ամեն մի օղակ, որը միավոր ունի և պարունակում է զրոյից տարբեր ցանկացած էլեմենտի հակադարձ էլեմենտը, կլինի դաշտ: Իրոք, այդ դեպքում որպես $\frac{b}{a} (a \neq 0)$ քանորդ կծառայի ba^{-1} արտադրյալը: Այս քանորդի միակությունն ապացուցվում է առանց դժվարության:

Նկատենք, որ ոչ մի դաշտ չի պարունակում զրոյի բաժանարարներ: Իսկապես, դիցուք $ab=0$, բայց $a \neq 0$: Բազմապատկելով հավասարության երկու մասերն էլ a^{-1} էլեմենտով, մենք ձախ մասում կստանանք $(a^{-1}a)b=1 \cdot b=b$, իսկ աջ մասում՝ $a^{-1} \cdot 0=0$, այսինքն՝ $b=0$: Այստեղից հետևում է, որ ամեն մի դաշտում ցանկացած հավասարություն կարելի է կրճատել զրոյից տարբեր ընդհանուր բազմապատկիչով: Իրոք, եթե $ac=bc$ և $c \neq 0$, ապա $(a-b)c=0$, որտեղից $a-b=0$, այսինքն՝ $a=b$:

$\frac{a}{b}$ (որտեղ $b \neq 0$) քանորդի սահմանումից և այն ab^{-1} արտադրյալի տեսքով գրելու վերևում ապացուցված հնարավորությունից առանց դժվարության կարելի է արտածել, որ ամեն մի դաշտում պահպանվում են կոտորակների հետ վարվելու բոլոր սովորական կանոնները, այն է՝

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ այն և միայն այն դեպքում, եթե } ad = bc,$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}:$$

Դաշտի բնութագրիչը: *Թվային դաշտերի ոչ բոլոր հատկություններն են պահպանվում կամայական դաշտերի դեպքում: Այսպես, գումարելով 1 թիվը մի քանի անգամ ինքն իր հետ, այսինքն՝ վերցնելով միավորի ցանկացած ամբողջ դրական բազմապատիկը, մենք երբեք զրո չենք ստանա և, ընդհանրապես բոլոր այդ բազմապատիկները, այսինքն՝ բոլոր բնական թվերը, իրարից տարբեր են: Իսկ եթե մենք վերցնելու լինենք միավորի ամբողջ բազմապատիկները մի որևէ վերջավոր դաշտում, ապա նրանց մեջ անպայման կլինեն հավասարները, քանի որ այդ դաշտն ունի միայն վերջավոր թվով տարբեր էլեմենտներ: Եթե P դաշտի միավորի բոլոր ամբողջ բազմապատիկները P դաշտի տարբեր էլեմենտներ են, այսինքն՝* $k \cdot 1 \neq l \cdot 1$, *երբ* $k \neq l$, *ապա ասում են, որ P դաշտն ունի* **զրո բնութագրիչ**. *այդպիսին են, օրինակ, բոլոր թվային դաշտերը: Իսկ եթե գոյություն ունեն այնպիսի k և l ամբողջ թվեր, որ* $k > l$, *բայց դաշտում տեղի ունի* $k \cdot 1 = l \cdot 1$ *հավասարությունը, ապա* $(k - l) \cdot 1 = 0$, *այսինքն՝ P դաշտում գոյություն ունի միավորի այնպիսի դրական բազմապատիկ, որը, պարզվում է, որ հավասար է զրոյի: Այդ դեպքում P-ն կոչվում է* **վերջավոր բնութագրիչ** *ունեցող դաշտ, այն է՝* **p բնութագրիչ** *ունեցող, եթե p-ն այն առաջին դրական գործակիցն է, որի հետ P դաշտի միավորը դառնում է զրո: Վերջավոր բնութագրիչ ունեցող դաշտերի օրինակներ են ծառայում բոլոր վերջավոր դաշտերը. սակայն գոյություն ունեն և անվերջ դաշտեր, որոնք ունեն վերջավոր բնութագրիչ.*

Եթե P դաշտն ունի p բնութագրիչ, ապա p թիվը կլինի պարզ թիվ: *Իսկապես,* $p = st$ *հավասարությունից, որտեղ* $s < p$, $t < p$, *կբխեր* $(s \cdot 1)(t \cdot 1) = p \cdot 1 = 0$ *հավասարությունը, այսինքն, քանի որ դաշտում չեն կարող լինել զրոյի բաժանարարներ, կա՛մ* $s \cdot 1 = 0$, *կա՛մ* $t \cdot 1 = 0$,

որը, ակներևորեն, հակասում է բնութագրիչի սահմանմանը որպես դաշտի միավորը զրո դարձնող ա մ ե ն ա փ ո ք ր դրական գործակցի:

Եթե P դաշտի բնութագրիչը հավասար է p-ի, ապա այդ դաշտի ցանկացած a էլեմենտի համար տեղի ունի $pa = 0$ հավասարությունը: Իսկ եթե P դաշտի բնութագրիչը հավասար է զրոյի և a-ն այդ դաշտի էլեմենտ է, n-ը՝ ամբողջ թիվ, ապա $a \neq 0$ և $n \neq 0$-ից բխում է $na \neq 0$:

Իսկապես, առաջին դեպքում pa *էլեմենտը, այսինքն՝ a-ին հավասար p գումարելիների գումարը, a-ն փակագծերից հանելով, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$pa = a(p \cdot 1) = a \cdot 0 = 0:$$

Երկրորդ դեպքում $na = 0$ *հավասարությունից, այսինքն՝* $a(n \cdot 1) = 0$ *հավասարությունից,* $a \neq 0$ *դեպքում կհետևեր* $n1 = 0$ *հավասարությունը, այսինքն՝ քանի որ դաշտի բնութագրիչը հավասար է զրոյի, կստացվեր* $n = 0$:

Ենթադաշտեր, ընդլայնումներ: *Դիցուք P դաշտում նրա էլեմենտների որոշ մասը, որը կազմում է մի P′ բազմություն, իրենից ներկայացնում է նույնպես դաշտ այն գործողությունների նկատմամբ, որոնք որոշված են P դաշտում, այսինքն՝ P′-ից վերցրած a, b երկու ցանկացած էլեմենտների համար P դաշտին պատկանող* $a + b$, ab, $a - b$ *և* $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$ *դեպքում) էլեմենտները պատկանում են P′-ին (I—V օրենքները, իրավացի լինելով P-ում, կլինեն, իհարկե, իրավացի և P′-ում): Այդ դեպքում P′-ը կոչվում է P դաշտի* **ենթադաշտ**, *իսկ P-ն՝ P′ դաշտի* **ընդլայնում**: *Հասկանալի է, որ P դաշտի զրոն և միավորը կպարունակվեն նույնպես P′-ում և նրա համար կծառայեն որպես զրո և միավոր: Այսպես, ռացիոնալ թվերի դաշտը իրական թվերի դաշտի ենթադաշտ է. բոլոր թվային դաշտերը կլինեն կոմպլեքս թվերի դաշտի ենթադաշտեր:*

Դիցուք P դաշտում տված են P′ ենթադաշտը և P′-ից դուրս գտնվող c էլեմենտը և դիցուք մենք գտել ենք P դաշտի այն P″ նվազագույն ենթադաշտը, որը պարունակում է և՛ P′-ը, և՛ c-ն: Այսպիսի նվազագույն ենթադաշտ կարող է լինել միայն մեկը, քանի որ եթե P‴-ը ևս լիներ մի ենթադաշտ այդպիսի հատկություններով, ապա P″ և P‴ ենթադաշտերի փոխհատումը (այսինքն՝ երկու ենթադաշտերի ընդհանուր էլեմենտների համախմբությունը) կպարունակեր P′-ը և c էլեմենտը և իր երկու ցանկացած էլեմենտների հետ կպարունակեր նաև նրանց գումարը (այդ գումարը պետք է պարունակվեր և՛ P″-ի, և՛ P‴-ի մեջ, հետևաբար, և նրանց փոխհատման մեջ), ինչպես նաև նրանց արտադրյալը, տարբերությունը և քանորդը. ուրիշ խոսքով, այդ փոխհատումն ինքը կլիներ ենթադաշտ՝ ի հակա-

ության P'' ենթադաշտի նվազագույնը լինելուն: Մենք կասենք, որ P'' դաշտն ստացված է P' դաշտին c էլեմենտի միացումով և կօգտագործենք $P''=P'(c)$ գրառումը:

Հասկանալի է, որ $P'(c)$ դաշտը c էլեմենտի և P' դաշտի բոլոր էլեմենտների հետ մեկտեղ պարունակում է նույնպես բոլոր այն էլեմենտները, որոնք ստացվում են նրանցից գումարման, բազմապատկման, հանման և բաժանման միջոցով: Որպես օրինակ նշենք ռացիոնալ թվերի դաշտի § 43-ում քննարկված ընդլայնումը, որը կազմված էր a, b ռացիոնալ գործակիցներով $a+b\sqrt{2}$ տեսքի թվերից. այս ընդլայնումն ստացվում է ռացիոնալ թվերի դաշտին միացնելով $\sqrt{2}$ թիվը:

§ 46*. Օղակների (դաշտերի) իզոմորֆիզմը: Կոմպլեքս թվերի դաշտի միակությունը

Օղակների տեսության մեջ մեծ դեր է խաղում իզոմորֆիզմի գաղափարը: Այն է՝ L և L' օղակները կոչվում են իրար իզոմորֆ, եթե նրանց միջև կարելի է ստեղծել այնպիսի փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն, որի դեպքում L-ի ցանկացած a, b էլեմենտների և L'-ից՝ նրանց համապատասխանող a', b' էլեմենտների համար $a+b$ գումարին համապատասխանում է $a'+b'$ գումարը, իսկ ab արտադրյալին՝ $a'b'$ արտադրյալը:

Դիցուք L և L' օղակների միջև ստեղծված է իզոմորֆ համապատասխանություն: Այդ համապատասխանության դեպքում L օղակի 0 զրոյին համապատասխանում է L' օղակի 0' զրոն: Իսկապես, դիցուք 0 էլեմենտին համապատասխանում է L'-ի c' էլեմենտը: Վերցնենք L-ի կամայական a էլեմենտը և նրան համապատասխանող a' էլեմենտը L'-ում: Այդ դեպքում $a+0$ էլեմենտին պետք է համապատասխանի $a'+c'$ էլեմենտը. բայց $a+0=a$, հետևաբար, $a'+c'=a'$, որտեղից $c'=0'$: Այնուհետև, $-a$ էլեմենտին համապատասխանում է $-a'$ էլեմենտը: Իսկապես, դիցուք, $-a$ էլեմենտին համապատասխանում է d' էլեմենտը: Այդ ժամանակ $a+(-a)=0$ էլեմենտին պետք է համապատասխանի $a'+d'$ էլեմենտը, այսինքն՝ $a'+d'=0'$, որտեղից $d'=-a'$: Այստեղից հետևում է, որ L օղակի էլեմենտների տարբերությանը համապատասխանում է նրանց համապատասխան էլեմենտների տարբերությունը L' օղակում:

Համանման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ եթե L օղակն ունի միավոր, ապա այդ էլեմենտի պատկերը (այսինքն L'-ում նրան համապատասխանող էլեմենտը) կլինի L' օղակի միավորը, և եթե a

էլեմենտը L-ում ունի հակադարձ էլեմենտ a^{-1}, ապա L'-ում a^{-1} էլեմենտի պատկերը կլինի a' էլեմենտի հակադարձը:

Այստեղից հետևում է, որ դաշտին իզոմորֆ օղակն ինքը նույնպես դաշտ է: Հեշտ է տեսնել նույնպես, որ օղակում զրոյի բաժանարարներ չլինելու հատկությունը նույնպես պահպանվում է իզոմորֆ համապատասխանության դեպքում: Ընդհանրապես, մեկը մյուսին իզոմորֆ օղակները կարող են տարբերվել միմյանցից իրենց էլեմենտների բնույթով, բայց նրանք նույնական են իրենց հանրահաշվական հատկություններով. յուրաքանչյուր թեորեմ, որն ապացուցված է որևէ օղակի վերաբերյալ, կլինի իրավացի նրան իզոմորֆ բոլոր օղակների համար, եթե միայն թեորեմայի ապացույցի մեջ օգտագործվել են սոսկ գործողությունների հատկությունները և ոչ թե այդ օղակի էլեմենտների անհատական հատկությունները: Այդ պատճառով մենք միմյանց իզոմորֆ օղակները կամ դաշտերը չենք համարի տարբեր. նրանք մեզ համար կլինեն միևնույն օղակի կամ դաշտի միայն տարբեր օրինակները:

Այս գաղափարը կիրառենք կոմպլեքս թվերի դաշտի կառուցման հարցում: Կոմպլեքս թվերի դաշտի § 17-ում շարադրված կառուցումը, որը հիմնված էր հարթության կետերի օգտագործման վրա, միակ հնարավորը չէ: Կետերի փոխարեն կարելի էր հարթության վրա վերցնել հատվածներ (վեկտորներ), որոնք դուրս են գալիս կոորդինատների սկզբնակետից և՝ տալով այդ վեկտորները կոորդինատների առանցքների վրա իրենց a, b բաղադրիչներով, որոշել վեկտորների գումարումը և բազմապատկումը § 17-ի միևնույն (2) և (3) բանաձևերով, ինչպես և հարթության կետերի դեպքում: Այնուհետև, կարելի էր ընդհանրապես հրաժարվել երկրաչափական նյութը մասնակից անելուց. նկատելով, որ և՛ հարթության կետերը, և՛ վեկտորները հարթության վրա տրվում են (a, b) իրական թվերի կարգավորված զույգերով, կարելի է ուղղակի վերցնել բոլոր այդպիսի զույգերի համախմբությունը և նրա մեջ սահմանել գումարումը և բազմապատկումը 17-րդ պարագրաֆի (2) և (3) բանաձևերով:

Իրականում այդ բոլոր դաշտերն իրենց հանրահաշվական հատկություններով իրարից չէին զանազանվի, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ թեորեման.

Իրական թվերի D դաշտի բոլոր ընդլայնումները, որոնք ստացվում են D դաշտին միացնելով

$$x^2+1=0 \tag{1}$$

հավասարման արմատը, իզոմորֆ են իրար:

Իսկապես, դիցուք տված է մի որևէ P դաշտ, որը հանդիսանում է D դաշտի ընդլայնումը և պարունակում է (1) հավասարմանը բավարարող էլեմենտ։ Այդ էլեմենտի նշանակման ընտրությունը գտնվում է մեր տրամադրության տակ, և մենք այդ նպատակի համար կօգտագործենք i տառը։ Այսպիսով, տեղի ունի $i^2+1=0$ հավասարությունը (որտեղից՝ $i^2=-1$), որտեղ աստիճան բարձրացնելը և գումարումը պետք է հասկանալ P դաշտում որոշված գործողությունների իմաստով։ Այժմ մենք ցանկանում ենք գտնել D(i) դաշտը, որն ստացվում է D դաշտին միացնելով i էլեմենտը, այսինքն՝ գտնել P դաշտի՝ և՛ D դաշտը՝ և՛ i էլեմենտը պարունակող նվազագույն ենթադաշտը։

Այդ նպատակով դիտարկենք P դաշտի այն բոլոր α էլեմենտները, որոնք կարելի է գրել

$$\alpha=a+bi \tag{2}$$

տեսքով, որտեղ a-ն և b-ն կամայական իրական թվեր են, իսկ թվի արտադրյալը i էլեմենտով և a թվի գումարն այդ արտադրյալի հետ պետք է հասկանալ P դաշտում որոշված գործողությունների իմաստով։ P դաշտի ոչ մի α էլեմենտ չի կարող ունենալ այդ տեսքի երկու տարբեր գրություններ.

$$\alpha=a+bi=\bar{a}+\bar{b}i$$

հավասարությունից և $b\neq\bar{b}$-ից կհետևեր, որ

$$i=\frac{\bar{a}-a}{b-\bar{b}},$$

այսինքն՝ i-ն կստացվեր իրական թիվ. իսկ եթե $b=\bar{b}$, ապա և $a=\bar{a}$։ P դաշտի (2) տեսքով գրված էլեմենտների թվին են պատկանում, մասնավորապես, բոլոր իրական թվերը ($b=0$ դեպքը), ինչպես նաև i էլեմենտը ($a=0$, $b=1$ դեպքը)։

Ցույց տանք, որ (2) տեսքի բոլոր էլեմենտների համախմբությունը կազմում է P դաշտի ենթադաշտ. հենց դա էլ կլինի որոնելի D(i) դաշտը։ Դիցուք մեզ տված են $\alpha=a+bi$ և $\beta=c+di$ էլեմենտները։ Այն ժամանակ, օգտագործելով P դաշտում բավարարվող գումարման տեղափոխելիությունն ու զուգորդելիությունը և բաշխելիության օրենքը, ստանում ենք՝

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(bi+di),$$

որտեղից՝

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i, \tag{3}$$

այսինքն՝ այս գումարը նորից պատկանում է էլեմենտների դիտարկվող բազմությանը։

Այնուհետև,

$$-\beta=(-c)+(-d)i,$$

քանի որ, նկատի ունենալով (3)-ը, այդ դեպքում իրավացի կլինի $\beta+(-\beta)=0+0i=0$ հավասարությունը. ուստի

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a-c)+(b-d)i, \tag{3'}$$

այսինքն՝ հանումը ևս մեզ չի դուրս բերում դիտարկվող բազմության սահմաններից։ Նորից օգտագործելով I—V հատկությունները, որոնք տեղի ունեն P դաշտում սահմանված գործողությունների համար (տե՛ս § 44) և հիմնվելով $i^2=1$ հավասարության վրա, մենք ստանում ենք՝

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2,$$

այսինքն՝

$$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{4}$$

այսպիսով, (2) տեսքի ցանկացած երկու էլեմենտների արտադրյալը նորից կլինի այդ տեսքի էլեմենտ։ Վերջապես, ենթադրենք, որ $\beta\neq0$, այսինքն՝ c և d թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է։ Այն ժամանակ կլինի նաև $c-di\neq0$ և

$$(c+di)(c-di)=c^2-(di)^2=c^2-d^2i^2=c^2+d^2,$$

ընդ որում $c^2+d^2\neq0$։ Այդ պատճառով, օգտագործելով նախորդ պարագրաֆում նշված այն պնդումը, որ յուրաքանչյուր դաշտում պահպանվում են կոտորակների հետ վարվելու բոլոր սովորական կանոնները և հետևաբար, մասնավորապես, կոտորակը չի փոփոխվում նրա համարիչը և հայտարարը զրոյից տարբեր միևնույն էլեմենտով բազմապատկելուց, ստանում ենք՝

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

այսինքն՝

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{4'}$$

էլեմենտը նորից ունի (2) տեսքը։

Այժմ ցույց տանք, որ P դաշտի մեր ստացած D(i) ենթադաշտն իզոմորֆ է ճարթության կետերից բաղկացած այն դաշտին, որը կառուցվել է § 17-ում։ D(i) դաշտի $a+bi$ էլեմենտը զուգադրելով (a, b) կետի հետ և նկատի ունենալով D(i) դաշտի էլեմենտների համար (2) տեսքով գրության ապացուցված միակությունը, մենք կստանանք փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն այդ դաշտի էլեմենտների և հարթության բոլոր կետերի միջև։ Այդ համապատասխանության դեպքում a իրական թիվն $a=a+0i$ հավասարության շնորհիվ համապատասխանում է (a, 0) կետը, իսկ $i=0+1\cdot i$ էլեմենտին՝ (0,1) կետը։ Մյուս կողմից, համեմատելով ներկա պարագրաֆի (3) և (4) բանաձևերը § 17-ի (2) և (3) բանաձևերի հետ, մենք ստանում ենք, որ D(i) դաշտի α և β էլեմենտների գումարին և արտադրյալին համապատասխանում են այն կետերը, որոնք հանդիսանում են α և β էլեմենտներին համապատասխանող կետերի գումարը և, համապատասխանաբար, արտադրյալը։

Սրանով, քանի որ մի որևէ տված դաշտին իզոմորֆ բոլոր դաշտերն իզոմորֆ են իրար, ավարտվում է թեորեմայի ապացույցը։ Մասնավորապես մենք տեսնում ենք, որ կետերի հետ կատարվող գործողությունների սահմանման համար § 17-ի (2) և (3) բանաձևերի ընտրությունը պատահական չէր և չի կարող փոխվել։

Կոմպլեքս թվերի դաշտի կառուցման վերևում դիտարկված եղանակներին զուգընթաց, գոյություն ունեն նաև ուրիշ շատ եղանակներ։ Նշենք նրանցից մեկը, որն օգտագործում է մատրիցների գումարումը և բազմապատկումը։

Դիտարկենք երկրորդ կարգի մատրիցների մի ոչկոմուտատիվ օղակ իրական թվերի դաշտի վրա։ Ակներև է, որ

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

սկալյար մատրիցներն այդ օղակում կազմում են մի ենթադաշտ, որն իզոմորֆ է իրական թվերի դաշտին։ Սակայն, պարզվում է, որ իրական թվերի դաշտի վրա երկրորդ կարգի մատրիցների օղակում կարելի է գտնել նաև այնպիսի ենթադաշտ, որն իզոմորֆ է կոմպլեքս թվերի դաշտին։ Իրոք, յուրաքանչյուր $a+bi$ կոմպլեքս թվին համապատասխանեցնենք

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

մատրիցը։ Այս ճանապարհով կոմպլեքս թվերի ամբողջ դաշտն արտապատկերվում է, ընդ որում՝ փոխադարձաբար միարժեքորեն, երկրորդ կարգի մատրիցների օղակի մի մասի վրա, ընդ որում՝

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

հավասարություններից բխում է, որ այդ իզոմորֆ արտապատկերում է, քանի որ հավասարությունների աջ մասերում գրված մատրիցները համապատասխանում են

$$(a+c)+(b+d)i=(a+bi)+(c+di) \quad \text{և} \quad (ac-bd)+(ad+bc)i=(a+bi)(c+di)$$

կոմպլեքս թվերին։ Մասնավորապես, i կեղծ միավորի դերը կատարում է

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցը։

Մեր ստացած արդյունքը մատնանշում է կոմպլեքս թվերի դաշտի կառուցման մի հնարավոր եղանակ ևս, որը նույնքան բավարար է, որքան և նրանք, որոնք դիտարկվեցին վերևում։

§ 47. Գծային հանրահաշիվը և բազմանդամների հանրահաշիվը կամայական դաշտի վրա

Գրքի նախորդ գլուխներից նրանց մեջ, որոնք նվիրված էին գծային հանրահաշվին, հիմնական դաշտի դերը սովորաբար կատարում էր իրական թվերի դաշտը։ Սակայն, առանց դժվարության ստուգվում է, որ այդ գլուխներից շատ բաներ բառացիորեն տարածվում են կամայական հիմնական դաշտի դեպքի վրա։

Այսպես, կամայական P հիմնական դաշտի համար մնում են իրավացի առաջին գլխում գծային հավասարումների սիստեմի լուծման համար շարադրված Գաուսի մեթոդը, դետերմինանտների տեսությունը և Կրամերի կանոնը։ Միայն § 4-ի վերջում շեղսիմետրիկ դետերմինանտների մասին բերված դիտողությունը պահանջում է լրացուցիչ ենթադրություն, որ P դաշտի բնութագրիչը երկուսից տարբեր է։ Ի դեպ, նույն պարագրաֆից 4-րդ հատկության ապացույցը նույնպես կորցնում է ուժը, եթե P դաշտի բնութագրիչը հավասար է երկուսի, չնայած ինքը՝ այդ հատկությունը, մնում է իրավացի։

Օգտակար է նշել նույնպես, որ առաջին գլխում գծային հավասարումների անորոշ սիստեմի համար անվերջ բազմությամբ տարբեր լուծումների գոյության մասին բազմիցս արտահայտված պնդումը պահպանում է իր ուժը ցանկացած անվերջ P հիմնական դաշտի դեպքում, բայց դադարում է իրավացի լինելուց, եթե P դաշտը վերջավոր է։

Այնուհետև, կամայական հիմնական դաշտի դեպքի վրա լրիվ փոխանցվում են երկրորդ գլխում շարադրված վեկտորների գծային կախվածության տեսությունը, մատրիցի ռանգի տեսությունը և գծային հավասարումների սիստեմների ընդհանուր տեսությունը, ինչպես նաև մատրիցների հանրահաշիվը երրորդ գլխից։

Քառակուսային ձևերի § 26-ում կառուցված ընդհանուր տեսությունը փոխանցվում է ցանկացած այնպիսի հիմնական P դաշտի դեպքի վրա, որի բնութագրիչը տարբեր է երկուսից։ Առանց այս սահմանափակման, ինչպես հեշտ է ցույց տալ, այս պարագրաֆի հիմնական թեորեման արդեն դադարում է իրավացի լինելուց։

Դիցուք, օրինակ, $P=Z_2$, այսինքն՝ հանդիսանում է 0 և 1 երկու էլեմենտներից բաղկացած դաշտ, ընդ որում $1+1=0$, որտեղից $-1=1$ և դիցուք այդ դաշտի վրա տրված է $f=x_1x_2$ քառակուսային ձևը։ Եթե գոյություն ունի

$$x_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2,$$
$$x_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2$$

գծային ձևափոխություն, որը f քառակուսային ձևը բերում է կանոնական տեսքի, ապա

$$f=(b_{11}y_1+b_{12}y_2)(b_{21}y_1+b_{22}y_2)=b_{11}b_{21}y_1^2+(b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21})y_1y_2+b_{12}b_{22}y_2^2$$

հավասարության մեջ y_1y_2 արտադրյալի $b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}$ գործակիցը պետք է հավասար լինի զրոյի:

Սակայն այդ գործակիցը հավասար է մեր վերցրած գծային ձևափոխության դետերմինանտին, քանի որ, կլինի՞ արդյոք $b_{12}b_{21}=1$, կամ թե $b_{12}b_{21}=0$, երկու դեպքում էլ $b_{12}b_{21}=-b_{12}b_{21}$: Մեր գծային ձևափոխությունը դուրս եկավ վերասերված:

Վեցերորդ գլխի հետագա բովանդակությունն էապես վերաբերում է կոմպլեքս կամ իրական գործակիցներով քառակուսային ձևերին:

Վերջապես, կամայական P հիմնական դաշտի դեպքի համար պահպանվում է գծային տարածությունների և նրանց գծային ձևափոխությունների՝ յոթերորդ գլխում կառուցված ամբողջ տեսությունը: Ի դեպ, խարակտերիստիկ արմատի գաղափարը կապված է կամայական դաշտի վրա բազմանդամների տեսության հետ, որի մասին կխոսվի ներքևում: Նկատենք, որ § 33-ից խարակտերիստիկ արմատների և սեփական արժեքների միջև կապի վերաբերյալ թեորեման այժմ կընդունի հետևյալ ձևակերպումը. φ գծային ձևափոխության՝ P հիմնական դաշտում գտնվող խարակտերիստիկ արմատները և միայն նրանք են հանդիսանում այդ ձևափոխության սեփական արժեքներ:

Իսկ ինչ վերաբերում է էվկլիդյան տարածությունների տեսությանը (գլ. 8), ապա այն էապես կապված է իրական թվերի դաշտի հետ:

Կամայական P հիմնական դաշտի դեպքի վրա կարող են փոխանցվել նաև բազմանդամների հանրահաշվի վերևում շարադրված որոշ բաժիններ: Սակայն, նախապես անհրաժեշտ է կամայական դաշտի վրա բազմանդամի գաղափարին ճշգրիտ իմաստ տալ:

Բանը նրանում է, որ § 20-ում բազմանդամի գաղափարի համար նշվեցին երկու տեսակետներ՝ հանրահաշվական-ձևաբանական և ֆունկցիոնալ-տեսաբանական: Նրանք երկուսն էլ կարող են փոխանցվել կամայական հիմնական դաշտի դեպքի վրա: Սակայն, լինելով համարժեք տեսակետներ թվային դաշտերի դեպքի համար (տե՛ս § 24) և, ինչպես հեշտ է ստուգել, ընդհանրապես անվերջ դաշտերի համար, նրանք դադարում են համարժեք լինելուց վերջավոր դաշտերի համար:

Դիտարկենք, օրինակ, § 45-ում մուծված Z_2 դաշտը, որը կազմված է 0 և 1 երկու էլեմենտներից, ընդ որում՝ $1+1=0$: Այդ դաշտից վերցրած գործակիցներով $x+1$ և x^2+1 բազմանդամները տարբեր են՝ այսինքն՝ չեն բավարարում բազմանդամների հավասարության հանրահաշվական սահմանմանը: Դրա հետ մեկտեղ, այդ երկու բազմանդամներն էլ $x=0$ դեպքում ստանում են 1 արժեքը, իսկ $x=1$ դեպքում՝ 0 արժեքը, այսինքն՝ որպես Z_2 դաշտում արժեքներ ընդունող x «փոփոխականի» «ֆունկցիաներ», նրանք պետք է համարվեն հավասար: Z_3 դաշտում, որ կազմված է 0, 1, 2 երեք էլեմենտներից, ընդ որում՝ $1+2=0$, այդպիսի դրության մեջ են գտնվում x^3+x+1 և $2x+1$ բազ-

մանդամները: Այդպիսի օրինակներ կարելի է նշել, ընդհանրապես, բոլոր վերջավոր դաշտերի համար:

Այսպիսով, կամայական P դաշտի դեպքին վերաբերող տեսության մեջ բազմանդամների համար հնարավոր չէ ընդունել ֆունկցիոնալ-տեսաբանական տեսակետը: Հետևաբար, անհրաժեշտ է լիակատար պարզություն մտցնել բազմանդամի հանրահաշվական-ձևաբանական սահմանման մեջ: Այդ նպատակով մենք կամայական P դաշտի վրա բազմանդամների օղակի այնպիսի կառուցում կատարենք, որը հենց սկզբից էլ չի օգտագործում բազմանդամի սովորական գրելաձևը x «անհայտի» միջոցով:

Դիտարկենք P դաշտի էլեմենտների

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \qquad (1)$$

տեսքն ունեցող բոլոր հնարավոր կարգավորված վերջավոր սիստեմները, ընդ որում n-ը կամայական է և $n\geqslant 0$, բայց $n>0$ դեպքում պետք է լինի $a_n\neq 0$: (1) տեսքի սիստեմների համար գումարումը և բազմապատկումը սահմանելով § 20-ի (3) և (4) բանաձևերին համապատասխան, մենք այդ սիստեմների համախմբությունը կդարձնենք կոմուտատիվ օղակ. դրա համար անհրաժեշտ հատկությունների ապացույցները բառացիորեն կրկնում են այն, ինչ որ արվել է § 20-ում թվային բազմանդամների համար:

Մեր կառուցած օղակում (a) տեսքի սիստեմները ($n=0$ դեպքը) կազմում են P դաշտին իզոմորֆ ենթադաշտ: Դա հնարավորություն է տալիս այդպիսի սիստեմները նույնացնել P դաշտի համապատասխան a էլեմենտների հետ, այսինքն՝ ընդունել, որ

$$(a)=a \qquad (2)$$

P դաշտի բոլոր a էլեմենտների համար: Մյուս կողմից $(0, 1)$ սիստեմը նշանակենք x տառով՝

$$x=(0, 1).$$

Այդ դեպքում, կիրառելով բազմապատկման վերևում նշված սահմանումը, մենք կստանանք, որ $x^3=(0, 0, 1)$ և ընդհանրապես՝

$$x^k=(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ անգամ}}, 1). \qquad (3)$$

Օգտագործելով այժմ կարգավորված սիստեմների գումարման և բազմապատկման սահմանումները, ինչպես նաև (2) և (3) հավասարությունները, մենք կստանանք՝

$$\begin{aligned}
(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n-1},\ a_n) = \\
&= (a_0)+(0,\ a_1)+(0,\ 0,\ a_2)+\dots \\
&\quad \dots+(\underbrace{0,\ 0,\ \dots,\ 0}_{n-1 \text{ անգամ}},\ a_{n-1})+(\underbrace{0,\ 0,\ \dots,\ 0}_{n \text{ անգամ}},\ a_n) = \\
&= (a_0)+(a_1)\ (0,\ 1)+(a_2)\ (0,\ 0,\ 1)+\dots \\
&\quad \dots+(a_{n-1})(\underbrace{0,\ 0,\ \dots,\ 0}_{n-1 \text{ անգամ}},\ 1)+(a_n)(\underbrace{0,\ 0,\ \dots,\ 0}_{n \text{ անգամ}},\ 1) = \\
&\qquad = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.
\end{aligned}$$

Այսպիսով, (1) տեսքի ամեն մի կարգավորված սիստեմ կարող է գրվել x-ի նկատմամբ բազմանդամի տեսքով, P դաշտից վերցրած գործակիցներով, ընդ որում, ակներև է, որ այդ գրելաձևը կլինի միարժեք։ Վերջապես, հենվելով գումարման արդեն ապացուցված տեղափոխելիության վրա, կարելի է անցնել ըստ x-ի նվազող աստիճանների գրելաձևերին։

Հետևաբար, մենք կկառուցենք կոմուտատիվ օղակ, որը բնական կլինի անվանել x անհայտով բազմանդամների օղակ P դաշտի վրա։ Այդ օղակը նշանակվում է $P[x]$ պայմանանշանով։

$P[x]$ օղակում պարունակվում է ինքը՝ P դաշտը, ինչպես արդեն ցույց է տրվել վերևում։ Այնուհետև, ինչպես և թվային դաշտերի վրա բազմանդամների օղակների դեպքում (տես § 20), $P[x]$ օղակն ունի միավոր, չի պարունակում զրոյի բաժանարարներ և դաշտ չի հանդիսանում։

Եթե P դաշտը պարունակվում է $\overline{P}$ ավելի մեծ դաշտում, ապա $P[x]$ օղակը կլինի $\overline{P}[x]$ օղակի ենթաօղակ. հասկանալի է, որ P դաշտի գործակիցներով յուրաքանչյուր բազմանդամ կարելի է համարել բազմանդամ և $\overline{P}$ դաշտի վրա, իսկ բազմանդամների գումարը և արտադրյալը կախված են միայն նրանց գործակիցներից, ուստի և չեն փոխվում ավելի մեծ դաշտի անցնելիս։

Որպեսզի ավելի լավ պատկերացնենք «P դաշտի վրա բազմանդամների օղակի» գաղափարի իսկական ծավալը, նայենք նրա վրա ևս մի կողմից։

Դիցուք, P դաշտը որպես ենթաօղակ պարունակվում է մի որևէ L կոմուտատիվ օղակի մեջ։ L օղակի α էլեմենտը կոչվում է հանրահաշվական էլեմենտ P դաշտի վրա, եթե գոյություն ունի P դաշտի գործակիցներով n-րդ ($n \geqslant 1$) աստիճանի այնպիսի հավասարում, որին α էլեմենտը բավարարում է. իսկ եթե այդպիսի հավասարում գոյություն չունի, ապա α էլեմենտը կոչվում է տրանսցենդենտ էլեմենտ

P դաշտի վրա։ Հասկանալի է, որ $P[x]$ օղակի x էլեմենտը տրանսցենդենտ էլեմենտ է P դաշտի վրա։

Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

Եթե L օղակի α էլեմենտը տրանսցենդենտ էլեմենտ է P դաշտի վրա, ապա P դաշտին α էլեմենտի միացումից ստացված L' ենթաօղակը (այսինքն՝ L օղակի P դաշտը և α էլեմենտը պարունակող նվազագույն ենթաօղակը), իզոմորֆ է բազմանդամների $P[x]$ օղակին։

Իրոք, L օղակի յուրաքանչյուր β էլեմենտ, որը կարող է գրվել

$$\beta = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n, \quad n \geqslant 0 \tag{4}$$

տեսքով՝ P դաշտից վերցրած $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ գործակիցներով, կպարունակվի L' ենթաօղակի մեջ։ β էլեմենտը չի կարող ունենալ (4) տեսքի երկու տարբեր գրություն, քանի որ մի գրությունից հանելով մյուսը, մենք կստանայինք, որ գոյություն ունի P դաշտի վրա α էլեմենտով բավարարվող հավասարում՝ ի հակասություն α էլեմենտի տրանսցենդենտության։ Գումարելով (4) տեսքի էլեմենտները ըստ L օղակում սահմանված գումարման կանոնների, կարելի է գումարել α-ի միևնույն աստիճանի գործակիցները. սակայն, դա կհամընկնի բազմանդամների գումարման կանոնի հետ։ Մյուս կողմից, բազմապատկելով (4) տեսքի էլեմենտները L օղակում սահմանված կանոններով, մենք կարող ենք, օգտվելով բաշխելիության օրենքից, կատարել անդամ առ անդամ բազմապատկում, իսկ հետո համախմբել նման անդամները. ակներևաբար, դա կբերի բազմանդամների բազմապատկման մեզ հայտնի կանոնին։ Սրանով ապացուցված է, որ (4) տեսքի էլեմենտները L օղակում կազմում են P դաշտը և α էլեմենտը պարունակող ենթաօղակ, այսինքն՝ L'-ի հետ համընկնող ենթաօղակ, և որ այդ ենթաօղակն իզոմորֆ է բազմանդամների $P[x]$ օղակին։

Մենք տեսնում ենք, որ բազմանդամների հետ գործողությունների համար սահմանումների վերևում կատարված ընտրությունը պատահական չէր. այն լիովին որոշվում է նրանով, որ $P[x]$ օղակի x էլեմենտը պետք է լինի տրանսցենդենտ էլեմենտ P դաշտի վրա։

Նկատենք, որ բազմանդամների $P[x]$ օղակը կառուցելիս մենք ոչ մի տեղ չօգտագործեցինք P դաշտի էլեմենտների բաժանումը և միայն մեկ անգամ, այն է՝ բազմանդամների արտադրյալի աստիճանի մասին պնդումն ապացուցելիս, մենք պետք է հենվեինք P դաշտում զրոյի բաժանարարների բացակայության վրա։ Հետևաբար, կարելի է վերցնել կամայական L կոմուտատիվ օղակ և, կրկնելով վերևում կատարված կառուցումը, ստանալ բազմանդամների $L[x[$ օղակ՝ L օղակի վրա. եթե այդ դեպքում L օղակը չի պարունակում զրոյի բաժանարարներ, ապա բազմանդամների արտադրյալի աստիճանը հավասար է արտադրիչների աստիճանների գումարին և, հետևաբար, բազմանդամների L[x] օղակը նույնպես չի պարունակի զրոյի բաժանարարներ:

Վերադառնալով P կամայական դաշտից վերցրած գործակիցներով բազմանդամներին, նկատենք, որ այս դեպքի վրա ըստ էության տարածվում է մեր գրքի §§ 20—22-ում շարադրված բազմանդամների բաժանելիության ողջ տեսությունը: Այն է՝ P[x] օղակում տեղի ունի մնացորդով բաժանելու ալգորիթմը, ընդ որում և՛ քանորդը, և՛ մնացորդը կպատկանեն P[x] օղակին: Այնուհետև, P[x] օղակում իմաստ ունի բաժանարարի գաղափարը և պահպանվում են նրա բոլոր հիմնական հատկությունները: Ընդ որում այն հանգամանքը, որ բաժանման ալգորիթմը դուրս չի բերում հիմնական P դաշտի սահմաններից, թույլ է տալիս պնդելու, որ φ(x) բազմանդամի f(x)-ի համար բաժանարար լինելու հատկությունը կախված չէ նրանից, արդյոք մենք դիտարկում ենք P դաշտը, թե՞ նրա ցանկացած ընդլայնումը:

P[x] օղակում պահպանվում են նաև ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի սահմանումը և բոլոր հատկությունները, այդ թվում պահպանվում է Էվկլիդի ալգորիթմը և § 21-ում այդ ալգորիթմի օգնությամբ ապացուցված թեորեմը: Նկատենք որ, քանի որ մնացորդով բաժանման ալգորիթմը կախված չէ, ինչպես մենք գիտենք, նրանից. թե՞ որ դաշտն է վերցրած որպես հիմնական, ապա կարելի է պնդել, որ տված երկու բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես կախված չէ նրանից, արդյոք դիտարկում ենք մենք P դաշտը, թե՞ նրա կամայական $\overline{P}$ ընդլայնումը:

Վերջապես, P դաշտի վրա կառուցված բազմանդամների համար պահպանվում է արմատի գաղափարի իմաստը և մնում են իրավացի արմատների հիմնական հատկությունները: Պահպանվում է և բազմապատիկ արմատների տեսությունը. իմիջիայլոց այդ հարցին մենք կվերադառնանք մի անգամ ևս՝ հաջորդ պարագրաֆի վերջում:

Այս դիտողությունները մեզ թույլ կտան հետագայում ցանկացած դաշտի վրա բազմանդամներն ուսումնասիրելիս հիմնվել §§ 20—22-ի վրա:

§ 48. Բազմանդամների վերլուծումը անվերածելի բազմապատկիչների

Արմատի գոյության վերաբերյալ թեորեմայի հիման վրա § 24-ում կոմպլեքս և իրական թվերի դաշտերի համար ապացուցվել էին բազմանդամի՝ անվերածելի բազմապատկիչների վերլուծման գոյությունը և միակությունը: Այս արդյունքները հանդիսանում են կամայական P դաշտի վրա որոշված բազմանդամներին վերաբերող ընդհանուր թեորե-

մայի մասնավոր դեպքերը: Ներկա պարագրաֆը նվիրվում է այդ ընդհանուր տեսության շարադրմանը, որը զուգահեռ է ամբողջ թվերը պարզ բազմապատկիչների վերածելու տեսությանը:

Նախ սահմանենք այն բազմանդամները, որոնք բազմանդամների օղակում խաղում են այնպիսի դեր, ինչպիսի դեր խաղում են պարզ թվերն ամբողջ թվերի օղակում: Նախապես ընդգծենք, որ այդ սահմանման մեջ կխոսվի միայն այն բազմանդամների մասին, որոնց աստիճանը մեծ կամ հավասար է մեկի. դա միանգամայն համապատասխանում է նրան, որ պարզ թվերը սահմանելիս և ամբողջ թվերի պարզ բազմապատկիչների վերլուծումն ուսումնասիրելիս քննարկումից բացառվում են 1 և −1 թվերը:

Դիցուք տված է n աստիճանի ($n \geqslant 1$) f(x) բազմանդամը P դաշտից վերցրած գործակիցներով: Շնորհիվ § 21-ի V հատկության, զրո աստիճանի բոլոր բազմանդամները f(x) բազմանդամի համար կծառայեն որպես բաժանարարներ: Մյուս կողմից, ըստ VII-ի, f(x)-ի համար բաժանարարներ կլինեն նաև cf(x) բոլոր բազմանդամները, որտեղ c-ն P դաշտի զրոյից տարբեր էլեմենտ է, ընդ որում նրանցով սպառվում են f(x) բազմանդամի n աստիճան ունեցող բոլոր բաժանարարները: Իսկ ինչ վերաբերում է f(x)-ի այն բաժանարարներին, որոնց աստիճանը մեծ է զրոյից, բայց փոքր է n-ից, ապա նրանք P(x) օղակում կարող են գոյություն ունենալ, կարող են և բացակայել: Առաջին դեպքում f(x) բազմանդամը կոչվում է վերածելի P դաշտում (կամ P դաշտի վրա), երկրորդ դեպքում՝ անվերածելի այդ դաշտում:

Վերհիշելով բաժանարարի սահմանումը, կարելի է ասել, որ n աստիճանի f(x) բազմանդամը վերածելի է P դաշտում, եթե նա այդ դաշտի վրա (այսինքն՝ P[x] օղակում) կարող է վերլուծվել երկու այնպիսի բազմապատկիչների արտադրյալի, որոնց աստիճանները փոքր են n-ից՝

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x), \tag{1}$$

և f(x)-ը անվերածելի է P դաշտում, եթե (1) տեսքի նրա ցանկացած վերլուծության մեջ բազմապատկիչներից մեկն ունի 0 աստիճան, մյուսը՝ n աստիճան:

Հարկավոր է հատուկ ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքի վրա, որ բազմանդամի վերածելի կամ անվերածելի լինելու մասին կարելի է խոսել միայն տված P դաշտի նկատմամբ, քանի որ այս դաշտում անվերածելի բազմանդամը կարող է վերածելի լինել նրա մի որևէ $\overline{P}$ ընդլայնման մեջ: Այսպես, ամբողջ գործակիցներով x^2-2 բազմանդամը անվերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտում. նա չի կարող վերլուծվել ռացիոնալ գործակիցներով առաջին աստիճանի երկու արտադրիչների արտադրյալի։ Սակայն իրական թվերի դաշտում այդ բազմանդամը, պարզվում է, որ վերածելի է, ինչպես ցույց է տալիս

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

հավասարությունը։ x^2+1 բազմանդամը անվերածելի է ոչ միայն ռացիոնալ թվերի դաշտում, այլև իրական թվերի դաշտում, սակայն նա դառնում է վերածելի կոմպլեքս թվերի դաշտում, քանի որ

$$x^2+1=(x-i)(x+i)։$$

Նշենք անվերածելի բազմանդամների մի քանի հիմնական հատկություններ, ընդ որում հիշենք, որ խոսքը վերաբերում է P դաշտում անվերածելի բազմանդամներին։

α) Առաջին աստիճանի ամեն մի բազմանդամ անվերածելի է։

Իսկապես, եթե այդ բազմանդամը վերլուծվեր ավելի ցածր աստիճանի բազմապատկիչների արտադրյալի, ապա այդ բազմապատկիչները պետք է ունենային 0 աստիճան։ Սակայն զրո աստիճանի ցանկացած բազմանդամների արտադրյալը նորից կլինի զրո աստիճանի, և ոչ թե առաջին։

β) Եթե $p(x)$ բազմանդամը անվերածելի է, ապա այդպիսին կլինի նաև ամեն մի $cp(x)$ բազմանդամ, որտեղ c-ն P դաշտի զրոյից տարբեր էլեմենտ է։

Այս հատկությունը հետևում է § 21-ի I և VII հատկություններից։ Այն մեզ թույլ կտա, այնտեղ, որտեղ դա պետք կլինի, սահմանափակվել այնպիսի անվերածելի բազմանդամների դիտարկումով, որոնց ավագ գործակիցները հավասար են մեկի։

γ) Եթե $f(x)$-ը կամայական, իսկ $p(x)$-ը անվերածելի բազմանդամ է, ապա կամ $f(x)$-ը բաժանվում է $p(x)$-ի վրա, կամ թե այդ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են։

Եթե $(f(x), p(x))=d(x)$, ապա $d(x)$-ը լինելով $p(x)$ անվերածելի բազմանդամի բաժանարարը կամ ունի 0 աստիճան, կամ էլ թե $cp(x)$ $(c\neq 0)$ տեսքի բազմանդամ է։ Առաջին դեպքում $f(x)$-ը և $p(x)$-ը փոխադարձաբար պարզ են, իսկ երկրորդ դեպքում $f(x)$-ը բաժանվում է $p(x)$-ի վրա։

δ) Եթե $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների արտադրյալը բաժանվում է $p(x)$ անվերածելի բազմանդամի վրա, ապա այդ արտադրիչներից գոնե մեկը բաժանվում է $p(x)$-ի վրա։

Իսկապես, եթե $f(x)$-ը չի բաժանվում $p(x)$-ի վրա, ապա ըստ γ)-ի $f(x)$-ը և $p(x)$-ը փոխադարձաբար պարզ են, և այն ժամանակ ըստ § 21-ի β) հատկության, $g(x)$ բազմանդամը պետք է բաժանվի $p(x)$-ի վրա։

Այս δ) հատկությունը առանց դժվարության տարածվում է ցանկացած վերջավոր թվով արտադրիչների արտադրյալի դեպքի վրա։

Հետևյալ երկու թեորեմները հանդիսանում են ամբողջ ներկա պարագրաֆի գլխավոր նպատակը։

$P[x]$ օղակի $n(n\geqslant 1)$ աստիճան ունեցող ամեն մի $f(x)$ բազմանդամ վերլուծվում է անվերածելի բազմապատկիչների արտադրյալի։

Իսկապես, եթե $f(x)$ բազմանդամն ինքը անվերածելի է, ապա նշված արտադրյալը կազմված է ընդամենը մեկ արտադրիչից։ Իսկ եթե նա վերածելի է, ապա կարող է վերլուծվել ավելի ցածր աստիճանի արտադրիչների արտադրյալի։ Եթե այդ արտադրիչների մեջ նորից կան վերածելիներ, ապա կկատարենք նրանց հետագա վերլուծումն արտադրիչների և այլն։ Այդ պրոցեսը պետք է կանգ առնի վերջավոր թվով քայլերից հետո, քանի որ $f(x)$-ն արտադրիչների ցանկացած վերլուծության դեպքում այդ արտադրիչների աստիճանների գումարը պետք է հավասար լինի n-ի և, հետևաբար, x-ից կախված արտադրիչների թիվը չի կարող գերազանցել n-ին։

Ամբողջ թվերի վերլուծությունը պարզ արտադրիչների միարժեք է, եթե սահմանափակվենք դրական ամբողջ թվերի դիտարկումով։ Սակայն բոլոր ամբողջ թվերի օղակում միակությունը տեղի ունի միայն նշանի ճշտությամբ. այսպես, $-6=2\cdot(-3)=(-2)\cdot 3$, $10=2\cdot 5=(-2)\cdot(-5)$ և այլն։ Նույնանման վիճակ տեղի ունի և բազմանդամների օղակում։ Եթե

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)\text{-ը}$$

$f(x)$ բազմանդամի վերլուծությունն է անվերածելի արտադրիչների արտադրյալի և եթե P դաշտի $c_1, c_2, \ldots, c_s$ էլեմենտներն այնպիսին են, որ նրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի, ապա

$$f(x)=[c_1p_1(x)]\cdot[c_2p_2(x)]\cdots[c_sp_s(x)]\text{-ը},$$

նկատի ունենալով β)-ն, նույնպես կլինի $f(x)$-ի վերլուծությունը անվերածելի արտադրիչների արտադրյալի։ Պարզվում է, որ դրանով սպառվում են $f(x)$-ի բոլոր վերլուծությունները։

Եթե $P[x]$-ի օղակի $f(x)$ բազմանդամը երկու եղանակով վերլուծված է անվերածելի արտադրիչների արտադրյալի՝

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x), \tag{2}$$

ապա $s=t$ և, համապատասխան համարակալման դեպքում, տեղի ունեն

$$q_i(x)=c_ip_i(x), \quad i=1, 2, \ldots, s, \tag{3}$$

հավասարությունները, որտեղ c_i-երը P դաշտի զրոյից տարբեր էլեմենտներ են։

Այս թեորեման ճիշտ է առաջին աստիճանի բազմանդամների համար, քանի որ նրանք անվերլուծելի են։ Այդ պատճառով մենք ապացույցը կտանենք ինդուկցիայով ըստ բազմանդամի աստիճանի, այսինքն թեորեման ապացուցենք f(x)-ի համար, ենթադրելով, որ ավելի ցածր աստիճանի բազմանդամի համար այն արդեն ապացուցված է։

Քանի որ $q_1(x)$-ը f(x)-ի համար բաժանարար է, ապա, շնորհիվ 5) հատկության և (2) հավասարության, $q_1(x)$-ը կլինի բաժանարար $p_i(x)$ բազմանդամներից գոնե մեկի համար, օրինակ՝ $p_1(x)$-ի համար։ Սակայն, քանի որ $p_i(x)$ բազմանդամը անվերածելի է, իսկ $q_i(x)$-ի աստիճանը մեծ է զրոյից, ապա գոյություն ունի այնպիսի c_1 էլեմենտ, որ

$$q_1(x)=c_1p_1(x)。$$

Տեղադրելով $q_1(x)$-ի այս արտահայտությունը (2)-ի մեջ և կրճատելով $p_1(x)$-ով (որն օրինական է, քանի որ P[x] օղակում չկան զրոյի բաժանարարներ), մենք կստանանք

$$p_2(x)p_3(x)\dots p_s(x)=[c_1q_2(x)]q_3(x)\dots q_t(x)$$

հավասարությունը։ Քանի որ այդ արտադրյալներին հավասար բազմանդամի աստիճանը փոքր է f(x)-ի աստիճանից, ապա արդեն ապացուցված է, որ $s-1=t-1$, որտեղից՝ $s=t$, և որ գոյություն ունեն այնպիսի $c_2', c_3, \dots, c_s$ էլեմենտներ, որ $c_2'p_2(x)=c_1q_2(x)$, որտեղից՝ $q_2(x)=(c_1^{-1}c_2')p_2(x)$, և $c_ip_i(x)=q_i(x)$, $i=3,\dots,s$։ Նշանակելով $c_1^{-1}c_2'=c_2$ և հաշվի առնելով (4)-ը, մենք լրիվ կստանանք (3) հավասարությունը։

Նոր ապացուցած թեորեմային կարելի է տալ այսպիսի ավելի կարճ ձևակերպում՝ ամեն մի բազմանդամ միարժեքորեն վերլուծվում է անվերածելի արտադրիչների՝ զրո աստիճանի արտադրիչների ճշտությամբ։

Իմիջիայլոց միշտ կարելի է դիտարկել հետևյալ հատուկ տեսքի վերլուծությունը, որը յուրաքանչյուր բազմանդամի համար արդեն կլինի լիովին միարժեք. վերցնում են f(x) բազմանդամի ցանկացած վերլուծությունը անվերածելի արտադրիչների և այդ արտադրիչներից յուրաքանչյուրից փակագծից դուրս ենք բերում ավագ գործակիցը։ Մենք կստանանք

$$f(x)=a_0p_1(x)p_2(x)\dots p_s(x) \qquad (5)$$

վերլուծությունը, որտեղ բոլոր $p_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, s)$ բազմանդամները անվերածելի են, որոնց ավագ գործակիցները հավասար են մեկի։ a_0 արտադրիչը հավասար կլինի f(x) բազմանդամի ավագ գործակցին, ինչպես հեշտ է ապացուցել՝ բազմապատկում կատարելով (5) հավասարության աջ մասում։

Պարտադիր չէ, որ (5) վերլուծության մեջ մտնող անվերածելի արտադրիչները բոլորն էլ տարբեր լինեն։ Եթե p(x) անվերածելի արտադրիչը (5) վերլուծության մեջ հանդիպում է մի քանի անգամ, ապա նա կոչվում է f(x)-ի համար բազմապատիկ արտադրիչ, այն է՝ k-պատիկ (մասնավորապես՝ կրկնապատիկ, եռապատիկ և այլն), եթե (5) վերլուծության մեջ պարունակվում են p(x)-ին հավասար ճիշտ k արտադրիչներ։ Իսկ եթե p(x) արտադրիչը (5)-ի մեջ մտնում է միայն մեկ անգամ, ապա նա կոչվում է պարզ (կամ միապատիկ) արտադրիչ f(x)-ի համար։

Եթե (5) վերլուծության մեջ $p_1(x), p_2(x), \dots, p_l(x)$ արտադրիչներն իրարից տարբեր են, իսկ ամեն մի ուրիշ արտադրիչ հավասար է նրանցից մեկն ու մեկին, և եթե $p_i(x)$-ը $(i=1, 2, \dots, l)$ f(x) բազմանդամի k_i-պատիկ արտադրիչ է, ապա (5) վերլուծությունը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\dots p_l^{k_l}(x)。 \qquad (6)$$

Հենց այսպիսի տեսքից էլ մենք հետագայում կօգտվենք՝ չնշելով հատուկ, որ ցուցիչները հավասար են համապատասխան արտադրիչների բազմապատիկությանը, այսինքն՝ որ $p_i(x)\neq p_j(x)$ $i\neq j$ դեպքում։

Եթե տված են f(x) և g(x) բազմանդամների վերլուծությունները անվերածելի արտադրիչների, ապա այդ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է երկու վերլուծություններում միաժամանակ մտնող արտադրիչների արտադրյալին, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր արտադրիչ վերցվում է այնպիսի աստիճանով, որը հավասար է տված երկու բազմանդամներում նրա ունեցած բազմապատիկություններից փոքրին։

Իսկապես, նշված արտադրյալը կլինի բաժանարար f(x) և g(x) բազմանդամներից յուրաքանչյուրի համար, հետևաբար նաև d(x)-ի համար։ Եթե այդ արտադրյալը d(x)-ից տարբեր լիներ, ապա d(x)-ի անվերածելի արտադրիչների վերլուծության մեջ կամ կպարունակվեր այնպիսի արտադրիչ, որը չի մտնում f(x) և g(x) բազմանդամների վերլուծություններից գոնե մեկի մեջ, որ հնարավոր չէ, կամ թե արտադրիչներից որևէ մեկը կունենար ավելի մեծ աստիճան, քան նա ունի f(x) և g(x) բազմանդամներից որևէ մեկի վերլուծության մեջ, որ նորից անհնար է։

Այս թեորեման համապատասխանում է այն կանոնին, որով սովորաբար որոնվում է ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Սակայն բազմանդամների դեպքում այն չի կարող փոխարինել Էվկլիդի ալգորիթմին։ Իսկապես, քանի որ տված դրական ամբողջ թվից փոքր պարզ թվերի քանակը վերջավոր է, ապա ամբողջ թվի պարզ ար-

տադրիչների վերլուծելը հասանելի է դառնում վերջավոր թվով փորձերով։ Այս բանը արդեն տեղի չունի բազմանդամների օղակում՝ անվերջ հիմնական դաշտի վրա և ընդհանուր դեպքում հնարավոր չէ տալ բազմանդամները անվերածելի արտադրիչների վերլուծելու պրակտիկ եղանակ։ Դեռ ավելին, նույնիսկ այն հարցի լուծումը, թե f(x) *բազմանդամը տված* P *դաշտում անվերածելի՞ է արդյոք, պարզվում է, որ ընդհանուր դեպքում բավականին բարդ խնդիր է։ Այսպես, իրական և կոմպլեքս թվերի դաշտերի դեպքի համար բոլոր անվերածելի բազմանդամների նկարագրությունը ստացվել է § 24-ում որպես հետևանք արմատների գոյության վերաբերյալ շատ խորիմաստ թեորեմայից։ Իսկ ինչ վերաբերում է ռացիոնալ թվերի դաշտին, ապա այդ դաշտում անվերածելի բազմանդամների մասին § 56-ում կարվեն միայն մասնավոր բնույթի մի քանի ակնարկներ։*

Մենք ցույց տվեցինք, որ բազմանդամների օղակում, ինչպես և ամբողջ թվերի օղակում, տեղի ունի վերլուծում «պարզ» (անվերածելի) արտադրիչների և որ այդ վերլուծումը որոշ իմաստով միարժեք է։ Հարց է ծագում, կարելի՞ է արդյոք այդ արդյունքները տարածել օղակների ավելի լայն դասերի վրա։ Մենք կսահմանափակվենք այնպիսի կոմուտատիվ օղակների դեպքով, որոնք օժտված են միավորով և չեն պարունակում զրոյի բաժանարարներ։

Միավոր բաժանարար *անվանենք օղակի այնպիսի* a *էլեմենտը, որի համար այդ օղակում գոյություն ունի* a^{-1} *հակադարձ էլեմենտ՝*

$$aa^{-1}=1.$$

Ամբողջ թվերի օղակում դրանք կլինեն 1 և —1 թվերը, բազմանդամների $P[x]$ *օղակում՝ զրո աստիճանի բոլոր բազմանդամները, այսինքն՝* P *դաշտի զրոյից տարբեր էլեմենտները։ Զրոյից տարբեր և միավոր բաժանարար չհանդիսացող* c *էլեմենտն անվանենք օղակի* **պարզ** *էլեմենտ, եթե նրա յուրաքանչյուր* $c=ab$ *երկու արտադրիչների արտադրյալի վերլուծության մեջ այդ արտադրիչներից մեկն անպայման հանդիսանում է միավորի բաժանարար։ Ամբողջ թվերի օղակում պարզ էլեմենտներ կլինեն պարզ թվերը, բազմանդամների օղակում՝ անվերածելի բազմանդամները։*

Դիտարկվող օղակի՝ զրոյից տարբեր և միավորի բաժանարար չհանդիսացող ամեն մի էլեմենտ կվերածվի՞ արդյոք պարզ արտադրիչների արտադրյալի։ Եթե այո, ապա կլինի՞ այդպիսի վերլուծությունը միարժեք։ Վերջինս պետք է հասկանալ այսպիսի իմաստով՝ եթե

$$a=p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_l$$

a *էլեմենտի երկու վերլուծություններն են պարզ արտադրիչների, ապա* $k=l$ *և (հնարավոր է, որ համարակալումը փոխելուց հետո)*

$$q_i=p_ic_i,\quad i=1,2,\ldots,k,$$

որտեղ c_i*-երը միավորի բաժանարարներ են։*

Պարզվում է, որ ընդհանուր դեպքում երկու հարցերին էլ պետք է տրվի բացասական պատասխան։ Մենք կսահմանափակվենք մի օրինակով, այն է՝ կնշենք

մի օղակ, որի մեջ չնայած պարզ արտադրիչների վերլուծումը հնարավոր է, բայց միարժեք չէ։

Դիտարկենք

$$\alpha=a+b\sqrt{-3} \tag{7}$$

տեսքի կոմպլեքս թվերը, որտեղ a*-ն և* b*-ն ամբողջ թվեր են։ Բոլոր այդպիսի թվերը կազմում են օղակ առանց զրոյի բաժանարարների՝ պարունակելով միավոր. իրոք,*

$$(a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})=(ac-3bd)+(bc+ad)\sqrt{-3}. \tag{8}$$

$\alpha=a+b\sqrt{-3}$ *թվի* **նորմ** *անվանենք*

$$N(\alpha)=a^2+3b^2$$

ամբողջ դրական թիվը։ Շնորհիվ (8)-ի, **արտադրյալի նորման հավասար է նորմաների արտադրյալին՝**

$$N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta). \tag{9}$$

Իրոք՝

$$(ac-3bd)^2+3(bc+ad)^2=a^2c^2+9b^2d^2+3b^2c^2+3a^2d^2=(a^2+3b^2)(c^2+3d^2).$$

Եթե α *թիվը մեր օղակում միավորի բաժանարար է, այսինքն՝* α^{-1} *թիվը նույնպես ունի (7) տեսքը, ապա, ըստ (9)-ի,*

$$N(\alpha)\cdot N(\alpha^{-1})=N(\alpha\alpha^{-1})=N(1)=1,$$

ուստի $N(\alpha)=1$, *քանի որ* $N(\alpha)$ *և* $N(\alpha^{-1})$ *թվերը ամբողջ և դրական են։ Եթե* $\alpha=a+b\sqrt{-3}$, *ապա* $N(\alpha)=1$*-ից հետևում է*

$$N(\alpha)=a^2+3b^2=1.$$

սակայն դա հնարավոր է միայն $b=0$, $a=\pm1$ *դեպքում։ Այսպիսով,* **մեր օղակում, ինչպես և ամբողջ թվերի օղակում, միավորի բաժանարարներ կլինեն միայն 1 և —1 թվերը և միայն ա՛յդ թվերն ունեն մեկին հավասար նորմա։**

Արտադրյալի նորմայի համար (9) հավասարությունը, հասկանալի է, տարածվում է ցանկացած վերջավոր թվով արտադրիչների դեպքի վրա։ Այստեղից հեշտ է արտածել, որ **մեր օղակի յուրաքանչյուր** α **թիվ կարող է վերածվել վերջավոր թվով պարզ արտադրիչների արտադրյալի.** *ապացուցումը հանձնարարում ենք ընթերցողին։*

Պարզ արտադրիչների վերլուծման միակությունը, սակայն, արդեն չի կարելի պնդել: *Իրավացի են, օրինակ, հետևյալ հավասարությունները՝*

$$4=2\cdot2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}).$$

Մեր օղակում, բացի 1 և —1 թվերից, չկան միավորի ուրիշ բաժանարարներ, հետևաբար $1+\sqrt{-3}$ *թիվը (ինչպես և* $1-\sqrt{-3}$ *թիվը) չի կարող 2 թվից տարբերվել միայն միավորի բաժանարար հանդիսացող արտադրիչով։ Մեզ մնում է ցույց տալ, որ* **2,** $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$ **թվերից յուրաքանչյուրը դիտարկվող օղակում կլինի պարզ թիվ:** *Իսկապես, այդ երեք թվերից յուրաքանչյուրի նորման հավասար է 4 թվին։ Դիցուք* α*-ն այդ թվերից ցանկացածն է և դիցուք*

$$\alpha=\beta\gamma.$$

Այն ժամանակ, ըստ (9)-ի, հնարավոր է հետևյալ երեք դեպքերից մեկը՝

$$1)\ N(\beta)=4,\ N(\gamma)=1.\quad 2)\ N(\beta)=1,\ N(\gamma)=4.\quad 3)\ N(\beta)=N(\gamma)=2.$$

Առաջին դեպքում, ինչպես մենք գիտենք, γ թիվը կլինի միավորի բաժանարար, երկրորդ դեպքում միավորի բաժանարար կլինի β թիվը: Իսկ ինչ վերաբերում է երրորդ դեպքին, ապա նա ընդհանրապես հնարավոր չէ, շնորհիվ

$$a^2+3b^2=2$$

հավասարության անհնարինության a և b ամբողջ թվերի դեպքում:

Բազմապատիկ արտադրիչներ: Չնայած, ինչպես նշված է վերևում, մենք չգիտենք բազմանդամը անվերածելի արտադրիչների վերլուծել, այնուամենայնիվ գոյություն ունեն մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս իմանալ, թե տված բազմանդամն ունի՞ արդյոք բազմապատիկ արտադրիչներ, և դրական պատասխանի դեպքում հնարավորություն են տալիս այդ բազմանդամի ուսումնասիրությունը հանգեցնել արդեն բազմապատիկ արտադրիչներ չպարունակող բազմանդամների ուսումնասիրությանը: Սակայն, այդ մեթոդները պահանջում են որոշ սահմանափակումներ կատարել հիմնական դաշտի նկատմամբ: Այն է՝ ներկա պարագրաֆի ամբողջ հետագա բովանդակությունը կշարադրվի այն ենթադրությամբ, որ P դաշտն ունի 0 բնութագրիչ: Առանց այդ սահմանափակման, բազմապատիկ արտադրիչների վերաբերյալ թեորեմները, որոնք կապացուցվեն ներքևում, արդեն կորցնում են իրենց ուժը. դրա հետ մեկտեղ, կիրառությունների տեսանկյունից, զրո բնութագրիչ ունեցող դաշտերի դեպքը հանդիսանում է առավել կարևորը, քանի որ այդպիսին են, մասնավորապես, բոլոր թվային դաշտերը:

Նախ նկատենք, որ դիտարկվող դեպքի վրա փոխանցվում են և բազմանդամի ածանցյալի գաղափարը, որ մուծվեց § 22-ում կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների համար, և՛ այդ գաղափարի հիմնական հատկությունները[1]: Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

Եթե $p(x)$-ը հանդիսանում է $f(x)$ բազմանդամի անվերածելի k-պատիկ արտադրիչը, $k\geqslant 1$, ապա այն կլինի այդ բազմանդամի ածանցյալի $(k-1)$-պատիկ արտադրիչը: Մասնավորապես, բազմանդամի պարզ արտադրիչը չի մտնում ածանցյալի վերլուծության մեջ:

Իսկապես, դիցուք

$$f(x)=p^k(x)g(x), \tag{10}$$

ընդ որում $g(x)$-ը արդեն չի բաժանվում $p(x)$-ի վրա: Ածանցելով (10) հավասարությունը, ստանում ենք՝

$$f'(x)=p^k(x)g'(x)+kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)=$$
$$=p^{k-1}(x)[p(x)g'(x)+kp'(x)g(x)]:$$

Փակագծերի մեջ ընկած գումարելիներից երկրորդը չի բաժանվում $p(x)$-ի վրա. իրոք, $g(x)$-ը չի բաժանվում $p(x)$-ի վրա ըստ պայմանի, $p'(x)$-ն ունի ավելի ցածր աստիճան, այսինքն՝ նույնպես չի բաժանվում $p(x)$-ի վրա, իսկ այստեղից, նկատի ունենալով $p(x)$ բազմանդամի անվերածելի լինելը և ներկա պարագրաֆի β) հատկությունն ու § 21-ի IX հատկությունը, հետևում է մեր պնդումը: Մյուս կողմից, քառակուսի փակագծերի մեջ ընկած գումարելիներից առաջինը բաժանվում է $p(x)$-ի վրա, և այդ պատճառով ամբողջ գումարը չի կարող բաժանվել $p(x)$-ի վրա, այսինքն՝ $p(x)$ արտադրիչն իրոք մտնում է $f'(x)$-ի վերլուծության մեջ $(k-1)$-պատիկությամբ:

Մեր թեորեմայից և երկու բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի որոնման վերևում նշված եղանակից հետևում է, որ եթե տված է $f(x)$ բազմանդամի վերլուծությունը անվերածելի արտադրիչների՝

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdot\cdot\cdot p_l^{k_l}(x), \tag{11}$$

ապա $f(x)$ բազմանդամի և նրա ածանցյալի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ունի հետևյալ վերլուծությունն անվերածելի արտադրիչների՝

$$(f(x),\ f'(x))=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdot\cdot\cdot p_l^{k_l-1}(x), \tag{12}$$

որտեղ, հասկանալի է, $p_i^{k-1}(x)$ արտադրիչը $k_i=1$ դեպքում հարկավոր է փոխարինել մեկով: Մասնավորապես, **$f(x)$ բազմանդամը այն և միայն այն դեպքում չի պարունակի բազմապատիկ արտադրիչներ, եթե նա փոխադարձաբար պարզ է իր ածանցյալի հետ:**

Հետևաբար, մենք սովորեցինք պատասխանել տված բազմանդամի բազմապատիկ արտադրիչների գոյության վերաբերյալ հարցին: Դեռ ավելին, քանի որ ո՛չ բազմանդամի ածանցյալը, ո՛չ էլ երկու բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կախված չեն այն բանից, արդյոք դիտարկում ենք մենք P դաշտը, թե՞ նրա ցանկացած $\overline{P}$ ընդլայնումը, ապա որպես այժմ ապացուցված արդյունքի հետևանք մենք ստանում ենք.

Եթե զրո բնութագրիչ ունեցող P դաշտից վերցրած գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամն այդ դաշտի վրա չունի բազմապատիկ արտադրիչներ, ապա նա չի ունենա բազմապատիկ արտադրիչներ նաև P դաշտի և ոչ մի $\overline{P}$ ընդլայնման վրա:

Մասնավորապես, եթե $f(x)$ բազմանդամն անվերածելի է P դաշտի վրա, իսկ $\overline{P}$-ն P դաշտի որևէ ընդլայնումն է, ապա չնայած $f(x)$-ն արդեն $\overline{P}$-ի վրա կարող է վերածելի լինել, սակայն անկասկած չի բաժանվի անվերածելի ($\overline{P}$-ի վրա) բազմանդամի քառակուսու վրա:

Բազմապատիկ արտադրիչների առանձնացումը: Եթե տված է $f(x)$ բազմանդամը (11) վերլուծությամբ և եթե $d_1(x)$-ով մենք նշանակենք $f(x)$-ի և նրա $f'(x)$ ածանցյալի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը,

[1] Վերջավոր բնութագրիչ ունեցող դաշտերի համար կորցնում է իր ուժն այն պնդումը, որ n աստիճանի բազմանդամի ածանցյալը ունի $n-1$ աստիճան:

ապա (12)-ը կլինի վերլուծություն $d_1(x)$-ի համար։ Բաժանելով (11)-ը 12)-ի վրա, մենք կստանանք՝

$$v_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0p_1(x)p_2(x)\cdot\cdot\cdot p_l(x),$$

այսինքն՝ կստանանք այնպիսի բազմանդամ, որը չի պարունակում բազմապատիկ արտադրիչներ, ընդ որում $v_1(x)$-ի ամեն մի անվերածելի արտադրիչ կլինի արտադրիչ և $f(x)$-ի համար։ Սրանով $f(x)$-ի անվերածելի արտադրիչների որոնումը հանգում է նրանց որոնմանը $v_1(x)$-ի համար, որը ընդհանրապես ասած, ունի ավելի ցածր աստիճան և, համենայն դեպս, պարունակում է միայն պարզ արտադրիչներ։ Եթե այդ խնդիրը $v_1(x)$-ի համար լուծված լինի, ապա կմնա որոշելու միայն գտնված անվերածելի արտադրիչների բազմապատիկությունը $f(x)$-ի վերլուծության մեջ, որին կարելի է հասնել բաժանման ալգորիթմի կիրառմամբ։

Բարդացնելով այժմ շարադրված մեթոդը, կարելի է անմիջապես անցնել ոչ-բազմապատիկ արտադրիչներ ունեցող մի քանի բազմանդամների դիտարկմանը, ընդ որում, գտնելով այդ բազմանդամների անվերածելի արտադրիչները, մենք ոչ միայն կգտնենք $f(x)$-ի բոլոր անվերածելի արտադրիչները, այլև կիմանանք նրանց բազմապատիկությունները։

Դիցուք (11)-ը $f(x)$-ի վերլուծությունն է անվերածելի արտադրիչների, ընդ որում արտադրիչների ամենաբարձր բազմապատիկությունը s է, $s\geqslant 1$։ $f(x)$ բազմանդամի բոլոր միապատիկ արտադրիչների արտադրյալը նշանակենք $F_1(x)$-ով, $F_2(x)$-ով՝ բոլոր կրկնապատիկ արտադրիչների արտադրյալը, բայց վերցրած միայն մեկական անգամ և այլն, վերջապես $F_s(x)$-ով՝ բոլոր s-պատիկ արտադրիչների արտադրյալը, նույնպես վերցրած միայն մեկական անգամ. եթե այդ դեպքում որևէ j-ի համար $f(x)$-ում բացակայում են j-պատիկ արտադրիչներ, ապա ընդունում ենք $F_j(x)=1$։ Այն ժամանակ $f(x)$-ը կբաժանվի $F_k(x)$ $k=1, 2, \ldots, s$ բազմանդամի k-րդ աստիճանի վրա և (11) վերլուծությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x)=a_0F_1(x)F_2^2(x)F_3^3(x)\cdot\cdot\cdot F_s^s(x),$$

իսկ (12) վերլուծությունը $d_1(x)=(f(x), f'(x))$-ի համար կարտագրվի

$$d_1(x)=F_2(x)F_3^2(x)\cdot\cdot\cdot F_s^{s-1}(x)$$

տեսքով։

Նշանակելով $d_2(x)$-ով $d_1(x)$ բազմանդամի և նրա ածանցյալի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, և ընդհանրապես $d_k(x)$-ով $d_{k-1}(x)$ և $d'_{k-1}(x)$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, մենք այդպիսի ճանապարհով կստանանք՝

$$d_2(x)=F_3(x)F_4^2(x)\cdot\cdot\cdot F_s^{s-2}(x),$$
$$d_3(x)=F_4(x)F_5^2(x)\cdot\cdot\cdot F_s^{s-3}(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_{s-1}(x)=F_s(x),$$
$$d_s(x)=1։$$

Այստեղից՝

$$v_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0F_1(x)F_2(x)F_3(x)\cdot\cdot\cdot F_s(x),$$
$$v_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=F_2(x)F_3(x)\cdot\cdot\cdot F_s(x),$$
$$v_3(x)=\frac{d_2(x)}{d_3(x)}=F_3(x)\cdot\cdot\cdot F_s(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_s(x)=\frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}=F_s(x)$$

և, այդ պատճառով, վերջապես՝

$$F_1(x)=\frac{v_1(x)}{a_0v_2(x)},\quad F_2(x)=\frac{v_2(x)}{v_3(x)},\ \ldots,\ F_s(x)=v_s(x)։$$

Այսպիսով, օգտվելով միայն այնպիսի եղանակներով, որոնք չեն պահանջում գիտենալ $f(x)$ բազմանդամի անվերածելի արտադրիչները, այն է՝ ածանցելով և Էվկլիդի ու բաժանման ալգորիթմներով, մենք կարող ենք գտնել բազմապատիկ արտադրիչներ չունեցող $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_s(x)$ բազմանդամները, ընդ որում $F_k(x)(k=1, 2, \ldots, s)$ բազմանդամի յուրաքանչյուր անվերածելի արտադրիչը կլինի $f(x)$ բազմանդամի համար k-պատիկ արտադրիչ։

Այստեղ շարադրված մեթոդը, հասկանալի է, չի կարելի համարել բազմանդամը անվերածելի արտադրիչների վերլուծելու մեթոդ, քանի որ $s=1$ դեպքի համար, այսինքն՝ բազմապատիկ արտադրիչներ չունեցող բազմանդամի համար, մենք կստանանք միայն $f(x)=F_1(x)$։

§ 49*. Արմատի գոյության թեորեմա

Ինքնին հասկանալի է, որ յուրաքանչյուր թվային բազմանդամի կոմպլեքս թվերի դաշտում արմատի գոյության վերաբերյալ § 23-ում ապացուցված թեորեման չի կարող տարածվել կամայական դաշտի դեպքի վրա։ Ներկա պարագրաֆում կապացուցվի մի թեորեմ, որը դաշտերի ընդհանուր տեսության մեջ որոշ չափով կփոխարինի կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի նշված հիմնական թեորեմային։

Դիցուք P դաշտի վրա տրված է $f(x)$ բազմանդամը։ Բնականաբար ծագում է հետևյալ հարցը. եթե $f(x)$ բազմանդամը P դաշտում արմատներ չունի, ապա արդյո՞ք գոյություն ունի P դաշտի այնպիսի $\overline{P}$ ընդլայնում, որի մեջ $f(x)$-ի համար արդեն գտնվի գոնե մեկ արմատ։ Ընդ որում կարելի է համարել, որ $f(x)$ բազմանդամի աստիճանը մեկից մեծ է. զրո աստիճանի բազմանդամների համար հարցն իմաստ չունի, իսկ առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր $ax+b$ բազմանդամ ունի $-\frac{b}{a}$ արմատը հենց P դաշտում։ Մյուս կողմից, ակներևորեն, կարելի է սահմանափակվել այն դեպքով, երբ $f(x)$ բազմանդամը անվերածելի է. եթե այն վերածելի է P դաշտում, ապա նրա անվերածելի արտադրիչներից ցանկացածի արմատը կծառայի որպես արմատ և իր համար:

Մեզ հետաքրքրող հարցի պատասխանը տալիս է արմատի գոյության հետևյալ թեորեման.

P դաշտի վրա անվերածելի յուրաքանչյուր $f(x)$ բազմանդամի համար գոյություն ունի այդ դաշտի այնպիսի ընդլայնում, որում $f(x)$-ի համար արմատ գոյություն ունի: P դաշտի և այդ բազմանդամի որևէ արմատը պարունակող բոլոր նվազագույն դաշտերն իզոմորֆ են իրար:

Նախ ապացուցենք այս թեորեմայի երկրորդ կեսը:

Դիցուք տված է P դաշտի վրա անվերածելի

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

բազմանդամը, ընդ որում $n\geqslant 2$, այսինքն՝ $f(x)$-ը հենց P դաշտում արմատներ չունի: Ենթադրենք, որ գոյություն ունի P դաշտի $\overline{P}$ ընդլայնում, որը պարունակում է $f(x)$ բազմանդամի α արմատը, և ապացուցենք հետևյալ լեմման, որն անհրաժեշտ է հետագայի համար, բայց ներկայացնում է և ինքնուրույն հետաքրքրություն.

Եթե P դաշտի վրա անվերածելի $f(x)$ բազմանդամի $\overline{P}$-ին պատկանող α արմատը ծառայում է որպես արմատ նաև $P[x]$ օղակին պատկանող մի որևէ $g(x)$ բազմանդամի համար, ապա $f(x)$-ը կլինի $g(x)$-ի բաժանարար:

Իրոք որ, $\overline{P}$ դաշտի վրա $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամներն օժտված են $x-\alpha$ ընդհանուր բաժանարարով և, հետևաբար, փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ չեն: Բազմանդամների փոխադարձաբար պարզ չլինելու հատկությունը, սակայն, կախված չէ դաշտի ընտրությունից, ուստի կարելի է անցնել P դաշտին և կիրառել նախորդ պարագրաֆի γ) հատկությունը:

Այժմ գտնենք $\overline{P}$ դաշտի՝ P դաշտն ու α էլեմենտը պարունակող $P(\alpha)$ նվազագույն ենթադաշտը: Կանխահայտորեն նրան կպատկանեն

$$\beta=b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\cdots+b_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{2}$$

տեսքի բոլոր էլեմենտները, որտեղ $b_0, b_1, b_2,\ldots,b_{n-1}$-ը P դաշտի էլեմենտներ են: $\overline{P}$ դաշտի ոչ մի էլեմենտ չի կարող օժտված լինել (2) տեսքի երկու տարբեր գրելաձևերով. եթե տեղի ունի նաև

$$\beta=c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots+c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

հավասարությունը, ընդ որում գոնե մեկ k-ի համար $c_k\neq b_k$, ապա α-ն կլինի արմատ հետևյալ բազմանդամի համար՝

$$g(x)=(b_0-c_0)+(b_1-c_1)x+(b_2-c_2)x^2+\cdots+(b_{n-1}-c_{n-1})x^{n-1},$$

որ հակասում է վերևում ապացուցված լեմմային, քանի որ $g(x)$-ի աստիճանը փոքր է $f(x)$-ի աստիճանից:

$\overline{P}$ դաշտի (2) տեսքն ունեցող էլեմենտների թվին են պատկանում P դաշտի բոլոր էլեմենտները ($b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=0$ դեպքում), ինչպես նաև ինքը՝ α էլեմենտը ($b_1=1$, $b_0=b_2=\cdots=b_{n-1}=0$ դեպքում): Ապացուցենք, որ (2) տեսքի էլեմենտները կազմում են ամբողջ որոնելի $P(\alpha)$ ենթադաշտը: Իրոք որ, եթե տված են β էլեմենտները ((2) գրելաձևով) և

$$\gamma=c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots+c_{n-1}\alpha^{n-1},$$

ապա, $\overline{P}$ դաշտում սահմանված գործողությունների հատկությունների հիման վրա

$$\beta\pm\gamma=(b_0\pm c_0)+(b_1\pm c_1)\alpha+(b_2\pm c_2)\alpha^2+\cdots+(b_{n-1}\pm c_{n-1})\alpha^{n-1},$$

այսինքն՝ (2) տեսքի ցանկացած երկու էլեմենտների գումարը և տարբերությունը նորից կլինեն այդ նույն տեսքի էլեմենտներ:

Եթե մենք բազմապատկենք β-ն և γ-ն, ապա կստանանք մի արտահայտություն, որը պարունակում է α^n և α-ի ավելի բարձր աստիճաններ: Սակայն (1)-ից և $f(\alpha)=0$ հավասարությունից բխում է, որ α^n-ը, ուստի և α^{n+1}, α^{n+2}-ը և այլն, կարելի է արտահայտել α էլեմենտի ավելի ցածր աստիճաններով: $\beta\gamma$ արտահայտությունը որոնելու առավել պարզ եղանակը հետևյալն է. դիցուք

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1},\quad \psi(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1},$$

որտեղից $\varphi(\alpha)=\beta$, $\psi(\alpha)=\gamma$: Բազմապատկենք $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ բազմանդամները և այդ արտադրյալը բաժանենք $f(x)$-ի վրա, մենք կստանանք՝

$$\varphi(x)\,\psi(x)=f(x)q(x)+r(x), \tag{3}$$

որտեղ՝

$$r(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_{n-1}x^{n-1}.$$

Վերցնելով (3) հավասարության երկու մասերի արժեքները $x=\alpha$ դեպքում, մենք կստանանք՝

$$\varphi(\alpha)\,\psi(\alpha)=f(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha),$$

այսինքն՝ շնորհիվ $f(\alpha)=0$ հավասարության,

$$\beta\gamma=d_0+d_1\alpha+\cdots+d_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Այսպիսով, (2) տեսքի երկու էլեմենտների արտադրյալը նորից կլինի նույն տեսքի էլեմենտ:

Ցույց տանք, վերջապես, որ եթե β էլեմենտն ունի (2) տեսքը, ընդ որում $\beta\neq 0$, ապա β^{-1} էլեմենտը, որը գոյություն ունի $\overline{P}$ դաշտում, նույնպես կարող է գրվել (2) տեսքով: Դրա համար $P[x]$ օղակից վերցնենք

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$$

բազմանդամը: Քանի որ $\varphi(x)$-ի աստիճանը ցածր է $f(x)$-ի աստիճանից, իսկ $f(x)$ բազմանդամը անվերածելի է P դաշտի վրա, ապա $\varphi(x)$ և $f(x)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են և, հետևաբար, ըստ § 21-ի և § 47-ի, $P(x)$ օղակում գոյություն ունեն այնպիսի $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որ

$$\varphi(x)u(x)+f(x)v(x)=1,$$

ընդ որում, կարելի է համարել, որ $u(x)$-ի աստիճանը փոքր է n-ից՝

$$u(x)=s_0+s_1x+\cdots+s_{n-1}x^{n-1};$$

Այստեղից, շնորհիվ $f(\alpha)=0$ հավասարության, հետևում է՝

$$\varphi(\alpha)u(\alpha)=1$$

և, հետևաբար, շնորհիվ $\varphi(\alpha)=\beta$ հավասարության, մենք ստանում ենք՝

$$\beta^{-1}=u(\alpha)=s_0+s_1\alpha+\cdots+s_{n-1}\alpha^{n-1};$$

Այսպիսով, $\overline{P}$ դաշտի (2) տեսքն ունեցող բոլոր էլեմենտների համախումբը կազմում է $\overline{P}$ դաշտի ենթադաշտ. հենց դա էլ կլինի որոնելի $P(x)$ դաշտը։ Այնուհետև, քանի որ մենք տեսանք, որ (2) տեսքի β և γ էլեմենտների գումարը և արտադրյալը փնտրելիս հարկավոր է իմանալ միայն այդ էլեմենտների՝ α-ի աստիճաններով գրված արտահայտությունների գործակիցները, ապա կարելի է պնդել հետևյալ արդյունքի իրավացիությունը. եթե $\overline{P}$ դաշտին զուգընթաց գոյություն ունի P դաշտի մի այլ՝ $\overline{P}'$ ընդլայնում, որը նույնպես պարունակում է $f(x)$ բազմանդամի մի ինչ-որ α' արմատ, և եթե $P(\alpha')$-ը $\overline{P}'$ դաշտի P-ն և α'-ը պարունակող նվազագույն ենթադաշտն է, ապա $P(\alpha)$ և $P(\alpha')$ դաշտերը կլինեն իրար իզոմորֆ, ընդ որում նրանց միջև իզոմորֆ համապատասխանություն ստանալու համար հարկավոր է $P(\alpha)$ դաշտի (2) տեսքի β էլեմենտին համապատասխանեցնել $P(\alpha')$ դաշտի

$$\beta'=b_0+b_1\alpha'+b_2\alpha'^2+\cdots+b_{n-1}\alpha'^{n-1}$$

էլեմենտը, որն ունի նույն գործակիցները։ Սրանով ապացուցված է թեորեմայի երկրորդ կեսը։

Անցնենք այդ թեորեմայի առաջին հիմնական կեսի ապացուցմանը, ընդ որում վերևում շարադրվածը դրա համար ուղիներ կհուշի։ Մեզ տված է P դաշտի վրա անվերածելի $n\geqslant 2$ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը, և հարկավոր է կառուցել P դաշտի՝ $f(x)$-ի արմատ պարունակող ընդլայնում։ Դրա համար վերցնենք բազմանդամների ողջ $P[x]$ օղակը և այն տրոհենք միմյանց հետ չհատվող դասերի, միևնույն դասի մեջ գցելով մեզ տված $f(x)$ բազմանդամի վրա բաժանելիս միևնույն մնացորդը տվող բազմանդամները։ Այլ կերպ ասած, $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ բազմանդամները վերագրվում են միևնույն դասին, եթե նրանց տարբերությունն ամբողջովին բաժանվում է $f(x)$-ի վրա։

Պայմանավորվենք ստացված դասերը նշանակել A, B, C և այլ տառերով և այդ դասերի գումարն ու արտադրյալը որոշենք հետևյալ միանգամայն բնական եղանակով։ Վերցնենք A և B ցանկացած դասերը,

ընտրենք A դասում որևէ $\varphi_1(x)$ բազմանդամ, B դասում՝ որևէ $\psi_1(x)$ բազմանդամ և նշանակենք $\chi_1(x)$-ով այդ բազմանդամների գումարը՝

$$\chi_1(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x),$$

իսկ $\theta_1(x)$-ով՝ նրանց արտադրյալը՝

$$\theta_1(x)=\varphi_1(x)\cdot\psi_1(x)։$$

Ընտրենք այժմ A դասում ցանկացած ուրիշ $\varphi_2(x)$ բազմանդամ, B դասում ցանկացած $\psi_2(x)$ բազմանդամ և նշանակենք $\chi_2(x)$-ով և $\theta_2(x)$-ով համապատասխանաբար նրանց գումարը և արտադրյալը՝

$$\chi_2(x)=\varphi_2(x)+\psi_2(x),$$
$$\theta_2(x)=\varphi_2(x)\cdot\psi_2(x)։$$

Ըստ պայմանի $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ բազմանդամները պատկանում են միևնույն A դասին, և, հետևաբար, նրանց $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ տարբերությունը առանց մնացորդի բաժանվում է $f(x)$-ի վրա. այդ նույն հատկությամբ է օժտված և $\psi_1(x)-\psi_2(x)$ տարբերությունը։ Այստեղից հետևում է, որ

$$\begin{aligned}\chi_1(x)-\chi_2(x)&=[\varphi_1(x)+\psi_1(x)]-[\varphi_2(x)+\psi_2(x)]=\\&=[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+[\psi_1(x)-\psi_2(x)]\end{aligned}\tag{4}$$

տարբերությունը նույնպես առանց մնացորդի բաժանվում է $f(x)$ բազմանդամի վրա։ Դա ճիշտ է և $\theta_1(x)-\theta_2(x)$ տարբերության համար, քանի որ

$$\begin{aligned}\theta_1(x)-\theta_2(x)&=\varphi_1(x)\psi_1(x)-\varphi_2(x)\psi_2(x)=\\&=\varphi_1(x)\psi_1(x)-\varphi_1(x)\psi_2(x)+\varphi_1(x)\psi_2(x)-\varphi_2(x)\psi_2(x)=\\&=\varphi_1(x)[\psi_1(x)-\psi_2(x)]+[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]\psi_2(x)։\end{aligned}\tag{5}$$

(4) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ $\chi_1(x)$ և $\chi_2(x)$ բազմանդամները պատկանում են միևնույն դասին։ Այլ կերպ ասած, A դասի ցանկացած բազմանդամի գումարը B դասի ցանկացած բազմանդամի հետ պատկանում է միանգամայն որոշակի C դասի, որը կախված չէ այն բանից, թե հատկապես ինչպիսի բազմանդամներ են ընտրված A և B դասերում որպես «ներկայացուցիչներ». այդ C դասը անվանենք A և B դասերի գումար՝

$$C=A+B։$$

Նմանապես, շնորհիվ (5)-ի, A և B դասերում ներկայացուցիչների ընտրությունից կախված չէ և այն D դասը, որին պատկանում է A-ից վերցրած ցանկացած բազմանդամի արտադրյալը B-ից վերցրած ցանկացած բազմանդամով. այդ դասն անվանենք A և B դասերի արտադրյալ՝

$$D=AB։$$

Ցույց տանք, որ այն դասերի համախումբը, որոնց տրոհեցինք բազմանդամների $P[x]$ օղակը, գումարման և բազմապատկման գործողությունների նշված մուծումից հետո դառնում է դաշտ։ Իրոք, երկու գործողությունների համար զուգորդելիության և տեղափոխելիության օրենքների և բաշխելիության օրենքի իրավացիությունը բխում է $P[x]$ օղակում այդ օրենքների իրավացիությունից, քանի որ դասերի նկատմամբ գործողությունները հանգում են այդ դասերում գտնվող բազմանդամների նկատմամբ գործողություններին։ Զրոյի դերը, ակներևաբար, կատարում է $f(x)$ բազմանդամի վրա առանց մնացորդի բաժանվող բազմանդամներից կազմված դասը։ Այդ դասն անվանենք զրոյական դաս և նշանակենք 0 սիմվոլով։ $f(x)$-ի վրա բաժանելիս $\varphi(x)$ մնացորդ տվող բազմանդամներից կազմված A դասի համար հակադիր դաս կծառայի այն դասը, որը կազմված է $f(x)$-ի վրա բաժանելիս $-\varphi(x)$ մնացորդ տվող բազմանդամներից։ Այստեղից բխում է, որ բազմանդամների բազմության մեջ իրագործելի է միարժեք հանումը։

Դասերի բազմության մեջ բաժանման իրագործելիությունն ապացուցելու համար հարկավոր է ցույց տալ, որ գոյություն ունի միավորի դերը կատարող դաս, և որ զրոյական դասից տարբեր ցանկացած դասի համար գոյություն ունի հակադարձ դաս։ Ակներևաբար, միավոր կլինի $f(x)$ բազմանդամի վրա բաժանելիս 1 մնացորդ տվող բազմանդամների դասը. այդ դասն անվանենք միավոր դաս և նշանակենք E սիմվոլով։

Դիցուք այժմ տված է զրոյականից տարբեր A դասը։ A դասից որպես ներկայացուցիչ ընտրված $\varphi(x)$ բազմանդամը, հետևաբար, չի բաժանվի $f(x)$-ի վրա առանց մնացորդի, ուստի և, նկատի ունենալով $f(x)$ բազմանդամի անվերածելի լինելը, այդ երկու բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են։ Այսպիսով, $P[x]$ օղակում գոյություն ունեն այնպիսի $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որոնք բավարարում են

$$\varphi(x)u(x)+f(x)v(x)=1$$

հավասարությանը, որտեղից՝

$$\varphi(x)u(x)=1-f(x)v(x)\text{։} \tag{6}$$

(6) հավասարության աջ մասը $f(x)$-ի վրա բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, այսինքն՝ պատկանում է E միավոր դասին։ Եթե այն դասը, որին պատկանում է $u(x)$ բազմանդամը, մենք նշանակենք B-ով, ապա (6) հավասարությունը ցույց կտա, որ

$$AB=E,$$

որտեղից՝ $B=A^{-1}$։ Սրանով ապացուցված է յուրաքանչյուր ոչզրոյական դասի համար հակադարձ դասի գոյությունը, այսինքն՝ ավարտված է այն բանի ապացուցումը, որ դասերը կազմում են դաշտ։

Նշանակենք այդ դաշտը $\overline{P}$-ով և ցույց տանք, որ այն հանդիսանում է P դաշտի ընդլայնում։ P դաշտի յուրաքանչյուր α էլեմենտին համապատասխանում է մի դաս, որը կազմված է $f(x)$-ի վրա բաժանելիս α մնացորդ տվող բազմանդամներից. ինքը՝ α էլեմենտը, դիտվելով որպես զրոյական աստիճանի բազմանդամ, պատկանում է այդ դասին։ Այդ հատուկ տեսքի բոլոր դասերը $\overline{P}$ դաշտում կազմում են P դաշտին իզոմորֆ ենթադաշտ։ Իսկապես, համապատասխանության փոխադարձ միարժեքությունն ակներև է. մյուս կողմից, այդ դասերում որպես ներկայացուցիչներ կարելի է ընտրել P դաշտի էլեմենտները, ուստի P-ի էլեմենտների գումարին (արտադրյալին) կհամապատասխանի համապատասխան դասերի գումարը (արտադրյալը)։ Հետևաբար, հետագայում մենք իրավունք ունենք չտարբերելու P դաշտի էլեմենտները նրանց համապատասխանող դասերից։

Վերջապես, X-ով նշանակենք այն դասը, որը կազմված է $f(x)$-ի վրա բաժանելիս x մնացորդ տվող բազմանդամներից։ Այդ դասը հանդիսանում է $\overline{P}$ դաշտի միանգամայն որոշակի էլեմենտը, և մենք ցանկանում ենք ցույց տալ, որ այն ծառայում է որպես արմատ $f(x)$ բազմանդամի համար։ Դիցուք

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\text{,}$$

Նշանակենք A_i-ով P դաշտի a_i $(i=0, 1, \ldots, n,)$ էլեմենտին վերևում նշված իմաստով համապատասխանող դասը և գտնենք, թե ինչի է հավասար $\overline{P}$ դաշտի

$$A_0X^n+A_1X^{n-1}+\cdots+A_{n-1}X+A_n \tag{7}$$

էլեմենտը։ A_i դասերի ներկայացուցիչներ համարելով a_i, $i=0, 1, \ldots, n$, էլեմենտները, իսկ X դասի ներկայացուցիչ՝ x բազմանդամը, և օգտագործելով դասերի գումարման և բազմապատկման սահմանումը, մենք ստանում ենք, որ (7) դասում պարունակվում է ինքը՝ $f(x)$ բազմանդամը։ Սակայն, $f(x)$-ն առանց մնացորդի բաժանվում է ինքն իր վրա, և, հետևաբար, պարզվում է, որ (7) դասը զրոյական դաս է։ Այսպիսով, (7)-ում A_i դասերը փոխարինելով P դաշտի նրանց համապատասխանող a_i էլեմենտներով, մենք ստանում ենք, որ $\overline{P}$ դաշտում տեղի ունի

$$a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n=0$$

հավասարությունը, այսինքն՝ իրոք որ X դասը $f(x)$ բազմանդամի արմատն է։

Սրանով ավարտվում է արմատի գոյության վերաբերյալ թեորեմայի ապացուցումը։ Նկատենք, որ, որպես P վերցնելով իրական թվերի դաշտը և ընդունելով $f(x)=x^2+1$, մենք կստա-

նանք կոմպլեքս թվերի դաշտի կառուցման մի եղանակ ևս։

Արմատի գոյության վերաբերյալ թեորեմայից կարող են արտածվել հետևանքներ, նման նրանց, որոնք արտածվեցին կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի հիմնական թեորեմայից § 24-ում։ Նախ մի դիտողություն անենք։ Քանի որ $f(x)$ *բազմանդամի յուրաքանչյուր* $x-c$ *գծային արտադրիչ անվերածելի է, ապա այն պետք է մտնի* $f(x)$*-ի անվերածելի արտադրիչների միակ վերլուծության մեջ։*

$f(x)$*-ի անվերածելի արտադրիչների վերլուծության մեջ գծային արտադրիչների թիվը, սակայն, չի կարող գերազանցել այդ բազմանդամի աստիճանից։ Մենք ստանում ենք հետևյալ արդյունքը.*

n աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը P դաշտում կարող է ունենալ ոչ ավելի, քան n արմատ, եթե նույնիսկ արմատներից յուրաքանչյուրը հաշվենք այնքան անգամ, ինչպիսին է նրա բազմապատիկությունը։

P *դաշտի վրա* n *աստիճանի* $f(x)$ *բազմանդամի համար* վերլուծման դաշտ *անվանենք* P *դաշտի այնպիսի* Q *ընդլայնումը, որում* $f(x)$*-ի համար կա* n *արմատ (հաշվելով բազմապատիկ արմատներն այնքան անգամ, ինչպիսին է նրանց բազմապատիկությունը)։ Հետևաբար,* Q *դաշտի վրա* $f(x)$ *բազմանդամը կվերլուծվի գծային արտադրիչների, ընդ որում* Q *դաշտի հետագա ոչ մի ընդլայնում արդեն չի կարող* $f(x)$*-ի համար նոր արմատներ առաջացնել։*

$P(x)$ օղակից վերցրած յուրաքանչյուր $f(x)$ բազմանդամի համար P դաշտի վրա գոյություն ունի վերլուծման դաշտ։

Իրոք, եթե $n(n\geqslant 1)$ *աստիճանի* $f(x)$ *բազմանդամը* P *դաշտում ունի* n *արմատ, ապա* P*-ն ինքը կլինի վերլուծման որոնելի դաշտը։ Իսկ եթե* P*-ի վրա* $f(x)$*-ը չի վերլուծվում գծային արտադրիչների, ապա վերցնենք նրա ոչ գծային անվերածելի* $\varphi(x)$ *արտադրիչներից մեկը և, արմատի գոյության վերաբերյալ թեորեմայի հիման վրա,* P*-ն ընդլայնենք մինչև* $\varphi(x)$*-ի արմատ պարունակող* P' *դաշտը։ Եթե* P' *դաշտի վրա* $f(x)$ *բազմանդամը դեռևս չի վերլուծվում գծային արտադրիչների, ապա նորից ընդլայնում ենք դաշտը՝ ստեղծելով արմատ մնացած ոչ գծային անվերածելի արտադրիչներից մեկի համար ևս։ Վերջավոր թվով քայլերից հետո, ակներևաբար, մենք կգանք* $f(x)$*-ի համար վերլուծման դաշտին։*

Հասկանալի է, որ $f(x)$*-ը կարող է ունենալ վերլուծման շատ դաշտեր։ Կարելի էր ապացուցել, որ* P *դաշտը և* $f(x)$ *բազմանդամի* n *հատ արմատներ (որտեղ* n*-ը այդ բազմանդամի աստիճանն է) պարունակող բոլոր նվազագույն դաշտերն իզոմորֆ են իրար։ Սակայն, մենք չենք օգտվի այս պնդումից և, այդ պատճառով, չենք բերի նրա ապացույցը։*

Բազմապատիկ արմատներ։ *Նախորդ պարագրաֆում ապացուցվեց, որ 0 բնութագրիչ ունեցող* P *դաշտի վրա* $f(x)$ *բազմանդամը այն և միայն այն դեպքում չունի բազմապատիկ արտադրիչներ, եթե նա փոխադարձաբար պարզ է իր ածանցյալի հետ, ինչպես նաև նշվեց, որ* P *դաշտի վրա* $f(x)$ *բազմանդամի բազմապատիկ արտադրիչների բացակայությունից հետևում է այդպիսի արտադրիչների բացակայությունը* P *դաշտի ցանկացած* $\overline{P}$ *ընդլայնման վրա։ Կիրառելով այդ այն դեպքում, երբ* $\overline{P}$*-ն հանդիսանում է* $f(x)$*-ի համար վերլուծման դաշտ, և հիշելով բազմապատիկ արմատի սահմանումը, մենք ստանում ենք հետևյալ արդյունքը՝*

Եթե 0 բնութագրիչ ունեցող P դաշտի վրա $f(x)$ բազմանդամը վերլուծման տված դաշտում չունի բազմապատիկ արմատներ, ապա նա փոխադարձաբար պարզ է իր $f'(x)$ ածանցյալի հետ։ Հակադարձաբար, եթե $f(x)$-ը փոխադարձաբար պարզ է իր ածանցյալի հետ, ապա նա իր վերլուծման դաշտերից ոչ մեկում չունի բազմապատիկ արմատներ։

Այստեղից, մասնավորապես, բխում է, որ 0 բնութագրիչ ունեցող P դաշտի վրա անվերածելի $f(x)$ բազմանդամը չի կարող ունենալ բազմապատիկ արմատներ այդ դաշտի և ոչ մի ընդլայնման մեջ։ *Վերջավոր բնութագրիչ ունեցող դաշտերի համար այս պնդումը դադարում է իրավացի լինելուց, մի հանգամանք, որ նշանակալի դեր է խաղում դաշտերի ընդհանուր տեսության մեջ։*

Եզրափակելով, նշենք, որ կամայական դաշտի դեպքում պահպանվում են և Վիետի բանաձևերը (տես § 24). այդ դեպքում բազմանդամի արմատները վերցվում են այդ բազմանդամի վերլուծման դաշտերից որևէ մեկում։

§ 50*. Ռացիոնալ կոտորակների դաշտը

Ռացիոնալ կոտորակների՝ § 25-ում շարադրված տեսությունը լրիվ պահպանվում է նաև կամայական հիմնական դաշտի դեպքում։ *Սակայն իրական թվերի դաշտից կամայական* P *դաշտին անցնելիս պետք է դեն նետվի* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *արտահայտությունը որպես* x *փոփոխականի ֆունկցիա դիտարկելու տեսակետը, քանի որ այն, ինչպես մենք գիտենք, կիրառելի չէ արդեն բազմանդամների նկատմամբ։ Մեր առջև խնդիր է դրված որոշել, թե ինչպիսի՞ իմաստ է հարկավոր վերագրել այդ արտահայտություններին այն դեպքում, երբ գործակիցները պատկանում են կամայական* P *դաշտին։ Ավելի ճշգրիտ՝ մենք ուզում ենք կառուցել այնպիսի դաշտ, որի մեջ պարունակվեր բազմանդամների* $P[x]$ *օղակը, ընդ որում՝ այնպես, որպեսզի այդ նոր դաշտում սահմանված գումարման և բազմապատկման գործողությունները բազմանդամ-*

ների նկատմամբ կիրառելիս համընկնեին P[x] օղակում կատարվող գործողությունների հետ. ավելի կարճ՝ P[x] օղակը պետք է լինի այդ նոր դաշտի ենթաօղակ։ Մյուս կողմից, այդ նոր դաշտի յուրաքանչյուր էլեմենտ պետք է ներկայացվի (այդ դաշտում որոշված բաժանման իմաստով) երկու բազմանդամների քանորդի տեսքով։ Ինչպես այժմ ցույց կտրվի, այդպիսի դաշտ ամեն մի P-ի համար կարելի է կառուցել. այն նշանակում են P(x) (անհայտը վերցված է կլոր փակագծերի մեջ) և անվանում են ռացիոնալ կոտորակների դաշտ P դաշտի վրա։

Նախ ենթադրենք, որ P[x] օղակն արդեն հանդիսանում է մի որևէ Q դաշտի ենթաօղակ։ Եթե f(x)-ը և g(x)-ը կամայական բազմանդամներ են P(x)-ից, ընդ որում $g(x)\neq 0$, ապա Q դաշտում գոյություն ունի միարժեքորեն որոշված էլեմենտ, որը հավասար է f(x)-ը g(x)-ի վրա բաժանելուց առաջացած քանորդին։ Ինչպես սովորաբար դաշտի դեպքում, այդ էլեմենտը նշանակելով $\frac{f(x)}{g(x)}$-ով, մենք, քանորդի սահմանման հիման վրա, կարող ենք գրել

$$f(x)=g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

հավասարությունը, որտեղ արտադրյալը հարկավոր է հասկանալ Q դաշտում բազմապատկման իմաստով։ Կարող է պատահել, որ որոշ քանորդներ՝ $\frac{f(x)}{g(x)}$ և $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ լինեն Q դաշտի միևնույն էլեմենտը. դրա համար պայմանը կոտորակների հավասարության սովորական պայմանն է՝ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x)\psi(x)=\varphi(x)g(x)$։ Իսկապես, եթե $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\alpha$, ապա, ըստ (1)-ի,

$$f(x)=g(x)\alpha,\quad \varphi(x)=\psi(x)\alpha,$$

որտեղից՝

$$f(x)\psi(x)=g(x)\psi(x)\alpha=g(x)\varphi(x)։$$

Հակադարձաբար, եթե P[x] օղակում բազմապատկման իմաստով $f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)=u(x)$, ապա, անցնելով Q դաշտին, մենք ստանում ենք

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

հավասարությունները։

Այնուհետև, հեշտ է տեսնել, որ Q-ի ցանկացած էլեմենտների [որոնք P[x]-ից վերցրած բազմանդամների քանորդներ են] գումարը և արտադրյալը նորից կարող են ներկայացվել այդպիսի քանորդների

տեսքով, ընդ որում իրավացի են կոտորակների գումարման և բազմապատկման սովորական կանոնները՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}, \tag{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\psi(x)}։ \tag{3}$$

Իսկապես, այս հավասարություններից յուրաքանչյուրի երկու մասերն էլ բազմապատկելով $g(x)\psi(x)$ արտադրյալով և կիրառելով (1)-ը, մենք կստանանք P(x) օղակում իրավացի հավասարություններ։ (2) և (3) հավասարությունների իրավացիությունն այժմ հետևում է այն բանից, որ, Q դաշտում զրոյի բաժանարարների բացակայության շնորհիվ, ստացված հավասարություններից յուրաքանչյուրի երկու մասերն էլ կարելի է կրճատել զրոյից տարբեր $g(x)\psi(x)$ էլեմենտներով՝ առանց հավասարությունները խախտելու։

Այս նախնական դատողությունները մեզ հուշում են այն ուղին, որով մենք պետք է ընթանանք P(x) դաշտը կառուցելիս։ Դիցուք տված են կամայական P դաշտը և նրա վրա բազմանդամների P[x] օղակը։ Բազմանդամների յուրաքանչյուր կարգավորված f(x), g(x) զույգին, որտեղ $g(x)\neq 0$, մենք համապատասխանեցնում ենք $\frac{f(x)}{g(x)}$ սիմվոլը, որը կոչվում է ռացիոնալ կոտորակ՝ f(x) համարիչով և g(x) հայտարարով։ Ընդգծում ենք, որ սա բազմանդամների տված զույգին համապատասխանող սիմվոլ է միայն, քանի որ P[x] օղակում բազմանդամների բաժանում, ընդհանրապես ասած, անիրագործելի է, իսկ P[x] օղակը դեռևս ոչ մի դաշտում չի պարունակվում. եթե նույնիսկ g(x)-ը f(x)-ի համար բաժանարար է, $\frac{f(x)}{g(x)}$ նոր սիմվոլն այժմ հարկավոր է տարբերել այն բազմանդամից, որը ստացվել է որպես քանորդ՝ f(x)-ը g(x)-ի վրա բաժանելուց։

Այժմ $\frac{f(x)}{g(x)}$ և $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ռացիոնալ կոտորակներն անվանենք իրար հավասար՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{4}$$

եթե P[x] օղակում տեղի ունի $f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)$ հավասարությունը։ Ակներև է, որ յուրաքանչյուր կոտորակ հավասար է ինքն իրեն, ինչպես նաև, եթե մի կոտորակ հավասար է մյուսին, ապա և երկրորդն էլ հավասար է առաջինին։ Ապացուցենք հավասարության այդ գաղափարի փոխանցելիությունը (տրանզիտիվությունը)։ Դիցուք տված են (4) և

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{u(x)}{v(x)} \tag{5}$$

հավասարությունները։ $P[x]$ օղակում նրանց համարժեք

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x),\quad \varphi(x)v(x)=\psi(x)u(x)$$

հավասարություններից բխում է

$$f(x)v(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)v(x)=g(x)u(x)\psi(x)$$

և հետևաբար, զրոյին ոչ հավասար (որպես կոտորակներից մեկի հայտարար) $\psi(x)$ բազմանդամի վրա կրճատելուց հետո ստանում ենք՝

$$f(x)v(x)=g(x)u(x),$$

որտեղից, կոտորակների հավասարության սահմանման համաձայն՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{v(x)},$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Համախմբենք այժմ մի դասի մեջ բոլոր այն կոտորակները, որոնք հավասար են տված մի որևէ կոտորակի, և, հետևաբար, հավասարության փոխանցելիության շնորհիվ, հավասար են իրար։ Եթե մի դասում կա գոնե մի կոտորակ, որը չի պարունակվում մի այլ դասում, ապա, ինչպես հետևում է հավասարության փոխանցելիությունից, այդ երկու դասերը ոչ մի ընդհանուր էլեմենտ չունեն։

Այսպիսով, $P[x]$ օղակի բազմանդամների օգնությամբ գրված բոլոր ռացիոնալ կոտորակների համախմբությունը տրոհվում է իրար հավասար կոտորակների ոչփոխհատվող դասերի։ Այժմ մենք ցանկանում ենք հավասար կոտորակների դասերի այդ բազմության մեջ այնպես սահմանել հանրահաշվական գործողությունները, որպեսզի այդ բազմությունը դաշտ լինի։ Դրա համար մենք ռացիոնալ կոտորակների հետ գործողությունները կսահմանենք և յուրաքանչյուր անգամ կստուգենք, որ գումարելիների (կամ արտադրիչների) փոխարինումը նրանց հավասար կոտորակներով գումարը (կամ արտադրյալը) փոխարինում է նույնպես հավասար կոտորակով։ Դա թույլ կտա խոսել հավասար կոտորակների դասերի գումարի և արտադրյալի մասին։

Նախնապես անենք հետևյալ դիտողությունը, որը հետագայում հաճախակի կկիրառվի. ռացիոնալ կոտորակը դառնում է իրեն հավասար կոտորակ, եթե նրա համարիչը և հայտարարը բազմապատկվում են

զրոյից տարբեր միևնույն բազմանդամով կամ կրճատվում են ցանկացած ընդհանուր արտադրիչով։ Իսկապես,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f[x)h(x)}{g(x)h(x)},$$

քանի որ $P[x]$ օղակում

$$f(x)[g(x)h(x)]=g(x)[f(x)h(x)]:$$

Ռացիոնալ կոտորակների գումարումը մենք սահմանում ենք (2) բանաձևով, քանի որ $g(x)\neq0$ և $\psi(x)\neq0$-ից հետևում է $g(x)\psi(x)\neq0$, ապա այդ բանաձևի աջ մասն իսկապես կլինի ռացիոնալ կոտորակ։ Եթե, այնուհետև, տված է, որ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)},\qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

այսինքն՝

$$f(x)g_0(x)=g(x)f_0(x),\quad \varphi(x)\psi_0(x)=\psi(x)\varphi_0(x), \tag{6}$$

ապա, (6) հավասարություններից առաջինի երկու մասերն էլ բազմապատկելով $\psi(x)\psi_0(x)$-ով, երկրորդի երկու մասերն էլ՝ $g(x)g_0(x)$-ով, իսկ հետո անդամ առ անդամ գումարելով այդ հավասարությունները, մենք կստանանք՝

$$[f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)]g_0(x)\psi_0(x)=$$
$$=[f_0(x)\psi_0(x)+g_0(x)\varphi_0(x)]g(x)\psi(x),$$

որը համարժեք է հետևյալ հավասարությանը՝

$$\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_0(x)\psi_0(x)+g_0(x)\varphi_0(x)}{g_0(x)\psi_0(x)}.$$

Այսպիսով, եթե տված են իրար հավասար կոտորակների երկու դասեր, ապա դասերից մեկի ցանկացած կոտորակի և մյուս դասի ցանկացած կոտորակի գումարները բոլորն էլ իրար հավասար են, այսինքն՝ գտնվում են միանգամայն որոշակի մի երրորդ դասում։ Այդ դասը կոչվում է տված երկու դասերի գումար։

Այդ գումարման տեղափոխելիությունն անմիջականորեն բխում է (2)-ից, իսկ զուգորդելիությունն ապացուցվում է հետևյալ կերպ՝

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=$$
$$=\frac{f(x)\psi(x)v(x)+g(x)\varphi(x)v(x)+g(x)\psi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$
$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)v(x)+\psi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}\right]:$$

Կոտորակների հավասարության սահմանումից առանց դժվարության հետևում է, որ $\frac{0}{g(x)}$ տեսքի կոտորակները, այսինքն՝ զրոյին հավասար համարիչով կոտորակները, իրար հավասար են և որ նրանք կազմում են իրար հավասար կոտորակների լրիվ դաս։ Այդ դասը մենք անվանենք զրոյական դաս և ապացուցենք, որ նա մեր գումարման մեջ խաղում է զրոյի դերը։ Իսկապես, եթե տրված է $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ կամայական կոտորակը, ապա

$$\frac{0}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{0\cdot\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

Հետևյալ՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g^2(x)}$$

հավասարությունից, որի աջ մասը պատկանում է զրոյական դասին, այժմ հետևում է, որ $\frac{-f(x)}{g(x)}$ կոտորակին հավասար կոտորակների դասը կլինի $\frac{f(x)}{g(x)}$ կոտորակին հավասար կոտորակների դասի հակադիր դաս։ Այստեղից, ինչպես մենք գիտենք, հետևում է միարժեք հանման իրագործելիությունը։

Ռացիոնալ կոտորակների բազմապատկումը մենք կսահմանենք (3) բանաձևով, ընդ որում, նկատի ունենալով, որ $g(x)\psi(x)\neq 0$, այդ բանաձևի աջ մասը իսկապես կլինի ռացիոնալ կոտորակ։ Եթե, այնուհետև՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)},\quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

այսինքն՝

$$f(x)g_0(x)=g(x)f_0(x),\quad \varphi(x)\psi_0(x)=\psi(x)\varphi_0(x),$$

ապա, այս վերջին հավասարություններն անդամ առ անդամ բազմապատկելով, մենք կստանանք՝

$$f(x)g_0(x)\varphi(x)\psi_0(x)=g(x)f_0(x)\psi(x)\varphi_0(x),$$

որը համարժեք է

$$\frac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_0(x)\varphi_0(x)}{g_0(x)\psi_0(x)}$$

հավասարությանը։ Այսպիսով, դասերի գումարի վերևում տված սահմանման նմանությամբ կարելի է խոսել իրար հավասար կոտորակների դասերի արտադրյալի մասին։

Այդ բազմապատկման տեղափոխելիությունը և զուգորդելիությունը անմիջականորեն հետևում են (3)-ից, իսկ բաշխելիության օրենքի իրավացիությունն ապացուցվում է հետևյալ կերպ՝

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}=$$
$$=\frac{[f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)]u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)u(x)+g(x)\varphi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$
$$=\frac{f(x)\psi(x)u(x)v(x)+g(x)\varphi(x)u(x)v(x)}{g(x)\psi(x)v^2(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}+\frac{\varphi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=$$
$$=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{\varphi(x)}{v(\psi)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)};$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\frac{f(x)}{f(x)}$ տեսքի կոտորակները, այսինքն՝ այնպիսի կոտորակները, որոնց համարիչը հավասար է հայտարարին, բոլորը հավասար են իրար և կազմում են առանձին դաս։ Այդ դասը կոչվում է միավոր դաս և մեր բազմապատկման մեջ խաղում է միավորի դերը՝

$$\frac{f(x)}{f(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\varphi(x)}{f(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

Եթե, վերջապես, $\frac{f(x)}{g(x)}$ կոտորակը չի պատկանում զրոյական դասին, այսինքն՝ $f(x)\neq 0$, ապա գոյություն ունի $\frac{g(x)}{f(x)}$ կոտորակը։ Քանի որ

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{f(x)g(x)}{g(x)f(x)},$$

իսկ այս հավասարության աջ մասը պատկանում է միավոր դասին, ապա $\frac{g(x)}{f(x)}$ կոտորակին հավասար կոտորակների դասը կլինի $\frac{f(x)}{g(x)}$ կոտորակին հավասար կոտորակների դասի հակադարձ դասը։ Այստեղից հետևում է միարժեք բաժանման իրագործելիությունը։

Այսպիսով, P դաշտից վերցրած գործակիցներով իրար հավասար ռացիոնալ կոտորակների դասերը գործողությունների մեր սահմանման դեպքում կազմում են կոմուտատիվ դաշտ։ Հենց այդ դաշտն էլ կլինի որոնելի P(x) դաշտը։ Մենք պետք է դեռ ապացուցենք, որ մեր կառուցած դաշտում կա P[x] օղակին իզոմորֆ ենթաօղակ, և որ դաշտի յուրաքանչյուր էլեմենտ ներկայացնելի է այդ ենթաօղակի երկու էլեմենտների քանորդի տեսքով։

Եթե մենք P[x] օղակից վերցրած կամայական f(x) բազմանդամին համապատասխանեցնենք $\frac{f(x)}{1}$ (բոլոր կոտորակների մեջ, հասկանալի է, կպարունակվեն և կոտորակներ, որոնց հայտարարը հավասար է մեկի) կոտորակին հավասար ռացիոնալ կոտորակների դասը, ապա կստանանք $P[x]$ օղակի փոխադարձ միարժեք արտապատկերում մեր կառուցած դաշտի ներսը։ Իսկապես,

$$\frac{f(x)}{1}=\frac{\varphi(x)}{1}$$

հավասարությունից կհետևեր $f(x)\cdot 1=1\cdot\varphi(x)$, այսինքն՝ $f(x)=\varphi(x)$։ Այդ արտապատկերումը կլինի նույնիսկ իզոմորֆ արտապատկերում, ինչպես ցույց են տալիս հետևյալ հավասարությունները.

$$\frac{f(x)}{1}+\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 1}{1^2}=\frac{f(x)+g(x)}{1},$$

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot g(x)}{1}.$$

Այսպիսով, $\frac{f(x)}{1}$ տեսքի կոտորակներին հավասար կոտորակների դասերը մեր դաշտում կազմում են $P[x]$ օղակին իզոմորֆ ենթաօղակ։ Հետևաբար, $\frac{f(x)}{1}$ կոտորակը կարելի է պարզապես նշանակել $f(x)$։ Քանի որ, վերջապես, $g(x)\neq 0$ դեպքում $\frac{1}{g(x)}$ կոտորակին հավասար կոտորակների դասը հանդիսանում է $\frac{g(x)}{1}$ կոտորակին հավասար կոտորակների դասի համար հակադարձ դաս, ուստի՝

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

հավասարությունից հետևում է, որ մեր դաշտի բոլոր էլեմենտները կարելի է համարել (այդ դաշտում որոշված գործողությունների իմաստով) $P[x]$ օղակի բազմանդամների քանորդներ։

Մենք կամայական P դաշտի վրա կառուցեցինք ռացիոնալ կոտորակների $P(x)$ դաշտը։ Այդ նույն մեթոդով, բազմանդամների օղակը փոխարեն վերցնելով ամբողջ թվերի օղակը, կարելի է կառուցել ռացիոնալ թվերի դաշտը։ Համախմբելով այդ երկու դեպքերը և օգտագործելով ճիշտ նույնպիսի մեթոդ, կարելի էր ապացուցել թեորեմա, որ ընդհանրապես զրոյի բաժանարար չունեցող յուրաքանչյուր կոմուտատիվ օղակ մի որևէ դաշտի ենթաօղակ է։

ԳԼՈՒԽ ՏԱՍՆՄԵԿԵՐՈՐԴ

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆՀԱՅՏՆԵՐԻՑ

§ 51. Մի քանի անհայտներից կազմված բազմանդամների օղակներ

Հաճախ հարկ է լինում դիտարկել բազմանդամներ, որոնք կախված են ոչ թե մեկ, այլ երկու, երեք, ընդհանրապես մի քանի փոփոխականներից։ Այսպես, գրքի առաջին գլուխներում մեր կողմից արդեն ուսումնասիրվել են գծային և քառակուսային ձևերը, որոնք իրենցից ներկայացնում են այդպիսի բազմանդամների օրինակներ։ Ընդհանրապես $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից կազմված $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բազմանդամ որևէ P դաշտի վրա կոչվում է P դաշտից վերցրած գործակիցներով $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ տեսքի վերջավոր թվով անդամների գումարը, որտեղ բոլոր $k_i\geqslant 0$. Հասկանալի է, այս դեպքում ենթադրվում է, որ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բազմանդամը չի պարունակում նման անդամներ և որ դիտարկվում են միայն զրոյից տարբեր գործակիցներով անդամները։ n անհայտներից կազմված $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ երկու բազմանդամները համարվում են հավասար (կամ՝ նույնաբար հավասար), եթե հավասար են նրանց միատեսակ անդամների գործակիցները։

Եթե P դաշտի վրա տրված է $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բազմանդամը, ապա նրա աստիճան x_i անհայտի նկատմամբ ($i=1, 2, \ldots, n$) կոչվում է այն ամենաբարձր ցուցիչը, որով x_i անդամը մտնում է այդ բազմանդամի մեջ։ Պատահականորեն այդ աստիճանը կարող է հավասար լինել 0-ի, որ նշանակում է, չնայած f-ը համարվում է $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n$ անհայտներից կազմված բազմանդամ, բայց x_i անհայտը իրականում նրա գրության մեջ չի մտնում։

Մյուս կողմից, եթե մենք

$$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

անդամի աստիճան անվանենք $k_1+k_2+\cdots+k_n$ թիվը, այսինքն՝ անհայտների ցուցիչների գումարը, ապա $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **բազմանդամի աստիճան** (այսինքն՝ անհայտների համախմբի աստիճան) կլինի նրա անդամների աստիճաններից ամենաբարձրը: Մասնավորապես զրո աստիճանի բազմանդամներ կլինեն, ինչպես և մեկ անհայտի դեպքում, միայն P դաշտի զրոյից տարբեր էլեմենտները: Մյուս կողմից, ինչպես և մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների դեպքում, զրոն կլինի n անհայտներից կազմած միակ բազմանդամը, որի աստիճանը որոշված չէ: Հասկանալի է, որ ընդհանուր դեպքում բազմանդամը կարող է պարունակել ամենաբարձր աստիճանի մի քանի անդամներ և դրա համար չի կարելի խոսել բազմանդամի ավագ (ըստ աստիճանի) անդամի մասին:

P դաշտի վրա n անհայտներից կազմած բազմանդամների համար գումարման և բազմապատկման գործողությունները սահմանվում են հետևյալ կերպ. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բազմանդամների **գումար** կոչվում է այն բազմանդամը, որի գործակիցները ստացվում են f և g բազմանդամների համապատասխան գործակիցների գումարումով. եթե այդ դեպքում որևէ անդամ մտնում է f, g բազմանդամներից միայն մեկի մեջ, ապա, հասկանալի է, նրա գործակիցը մյուս բազմանդամի մեջ համարվում է հավասար զրոյի: Երկու «միանդամների» արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ հավասարությունով.

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \cdot bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} = (ab)\, x_1^{k_1+l_1} x_2^{k_2+l_2} \ldots x_n^{k_n+l_n},$$

որից հետո $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բազմանդամների **արտադրյալը** սահմանվում է որպես անդամ առ անդամ բազմապատկման և ապա նման անդամների միացման արդյունք:

Գործողությունների այսպիսի սահմանման դեպքում P դաշտի վրա n անհայտներից կազմած բազմանդամների համախումբը դառնում է կոմուտատիվ օղակ, ընդ որում այդ օղակը չի պարունակում զրոյի բաժանարարներ: Իրոք, n=1 դեպքում մեր սահմանումները համընկնում են նրանց հետ, որոնք տրվել էին § 20-ում մեկ փոփոխականից կազմած բազմանդամների դեպքի համար: Դիցուք արդեն ապացուցված է, որ P դաշտից վերցրած գործակիցներով $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $n-1$ անհայտներից կազմած բազմանդամները կազմում են օղակ առանց զրոյի բաժանարարների: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ n անհայտներից կազմած ամեն մի բազմանդամ կարելի է ներկայացնել, այն էլ միակ ձևով, որպես x_n անհայտից կազմած բազմանդամ, որի գործակիցները $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ անհայտներից կազմած բազմանդամներ են: Հակադարձաբար, P դաշտի վրա $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ անհայտներից կազմած բազմանդամների օղակից վերցրած գործակիցներով x_n անհայտից կազմած յուրաքանչյուր բազմանդամ կարելի է, իհարկե, դիտարկել որպես $x_1, x_2,$

$\ldots, x_{n-1}, x_n$ անհայտների ողջ համախմբից կազմած բազմանդամ՝ այդ նույն P դաշտի վրա: Առանց դժվարության ստուգվում է, որ n անհայտներից կազմած բազմանդամների և $n-1$ անհայտներից կազմած բազմանդամների օղակի վրա մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների միջև մեր կողմից ստացված փոխադարձ միարժեք համապատասխանությունը իզոմորֆ է գումարման և բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ: Ապացուցվելիք պնդումն այժմ բխում է այն բանից, որ $n-1$ անհայտներից կազմված բազմանդամների օղակի վրա մեկ անհայտից կազմած բազմանդամները իրենք կազմում են օղակ, ընդ որում այն, որպես մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների օղակ՝ առանց զրոյի բաժանարարների օղակի վրա, ինքը չի պարունակում զրոյի բաժանարարներ (տես § 47):

Հետևաբար, մենք ապացուցեցինք **P դաշտի վրա n անհայտներից** կազմած **բազմանդամների օղակի** գոյությունը. այդ օղակը նշանակվում է $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ նշանով:

Հետևյալ դիտարկումները թույլատրում են n անհայտներից կազմած բազմանդամների օղակի վրա նայել մի փոքր այլ տեսանկյունից: Դիցուք P դաշտը պարունակվում է որպես ենթաօղակ որևէ կոմուտատիվ L օղակում: Վերցնենք L-ի մեջ n էլեմենտներ՝ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ և գտնենք L օղակի՝ այդ էլեմենտները և ամբողջ P դաշտը պարունակող L′ նվազագույն ենթաօղակը, այսինքն՝ այն ենթաօղակը, որն ստացվում է P դաշտին $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ էլեմենտները **միացնելու** հետևանքով: L′ ենթաօղակը կազմված է L օղակի բոլոր այն էլեմենտներից, որոնք արտահայտվում են $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ էլեմենտներով և P դաշտի էլեմենտներով՝ գումարման, հանման և բազմապատկման օգնությամբ: Հեշտ է տեսնել, որ դրանք կլինեն L օղակի ճիշտ այն էլեմենտները, որոնք կարելի է գրել (L-ում տեղի ունեցող գործողությունների օգնությամբ) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ից կազմած բազմանդամների տեսքով՝ P դաշտից վերցրած գործակիցներով, ընդ որում այդ էլեմենտները, որպես L օղակի էլեմենտներ, միմյանց հետ կգումարվեն և կբազմապատկվեն n անհայտներից կազմած բազմանդամների գումարման և բազմապատկման հենց վերևում նշված կանոններով:

Իհարկե, L′ ենթաօղակի տվյալ β էլեմենտը, ընդհանրապես ասած, P դաշտից վերցրած գործակիցներով $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ անհայտներից կազմած բազմանդամի տեսք ունեցող իրարից տարբեր շատ գրելաձևեր կարող է ունենալ: Եթե L′-ի ամեն մի β էլեմենտի համար այդպիսի գրելաձևը միարժեք է, այսինքն՝ եթե $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ անհայտներից կազմած տարբեր բազմանդամները L′ օղակի (և, հետևաբար, L օղակի) տարբեր էլեմենտներ են, ապա $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ էլեմենտների սիստեմը կոչվում է **հանրահաշվորեն անկախ** P դաշտի վրա, հակառակ դեպքում՝

հանրահաշվորեն կախյալ[1]։ *Այստեղից կարելի է անել այսպիսի եզրակացություն.*

Եթե P դաշտը L կոմուտատիվ օղակի ենթաօղակ է և եթե L-ի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ էլեմենտների սիստեմը հանրահաշվորեն անկախ է P-ի վրա, ապա L օղակի L′ ենթաօղակը, որն առաջացել է P դաշտին $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ էլեմենտները միացնելով, իզոմորֆ է բազմանդամների $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ օղակին։

n *անհայտներից կազմած բազմանդամների* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *օղակի մյուս հատկություններից նշենք հետևյալը. այդ օղակը կարելի է ընդգրկել* P *դաշտի վրա* n *անհայտներից կազմած ռացիոնալ կոտորակների* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *դաշտում։ Այդ դաշտի ամեն մի էլեմենտ կարող է գրվել* $\frac{f}{g}$ *տեսքով, որտեղ* f*-ը և* g*-ն բազմանդամներ են* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *օղակից, ընդ որում* $\frac{f}{g}=\frac{\varphi}{\psi}$ *այն և միայն այն ժամանակ, եթե* $f\psi=g\varphi$*։ Այդ ռացիոնալ կոտորակների գումարումն ու բազմապատկումը կատարվում են այն կանոններով, որոնք, ինչպես ցույց է տրվել § 45-ում, իրավացի են քանորդների համար ամեն մի դաշտում։* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *դաշտի գոյության ապացույցը տարվում է այնպես, ինչպես այդ արվել է § 50-ում* $n=1$ *դեպքի համար։*

Մի քանի անհայտներից կազմած բազմանդամների համար կարելի է կառուցել բաժանելիության տեսությունը, որն ընդհանրացնում է մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների համար բաժանելիության այն տեսությունը, որը մենք ուսումնասիրել ենք 5-րդ և 10-րդ գլուխներում։ Սակայն, քանի որ մի քանի անհայտներից կազմած բազմանդամների օղակի մանրակրկիտ ուսումնասիրությունը չի մտնում մեր խնդիրների մեջ, ապա մենք կսահմանափակվենք միայն բազմանդամը անվերածելի արտադրիչների վերլուծելու հարցով։

Նախ մուծենք հետևյալ հասկացությունը. եթե $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *բազմանդամի բոլոր անդամներն ունեն միևնույն* s *աստիճանը, ապա այդպիսի բազմանդամը կոչվում է* **համասեռ բազմանդամ** *կամ, ավելի կարճ՝* s*-րդ աստիճանի* **ձև**. *մեզ արդեն հայտնի են* **գծային** *և* **քառակուսային ձևերը**, *կարելի է դիտարկել, այնուհետև,* **խորանարդային ձևերը**, *որոնց բոլոր անդամներն անհայտների համախմբի նկատմամբ ունեն 3 աստիճան և այլն։* n *անհայտներից կազմած ամեն մի բազմանդամ միարժեքորեն ներկայացնելի է այդ անհայտներից կազմած մի քանի (տարբեր աստիճաններ ունեցող) ձևերի գումարի տեսքով. բավական է իրար հետ միավորել միևնույն աստիճանն ունեցող բոլոր անդամները, որպեսզի ստացվի որոնելի ներկայացումը։ Այսպես,* $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2^2-7x_1^2x_3^2+x_2-5x_1x_2x_3-x_1^4-2x_3-6+x_3^3$ *չորրորդ աստիճանի բազմանդամը*

[1] *Համապատասխան հասկացությունները* $n=1$ *դեպքի համար արդեն մուծվել են § 47-ում.* α *էլեմենտը, որը հանրահաշվորեն անկախ է* P *դաշտի վրա՝ հենց նոր տրված սահմանման իմաստով, այնտեղ անվանվել է տրանսցենդենտ* P*-ի վրա, հակառակ դեպքում՝ հանրահաշվական* P*-ի վրա։*

կլինի $x_1^4-7x_1^2x_3^2$ *չորրորդ աստիճանի ձևի,* $3x_1x_2^2-5x_1x_2x_3+x_3^3$ *խորանարդային ձևի,* x_2-2x_3 *գծային ձևի և* -6 *ազատ անդամի (զրո աստիճանի ձևի) գումարը։*

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեման.

n անհայտներից կազմած երկու զրոյից տարբեր բազմանդամների արտադրյալի աստիճանը հավասար է այդ բազմանդամների աստիճանների գումարին։

Նախ ենթադրենք, որ մեզ տված են s *աստիճանի* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *և* t *աստիճանի* $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ձևեր։* φ *ձևի ցանկացած անդամի արտադրյալը* ψ *ձևի ցանկացած անդամի հետ, ակներևաբար, կունենա* s+t *աստիճանը և հետևաբար,* φψ *արտադրյալը կլինի* s+t *աստիճանի ձև, քանի որ նման անդամների միացումը չի կարող այդ արտադրյալի բոլոր գործակիցները դարձնել զրոյի հավասար, նկատի ունենալով, որ* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *օղակում չկան զրոյի բաժանարարներ։*

Եթե այժմ տված են համապատասխանաբար s *և* t *աստիճանի* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *և* $g(_1, x_2, \ldots, x_n)$ *կամայական բազմանդամները, ապա, ներկայացնելով նրանցից յուրաքանչյուրը տարբեր աստիճանների ձևերի գումարի տեսքով, մենք կստանանք՝*

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n)=\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n)+\cdots,$$
$$g(x_1, x_2, \cdots x_n)=\psi(x_1, x_2, \cdots x_n)+\cdots,$$

որտեղ φ*-ն և* ψ*-ն կլինեն համապատասխանաբար* s *և* t *աստիճանի ձևեր, իսկ բազմակետերը փոխարինում են ավելի փոքր աստիճանների ձևերի գումարին։ Այդ ժամանակ՝*

$$fg=\varphi\psi+\cdots:$$

Ըստ ապացուցվածի, φψ *ձևն ունի* s+t *աստիճանը, իսկ քանի որ բազմակետերով փոխարինված բոլոր անդամներն ունեն ավելի փոքր աստիճան, ապա* fg *արտադրյալի աստիճանը հավասար կլինի* s+t*։ Թեորեման ապացուցված է։*

φ *բազմանդամը կոչվում է* f *բազմանդամի* **բաժանարար**, *իսկ* f*-ը՝* φ*-ի վրա* **բաժանվող**, *եթե* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *օղակում գոյություն ունի այնպիսի* ψ *բազմանդամ, որ* $f=\varphi\psi$*։ Հեշտ է տեսնել, որ § 21-ում ցույց տրված բաժանելիության* I—IX *հատկությունները պահպանվում են նաև այժմ դիտարկվող ընդհանուր դեպքում։* k *աստիճանի* f *բազմանդամը* ($k\geqslant 1$) *կոչվում է* **վերածելի** P *դաշտի վրա, եթե այն վերլուծվում է* $P[x_1, x_2, \ldots x_n]$ *օղակին պատկանող այնպիսի բազմանդամների արտադրյալի, որոնց աստիճանները փոքր են* k*-ից, և անվերածելի՝ հակառակ դեպքում։*

Զրոյից տարբեր աստիճան ունեցող ամեն մի բազմանդամ $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ օղակից վերլուծվում է անվերածելի արտադրիչների արտադրյալի։ Այդ վերլուծությունը միարժեք է զրո աստիճանի բազմապատկիչների ճշգրտությամբ։

Այս թեորեման ընդհանրացնում է մեկ անհայտից կազմած բազմանդամներին վերաբերող համապատասխան արդյունքները § 48-ից։ Նրա առաջին պնդումն ապացուցվում է նշված պարագրաֆի դատողությունների բառացի կրկնումով։ Երկրորդ պնդման ապացույցը արդեն նշանակալից դժվարություններ է ներկայացնում։ Նախքան այդ ապացույցը բերելը, նկատենք, որ այդ թեորեմայի երկրորդ պնդումից բխում է այսպիսի հետևանք. **եթե $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ օղակից վերցրած f և g երկու բազմանդամների արտադրյալը բաժանվում է p անվերածելի բազմանդամի վրա, ապա այդ բազմանդամներից առնվազն մեկը բաժանվում է p-ի վրա։** *Իրոք, հակառակ դեպքում* fg *արտադրյալի համար մենք կստանայինք երկու վերլուծություն՝ անվերածելի արտադրիչների, որոնցից մեկը* p*-ն չի պարունակում, իսկ մյուսը պարունակում է։*

Դիցուք թեորեման արդեն ապացուցված է n անհայտներից կազմված բազմանդամների համար և մենք ցանկանում ենք այն ապացուցել $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ $n+1$ անհայտներից կազմված բազմանդամի համար։ Այդ բազմանդամը գրենք $\varphi(x)$ տեսքով։ Հետևաբար, նրա գործակիցները կլինեն բազմանդամներ $x_1, x_2, \dots, x_n$-ից։ Այդ գործակիցների համար թեորեման արդեն ապացուցված է, այսինքն՝ նրանցից յուրաքանչյուրը միարժեքորեն վերլուծվում է անվերածելի արտադրիչների արտադրյալի։ $\varphi(x)$ բազմանդամն անվանենք հասարակ (պրիմիտիվ) բազմանդամ (ավելի ճիշտ՝ $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակի վրա հասարակ), եթե նրա գործակիցները չունեն ընդհանուր անվերածելի արտադրիչ, այսինքն՝ խմբովին փոխադարձ պարզ են, և ապացուցենք Գ ա ու ս ի հետևյալ լ ե մ մ ա ն.

Երկու հասարակ բազմանդամների արտադրյալն ինքը հասարակ բազմանդամ է։

Իրոք, դիցուք տված են $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակից վերցրած գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_ix^{k-i}+\dots+a_k,$$

$$g(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\dots+b_jx^{l-j}+\dots+b_l$$

հասարակ բազմանդամները և դիցուք

$$f(x)\,g(x)=c_0x^{k+l}+c_1x^{k+l-1}+\dots c_{i+j}x^{k+l-(i+j)}+\dots+c_{k+l}:$$

Եթե այդ արտադրյալը հասարակ չէ, ապա $c_0, c_1, \dots, c_{k+l}$ գործակիցները կունենան $p=p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ընդհանուր անվերածելի արտադրիչ։ Քանի որ $f(x)$ հասարակ բազմանդամի ոչ բոլոր գործակիցները կարող են բաժանվել p-ի վրա, ապա թող a_i-ն լինի p-ի վրա չբաժանվող առաջին գործակիցը. համանման ձևով, b_j-ով նշանակենք $g(x)$ բազմանդամի առաջին գործակիցը, որը չի բաժանվում p-ի վրա։ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը բազմապատկելով անդամ առ անդամ և հավաքելով $x^{k+l-(i+j)}$ պարունակող անդամները, մենք կստանանք՝

$$c_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\dots+a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\dots:$$

Այս հավասարության ձախ մասը բաժանվում է p անվերածելի բազմանդամի վրա։ Նրա վրա անկասկած կբաժանվեն նաև աջ մասի բոլոր գումարելիները՝ բացի առաջինից։ Իրոք, i և j համարների մասին արված ենթադրության համաձայն, բոլոր a_{i-1}, $a_{i-2}, \dots$, ինչպես նաև b_{j-1}, $b_{j-2}, \dots$ գործակիցները կբաժանվեն p-ի վրա։ Այստեղից հետևում է, որ a_ib_j արտադրյալը նույնպես բաժանվում է p-ի վրա և, հետևաբար, ինչպես նշվեց վերևում, p-ի վրա պետք է բաժանվի a_i, b_j բազմանդամներից առնվազն մեկը, որը, սակայն, տեղի չունի։ Սրանով ավարտվում է լեմմայի ապացույցը, ենթադրելով հիմնական թեորեմայի իրավացիությունը n անհայտներից կազմված բազմանդամների համար։

Ինչպես մենք գիտենք, $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակը պարունակվում է ռացիոնալ կոտորակների $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ դաշտում, որը մենք կնշանակենք Q-ով՝

$$Q=P(x_1, x_2, \dots, x_n):$$

Դիտարկենք բազմանդամների $Q[x]$ օղակը։ Եթե $\varphi(x)$ բազմանդամը պատկանում է այդ օղակին, ապա նրա յուրաքանչյուր գործակից ներկայացնելի է $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակին պատկանող բազմանդամների քանորդի տեսքով։ Փակագծերից դուրս բերելով այդ քանորդների ընդհանուր հայտարարը, այնուհետև համարիչների ընդհանուր արտադրիչները՝ $\varphi(x)$-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x):$$

Այստեղ a-ն և b-ն բազմանդամներ են $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակից, իսկ $f(x)$-ը բազմանդամ է x-ի նկատմամբ՝ $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակից վերցրած գործակիցներով, ընդ որում՝ նույնիսկ հասարակ բազմանդամ է, քանի որ նրա գործակիցներն արդեն չունեն ընդհանուր արտադրիչներ։

Այս ճանապարհով $Q[x]$ օղակի ամեն մի $\varphi(x)$ բազմանդամին համապատասխանեցվում է մի $f(x)$ հասարակ բազմանդամ։ **Տված $\varphi(x)$-ի համար $f(x)$ բազմանդամը որոշված է միարժեքորեն՝ զրոյից տարբեր բազմապատկիչի ճշտությամբ P դաշտից:** Իրոք, դիցուք

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x)=\frac{c}{d}g(x),$$

որտեղ $g(x)$-ը նորից հասարակ բազմանդամ է։ Այդ ժամանակ

$$a\,df(x)=bcg(x):$$

Այսպիսով, ad-ն և bc-ն ստացվել են $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակի վրա տրված միևնույն բազմանդամի գործակիցներից բոլոր ընդհանուր արտադրիչները դուրս հանելով։ Նկատի ունենալով այդ օղակում (ըստ ինդուկցիայի ենթադրության) վերլուծման միարժեքության վերաբերյալ թեորեմայի իրավացիությունը, այստեղից հետևում է, որ ad-ն և bc-ն կարող են միմյանցից տարբերվել միայն զրո աստիճանի բազմապատկիչով։ Հետևաբար, այդպիսի բազմապատկիչով են տարբերվում միմյանցից նաև $f(x)$ և $g(x)$ հասարակ բազմանդամները։

$Q[x]$ օղակի երկու բազմանդամների արտադրյալին համապատասխանում է նրանց համապատասխանող հասարակ բազմանդամների արտադրյալը: Իրոք, եթե

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x),\quad \psi(x)=\frac{c}{d}g(x),$$

որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը հասարակ բազմանդամներ են, ապա

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{ac}{bd}f(x)\,g(x):$$

Բայց, ինչպես ապացուցված է վերևում, $f(x)\,g(x)$ արտադրյալը հասարակ բազմանդամ է։

Այնուհետև նշենք, որ եթե **$Q[x]$ օղակին պատկանող $\varphi(x)$ բազմանդամը անվերածելի է Q դաշտի վրա, ապա նրան համապատասխանող $f(x)$ հասարակ բազմանդամը, որը դիտարկվում է որպես բազմանդամ $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտներից, նույնպես անվերածելի կլինի և ընդհակառակը:** Իրոք, եթե f բազմանդամը վերածելի է՝ $f=f_1f_2$, ապա երկու բազմապատկիչներն էլ պետք է պարունակեն x անհայտը, քանի որ հակառակ դեպքում f բազմանդամը հասարակ չէր լինի։ Այստեղից բխում է $\varphi(x)$ բազմանդամի վերլուծությունը Q դաշտի վրա՝

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x)=\left(\frac{a}{b}f_1\right)f_2:$$

Հակադարձաբար, եթե $\varphi(x)$ բազմանդամը վերածելի է Q-ի վրա՝ $\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, ապա $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ բազմանդամներին համապատասխանող $f_1(x)$ և $f_2(x)$ հասարակ բազմանդամները երկուսն էլ կպարունակեն x, սակայն նրանց արտադրյալը, ինչպես ապացուցված է վերևում, հավասար է $f(x)$-ին (P դաշտին պատկանող արտադրիչի ճշտությամբ)։

Վերցնենք այժմ f հասարակ բազմանդամը և վերլուծենք այն անվերածելի արտադրիչների՝ $f=f_1\cdot f_2\cdots f_k$։ Բոլոր այս արտադրիչները ոչ միայն պետք է պարունակեն x անհայտը, այլև նույնիսկ հասարակ բազմանդամներ կլինեն, քանի որ հակառակ դեպքում f բազմանդամը հասարակ չէր լինի։ **f հասարակ բազմանդամի** այս վերլուծությունը կլինի միարժեք՝ P դաշտին պատկանող բազմապատկիչների ճշտությամբ։ Իրոք, նկատի ունենալով նախորդ լեմման, կարելի է այդ վերլուծության վրա նայել որպես Q դաշտի վրա $f(x)$-ի վերլուծություն անվերածելի արտադրիչների, բայց մեկ փոփոխականից կազմած բազմանդամների համար որևէ դաշտի վրա վերլուծության միարժեքությունը մեզ արդեն հայտնի է. այդ միարժեքությունը տեղի ունի Q-ին պատկանող բազմապատկիչների ճշտությամբ. սակայն մեր դեպքում, շնորհիվ բոլոր f_i բազմապատկիչների հասարակ լինելուն, այն կլինի P-ին պատկանող բազմապատկիչների ճշտությամբ։

Այս լեմմաներից հետո, որոնց իրավացիությունն ապացուցվեց մեր կողմից՝ ելնելով ինդուկտիվ ենթադրությունից, մեր հիմնական թեորեմայի ապացույցը կատարվում է առանց որևէ դժվարությունների։ Իրոք, ամեն մի անվերածելի բազմանդամ $P[x, x_1, x_2, \cdots, x_n]$ օղակից կլինի կամ անվերածելի բազմանդամ $P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ օղակից, կամ էլ անվերածելի հասարակ բազմանդամ։ Այստեղից հետևում է, որ եթե մեզ տված է $\varphi(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ բազմանդամի որևէ վերլուծություն անվերածելի արտադրիչների, ապա համախմբելով բազմապատկիչները, մենք φ-ն կներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$\varphi(x, x_1, x_2 \cdots, x_n) = a(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, f(x, x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

որտեղ a-ն կախված է x-ից, իսկ f-ը հասարակ բազմանդամ է։ Սակայն մենք գիտենք, որ այս վերլուծությունը φ-ի համար միարժեք է P-ին պատկանող բազմապատկիչների ճշտությամբ։ Քանի որ, մյուս կողմից, n անհայտներից կազմած a բազմանդամի համար անվերածելի արտադրիչների վերլուծման միակությունը տեղի ունի ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, իսկ f հասարակ բազմանդամի համար ապացուցված է նախորդ լեմմայում, ապա մեր թեորեման $n+1$ անհայտների դեպքի համար ևս լրիվ ապացուցված է։

Վերևում ապացուցված լեմմաներից բխում է ևս մեկ հետաքրքիր հետևանք. Եթե $P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$-ին պատկանող գործակիցներով $\varphi(x)$ բազմանդամը վերածելի է $Q=P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ դաշտի վրա, ապա այն կարող է վերլուծվել այնպիսի արտադրիչների, որոնք կախված են x-ից և որոնց գործակիցները բազմանդամներ են $P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ օղակից:

Իրոք, եթե $\varphi(x)$ բազմանդամին համապատասխանում է $f(x)$ հասարակ բազմանդամը, այսինքն՝ $\varphi(x)=af(x)$, ապա, ինչպես մենք գիտենք, $\varphi(x)$-ի վերածելիությունից հետևում է $f(x)$-ի վերածելիությունը, իսկ վերջինը բերում է $\varphi(x)$-ի վերլուծությանը $P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ օղակի վրա։

Ի տարբերություն մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների դեպքի, որոնք, ինչպես մենք գիտենք § 49-ից, կարող են վերլուծվել գծային արտադրիչների՝ դիտարկվող հիմնական դաշտի համապատասխանորեն ընտրված ընդլայնման վրա, ցանկացած P դաշտի վրա գոյություն ունեն մի քանի (երկու կամ ավելի) անհայտներից կազմած կամավոր աստիճանի բացարձակապես անվերածելի բազմանդամներ, այսինքն՝ բազմանդամներ, որոնք մնում են անվերածելի այդ դաշտի ցանկացած ընդլայնման դեպքում։

Այդպիսին է, օրինակ,

$$f(x, y) = \varphi(x) + y$$

բազմանդամը, որտեղ $\varphi(x)$-ը մեկ անհայտից կազմած կամավոր բազմանդամ է P դաշտի վրա։ Իրոք, եթե P դաշտի որևէ $\bar{P}$ ընդլայնման մեջ գոյություն ունենար

$$f(x, y) = g(x, y)\, h(x, y)$$

վերլուծությունը, ապա g-ն և h-ը գրելով y-ի աստիճաններով, մենք կստանայինք, օրինակ, որ՝

$$g(x, y)=a_0(x)y+a_1(x), \quad h(x, y)=b_0(x),$$

այսինքն՝ h-ը կախված չէ y-ից, իսկ այնուհետև, նկատի ունենալով $a_0(x)b_0(x)=1$, կստանայինք, որ $b_0(x)$-ն ունի 0 աստիճան, այսինքն՝ h-ը կախված չէ նաև x-ից։

Բազմանդամի անդամների բառարանագրական դասավորումը։ Մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների համար մենք ունենք անդամների դասավորության երկու բնական եղանակ՝ անհայտի նվազող և աճող աստիճաններով։ Մի քանի անհայտներից կազմած բազմանդամների դեպքում այդպիսի եղանակներ արդեն չկան. եթե տված է երեք անհայտներից կազմած հինգերորդ աստիճանի հետևյալ բազմանդամը.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3^2 + x_1^4x_3 + x_2^3x_3^2 + x_1^2x_2x_3^2,$$

ապա այն կարելի է գրել նաև

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_3 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2 + x_2^3x_3^2$$

տեսքով և հիմքեր չկան այդ գրություններից մեկը գերադասելու մյուսից։ Սակայն, գոյություն ունի մի քանի անհայտներից կազմած բազմանդամի անդամների լիովին որոշակի դասավորման մի եղանակ, որը կախված է, այնուամենայնիվ, անհայտների համարակալման ընտրությունից. մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների համար այն բերում է անդամների դասավորմանն ըստ անհայտի նվազող աստիճանների։ Այս եղանակը, որը կոչվում է բառարանագրական (լեքսիկոգրաֆիկ) եղանակ, ծագել է բառարաններում («լեքսիկոններում») բառերի դասավորման սովորական եղանակից. տառերը համարելով կարգավորված այնպես, ինչպես այդ ընդունված է այբուբենում, մենք տված երկու բառերի փոխադարձ դիրքը բառարանում որոշում ենք նրանց առաջին տառերով, իսկ եթե այդ տառերը համընկնում են, ապա երկրորդ տառերով և այլն։

Դիցուք տված է $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամը $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ օղակից և նրա մեջ երկու տարբեր անդամներ՝

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \tag{1}$$

$$x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}, \tag{2}$$

որոնց գործակիցները զրոյից տարբեր որևէ էլեմենտներ են P-ից։ Քանի որ (1) և (2) անդամները տարբեր են, ապա անհայտների ցուցիչների

$$k_i - l_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

տարբերություններից առնվազն մեկը տարբեր է զրոյից։ (1) անդամը կհամարվի (2) անդամից բարձր, իսկ (2) անդամը՝ (1) անդամից ցածր, Եթե այդ տարբերություններից առաջինը, որը հավասար չէ զրոյի, դրական է, այսինքն, եթե գոյություն ունի այնպիսի i, $1 \leqslant i \leqslant n$, որ

$$k_1 = l_1,\quad k_2 = l_2, \dots, k_{i-1} = l_{i-1},\ \text{բայց}\ k_i > l_i:$$

Այլ կերպ ասած, (1) անդամը կլինի (2) անդամից բարձր, եթե x_1-ի ցուցիչը (1)-ի մեջ ավելի մեծ է, քան (2)-ի մեջ, կամ, եթե այդ ցուցիչները հավասար են, բայց x_2-ի ցուցիչը (1)-ի մեջ ավելի մեծ է, քան (2)-ի մեջ և այլն։

Հեշտ է տեսնել, որ այն բանից, որ (1) անդամը (2) անդամից բարձր է, չի հետևում, որ ըստ անհայտների համախմբության առաջինի աստիճանն ավելի մեծ է երկրորդի աստիճանից.

$$x_1^3 x_2 x_3, \qquad x_1 x_2^5 x_3^2$$

անդամներից առաջինն ավելի բարձր է, չնայած ունի ավելի փոքր աստիճան։

Ակներև է, որ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամի ցանկացած երկու տարբեր անդամներից մեկը բարձր կլինի մյուսից։ Հեշտ է ստուգել նաև, որ եթե (1) անդամը (2) անդամից բարձր է, իսկ (2) անդամն իր հերթին բարձր է

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \tag{3}$$

անդամից, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի j, $1 \leqslant j \leqslant n$, որ

$$l_1 = m_1,\quad l_2 = m_2, \dots, l_{j-1} = m_{j-1},\ \text{բայց}\ l_j > m_j,$$

ապա, անկախ այն բանից, i-ն կլինի արդյոք j-ից մեծ, հավասար կամ փոքր, (1) անդամը բարձր կլինի (3) անդամից։ Այսպիսով, երկու անդամներից ավելի առաջ դնելով այն, որն ավելի բարձր է, մենք կստանանք $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամի անդամների լրիվին որոշակի կարգավորում, որը և կոչվում է բառարանագրական դասավորություն։

Այսպես,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 3x_1^2 x_2^3 x_3 - x_1^2 x_2^3 x_4^2 + 5x_1 x_3 x_4^2 + 2x_2 + x_3^3 x_4 - 4$$

բազմանդամը դասավորված է բառարանագրական կարգով։

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամի բառարանագրական գրության դեպքում նրա անդամներից մեկը կգրվի առաջին տեղում, այսինքն՝ կլինի մյուս բոլոր անդամներից ավելի բարձր։ Այդ անդամը կոչվում է **բազմանդամի բարձրագույն անդամ**. Նախորդ օրինակում բարձրագույն անդամ կլինի x_1^4 անդամը։ Բարձրագույն անդամների նկատմամբ մենք ապացուցենք մի լեմմա, որը կօգտագործվի հաջորդ պարագրաֆի հիմնական թեորեման ապացուցելիս։

n անհայտներից կազմած երկու բազմանդամների արտադրյալի բարձրագույն անդամը հավասար է բազմապատկիչների բարձրագույն անդամների արտադրյալին։

Իրոք, դիցուք բազմապատկվում են

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ և } g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

բազմանդամները։ Եթե

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\text{-ը} \tag{4}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամի բարձրագույն անդամն է, իսկ

$$a' x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}\text{-ը} \tag{5}$$

այդ բազմանդամի ցանկացած ուրիշ անդամը, ապա գոյություն ունի այնպիսի i, $1 \leqslant i \leqslant n$, որ

$$k_1 = s_1, \dots, k_{i-1} = s_{i-1},\quad k_i > s_i:$$

Եթե, մյուս կողմից,

$$b x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}, \tag{6}$$

$$b' x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}\text{-ը} \tag{7}$$

$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամի բարձրագույն և ցանկացած ուրիշ անդամներն են, ապա գոյություն ունի այնպիսի j, $1 \leqslant j \leqslant n$, որ՝

$$l_1 = t_1, \dots, l_{j-1} = t_{j-1},\quad l_j > t_j:$$

Բազմապատկելով (4) և (6) անդամները, ինչպես նաև (5) և (7) անդամները, մենք ստանում ենք՝

$$ab x_1^{k_1+l_1} x_2^{k_2+l_2} \dots x_n^{k_n+l_n}, \tag{8}$$

$$a'b' x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \dots x_n^{s_n+t_n}: \tag{9}$$

Սակայն, հեշտ է տեսնել, որ (8) անդամը (9) անդամից բարձր է։ Եթե, օրինակ, $i \leqslant j$, ապա

$$k_1 + l_1 = s_1 + t_1, \dots k_{i-1} + l_{i-1} = s_{i-1} + t_{i-1},\ \text{բայց}\ k_i + l_i > s_i + t_i,$$

քանի որ $k_i > s_i$, $l_i \geqslant t_i$։ Նույն կերպ ստուգվում է, որ (8) անդամը ավելի բարձր կլինի (4) և (7) անդամների արտադրյալից, ինչպես նաև (5) և (6) անդամների արտադրյալից։ Այսպիսով, f և g բազմանդամների բարձրագույն անդամների արտադրյալը՝ (8) անդամը ավելի բարձր կլինի f և g բազմանդամների անդամ առ անդամ բազմապատկման հետևանքով ստացված բոլոր մյուս անդամներից, և, հետևաբար, այդ անդամը չի ոչնչանում նման անդամների միացման ժամանակ, այսինքն՝ մնում է բարձրագույն անդամ fg արտադրյալի մեջ։

§ 52. Սիմետրիկ բազմանդամներ

Մի քանի անհայտներից կազմած բազմանդամների մեջ աչքի են ընկնում նրանք, որոնք չեն փոխվում անհայտների և ոչ մի տեղափոխության դեպքում։ Հետևաբար, այդպիսի բազմանդամների մեջ բոլոր անհայտները մտնում են լիովին սիմետրիկ կերպով, և դրա համար էլ այդ բազմանդամները կոչվում են **սիմետրիկ բազմանդամներ** *(կամ* **սիմետրիկ ֆունկցիաներ***)։ Պարզագույն օրինակներ կլինեն՝ բոլոր անհայտների գումարը՝ $x_1+x_2+\ldots+x_n$, անհայտների քառակուսիների գումարը՝ $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, անհայտների արտադրյալը՝ $x_1x_2\ldots x_n$ և այլն։ Նկատի ունենալով, որ n նշանների ամեն մի տեղադրություն ներկայացվում է դիրքափոխությունների արտադրյալի տեսքով (տես § 3), որևէ բազմանդամի սիմետրիկության ապացուցման համար բավական է ստուգել, որ այն չի փոխվում երկու անհայտների և ոչ մի դիրքափոխությունից։*

Մենք կդիտարկենք այնուհետև սիմետրիկ բազմանդամներ n անհայտներից՝ որևէ P դաշտի պատկանող գործակիցներով։ Հեշտ է տեսնել, որ երկու սիմետրիկ բազմանդամների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը ևս կլինեն սիմետրիկ, *այսինքն՝ սիմետրիկ բազմանդամները կազմում են մի ենթաօղակ P դաշտի վրա n անհայտներից կազմած բոլոր բազմանդամների $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ օղակում, որը կոչվում է* P դաշտի վրա n անհայտներից կազմած սիմետրիկ բազմանդամների օղակ: *Այդ օղակին պատկանում են P-ի բոլոր էլեմենտները (այսինքն՝ զրո աստիճանի բոլոր բազմանդամները, ինչպես նաև՝ զրոն), քանի որ նրանք անկասկած չեն փոխվում անհայտների ոչ մի տեղափոխության ժամանակ։ Ամեն մի այլ սիմետրիկ բազմանդամ անկասկած կպարունակի բոլոր n անհայտները և նույնիսկ կլինի միևնույն աստիճանի նրանցից յուրաքանչյուրի նկատմամբ. եթե $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ սիմետրիկ բազմանդամն ունի այնպիսի անդամ, որի մեջ x_i անհայտը մտնում է k ցուցիչով, ապա նա ունի նաև այնպիսի անդամ, որը ստացվում է նրանից՝ x_i և x_j անհայտների դիրքափոխությամբ, այսինքն՝ պարունակում է x_j անհայտը նույն k աստիճանով։*

Հետևյալ n սիմետրիկ բազմանդամներն n անհայտներից կոչվում են տարրական սիմետրիկ բազմանդամներ.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\
\sigma_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sigma_{n-1} &= x_1x_2\ldots x_{n-1}+x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n+\cdots+x_2x_3\ldots x_n,\\
\sigma_n &= x_1x_2\cdots x_n:
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Այս բազմանդամները, որոնց սիմետրիկությունն ակներև է, սիմետրիկ բազմանդամների տեսության մեջ շատ մեծ դեր են խաղում։ Դրանք մեզ հուշել են Վիետի բանաձևերը (տես § 24), ուստի կարելի է ասել, որ 1 ավագ գործակից ունեցող մեկ անհայտից կազմած բազմանդամի գործակիցները նշանի ճշտությամբ կլինեն նրա արմատներից կազմած տարրական սիմետրիկ բազմանդամներ:

Տարրական սիմետրիկ բազմանդամների այս կապը Վիետի բանաձևերի հետ շատ էական է մեկ անհայտից կազմած բազմանդամների տեսության նկատմամբ սիմետրիկ բազմանդամների այն կիրառությունների համար, հանուն որոնց մենք այժմ ուսումնասիրում ենք դրանք։

Քանի որ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n անհայտներից P դաշտի վրա կազմած սիմետրիկ բազմանդամները օղակ են կազմում, ապա ակներև են հետևյալ պնդումները. սիմետրիկ բազմանդամ կլինի տարրական սիմետրիկ բազմանդամներից ցանկացածի ամեն մի դրական ամբողջ աստիճանը, ինչպես նաև այդպիսի աստիճանների արտադրյալը, ընդ որում՝ վերցրած ցանկացած գործակցով P-ից, և, վերջապես՝ նշված արտադրյալների ամեն մի գումարը։ Այլ կերպ ասած $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ տարրական սիմետրիկ բազմանդամներից կազմած ամեն մի բազմանդամ P-ից վերցրած գործակիցներով, որը դիտարկվում է որպես բազմանդամ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից, կլինի սիմետրիկ: *Այսպես, ընդունենք $n=3$ և վերցնենք $\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3$ բազմանդամը։ σ_1, σ_2 և σ_3-ը փոխարինելով իրենց արտահայտություններով, մենք կստանանք՝*

$$\sigma_1\sigma_2+2\sigma_3 = x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+5x_1x_2x_3.$$

ակներևորեն, աջ մասում սիմետրիկ բազմանդամ է x_1, x_2, x_3-ի նկատմամբ։

Այս արդյունքի շրջումն է հետևյալ ***հիմնական թեորեմը սիմետրիկ բազմանդամների*** *վերաբերյալ.*

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից P դաշտի վրա կազմած ամեն մի սիմետրիկ բազմանդամ հանդիսանում է $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ տարրական սիմետրիկ բազմանդամներից կազմած բազմանդամ՝ P դաշտին պատկանող գործակիցներով:

Իրոք, դիցուք տված է

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

սիմետրիկ բազմանդամը և դիցուք նրա բառարանագրական գրության մեջ բարձրագույն անդամն է

$$a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}: \qquad (2)$$

Այս անդամի մեջ անհայտների ցուցիչները պետք է բավարարեն հետևյալ անհավասարություններին.

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n: \tag{3}$$

Իրոք, դիցուք որևէ i-ի համար $k_i < k_{i+1}$; $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ բազմանդամը լինելով սիմետրիկ, պետք է պարունակի, սակայն,

$$a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_i^{k_{i+1}} x_{i+1}^{k_i} \dots x_n^{k_n} \tag{4}$$

անդամը, որը ստացվում է (2) անդամից՝ x_i և x_{i+1} անհայտների դիրքափոխությամբ։ Դա բերում է հակասության, քանի որ (4) անդամը բառարանագրական դասավորության իմաստով բարձր է (2) անդամից. $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ անհայտների ցուցիչները երկու անդամներում էլ համընկնում են, բայց x_i-ի ցուցիչը (4) անդամի մեջ ավելի մեծ է, քան (2) անդամի մեջ։

Վերցնենք այժմ տարրական սիմետրիկ բազմանդամների հետևյալ արտադրյալը ((3) անհավասարությունների շնորհիվ բոլոր ցուցիչները կլինեն ոչ բացասական).

$$\varphi_1 = a_0 \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n}: \tag{5}$$

Այն կլինի սիմետրիկ բազմանդամ $x_1, x_2, \dots, x_n$ անհայտների նկատմամբ, ընդ որում նրա բարձրագույն անդամը հավասար է (2) անդամին։ Իրոք $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ բազմանդամների բարձրագույն անդամները հավասար են համապատասխանաբար $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2\dots x_n$, իսկ քանի որ նախորդ պարագրաֆի վերջում ապացուցված է, որ արտադրյալի բարձրագույն անդամը հավասար է արտադրիչների բարձրագույն անդամների արտադրյալին, ապա φ_1 բազմանդամի բարձրագույն անդամ կլինի

$$a_0 x_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}(x_1x_2x_3)^{k_3-k_4} \dots$$
$$\dots (x_1x_2\dots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1x_2\dots x_n)^{k_n} = a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}:$$

Այստեղից հետևում է, որ f-ից φ_1-ը հանելիս այդ բազմանդամների բարձրագույն անդամները փոխադարձաբար կոչնչանան, այսինքն՝ $f-\varphi_1=f_1$ սիմետրիկ բազմանդամի բարձրագույն անդամը ցածր կլինի (2) անդամից, որը f բազմանդամի բարձրագույն անդամն է։ f_1 բազմանդամի համար, որի գործակիցները, ակներևաբար, պատկանում են P դաշտին, կրկնելով այդ եղանակը, մենք գալիս ենք

$$f_1 = \varphi_2 + f_2$$

հավասարությանը, որտեղ φ_2-ը տարրական սիմետրիկ բազմանդամների

աստիճանների արտադրյալ է՝ մի որոշ գործակցով P դաշտից, իսկ f_2-ը սիմետրիկ բազմանդամ է, որի բարձրագույն անդամն ավելի ցածր է, քան f_1-ի բարձրագույն անդամը։ Այստեղից բխում է

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2$$

հավասարությունը։

Շարունակելով այս պրոցեսը, մենք որևէ s-ի համար կստանանք $f_s=0$ և, հետևաբար, f-ի համար կհանգենք P-ին պատկանող գործակիցներով՝ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$-երից կազմած բազմանդամի տեսքով գրված հետևյալ արտահայտությանը.

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n):$$

Իրոք, եթե այդ պրոցեսը լիներ անվերջ[1], ապա մենք կստանայինք

$$f_1, f_2, \dots, f_s, \dots \tag{6}$$

սիմետրիկ բազմանդամների անվերջ հաջորդականություն, ընդ որում նրանցից յուրաքանչյուրի բարձրագույն անդամը կլիներ ավելի ցածր, քան նախորդ բազմանդամների բարձրագույն անդամները և է՛լ ավելի ցածր, քան (2)-ը։ Սակայն, եթե

$$b x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}\text{-ը} \tag{7}$$

f_s բազմանդամի բարձրագույն անդամն է, ապա այդ բազմանդամի սիմետրիկությունից հետևում են

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n \tag{8}$$

անհավասարությունները, որոնք նման են (3) անհավասարություններին։

Մյուս կողմից, քանի որ (2) անդամը բարձր է (7) անդամից, ապա

$$k_1 \geqslant l_1: \tag{9}$$

Սակայն, հեշտ է տեսնել, որ $l_1, l_2, \dots, l_n$ ոչ բացասական ամբողջ թվերի սիստեմները, որոնք բավարարում են (8) և (9) անհավասարություններին, կարելի է ընտրել միայն վերջավոր թվով եղանակներով։ Իրոք, եթե նույնիսկ հրաժարվենք (8) պահանջից և միայն ենթադրենք, որ բոլոր l_i-երը $(i=1, 2, \dots, n)$ մեծ չեն k-ից, ապա l_i թվերի ընտ-

[1] Հարկավոր է հաշվի առնել, որ φ_s բազմանդամը, ընդհանրապես ասած, պարունակում է և այնպիսի անդամներ, ինչպիսիք չկան f_{s-1} բազմանդամի մեջ և, հետևաբար, f_{s-1}-ից $f_s = f_{s-1} - \varphi_s$-ին անցումը կապված է ոչ միայն f_{s-1}-ից որոշ անդամների ոչնչացման հետ, այլև նոր անդամների հանդես գալու հետ։ Այստեղ $s=1, 2, \dots$:

դուլթյունը, միևնույն է, հնարավոր կլինի միայն $(k_1+1)^n$ քանակությամբ եղանակներով։ Այստեղից հետևում է, որ (6) բազմանդամների հաջորդականությունը, որոնց մեջ բարձրագույն անդամները էապես իջնում են, չի կարող անվերջ լինել։

Թեորեմայի ապացույցն ավարտված է։

Վիետի բանաձևերի հետ տարրական սիմետրիկ բազմանդամների վերևում նշված կապը թույլատրում է սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ հիմնական թեորեմայից արտածել այսպիսի կարևոր հ ե տ և ա ն ք.

Դիցուք $f(x)$-ը մեկ անհայտից բազմանդամ է P դաշտի վրա, որի ավագ գործակիցը հավասար է 1-ի: Այդ դեպքում ամեն մի սիմետրիկ բազմանդամ (P-ին պատկանող գործակիցներով) կազմած $f(x)$ բազմանդամի ա ր մ ա տ ն ե ր ի ց, որոնք պատկանում են P-ի վրա $f(x)$ բազմանդամի վերլուծության որևէ դաշտին, կլինի $f(x)$ բազմանդամի գ ո ր ծ ա կ ի ց ն ե ր ի ց կազմած բազմանդամ (P-ին պատկանող գործակիցներով) և, հետևաբար, կլինի P դաշտի էլեմենտ։

Հիմնական թեորեմայի վերևում շարադրված ապացույցը միաժամանակ տալիս է և մեթոդ գործնականորեն որոնելու սիմետրիկ բազմանդամների արտահայտությունները տարրական բազմանդամների միջոցով։ Նախապես մուծենք հետևյալ նշանակումը. եթե

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}\text{-ը} \tag{10}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների աստիճանների որևէ արտադրյալ է (ընդ որում՝ ցուցիչների մեջ կարող են լինել և զրոյի հավասարներ), ապա բոլոր այն անդամների գումարը, որոնք ստացվում են (10)-ից՝ անհայտների բոլոր հնարավոր տեղափոխությունների միջոցով, կնշանակենք՝

$$S\left(a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}\right). \tag{11}$$

Ակներև է, որ այդ կլինի սիմետրիկ բազմանդամ, այն էլ՝ համասեռ, և որ ամեն մի սիմետրիկ բազմանդամ n անհայտներից, որը պարունակում է (10) անդամը, կպարունակի և (11) բազմանդամի բոլոր մնացած անդամները։ Օրինակ, $S(x_1)=\sigma_1$, $S(x_1x_2)=\sigma_2$, $S\left(x_1^2\right)$-ն բոլոր անհայտների քառակուսիների գումարն է և այլն։

Օ ր ի ն ա կ։ n անհայտներից կազմած $f=S\left(x_1^2x_2\right)$ սիմետրիկ բազմանդամը արտահայտել տարրական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով։

Այստեղ բարձրագույն անդամն է $x_1^2x_2$ և, հետևաբար, $\varphi=\sigma_1^{2-1}\sigma_2=\sigma_1\sigma_2$, այսինքն՝

$$\varphi_1=(x_1+x_2+\cdots x_n)(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)=$$
$$=S\left(x_1^2x_2\right)+3S\left(x_1x_2x_3\right),$$

որտեղից՝

$$f_1=f-\varphi_1=-3S(x_1x_2x_3)=-3\sigma_3,$$

հետևաբար՝

$$f=\varphi_1+f_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

Ավելի բարդ օրինակներում նպատակահարմար է նախապես պարզել, թե ո՞ր անդամները կարող են մտնել տված բազմանդամի տարրական բազմանդամներով՝ արտահայտության մեջ, իսկ այնուհետև գտնել այդ անդամների գործակիցները անորոշ գործակիցների մեթոդով։

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր։ 1. Գտնել $f=S\left(x_1^2x_2^2\right)$ սիմետրիկ բազմանդամի արտահայտությունը տարրական բազմանդամներով։

Մենք գիտենք (տե՛ս հիմնական թեորեմայի ապացույցը), որ որոնելի $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ բազմանդամի անդամները որոշվում են $f_1, f_2, \ldots$ սիմետրիկ բազմանդամների բարձրագույն անդամների միջոցով, ընդ որում այդ բարձրագույն անդամները ցածր են տված f բազմանդամի բարձրագույն անդամից, այսինքն՝ ցածր են $x_1^2x_2^2$-ուց։ Գտնենք բոլոր այն $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ արտադրյալները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին. 1) նրանք ցածր են $x_1^2x_2^2$ անդամից, 2) նրանք կարող են ծառայել սիմետրիկ բազմանդամների բարձրագույն անդամներ, այսինքն՝ բավարարում են $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n$ անհավասարություններին, 3) անհայտների համախմբի նկատմամբ նրանք ունեն 4 աստիճան (քանի որ բոլոր $f_1, f_2, \ldots$ բազմանդամներն ունեն, ինչպես մենք գիտենք, նույն աստիճանը, ինչ որ f համասեռ բազմանդամը)։ Դուրս գրելով միայն ցուցիչների համապատասխան զուգակցությունները և կողքին ցույց տալով σ-ի աստիճանների այն արտադրյալները, որոնք որոշվում են նրանցով, մենք ստանում ենք հետևյալ աղյուսակը.

$$22000\;\cdots\;\sigma_1^{2-2}\,\sigma_2^{2-0}=\sigma_2^2,$$

$$21100\;\cdots\;\sigma_1^{2-1}\,\sigma_2^{1-1}\,\sigma_3^{1-0}=\sigma_1\sigma_3,$$

$$11110\;\cdots\;\sigma_1^{1-1}\,\sigma_2^{1-1}\,\sigma_3^{1-1}\,\sigma_4^{1-0}=\sigma_4.$$

Այսպիսով, f բազմանդամն ունի հետևյալ տեսքը.

$$f=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4.$$

σ_2-ի գործակիցը մենք ընդունեցինք հավասար մեկի, քանի որ այդ անդամը որոշվում է f բազմանդամի բարձրագույն անդամով և, ինչպես մենք գիտենք հիմնական թեորեմայի ապացույցից, ունի նույնպիսի գործակից։ A և B գործակիցները մենք կգտնենք հետևյալ կերպ.

Ընդունենք $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=\cdots=x_n=0$։ Հեշտ է տեսնել, որ անհայտների այդ արժեքների դեպքում f բազմանդամը ստանում է 3 արժեքը, իսկ σ_1, σ_2, σ_3 և σ_4 բազմանդամները՝ համապատասխանաբար 3, 3, 1 և 0 արժեքները։ Ուստի

$$3=9+A\cdot3\cdot1+B\cdot0,$$

որտեղից՝ $A=-2$։ Ընդունենք այժմ $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, $x_5=\cdots=x_n=0$։ f, σ_1, σ_2, σ_3 և σ_4 բազմանդամների արժեքները համապատասխանաբար կլինեն՝ 6, 4, 6, 4, 1։ Հետևաբար՝

$$6=36-2\cdot4\cdot4+B\cdot1,$$

որտեղից՝ $B=2$։ Այսպիսով, f-ի համար որոնելի արտահայտությունը կլինի՝

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

2. *Գտնել*

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

բազմանդամի արմատների խորանարդների գումարը։

Այս խնդրի լուծման համար գտնենք $S(x_1^3)$ *սիմետրիկ բազմանդամի արտահայտությունը տարրական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով։ Կիրառելով նույն մեթոդը, ինչպես և նախորդ օրինակում, մենք կստանանք*

$$3000 \cdots \sigma_1^3,$$
$$2100 \cdots \sigma_1\sigma_2,$$
$$1110 \cdots \sigma_3$$

աղյուսակը, ուստի՝

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3։$$

Ընդունելով նախ՝ $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \cdots = x_n = 0$, *և ապա՝* $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x = \cdots = x_n = 0$, *մենք կստանանք՝* $A = -3$, $B = 3$, *այսինքն՝*

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3։ \qquad (12)$$

Մեզ տված $f(x)$ *բազմանդամի արմատների խորանարդների գումարը գտնելու համար հարկավոր է, նկատի ունենալով Վիետի բանաձևերը, վերևում գտած արտահայտության մեջ* σ_1*-ը փոխարինել* x^3*-ի գործակցով՝ հակառակ նշանով, այսինքն՝ −1-ով,* σ_2*-ը փոխարինել* x^2*-ու գործակցով, այսինքն՝ 2-ով և, վերջապես,* σ_3*-ը փոխարինել* x*-ի գործակցով՝ հակառակ նշանով, այսինքն՝ −1-ով։ Այսպիսով, արմատների խորանարդների մեզ հետաքրքրող գումարը հավասար է՝*

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2։$$

Ընթերցողը կարող է ստուգել այս արդյունքները, եթե հաշվի առնի, որ $f(x)$*-ի արմատներն են* i, $-i$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *և* $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *թվերը։ Ակներև է նույնպես, որ (12) բանաձևը կախված չէ տված* $f(x)$ *բազմանդամից և թույլատրում է գտնել ցանկացած բազմանդամի արմատների խորանարդների գումարը։*

f *սիմետրիկ բազմանդամը տարրական բազմանդամներով արտահայտելու մեթոդը, որն ստացվեց հիմնական թեորեմն ապացուցելիս, բերում է լիովին որոշակի բազմանդամի* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ի նկատմամբ։ Պարզվում է, որ ոչ մի եղանակով չի կարելի ստանալ* f*-ի համար այլ արտահայտություն* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ի միջոցով։ Այդ է ցույց տալիս հետևյալ միակության թեորեմը.*

Ամեն մի սիմետրիկ բազմանդամ օժտված է միայն մեկ արտահայտությամբ՝ տարրական սիմետրիկ բազմանդամների բազմանդամի տեսքով:

Ապացուցենք այս թեորեմը։ Եթե $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *սիմետրիկ բազմանդամը* P *դաշտի վրա օժտված լիներ երկու տարբեր արտահայտություններով* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ի միջոցով՝*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

ապա

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) - \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

տարբերությունը կլիներ զրոյից տարբեր բազմանդամ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ից, այսինքն՝ նրա ոչ բոլոր գործակիցները կլինեին զրոյի հավասար, այն ժամանակ, երբ այդ բազմանդամի մեջ* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ի փոխարինումն իրենց արտահայտություններով՝* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ի միջոցով կհանգեր* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *օղակի զրոյին։ Ուստի մեզ մնում է ապացուցել, որ եթե* $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *բազմանդամը զրոյից տարբեր է, այսինքն՝ զրոյից տարբեր առնվազն մեկ գործակից ունի, ապա նա և* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *բազմանդամը, որը ստացվում է* χ*-ից* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ը փոխարինելով իրենց արտահայտություններով* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ի միջոցով՝*

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (13)$$

նույնպես տարբեր է զրոյից։

Եթե $a\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n}$*-ը* χ *բազմանդամի անդամներից մեկն է, ընդ որում՝* $a \neq 0$, *ապա բոլոր* σ*-ները իրենց (1) արտահայտություններով փոխարինելուց հետո մենք կստանանք* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ից կազմած մի բազմանդամ, որի բարձրագույն անդամ (բառարանագրական դասավորման իմաստով) կլինի, ինչպես մենք արդեն գիտենք հիմնական թեորեմի ապացույցից, հետևյալ անդամը՝*

$$ax_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{k_n} = ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n},$$

որտեղ՝

$$\begin{aligned} l_1 &= k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \\ l_2 &= \phantom{k_1 + {}} k_2 + \cdots + k_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n &= \phantom{k_1 + k_2 + \cdots + {}} k_n։ \end{aligned}$$

Այստեղից՝

$$k_i = l_i - l_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad k_n = l_n,$$

այսինքն՝ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *ցուցիչներով կարելի է վերականգնել* χ *բազմանդամի ելակետային անդամի* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *ցուցիչները։ Այսպիսով,* χ *բազմանդամի տարբեր անդամները, որոնք դիտարկվում են որպես բազմանդամներ* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ից, ունեն տարբեր բարձրագույն անդամներ։*

Դիտարկենք այժմ χ *բազմանդամի բոլոր անդամները. Նրանցից յուրաքանչյուրի համար գտնենք* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ի նկատմամբ բազմանդամի տեսքով նրա ներկայացման բարձրագույն անդամը և այդ բարձրագույն անդամներից ընտրենք այն, որը կլինի ամենաբարձրագույնը բառարանագրական դասավորության իմաստով։ Ինչպես ավեց վերևում, այդ անդամը չունի նմանը* χ *բազմանդամի մյուս անդամներից ստացված բարձրագույն անդամների թվում, իսկ քանի որ այն, ըստ պայմանի, ավելի բարձր է այդ բարձրագույն անդամներից յուրաքանչյուրից, ապա այն շատ ավելի բարձր է մյուս անդամներից, որոնք* *տացվում են χ բազմանդամի անդամների մեջ* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *էլեմենտները փոխարինելով իրենց (1) արտահայտություններով։ Հետևաբար, մենք գտանք այնպիսի անդամ, որը* $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-ից* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*-ին անցնելիս հայտնվում է (զրոյից տարբեր գործակցով) միայն մեկ անգամ և, հետևաբար, ոչնչով չի կարող կրճատվել։ Այստեղից հետևում է, որ* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *բազմանդամի ոչ բոլոր գործակիցներն են հավասար զրոյի, այսինքն՝ այդ բազմանդամը* $P[x_1 x_2, \ldots, x_n]$ *օղակի զրոն չէ, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Ապացուցված թեորեման, ակներևորեն, կարելի է ձևակերպել նաև այսպես.

Տարրական սիմետրիկ բազմանդամների $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ սիստեմը, երբ դրանք դիտարկվում են որպես բազմանդամների $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ օղակի էլեմենտներ, հանրահաշվորեն անկախ է P դաշտի վրա։

§ 53*. Լրացուցիչ դիտողություններ սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ

Դիտողություններ հիմնական թեորեմայի շուրջը: *Սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ հիմնական թեորեմայի նախորդ պարագրաֆում բերված ապացույցը թույլատրում է մի քանի էական լրացումներ անել թեորեմայի ձևակերպմանը, որոնցով մենք սորև օգտվելու ենք։ Ամենից առաջ, այն* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *բազմանդամի գործակիցները, որը մենք գտանք որպես* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *սիմետրիկ բազմանդամի արտահայտություն տարրական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով, ոչ միայն պատկանում են P դաշտին, այլև նույնիսկ* արտահայտվում են f բազմանդամի գործակիցներով՝ գումարման և հանման օգնությամբ, այսինքն՝ պատկանում են P դաշտի ներսում f բազմանդամի գործակիցներով առաջացող L օղակին:

Իրոք, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *անհայտների նկատմամբ* φ_1 *բազմանդամի բոլոր գործակիցները (տես նախորդ պարագրաֆի (5) բանաձևը), ինչպես հեշտ է տեսնել, f բազմանդամի բարձրագույն անդամի* a_0 *գործակցի ամբողջ բազմապատիկներն են և, հետևաբար, պատկանում են L օղակին։ Դիցուք արդեն ապացուցված է, որ L-ին են պատկանում* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ *բազմանդամների բոլոր գործակիցները* ($x_1, x_2, \ldots, x_n$*-երի նկատմամբ)։ Այդ ժամանակ* $f_l = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_l$ *բազմանդամի գործակիցները նույնպես կպատկանեն L-ին, ուստի L-ի մեջ են գտնըվում նաև* φ_{l+1} *բազմանդամի բոլոր գործակիցները* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-երի նկատմամբ։*

Մյուս կողմից, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ բազմանդամի աստիճանը

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ համախմբի նկատմամբ հավասար է այն աստիճանին, որն ունի $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բազմանդամն x_i անհայտներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ: *Իրոք, քանի որ նախորդ պարագրաֆից (2)-ը f բազմանդամի բարձրագույն անդամն է, ուստի* k_1*-ը կլինի f-ի աստիճանը* x_1 *անհայտի նկատմամբ և, հետևաբար, սիմետրիկության շնորհիվ,* x_i *անհայտներից ցանկացած ուրիշի նկատմամբ։ Սակայն, ըստ նախորդ պարագրաֆի (5)-ի, φ-ի աստիճանը σ-ների համախմբի նկատմամբ հավասար է*

$$(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + \cdots + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1$$

թվին։ Այնուհետև, քանի որ f_1 *բազմանդամի ավագ անդամը ցածր է f բազմանդամի ավագ անդամից, ուստի* f_1*-ի աստիճանն* x_i*-երից յուրաքանչյուրի նկատմամբ կլինի ոչ ավելի բարձր, քան f-ի աստիճանն այդ անհայտներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ։ Սակայն* φ_2 *բազմանդամը* f_1*-ի համար խաղում է նույնպիսի դեր, ինչպիսին* φ_1*-ը f-ի համար, ուստի* φ_2*-ի աստիճանը σ-ների համախմբի նկատմամբ հավասար է* f_1*-ի աստիճանին* x_i*-երից յուրաքանչյուրի նկատմամբ, այսինքն՝ այն մեծ չէ, քան* k_1*-ը և այլն։ Այսպիսով,* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-ի աստիճանը ևս բարձր չէ, քան* k_1*-ը։ Քանի որ ոչ մի* $\varphi_i\,(i > 1)$ *չի կարող բոլոր* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-երը պարունակել նույն աստիճաններով, ինչ աստիճաններով պարունակում է* φ_1*-ը, ուստի* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-ի աստիճանը ճշտորեն հավասար է* k_1*-ի։ Հենց դրանով էլ մեր պնդումն ապացուցված է։*

Վերջապես, դիցուք $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$*-ը մեկն է* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *բազմանդամի անդամներից։ Այդ անդամի* կշիռ *անվանենք*

$$l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n$$

թիվը, այսինքն՝ ցուցիչների գումարը՝ նախապես յուրաքանչյուր ցուցիչը բազմապատկած σ_i*-ի համապատասխան ինդեքսներով։ Այլ կերպ ասած, դա կլինի մեր վերցրած անդամի աստիճանն* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *անհայտների համախմբի նկատմամբ, ինչպես այդ հետևում է բազմանդամների արտադրյալի աստիճանի վերաբերյալ § 51-ում ապացուցված թեորեմայից։ Այդ ժամանակ իրավացի է հետևյալ պնդումը.*

Եթե $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համասեռ սիմետրիկ բազմանդամը անհայտների համախմբի նկատմամբ ունի s աստիճանը, ապա σ-ների միջոցով նրա $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ արտահայտության բոլոր անդամները կունենան միևնույն կշիռը, որը հավասար է s-ի:

Իրոք, եթե նախորդ պարագրաֆից (2)-ը f համասեռ բազմանդամի բարձրագույն անդամն է, ապա՝

$$s = k_1 + k_2 + \cdots + k_n;$$

Սակայն, φ_1 անդամի կշիռն, ըստ նախորդ պարագրաֆի (5)-ի, հավասար է՝

$$(k_1-k_2)+2(k_2-k_3)+\cdots+(n-1)(k_{n-1}-k_n)+nk_n = \\ =k_1+k_2+k_3+\cdots k_n,$$

այսինքն՝ նույնպես հավասար է s-ի: Այնուհետև, $f_1=f-\varphi_1$ բազմանդամը, որպես s աստիճանի երկու համասեռ բազմանդամների տարբերություն, ինքը ևս կլինի s աստիճանի համասեռ բազմանդամ, ուստի և φ բազմանդամի φ_2 անդամը ևս կունենա s կշիռը և այլն:

Սիմետրիկ ռացիոնալ կոտորակներ: Սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ հիմնական թեորեման կարող է տարածվել ռացիոնալ կոտորակների դեպքի վրա: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n անհայտներից կախված $\frac{f}{g}$ ռացիոնալ կոտորակն անվանենք սիմետրիկ կոտորակ, եթե այն մնում է հավասար ինքն իրեն՝ անհայտների ցանկացած տեղափոխության դեպքում: Հեշտ է ցույց տալ, որ այս սահմանումը կախված չէ այն բանից, թե մենք վերցնո՞ւմ ենք արդյոք $\frac{f}{g}$ կոտորակը, թե՞ նրան հավասար $\frac{f_0}{g_0}$ կոտորակը: Իրոք, եթե ω-ն մեր անհայտների մի որոշ տեղափոխություն է, իսկ φ-ն՝ այդ անհայտներից կախված որևէ բազմանդամ, ապա պայմանավորվենք φ^ω-ով նշանակել այն բազմանդամը, որին բերվում է φ-ն ω տեղափոխությամբ: Ըստ ենթադրության,

$$\frac{f}{g}=\frac{f^\omega}{g^\omega}$$

ցանկացած ω-ի դեպքում, այսինքն՝ $fg^\omega=gf^\omega$: Մյուս կողմից

$$\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}$$

հավասարությունից հետևում է $fg_0=gf_0$, որտեղից՝ $f^\omega g_0^\omega=g^\omega f_0^\omega$: Վերջին հավասարության երկու մասն էլ բազմապատկելով f-ով, մենք կստանանք՝

$$ff^\omega g_0^\omega=fg^\omega f_0^\omega=gf^\omega f_0^\omega,$$

որտեղից f^ω-ով կրճատելուց հետո հետևում է, որ $fg_0^\omega=gf_0^\omega$, այսինքն՝

$$\frac{f_0^\omega}{g_0^\omega}=\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0};$$

Իրավացի է հետևյալ թ ե ո ր ե մ ա ն.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից կախված ամեն մի սիմետրիկ ռացիոնալ կոտորակ P դաշտին պատկանող գործակիցներով ներկայաց-

նելի է $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ տարրական սիմետրիկ բազմանդամներից կախված ռացիոնալ կոտորակի տեսքով՝ կրկին P-ին պատկանող գործակիցներով:

Իրոք, դիցուք տված է

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

սիմետրիկ ռացիոնալ կոտորակը: Ենթադրելով, որ այն անկրճատելի է, կարելի կլիներ ապացուցել, որ և՛ f-ը, և՛ g-ն կլինեն սիմետրիկ բազմանդամներ: Սակայն, հետևյալ ճանապարհն ավելի պարզ կլինի: Եթե g բազմանդամը սիմետրիկ չէ, ապա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք բոլոր այն $n!-1$ բազմանդամների արտադրյալով, որոնք ստացվում են g-ից՝ անհայտների բոլոր հնարավոր ոչ նույնական տեղադրություններով: Հեշտ է ստուգել, որ հայտարարն այժմ արդեն կլինի սիմետրիկ բազմանդամ: Ողջ կոտորակի սիմետրիկության հետևանքով այստեղից հետևում է, որ այժմ համարիչը նույնպես կլինի սիմետրիկ, և, հետևաբար, թեորեմայի ապացուցման համար մնում է համարիչն ու հայտարարն արտահայտել տարրական սիմետրիկ բազմանդամներով:

Աստիճանային գումարներ: Կիրառություններում հաճախ են հանդիպում հետևյալ տեսքի՝

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\quad k=1, 2, \ldots$$

սիմետրիկ բազմանդամներ, այսինքն՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների k-րդ աստիճանների գումարներ: Այդ բազմանդամները, որոնք կոչվում են աստիճանային գումարներ, հիմնական թեորեմայի համաձայն պետք է արտահայտվեն տարրական սիմետրիկ բազմանդամներով: Սակայն, մեծ k-երի դեպքում այդ արտահայտությունների որոնումը շատ դժվար է և այդ պատճառով հետաքրքրություն է ներկայացնում $s_1, s_2, \ldots$ և $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ բազմանդամների միջև եղած այն կապը, որն այժմ կհաստատվի:

Ամենից առաջ $s_1=\sigma_1$: Այնուհետև, եթե $k\leqslant n$, ապա հեշտ է ստուգել հետևյալ հավասարությունների իրավացիությունը.

$$\left.\begin{array}{l} s_{k-1}\sigma_1=s_k+S\left(x_1^{k-1}x_2\right)^{1}, \\ s_{k-2}\sigma_2=S\left(x_1^{k-1}x_2\right)+S\left(x_1^{k-2}x_2x_3\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{k-i}\sigma_i=S\left(x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i\right)+S\left(x_1^{k-i}x_2\cdots x_ix_{i+1}\right), \\ \qquad\qquad 2\leqslant i\leqslant k-2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1\sigma_{k-1}=S\left(x_1^2x_2\cdots x_{k-1}\right)+k\sigma_k; \end{array}\right\} \quad (1)$$

[1] Տե՛ս նախորդ պարագրաֆի (11)-ը:

Վերցնելով այս հավասարությունների նշանահաջորդող գումարները և ապա բոլոր անդամները տեղափոխելով հավասարության մի մասը, մենք կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0 \quad (k \leqslant n): \qquad (2)$$

Իսկ եթե $k > n$, ապա հավասարությունների (1) սիստեմը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} s_{k-1}\sigma_1 &= s_k + S\left(x_1^{k-1}x_2\right), \\ s_{k-2}\sigma_2 &= S\left(x_1^{k-1}x_2\right) + S\left(x_1^{k-2}x_2x_3\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{k-i}\sigma_i &= S\left(x_1^{k-i+1}x_2\ldots x_i\right) + S\left(x_1^{k-i}x_2\ldots x_ix_{i+1}\right), \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{k-n}\sigma_n &= S\left(x_1^{k-n+1}x_2\ldots x_n\right), \end{aligned}$$

որտեղից բխում է հետևյալ բանաձևը՝

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0 \quad (k > n): \qquad (3)$$

(2) և (3) բանաձևերը կոչվում են **Նյուտոնի բանաձևեր**: Նրանք աստիճանային գումարները կապում են տարրական սիմետրիկ բազմանդամների հետ և թույլ են տալիս հաջորդաբար գտնել $s_1, s_2, s_3 \ldots$-ի արտահայտությունները $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ի միջոցով: Այսպես, մենք գիտենք, որ $s_1 = \sigma_1$, որը բխում է և (2) բանաձևից: Եթե, այնուհետև, $k = 2 \leqslant n$, ապա ըստ (2)-ի՝ $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, որտեղից՝

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2:$$

Այնուհետև, $k = 3 \leqslant n$ դեպքում կլինի՝ $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$, որտեղից, օգտագործելով s_1-ի և s_2-ի համար արդեն գտած արտահայտությունները, ստանում ենք՝

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

որը մեզ արդեն հայտնի է (տես նախորդ պարագրաֆի (12)-ը): Իսկ եթե $k = 3$, բայց $n = 2$, ապա, ըստ (3)-ի, $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0$, որտեղից $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$: Օգտվելով Նյուտոնի բանաձևերից, կարելի է ստանալ s_k-ն $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ի միջոցով արտահայտող ընդհանուր բանաձև: Սակայն այդ բանաձևը շատ մեծածավալ է և մենք այն չենք բերի:

Եթե P հիմնական դաշտն ունի 0 բնութագրիչ և այդ պատճառով ցանկացած n բնական թվի վրա բաժանումը իմաստ ունի[1], ապա (2)

[1] p բնութագրիչ ունեցող դաշտում $\frac{a}{p}$ արտահայտությունն իմաստ չունի $a \neq 0$ դեպքում, քանի որ այդ դաշտում ցանկացած x-ի համար $p^x = 0$:

բանաձևը հնարավորություն է տալիս $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ տարրական սիմետրիկ բազմանդամները հաջորդաբար արտահայտել $s_1, s_2, \ldots, s_n$ առաջին n աստիճանային գումարների միջոցով: Այսպես, $\sigma_1 = s_1$, ուստի

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1\sigma_1 - s_2) = \frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2) = \frac{1}{6}\left(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_2\right)$$

և այլն: Այստեղից և հիմնական թեորեմայից բխում է հետևյալ արդյունքը.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտներից կազմած ամեն մի սիմետրիկ բազմանդամ զրո բնութագրիչ ունեցող P դաշտի վրա ներկայացնելի է $s_1, s_2, \ldots, s_n$ աստիճանային գումարներից կազմած բազմանդամի տեսքով՝ P դաշտին պատկանող գործակիցներով:

Բազմանդամներ, որոնք սիմետրիկ են անհայտների երկու սիստեմների նկատմամբ: Հաջորդ պարագրաֆում, ինչպես նաև § 58-ում, օգտագործվելու է սիմետրիկ բազմանդամի գաղափարի մի ընդհանրացումը: Դիցուք տրված են անհայտների երկու սիստեմներ՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ և $y_1, y_2, \ldots, y_r$, ընդ որում նրանց

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad y_1, y_2, \ldots, y_r \qquad (4)$$

միավորումը հանրահաշվորեն անկախ է P դաշտի վրա: P դաշտի վրա կազմած $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ բազմանդամը կոչվում է սիմետրիկ անհայտների երկու սիստեմների նկատմամբ, եթե այն չի փոխվում ցանկացած տեղափոխություն կատարելիս $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների միջև և $y_1, y_2, \ldots, y_r$ անհայտների միջև: Եթե $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ից կազմած տարրական սիմետրիկ բազմանդամների համար մենք պահպանենք $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ նշանակումները, իսկ $y_1, y_2, \ldots, y_r$-ից կազմած տարրական սիմետրիկ բազմանդամները նշանակենք $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$-ով, ապա հիմնական թեորեման կընդհանրացվի հետևյալ կերպ.

P դաշտի վրա անհայտների $x_1, x_2, \ldots, x_n$ և $y_1, y_2, \ldots, y_r$ սիստեմների նկատմամբ սիմետրիկ ամեն մի $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ բազմանդամ ներկայացնելի է բազմանդամի տեսքով (P-ից գործակիցներով) անհայտների այդ երկու սիստեմների նկատմամբ տարրական սիմետրիկ բազմանդամներից կազմած բազմանդամի տեսքով (P-ին պատկանող գործակիցներով)՝

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r):$$

Իրոք, f բազմանդամը կարելի է դիտարկել որպես $\bar{f}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ բազմանդամ, որի գործակիցները հանդիսանում են բազմանդամներ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ից: Քանի որ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անհայտների տեղափոխություններից f-ը չի փոխվում, ապա $\bar{f}$ բազմանդամի գործակիցները *կլինեն սիմետրիկ բազմանդամներ* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ից և, հետևաբար, ըստ հիմնական թեորեմայի, ներկայացնելի են* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ից կազմած բազմանդամների տեսքով (P-ին պատկանող գործակիցներով)։ Մյուս կողմից,* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *դաշտի վրա դիտարկվող* $\bar{f}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ *բազմանդամը կլինի սիմետրիկ* $y_1, y_2, \ldots, y_r$*-ի նկատմամբ և, հետևաբար, ներկայացնելի* $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ *բազմանդամի տեսքով.* $\bar{\varphi}$ *բազմանդամի գործակիցները, ինչպես ցույց է տրված ներկա պարագրաֆի սկզբում, կարտահայտվեն* $\bar{f}$ *բազմանդամի գործակիցներով՝ գումարման և հանման օգնությամբ, ուստի նրանք նույնպես կլինեն բազմանդամներ* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ից։ Ակներևաբար դա կբերի f-ի համար որոնելի արտահայտությանը* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$*-ի միջոցով։*

Օրինակ.

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=x_1x_2x_3-x_1x_2y_1-x_1x_2y_2-x_1x_3y_1-$$
$$-x_1x_3y_2-x_2x_3y_1-x_2x_3y_2+x_1y_1y_2+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2$$

բազմանդամը սիմետրիկ է ինչպես x_1, x_2, x_3 *անհայտների, այնպես էլ* y_1, y_2 *անհայտների նկատմամբ, սակայն սիմետրիկ չի լինի բոլոր հինգ անհայտների համախմբի նկատմամբ, ինչպես այդ դրսևորվում է թեկուզ և* x_1 *ու* y_1 *անհայտների դիրքափոխության դեպքում։ Գտնենք f-ի արտահայտությունը* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$*-ի միջոցով.*

$$f=x_1x_2x_3-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)y_1-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)y_2+$$
$$+(x_1+x_2+x_3)y_1y_2=\sigma_3-\sigma_2y_1-\sigma_2y_2+\sigma_1y_1y_2=\sigma_3-\sigma_2\tau_1+\sigma_1\tau_2:$$

Հասկանալի է, որ հենց նոր ապացուցված թեորեման տարածվում է նաև անհայտների երեք և ավելի թվով սիստեմների դեպքի վրա։

Անհայտների երկու սիստեմների նկատմամբ սիմետրիկ բազմանդամների համար իրավացի է նաև տարրական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով ներկայացման միակության թեորեման։ Այլ կերպ ասած, իրավացի է՝ հետևյալ թեորեման.

Անհայտների տված $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *և* $y_1, y_2, \ldots, y_r$ **սիստեմներից կազմած տարրական սիմետրիկ բազմանդամների**

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \quad \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$$

միացյալ սիստեմը հանրահաշվորեն անկախ է P դաշտի վրա։

Դիցուք, իսկապես, P դաշտի վրա գոյություն ունի

$$\varphi(\sigma_1\ \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \quad \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$$

բազմանդամ, որը հավասար է զրոյի, չնայած նրա ոչ բոլոր գործակիցներն են զրոներ։ Այդ բազմանդամը կարելի է դիտարկել որպես $\psi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ *բազմանդամ, որի գործակիցները հանդիսանում են* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ի նկատմամբ բազմանդամներ։ Հետևաբար, կարելի է*

համարել, որ ψ-ն բազմանդամ է $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$*-ից՝ ռացիոնալ կոտորակների*

$$Q=P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

դաշտի վրա։ $y_1, y_2, \ldots, y_r$ *սիստեմը մնում է հանրահաշվորեն անկախ Q դաշտի վրա. եթե այդ սիստեմի համար գոյություն ունենար հանրահաշվական կախվածություն Q-ին պատկանող գործակիցներով, ապա ազատվելով հայտարարներից, մենք կստանայինք հանրահաշվական կախվածություն (4) սիստեմում՝ ենթադրությանը հակառակ։ Հենվելով նախորդ պարագրաֆի միակության թեորեմայի վրա, մենք այժմ ստանում ենք, որ* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ *սիստեմը նույնպես պետք է լինի հանրահաշվորեն անկախ Q դաշտի վրա, և, հետևաբար, ψ բազմանդամի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի։ Սակայն այդ գործակիցները հանդիսանում են բազմանդամներ* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$*-ից և, հետևաբար, կլկին անհայտների մեկ սիստեմի (այս անգամ՝* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *սիստեմի) դեպքի համար միակության թեորեմայի հիման վրա, այս վերջին բազմանդամների բոլոր գործակիցներն իրենք հավասար են զրոյի։ Սրանով ապացուցվեց, որ հակառակ մեր ենթադրությանը φ բազմանդամի բոլոր գործակիցները պետք է հավասար լինեն զրոյի։*

§ 54*. Ռեզուլտանտ։ Անհայտի արտաքսումը։ Դիսկրիմինանտ

Եթե տված է $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *բազմանդամը* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *օղակից, ապա նրա* լուծում *կոչվում է անհայտների՝ P դաշտում կամ այդ դաշտի որևէ* $\bar{P}$ *ընդլայնման մեջ վերցրած արժեքների այնպիսի*

$$x_1=\alpha_1, \quad x_2=\alpha_2, \quad \ldots, x_n=\alpha_n$$

սիստեմը, որը f բազմանդամը դարձնում է զրո՝

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=0:$$

Ամեն մի f բազմանդամ, որի աստիճանը մեծ է զրոյից, ունի լուծումներ. *եթե* x_1 *անհայտը մտնում է այդ բազմանդամի գրության մեջ, ապա որպես* $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *կարելի է վերցնել ըստ էության կամայական էլեմենտներ P դաշտից, միայն թե* $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *բազմանդամի աստիճանը մնա էապես դրական, իսկ այնուհետև, օգտագործելով արմատի գոյության վերաբերյալ թեորեման (§ 49), կարելի է վերցնել P դաշտի այնպիսի* $\bar{P}$ *ընդլայնում, որի մեջ* x_1 *մեկ անհայտից կախված* $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *բազմանդամն ունի* α_1 *արմատ։ Դրա հետ մեկտեղ* մենք տեսնում ենք, որ մի քանի անհայտներից կախված բազմանդամների համար դադարում է իրավացի լինելուց մեկ անհայտից կախված n աստիճանի բազմանդամի այն հատկությունը, որ ամեն մի դաշտում ունի n-ից ոչ ավելի թվով արմատներ:

Եթե տված են n անհայտներից կախված մի քանի բազմանդամներ, ապա կարելի է դնել այդ բոլոր բազմանդամների համար ընդհանուր լուծումներ որոնելու հարցը, այսինքն՝ հավասարումների այն սիստեմի լուծումները որոնելու հարցը, որն ստացվում է տված բազմանդամները զրոյի հավասարեցնելու հետևանքով: Այս խնդրի մասնավոր դեպքը, այն է՝ գծային հավասարումների սիստեմի դեպքն, արդեն, ենթարկվել է մանրակրկիտ դիտարկման երկրորդ գլխում: Սակայն մյուս ծայրահեղ դեպքի՝ մեկ անհայտով մեկ հավասարման (բայց կամավոր աստիճան ունեցող) դեպքի համար մենք արմատների մասին ոչինչ չգիտենք, բացի նրանից, որ նրանք գոյություն ունեն հիմնական դաշտի մի որոշ ընդլայնման մեջ: Մի քանի անհայտներով հավասարումների կամավոր ոչ-գծային սիստեմի լուծումների որոնումն ու ուսումնասիրումը, հասկանալի է, շատ ավելի դժվար խնդիր է, որը, ի դեպ, դուրս է գալիս մեր դասընթացի շրջանակներից և կազմում է հատուկ մաթեմատիկական գիտության՝ հանրահաշվական երկրաչափության առարկան: Մենք այստեղ կսահմանափակվենք միայն *երկու* անհայտներով կամավոր աստիճանի *երկու* հավասարումների սիստեմի դեպքով և ցույց կտանք, որ այդ դեպքը կարող է բերվել *մեկ* անհայտով *մեկ* հավասարման դեպքին:

Նախ զբաղվենք մեկ անհայտից կախված երկու բազմանդամների ընդհանուր արմատների գոյության հարցով: Դիցուք P դաշտի վրա տված են հետևյալ բազմանդամները.

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \\ g(x)&=b_0x^s+b_1{}^{s-1}+\ldots+b_{s-1}x+b_s, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ընդ որում $a_0\neq0$, $b_0\neq0$:

Նախորդ գլխի արդյունքներից առանց դժվարության հետևում է, որ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները P դաշտի որևէ ընդլայնման մեջ ունեն ընդհանուր արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք փոխադարձ պարզ չեն: Այսպիսով, տրված բազմանդամների ընդհանուր արմատների գոյության հարցը կարող է լուծվել նրանց նկատմամբ Էվկլիդի ալգորիթմի կիրառումով:

Այժմ մենք ցույց տանք այս հարցի պատասխանն ստանալու մի այլ մեթոդ: Դիցուք $\bar{P}$-ն P դաշտի այնպիսի ընդլայնում է, որի մեջ $f(x)$-ն ունի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n հատ արմատները, իսկ $g(x)$-ն ունի $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$

s հատ արմատները: Որպես $\bar{P}$ կարելի է վերցնել $f(x)\,g(x)$ արտադրյալի վերլուծության դաշտը: $\bar{P}$ դաշտի

$$R(f, g)=a_0^sb_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(\alpha_i-\beta_j) \tag{2}$$

էլեմենտը կոչվում է $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ռեզուլտանտ (արդյունարար): Ակներև է, որ $f(x)$-ն ու $g(x)$-ը $\bar{P}$-ում ընդհանուր արմատ ունեն այն և միայն այն ժամանակ, երբ $R(f, g)=0$: Քանի որ

$$g(x)=b_0\prod_{j=1}^{s}(x-\beta_j)$$

և հետևաբար՝

$$g(\alpha_i)=b_0\prod_{j=1}^{s}(\alpha_i-\beta_j),$$

ապա $R(f, g)$ ռեզուլտանտը կարող է գրվել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$R(f, g)=a_0^s\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i): \tag{3}$$

$f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները ռեզուլտանտի սահմանման մեջ օգտագործվում են ոչ սիմետրիկ կերպով: Իրոք,

$$R(g, f)=b_0^na_0^s\prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\beta_j-\alpha_i)=(-1)^{ns}R(f, g): \tag{4}$$

(3)-ին համապատասխան, $R(g, f)$-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$R(g, f)=b_0^n\prod_{j=1}^{s}f(\beta_j): \tag{5}$$

Ռեզուլտանտի համար (2) արտահայտությունը պահանջում է գիտենալ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների արմատները և այդ պատճառով այդ երկու բազմանդամների ընդհանուր արմատի գոյության հարցի լուծման համար գործնականորեն անօգտակար է: Սակայն, պարզվում է, որ $R(f, g)$ ռեզուլտանտը կարելի է ներկայացնել $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_s$ գործակիցներից կազմած բազմանդամի տեսքով:

Այդպիսի ներկայացման հնարավորությունը հեշտությամբ բխում է նախորդ պարագրաֆի արդյունքներից: Իրոք, (2) բանաձևը ցույց է տալիս, որ $R(f, g)$ ռեզուլտանտը սիմետրիկ բազմանդամ է անհայտների երկու սիստեմներից՝ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ սիստեմից և $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ սիստեմից: Ուստի, ինչպես ապացուցված է նախորդ պարագրաֆի վերջում, այն ներկայացնելի է անհայտների այդ երկու սիստեմների նկատմամբ տարրական սիմետրիկ բազմանդամներից կազմած բազմանդամի տեսքով, այսինքն, նկատի ունենալով Վիետի բանաձևերը,

$$\frac{a_i}{a_0}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\ \text{և}\ \frac{b_j}{b_0}(j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

քանորդներից կազմած բազմանդամի տեսքով. (2)-ի մեջ ընդգրկված $a_0^s b_0^n$ բազմապատկիչը ստացված արտահայտությունն ազատում է հայտարարների a_0-ից և b_0-ից։ Իմիջիայլոց, դժվար կլինեն նախորդ պարագրաֆներում շարադրված մեթոդների օգնությամբ որոնել ռեզուլտանտի արտահայտությունը գործակիցների միջոցով և մենք կօգտվենք այլ եղանակից։

(1) բազմանդամների ռեզուլտանտի այն արտահայտությունը, որը մենք գտնելու ենք, պիտանի կլինի այդպիսի բազմանդամների ցանկացած զույգի համար։ Ավելի ճիշտ, մենք կհամարենք, որ (1) *բազմանդամների արմատների*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_s \tag{6}$$

սիստեմը հանդիսանում է $n+s$ անկախ անհայտների սիստեմ, այսինքն՝ $n+s$ հատ այնպիսի էլեմենտների սիստեմ, որոնք հանրահաշվորեն անկախ են P դաշտի վրա § 51-ի իմաստով։

Ռեզուլտանտի համար մենք կստանանք մի արտահայտություն, որը, դիտարկվելով որպես բազմանդամ (6) անհայտների նկատմամբ (Վիետի բանաձևերով գործակիցներն արմատներով փոխարինելուց հետո), հավասար կլինի (2) հավասարության աջ մասին, որը նույնպես դիտարկվում է որպես բազմանդամ (6) անհայտների նկատմամբ։

Հավասարությունը հասկանալով հենց այդպիսի նույնական հավասարության իմաստով (6) անհայտների սիստեմի նկատմամբ, մենք ապացուցենք, որ (1) **բազմանդամների R(f, g) ռեզուլտանտը հավասար է $n+s$ կարգի հետևյալ դետերմինանտին՝**

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_s & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_s & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_s \end{vmatrix} \begin{array}{l} \Big\}\ s\ \text{տող} \\ \\ \Big\}\ n\ \text{տող} \end{array} \tag{7}$$

(ազատ տեղերում գրված են զրոներ)։ Այս դետերմինանտի կազմությունը բավականաչափ պարզ է. նշենք միայն, որ նրա գլխավոր անկյունագծի վրա գրված է a_0 գործակիցը s անգամ և ապա b_s գործակիցը՝ n անգամ։

Մեր պնդումն ապացուցելու համար մենք երկու եղանակով հաշվենք $a_0^s b_0^n DM$ արտադրյալը, որտեղ M-ը $n+s$ կարգի հետևյալ օժանդակ դետերմինանտն է՝

$$M=\begin{vmatrix} \beta_1^{n+s-1} & \beta_2^{n+s-1} & \ldots & \beta_s^{n+s-1} & \alpha_1^{n+s-1} & \alpha_2^{n+s-1} & \ldots & \alpha_n^{n+s-1} \\ \beta_1^{n+s-2} & \beta_2^{n+s-2} & \ldots & \beta_s^{n+s-2} & \alpha_1^{n+s-2} & \alpha_2^{n+s-2} & \ldots & \alpha_n^{n+s-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_s^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}:$$

M-ը հանդիսանում է Վանդերմոնդի դետերմինանտը և, հետևաբար, ինչպես ցույց է տրված § 6-ում, հավասար է նրա նախավերջին տողի էլեմենտների տարբերությունների արտադրյալին, ընդ որում՝ ամեն մի նախորդ էլեմենտից հանվում է ցանկացած հաջորդ էլեմենտը։ Այսպիսով՝

$$M=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}(\beta_i-\beta_j)\cdot\prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\beta_j-\alpha_i)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)$$

և, հետևաբար, նկատի ունենալով (4)-ը՝

$$a_0^s b_0^n DM = D\cdot R(g,\ f)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}(\beta_i-\beta_j)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j): \tag{8}$$

Մյուս կողմից, հաշվենք DM արտադրյալը՝ մատրիցների արտադրյալի դետերմինանտի վերաբերյալ թեորեմայի հիման վրա։ Բազմապատկելով համապատասխան մատրիցները և հաշվի առնելով, որ բոլոր α-ները հանդիսանում են f(x)-ի արմատներ, իսկ բոլոր β-ները՝ g(x)-ի արմատներ, մենք կստանանք՝

$$a_0^s b_0^n DM =$$

$$=\begin{vmatrix} \beta_1^{s-1}f(\beta_1) & \beta_2^{s-1}f(\beta_2) & \ldots & \beta_s^{s-1}f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1^{s-2}f(\beta_1) & \beta_2^{s-2}f(\beta_2) & \ldots & \beta_s^{s-2}f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1 f(\beta_1) & \beta_2 f(\beta_2) & \ldots & \beta_s f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f(\beta_1) & f(\beta_2) & \ldots & f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^{n-1}g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1}g(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n^{n-1}g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^{n-2}g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-2}g(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n^{n-2}g(\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 g(\alpha_1) & \alpha_2 g(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & \ldots & g(\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

Կիրառելով Լապլասի թեորեման, այնուհետև դետերմինանտների սյուներից ընդհանուր արտադրիչները հանելով և հաշվելով մնացած դետերմինանտները որպես Վանդերմոնդի դետերմինանտներ, մենք կստանանք՝

$$a_0^s b_0^n\ DM = a_0^s b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_s) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

կամ, օգտագործելով (3)-ը և (5)-ը՝

$$a_0^s b_0^n DM = R(f, g)\, R(g, f) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)\text{։} \qquad (9)$$

Մենք ստանում ենք, որ (8) և (9) հավասարությունների աջ մասերը, որոնք դիտարկվում են որպես բազմանդամներ (6) անհայտներից, հավասար են իրար։ Ստացված հավասարության երկու մասերը կարելի է կրճատել ընդհանուր բազմապատկիչներով, որոնք նույնաբար հավասար չեն զրոյի։

$R(g, f)$ ընդհանուր բազմապատկիչը հավասար չէ զրոյի. քանի որ ըստ պայմանի $a_0 \neq 0$ և $b_0 \neq 0$, ապա բավական է (6) անհայտների համար ընտրել միմյանց ոչ հավասար արժեքներ (հիմնական դաշտում կամ նրա որևէ ընդլայնման մեջ), որպեսզի (4)-ից ստացվի $R(g, f)$ բազմանդամի համար զրոյից տարբեր արժեք։ Նույն կերպ ապացուցվում է, որ նաև մյուս երկու ընդհանուր բազմապատկիչները տարբեր են զրոյից։ Կրճատելով այդ բոլոր ընդհանուր բազմապատկիչներով, մենք հանգում ենք

$$R(f, g) = D \qquad (40)$$

հավասարությունը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Հրաժարվենք այժմ այն պահանջից, որ (1) բազմանդամների ավագ գործակիցները լինեն զրոյից տարբեր[1]։ Հետևաբար այդ բազմանդամների իսկական աստիճանների մասին կարելի է միայն պնդել, որ նրանք մեծ չեն «ձևականորեն» գրված իրենց n և, համապատասխանաբար, s աստիճաններից։ Ռեզուլտանտի համար (2) արտահայտությունը այժմ իմաստ չունի, քանի որ դիտարկվող բազմանդամները, հնարավոր է, որ ունենան ավելի փոքր արմատներ, քան n-ը կամ s-ը։ Մյուս կողմից, (7) դետերմինանտը այժմ էլ կարող է գրվել, և քանի որ արդեն ապացուցված է, որ $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ դեպքում այդ դետերմինանտը հավասար է ռեզուլտանտին, ապա մեր ընդհանուր դեպքում ևս այն անվանենք $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ռեզուլտանտ և նշանակենք $R(f, g)$-ով։

Սակայն, այժմ արդեն չի կարելի հույս դնել այն բանի վրա, որ ռեզուլտանտի զրոյի հավասար լինելը հավասարազոր է մեր բազմանդամների համար ընդհանուր արմատի գոյությանը։ Իրոք, եթե $a_0 = 0$ և $b_0 = 0$, ապա $R(f, g) = 0$ անկախ այն բանից՝ f և g բազմանդամներն ունե՞ն արդյոք ընդհանուր արմատներ, թե՞ ոչ։ Սակայն պարզվում է, որ այս դեպքը միակն է, երբ ռեզուլտանտի զրոյի հավասար լինելուց չի կարելի եզրակացություն անել տված բազմանդամների համար ընդհանուր արմատների գոյության մասին[1]։ Այն է՝ իրավացի է հետևյալ

թեորեմ ան.

Եթե տված են (1) բազմանդամները կամավոր ավագ գործակիցներով, ապա այդ բազմանդամների (7) ռեզուլտանտը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմանդամներն ունեն ընդհանուր արմատ կամ երբ նրանց ավագ գործակիցները երկուսն էլ հավասար են զրոյի։

Ապացույց։ $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ դեպքը արդեն դիտարկվել է վերևում, իսկ $a_0 = b_0 = 0$ դեպքը նախատեսված է թեորեմայի ձևակերպման մեջ։ Մեզ մնում է դիտարկել այն դեպքը, երբ (1) բազմանդամների ավագ գործակիցներից մեկը, օրինակ՝ a_0-ն, տարբեր է զրոյից, իսկ b_0-ն հավասար է զրոյի։

Եթե $b_i = 0$ բոլոր i-երի համար, $i = 0, 1, \ldots, s$, ապա $R(f, g) = 0$, քանի որ (7) դետերմինանտը պարունակում է զրոյական տողեր։ Սակայն, այս դեպքում $g(x)$ բազմանդամը նույնաբար հավասար է զրոյի և այդ պատճառով $f(x)$-ի հետ ունի ընդհանուր արմատներ։ Իսկ եթե

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0,\ \text{բայց}\ b_k \neq 0,\ k \leqslant s,$$

և եթե

$$\bar{g}(x) = b_k x^{s-k} + b_{k+1} x^{s-k-1} + \cdots + b_{s-1} x + b_s,$$

ապա, (7) դետերմինանտի մեջ $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ էլեմենտները փոխարինելով զրոներով և կիրառելով Լապլասի թեորեման, մենք, ակներևորեն, կգանք

$$R(f, g) = a_0^k R(f, \bar{g}) \qquad (11)$$

հավասարությանը։ Սակայն, քանի որ f և $\bar{g}$ երկու բազմանդամների ավագ գործակիցները զրոյից տարբեր են, ապա, վերևում ապացուցածի համաձայն, $R(f, \bar{g}) = 0$ հավասարությունը անհրաժեշտ է և բավարար f և $\bar{g}$ բազմանդամների ընդհանուր արմատի գոյության համար։ Մյուս կող-

[1] Այս ժամանակավոր հրաժարումը բազմանդամի ավագ գործակցի մասին այն պայմանից, որին մենք հետևում էինք մինչև այժմ, պայմանավորված է հետագա կիրառություններով. մենք ուզում ենք դիտարկել երկու անհայտներից կազմած բազմանդամների սիստեմներ և այդ անհայտներից մեկը դիտարկելու ենք որպես գործակից։ Հետևաբար, ավագ գործակիցը այդ անհայտի մասնավոր արժեքների համար կարող է դառնալ զրո։

[1] (7) դետերմինանտը, իհարկե, հավասար է զրոյի և $a_n = b_s = 0$ դեպքում։ Սակայն այս դեպքում (1) բազմանդամներն ունեն 0 ընդհանուր արմատը։

միջ, ըստ (11)-ի, $R(f, g)=0$ և $R(f, \bar{g})=0$ հավասարությունները հավասարազոր են, և քանի որ g և $\bar{g}$ բազմանդամները, հասկանալի է, ունեն միևնույն արմատներ, ապա մենք ստանում ենք, որ դիտարկված դեպքում ևս $R(f, g)$ ռեզուլտանտի զրոյին հավասար լինելը հավասարազոր է $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր արմատի գոյությանը: Դրանով թեորեմն ապացուցված է:

Գտնենք

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2, \qquad g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

երկու քառակուսի բազմանդամների ռեզուլտանտը: Ըստ (7)-ի՝

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

կամ, հաշվելով դետերմինանտն ըստ առաջին և երրորդ տողերի վերլուծելով,

$$R(f, g)=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1): \tag{12}$$

Այսպես, եթե տված են

$$f(x)=x^2-6x+2, \quad g(x)=x^2+x+5$$

բազմանդամները, ապա, ըստ (12)-ի, $R(f, g)=233$ և, հետևաբար, այդ բազմանդամները չունեն ընդհանուր արմատներ: Իսկ եթե տված են

$$f(x)=x^2-4x-5, \quad g(x)=x^2-7x+10$$

բազմանդամները, ապա $R(f, g)=0$, այսինքն՝ այդ բազմանդամներն ունեն ընդհանուր արմատ, այդ արմատը 5 թիվն է:

Անհայտի արտաքսումը երկու անհայտով երկու հավասարումների սիստեմից:

Դիցուք տված են f և g երկու բազմանդամներ x և y երկու անհայտների նկատմամբ՝ որևէ P դաշտի պատկանող գործակիցներով: Մենք գրենք այդ բազմանդամներն ըստ x անհայտի նվազող աստիճանների՝

$$\left.\begin{aligned} f(x, y)&=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\dots+a_{k-1}(y)x+a_k(y), \\ g(x, y)&=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\dots+b_{l-1}(y)x+b_l(y). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

գործակիցները բազմանդամներ կլինեն $P[y]$ օղակից: Գտնենք f և g բազմանդամների ռեզուլտանտը, դրանք դիտարկելով որպես բազմանդամներ x-ի նկատմամբ, և նշանակենք այն $R_x(f, g)$-ով. շնորհիվ (7)-ի, այն կլինի բազմանդամ մեկ y անհայտի նկատմամբ՝ P դաշտին պատկանող գործակիցներով

$$R_x(f, g)=F(y): \tag{14}$$

Դիցուք բազմանդամների (13) սիստեմն ունի $x=\alpha$, $y=\beta$ ընդհանուր լուծում P դաշտի մի որևէ ընդլայնման մեջ: Տեղադրելով (13)-ի մեջ y-ի փոխարեն β արժեքը, մենք կստանանք $f(x, \beta)$ և $g(x, \beta)$ երկու բազմանդամներ x մեկ անհայտի նկատմամբ: Այդ բազմանդամներն ունեն α ընդհանուր արմատ, և, հետևաբար, նրանց ռեզուլտանտը, որը, շնորհիվ (14)-ի հավասար է $F(\beta)$-ի, պետք է հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ β-ն պետք է լինի $R_x(f, g)$ ռեզուլտանտի արմատ: Հակադարձաբար, եթե (13) բազմանդամների $R_x(f, g)$ ռեզուլտանտն ունի β արմատը, ապա $f(x, \beta)$ և $g(x, \beta)$ բազմանդամների ռեզուլտանտը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ կամ այդ բազմանդամներն ունեն ընդհանուր արմատ, կամ նրանց երկու ավագ գործակիցներն էլ հավասար են զրոյի՝

$$a_0(\beta)=b_0(\beta)=0:$$

Բազմանդամների (13) սիստեմի ընդհանուր լուծումների որոնումը այս ճանապարհով բերված է y մեկ անհայտով (14) մեկ բազմանդամի արմատները որոնելուն, այսինքն, ինչպես ընդունված է ասել, x անհայտը արտաքսված է (13) բազմանդամների սիստեմից:

Հետևյալ թեորեման պատասխանում է այն բազմանդամի աստիճանի վերաբերյալ հարցին, որը մենք ստանում ենք երկու անհայտներով երկու բազմանդամների սիստեմից մեկ անհայտն արտաքսելուց հետո:

Եթե $f(x, y)$ և $g(x, y)$ *բազմանդամներն անհայտների համախմբի նկատմամբ ունեն համապատասխանաբար n և s աստիճանները, ապա y անհայտի նկատմամբ կազմած $R_x(f, g)$ բազմանդամի աստիճանը մեծ չէ ns արտադրյալից, եթե, իհարկե, այդ բազմանդամը նույնաբար հավասար չէ զրոյի:*

Ամենից առաջ, եթե մենք դիտարկում ենք մեկ անհայտից կախված երկու բազմանդամներ, որոնց ավագ գործակիցները հավասար են մեկի, ապա, ըստ (2)-ի, նրանց $R(f, g)$ ռեզուլտանտը հանդիսանում է ns աստիճանի համասեռ բազմանդամ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$-ի նկատմամբ: Այստեղից հետևում է, որ եթե ռեզուլտանտի $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_s$ գործակիցներով արտահայտության մեջ մտնում է

$$a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}b_1^{l_1}b_2^{l_2}\dots b_s^{l_s}$$

անդամը, և եթե այդ անդամի կշիռ անվանվի

$$k_1+2k_2+\dots+nk_n+l_1+2l_2+\dots+sl_s$$

թիվը, ապա $R(f, g)$-ի՝ գործակիցների միջոցով արտահայտության բոլոր անդամները ունեն միևնույն կշիռը, որը հավասար է ns-ի:

Այս պնդումը իրավացի է և ընդհանուր դեպքում, (7) ռեզուլտանտի անդամների համար, եթե $a_0^{k_0}a_1^{k_1}\dots a_n^{k_n}b_0^{l_0}b_1^{l_1}\dots b_s^{l_s}$ անդամի կշիռ անվանվի

$$0\cdot k_0+1\cdot k_1+\dots+nk_n+0\cdot l_0+1\cdot l_1+\dots+sl_s \tag{15}$$

թիվը։ Իրոք, (7) դետերմինանտի անդամների մեջ a_0 և b_0 բազմապատկիչները փոխարինելով մեկով, մենք կհանգենք արդեն դիտարկված դեպքին, սակայն այդ բազմապատկիչների ցուցիչները մտնում են (15)-ի մեջ 0 գործակիցներով։

Այժմ f և g բազմանդամները գրենք հետևյալ տեսքով.

$$f(x, y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\dots+a_n(y),$$
$$g(x, y)=b_0(y)x^s+b_1(y)x^{s-1}+\dots+b_s(y)։$$

Քանի որ n-ը $f(x, y)$-ի աստիճանն է անհայտների համախմբի նկատմամբ, ապա $a_r(y)$ գործակցի աստիճանը չի կարող գերազանցել նրա r ինդեքսին, $r=0, 1, 2, \dots, n$. այդ նույնը ճիշտ է նաև $b_r(y)$-ի համար։ Այստեղից հետևում է, որ $R_x(f, g)$ ռեզուլտանտի յուրաքանչյուր անդամի աստիճանը մեծ չէ այդ անդամի կշռից, այսինքն՝ մեծ չէ ns թվից, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Օրինակներ։

1. Գտնել

$$f(x, y)=x^2y+3xy+2y+3,$$
$$g(x, y)=2xy-2x+2y+3$$

բազմանդամների սիստեմի ընդհանուր լուծումները։

Արտաքսենք այս սիստեմից x անհայտը, որի համար արտագրենք այն հետևյալ տեսքով.

$$\left.\begin{aligned} f(x, y)&=y\cdot x^2+(3y)\cdot x+(2y+3),\\ g(x, y)&=(2y-2)x+(2y+3).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

այդ ժամանակ՝

$$R_x(f, g)=\begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3\\ 2y-2 & 2y+3 & 0\\ 0 & 2y-2 & 2y+3\end{vmatrix}=2y^2+11y+12։$$

Ռեզուլտանտի արմատներ կլինեն $\beta_1=-4$, $\beta_2=-\frac{3}{2}$ թվերը։ y անհայտի այս արժեքների դեպքում (16) բազմանդամների ավագ գործակիցները զրո չեն դառնում, ուստի նրանցից յուրաքանչյուրը x-ի մի որոշ արժեքի հետ միասին կազմում է բազմանդամների տված սիստեմի լուծում։

$$f(x, -4)=-4x^2-12x-5,$$
$$g(x, -4)=-10x-5$$

բազմանդամներն ունեն $\alpha_1=-\frac{1}{2}$ ընդհանուր արմատը։

$$f\left(x, -\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x,$$
$$g\left(x, -\frac{3}{2}\right)=-5x$$

բազմանդամներն ունեն $\alpha_2=0$ ընդհանուր արմատը։ Այսպիսով, բազմանդամների տված սիստեմն ունի երկու լուծում՝

$$\alpha_1=-\frac{1}{2},\ \beta_1=-4 \text{ և } \alpha_2=0,\ \beta_2=-\frac{3}{2}.$$

2. Արտաքսել մի անհայտը

$$f(x, y)=2x^3y-xy^2+x+5,$$
$$g(x, y)=x^2y^2+2xy^2-5y+1$$

բազմանդամների սիստեմից։

Քանի որ երկու բազմանդամներն էլ y անհայտի նկատմամբ ունեն 2 աստիճանը, մինչդեռ նրանցից մեկի աստիճանն x անհայտի նկատմամբ 3 է, ապա նպատակահարմար է արտաքսել y-ը։ Արտագրենք այդ սիստեմը հետևյալ տեսքով.

$$\left.\begin{aligned} f(x, y)&=(-x)\cdot y^2+(2x^3)\cdot y+(x+5),\\ g(x, y)&=(x^2+2x)\,y^2-5y+1\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

և, կիրառելով (12) բանաձևը, գտնենք նրա ռեզուլտանտը՝

$$\begin{aligned} R_y(f, g)=&[(-x)\cdot 1-(x+5)(x^2+2x)]^2-\\ &-[(-x)(-5)-2x^3(x^2+2x)]\,[2x^3\cdot 1-(x+5)(-5)]=\\ &=4x^8+8x^7+11x^6+84x^5+161x^4+154x^3+96x^2-125x։\end{aligned}$$

Ռեզուլտանտի արմատներից մեկը 0-ն է։ Սակայն x անհայտի այդ արժեքի դեպքում (17) բազմանդամների երկու ավագ գործակիցն էլ դառնում են զրո, ընդ որում, ինչպես հեշտ է տեսնել, $f(0, y)$ և $g(0, y)$ բազմանդամները չունեն ընդհանուր արմատներ։ Ռեզուլտանտի մյուս արմատները գտնելու եղանակներ մենք չունենք։ Կարելի է պնդել միայն, որ եթե մենք դրանք գտնեինք (օրինակ, $R_y(f, g)$-ի վերլուծման դաշտում), ապա նրանցից ոչ մեկը (17) բազմանդամներից երկուսի ավագ գործակիցներն էլ զրո չէր դարձնի և, հետևաբար, այդ արմատներից յուրաքանչյուրը y-ի մի որոշ արժեքի (մեկի կամ նույնիսկ՝ մի քանիսի) հետ միասին կկազմեր բազմանդամների տված սիստեմի լուծումը։

Գոյություն ունեն մեթոդներ, որոնք թույլատրում են անհայտները հաջորդաբար արտաքսել նաև կամավոր թվով անհայտներով կամավոր թվով բազմանդամների սիստեմից։ Սակայն այդ մեթոդները շատ մեծածավալ են, ուստի և չեն կարող մտցվել մեր դասընթացի մեջ։

Դիսկրիմինանտ: Այն հարցի նմանությամբ, որը մեզ բերեց ռեզուլտանտի գաղափարին, կարելի է հարց դնել այն պայմանների մասին, որոնց դեպքում n աստիճանի $f(x)$ բազմանդամը $P[x]$ օղակից օժտված է բազմապատիկ արմատներով։ Դիցուք

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0,$$

և դիցուք P դաշտի մի որոշ ընդլայնման մեջ այդ բազմանդամն ունի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ արմատները։ Ակներև է, որ այդ արմատների միջև կլինեն հավասարներ այն և միայն այն ժամանակ, եթե հետևյալ արտադրյալը հավասար է զրոյի՝

$$\begin{aligned}\Delta=&(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_n-\alpha_1)\times\\ &\times(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)\dots(\alpha_n-\alpha_2)\times\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\times(\alpha_n-\alpha_{n-1})=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\alpha_i-\alpha_j)\end{aligned}$$

կամ, որ նույնն է, եթե զրոյի է հավասար հետևյալ արտադրյալը՝

$$D=a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2,$$

որ կոչվում է $f(x)$ բազմանդամի դիսկրիմինանտ *(տարբերիչ)*։

Ի տարբերություն Δ արտադրյալի, որը կարող է փոխել նշանը արմատների տեղափոխության դեպքում, D դիսկրիմինանտը սիմետրիկ է $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ի նկատմամբ և, հետևաբար, կարող է արտահայտվել $f(x)$ բազմանդամի գործակիցների միջոցով։ Գտնելու համար այդ արտահայտությունն այն ենթադրությամբ, որ P դաշտն ունի զրո բնութագրիչ, կարելի է օգտվել $f(x)$ բազմանդամի դիսկրիմինանտի և այդ բազմանդամի ու իր ածանցյալի ռեզուլտանտի միջև գոյություն ունեցող կապից։ Այդպիսի կապի առկայությունը բնական է սպասել. § 49-ից մենք գիտենք, որ բազմանդամն օժտված է բազմապատիկ արմատներով այն և միայն այն ժամանակ, եթե նա ունի ընդհանուր արմատներ $f'(x)$ ածանցյալի հետ, ուստի և $D=0$ այն և միայն այն ժամանակ, եթե $R(f, f')=0$։

Ներկա պարագրաֆի (3) բանաձևի համաձայն՝

$$R(f, f')=a_0^{n-1}\prod_{j=1}^{n} f'(a_i).$$

Ածանցելով

$$f(x)=a_0\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$$

հավասարությունը, մենք ստանում ենք՝

$$f'(x)=a_0\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(x-\alpha_j).$$

Այստեղ x-ի փոխարեն α_i տեղադրելուց հետո բոլոր գումարելիները, բացի i-րդից, դառնում են զրո և հետևաբար՝

$$f'(\alpha_i)=a_0\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j),$$

որտեղից՝

$$R(f, f')=a_0^{n-1}\cdot a_0^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j).$$

Այս արտադրյալի մեջ ցանկացած i-ի և j-ի համար, $i>j$, մտնում են երկու արտադրիչներ՝ $\alpha_i-\alpha_j$ և $\alpha_j-\alpha_i$։ Նրանց արտադրյալը հավասար

է $(-1)\cdot(\alpha_i-\alpha_j)^2$, իսկ քանի որ գոյություն ունեն i, j ինդեքսների $\frac{n(n-1)}{2}$ հատ զույգեր, որոնք բավարարում են $n\geqslant i>j\geqslant 1$ անհավասարություններին, ապա՝

$$R(f, f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0D.$$

Օրինակ։ Գտնենք

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

քառակուսի եռանդամի դիսկրիմինանտը։ Քանի որ $f'(x)=2ax+b$, ապա՝

$$R(f, f')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=a(-b^2+4ac).$$

Մեր դեպքում $\frac{n(n-1)}{2}=1$ և, հետևաբար,

$$D=-a^{-1}R(f, f')=b^2-4ac.$$

Սա համընկնում է նրա հետ, որը դպրոցական հանրահաշվի մեջ սովորաբար անվանում են քառակուսի հավասարման դիսկրիմինանտ։

Դիսկրիմինանտը որոնելու մյուս եղանակը կայանում է հետևյալում։ Կազմենք Վանդերմոնդի դետերմինանտ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ արմատների աստիճաններից։ Ինչպես ապացուցված է § 6-ում՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)=\Delta,$$

ուստի դիսկրիմինանտը հավասար է այդ դետերմինանտի քառակուսուն՝ բազմապատկած a_0^{2n-2}-ով։ Մատրիցների բազմապատկման կանոնով բազմապատկելով այդ դետերմինանտը իրենից շրջումով ստացվող դետերմինանտի հետ և հիշելով նախորդ պարագրաֆում որոշված աստիճանային գումարները, մենք կստանանք՝

$$D=a_0^{2n-2}\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad (18)$$

որտեղ s_k-ն $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ արմատների k-րդ աստիճանների գումարն է։

Օրինակ։ Գտնենք $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ խորանարդ բազմանդամի դիսկրիմինանտը։ Ըստ (18)-ի՝

$$D=\begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix},$$

Ինչպես մենք գիտենք նախորդ պարագրաֆից՝

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 = -a, \\ s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 - 2b, \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3 + 3ab - 3c. \end{aligned}$$

Օգտվելով Նյուտոնի բանաձևից, մենք կգտնենք նաև, նկատի ունենալով $\sigma_4=0$, որ

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2.$$

Այստեղից՝

$$\begin{aligned} D &= 3s_2s_4 + 2s_1s_2s_3 - s_2^3 - s_1^2s_4 - 3s_3^2 = \\ &= a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Մասնավորապես, $a=0$ դեպքում, այսինքն՝ ոչ լրիվ խորանարդ բազմանդամի համար մենք ստանում ենք

$$D = -4b^3 - 27c^2,$$

լրիվ համապատասխանությամբ այն բանի, ինչ ասված էր § 39-ում։

§ 55*. Կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի հիմնական թեորեմայի երկրորդ ապացույցը

Հիմնական թեորեմայի § 23-ում բերված ապացույցը կատարելապես ոչ հանրահաշվական էր։ Մենք ուզում ենք այժմ շարադրել ուրիշ ապացույց, որն օգտագործում է հանրահաշվական մեծ ապարատ. այսպես, նրա մեջ էապես օգտագործվում է սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ հիմնական թեորեման (§ 52), ինչպես նաև՝ ամեն մի բազմանդամի համար վերլուծության դաշտի գոյության վերաբերյալ թեորեման (§ 49), մինչդեռ այս ապացույցի ոչհանրահաշվական մասը նվազագույն մասն է և հանգեցված է մի շատ պարզ պնդման։

Նախապես նկատենք, որ § 23-ում ապացուցվել է լեմմա բազմանդամի ավագ անդամի մոդուլի մասին։ $f(x)$ բազմանդամի գործակիցները համարելով իրական և ընդունելով $k=1$, մենք այդ լեմմայից ստանում ենք այսպիսի *հետևանք*.

x-ի բացարձակ մեծությամբ բավականաչափ մեծ իրական արժեքների դեպքում իրական գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամի նշանը համընկնում է նրա ավագ անդամի նշանի հետ:

Այստեղից բխում է հետևյալ արդյունքը.

Իրական գործակիցներով կենտ աստիճանի բազմանդամն ունի առնվազն մեկ իրական արմատ:

Իրոք, դիցուք

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

ընդ որում բոլոր գործակիցներն իրական են։ n-ի կենտ լինելու շնորհիվ a_0x^n ավագ անդամը x-ի դրական և բացասական արժեքների դեպքում ունի տարբեր նշաններ և, հետևաբար, ինչպես ապացուցված է վերևում, x-ի դրական և բացասական արժեքների դեպքում, որոնք բավականաչափ մեծ են բացարձակ արժեքով, $f(x)$ բազմանդամը նույնպես կունենա տարբեր նշաններ։ Հետևաբար, գոյություն ունեն x-ի այնպիսի իրական արժեքներ, օրինակ՝ a և b, որ

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Անալիզի դասընթացից հայտնի է, սակայն, որ $f(x)$ բազմանդամը (այսինքն՝ ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիան) անընդհատ ֆունկցիա է, ուստի, շնորհիվ անընդհատ ֆունկցիաների հիմնական հատկություններից մեկի, x-ի որոշ իրական արժեքների դեպքում, որոնք ընկած են a-ի և b-ի միջև, $f(x)$-ն ընդունում է տված ցանկացած արժեքը $f(a)$-ի և $f(b)$-ի միջև։ Մասնավորապես, գոյություն ունի a-ի և b-ի միջև այնպիսի α, որ $f(\alpha)=0$։

Հենվելով այս արդյունքի վրա, մենք ապացուցենք այժմ հետևյալ պնդումը.

Իրական գործակիցներով ցանկացած աստիճանի ամեն մի բազմանդամ ունի առնվազն մեկ կոմպլեքս արմատ:

Իրոք, դիցուք տված է իրական գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամը, որն ունի $n=2^kq$ աստիճանը, որտեղ q-ն կենտ թիվ է։ Քանի որ $k=0$ դեպքն արդեն դիտարկվել է վերևում, մենք կընդունենք $k>0$, այսինքն՝ n-ը կհամարենք զույգ թիվ և ապացույցը կտանենք ինդուկցիայով ըստ k-ի, ենթադրելով, որ մեր պնդումն արդեն ապացուցված է իրական գործակիցներով *բոլոր* բազմանդամների համար, որոնց աստիճանը բաժանվում է 2^{k-1}-ի վրա, բայց չի բաժանվում 2^k-ի վրա[1]։

Դիցուք P-ն վերլուծման դաշտ է $f(x)$ բազմանդամի համար՝ կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա (տես § 49) և դիցուք $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$-ը $f(x)$-ի արմատներն են, որոնք պարունակվում են P դաշտում։ Ընտրենք կամավոր իրական c թիվը և վերցնենք P դաշտի այն էլեմենտները, որոնք ունեն

$$\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i+\alpha_j), \quad i<j \tag{1}$$

[1] Այդ աստիճանը կարող է, հետևաբար, լինել n-ից նույնիսկ մեծ։

տեսքը։ β_{ij} էլեմենտների թիվը, ակներևորեն, հավասար է՝

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^kq(2^kq-1)}{2} = 2^{k-1}q(2^kq-1) = 2^{k-1}q', \qquad (2)$$

որտեղ q'-ը կենտ թիվ է։

Կառուցենք այժմ այն $g(x)$ բազմանդամը $P[x]$ օղակից, որի արմատներն են բոլոր այդ β_{ij} էլեմենտները և միայն նրանք՝

$$g(x) = \prod_{i,\,j,\,i<j} (x-\beta_{ij})։$$

Այդ բազմանդամի գործակիցները հանդիսանում են տարրական սիմետրիկ բազմանդամներ β_{ij}-ից։ Հետևաբար, (1)-ի շնորհիվ, նրանք կլինեն իրական գործակիցներով (քանի որ c թիվը իրական է) բազմանդամներ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n$-ի նկատմամբ, ընդ որում՝ նույնիսկ սիմետրիկ բազմանդամներ։ Իրոք, ցանկացած երկու α-ների, օրինակ՝ α_k-ի և α_l-ի, դիրքափոխությունն առաջացնում է միայն տեղափոխություն բոլոր β_{ij}-երի սիստեմում. ամեն մի β_{kj}, որտեղ j-ն տարբեր է k-ից և l-ից, դառնում է β_{lj} և հակառակը, այն ժամանակ, երբ β_{kl}-ը և բոլոր β_{ij}-երը k-ից և l-ից տարբեր i-ի և j-ի դեպքում մնում են տեղում։ Սակայն, $g(x)$ բազմանդամի գործակիցները չեն փոխվում նրա արմատների տեղափոխության դեպքում։

Շնորհիվ սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ հիմնական թեորեմայի, այստեղից հետևում է, որ $g(x)$ բազմանդամի գործակիցները կլինեն բազմանդամներ (իրական գործակիցներով) տված $f(x)$ բազմանդամի գործակիցներից և, հետևաբար, իրենք էլ կլինեն իրական թվեր։ Այդ բազմանդամի աստիճանը, որը հավասար է β_{ij} արմատների թվին, ըստ (2)-ի, բաժանվում է 2^{k-1}-ի վրա, բայց չի բաժանվում 2^k-ի վրա։ Դրա համար, ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, $g(x)$ բազմանդամի β_{ij} արմատներից առնվազն մեկը պետք է լինի կոմպլեքս թիվ։

Այսպիսով, c իրական թվի ամեն մի ընտրության դեպքում կարելի է ցույց տալ i, j ինդեքսների այնպիսի զույգ, որտեղ $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, որ $\alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i+\alpha_j)$ էլեմենտը լինի կոմպլեքս թիվ (հիշեցնենք, որ P դաշտը պարունակում է կոմպլեքս թվերի դաշտը՝ որպես ենթադաշտ)։ Հասկանալի է, որ c թվի այլ ընտրության դեպքում նրան նշված իմաստով կհամապատասխանի, ընդհանրապես ասած, ինդեքսների մի այլ զույգ։ Սակայն, գոյություն ունեն անվերջ շատ իրարից տարբեր c իրական թվեր, այն ժամանակ, երբ մեր տրամադրության տակ գտնվում են միայն վերջավոր թվով i, j թվերի տարբեր զույգեր։ Այստեղից հետևում է, որ կարելի է ընտրել այնպիսի երկու c_1 և c_2

տարբեր իրական թվեր, $c_1 \neq c_2$, որ նրանց համապատասխանի i, j ինդեքսների միևնույն զույգը, որոնց համար

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i+\alpha_j) &= a,\\ \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i+\alpha_j) &= b \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

էլեմենտները կոմպլեքս թվեր են։

(3) հավասարություններից բխում է՝

$$(c_1-c_2)(\alpha_i+\alpha_j) = a-b,$$

որտեղից հետևում է՝

$$\alpha_i+\alpha_j = \frac{a-b}{c_1-c_2},$$

այսինքն՝ պարզվում է, որ այս գումարը կոմպլեքս թիվ է։ Այստեղից և (3) հավասարություններից թեկուզ առաջինից հետևում է, որ $\alpha_i\alpha_j$ արտադրյալը նույնպես կլինի կոմպլեքս թիվ։

Այսպիսով, α_i և α_j էլեմենտները հանդիսանում են

$$x^2-(\alpha_i+\alpha_j)x+\alpha_i\alpha_j=0$$

կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսի հավասարման արմատները, ուստի և, ինչպես բխում է § 38-ում արտածված կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսի հավասարման լուծման բանաձևից, նրանք իրենք ևս պետք է լինեն կոմպլեքս թվեր։ Հետևաբար, մենք գտանք $f(x)$ բազմանդամի արմատների մեջ նույնիսկ երկու կոմպլեքս արմատներ և դրանով ապացուցեցինք մեր պնդումը։

Հիմնական թեորեմայի լրիվ ապացուցման համար մնում է դիտարկել կամավոր կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամի դեպքը։ Դիցուք

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

այդպիսի բազմանդամ է։ Վերցնենք

$$\bar f(x) = \bar a_0x^n + \bar a_1x^{n-1} + \cdots + \bar a_n$$

բազմանդամը, որն ստացվում է $f(x)$-ից՝ բոլոր գործակիցները փոխարինելով իրենց համալուծ կոմպլեքս թվերով, և դիտարկենք դրանց արտադրյալը՝

$$F(x)=f(x)\bar f(x)=b_0x^{2n}+b_1x^{2n-1}+\ldots+b_kx^{2n-k}+\ldots+b_{2n}$$

որտեղ, ակներևորեն,

$$b_k = \sum_{i+j=k} a_i\bar a_j, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n։$$

Հենվելով § 18-ից մեզ հայտնի համալուծ կոմպլեքս թվերի հատկությունների վրա, մենք ստանում ենք, որ

$$\bar{b}_k = \sum_{i+j=k} \bar{a}_i a_j = b_k,$$

այսինքն՝ պարզվում է, որ $F(x)$ *բազմանդամի բոլոր գործակիցներն իրական են։*

Այստեղից, ինչպես ապացուցված է վերևում, հետևում է, որ $F(x)$ *բազմանդամն ունի առնվազն մեկ* β *կոմպլեքս արմատ՝*

$$F(\beta) = f(\beta)\,\bar{f}(\beta) = 0,$$

այսինքն՝ կամ $f(\beta)=0$, *կամ թե՝* $\bar{f}(\beta)=0$։ *Առաջին դեպքում թեորեման ապացուցված է։ Իսկ եթե տեղի ունի երկրորդ դեպքը, այսինքն՝*

$$\bar{a}_0\beta^n+\bar{a}_1\beta^{n-1}+\ldots+\bar{a}_n=0,$$

ապա, այստեղ մտնող բոլոր կոմպլեքս թվերը փոխարինելով իրենց համալուծներով (որը, ինչպես գիտենք, չի խախտի հավասարությունը), կստանանք՝

$$f(\bar{\beta}) = a_0\bar{\beta}^n + a_1\bar{\beta}^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

այսինքն՝ $\bar{\beta}$ *կոմպլեքս թիվը* $f(x)$*-ի արմատ է։ Հիմնական թեորեմայի ապացույցն ավարտված է։*

ԳԼՈՒԽ ՏԱՍՆԵՐԿՈՒԵՐՈՐԴ

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ

§ 56*. Բազմանդամների վերածելիությունը ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա

Երրորդ թվային դաշտը, որն իրական և կոմպլեքս թվերի դաշտերի հետ միասին մեզ համար հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում, ռացիոնալ թվերի դաշտն է. նշանակենք այն R*-ով։ Այն ամենափոքրն է թվային դաշտերի մեջ. ինչպես ապացուցված է § 43-ում,* R *դաշտն ամբողջովին պարունակվում է ամեն մի թվային դաշտում։ Մենք այժմ հետաքրքրվելու ենք բազմանդամների վերածելիության հարցով ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա, իսկ հաջորդ պարագրաֆում ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների ռացիոնալ (ամբողջ և կոտորակային) արմատների հարցով։ Մի անգամ ևս ընդգծենք, որ սրանք երկու տարբեր հարցեր են.*

$$x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$$

բազմանդամը վերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա, չնայած չունի ոչ մի ռացիոնալ արմատ։

Ի՞նչ կարելի է ասել բազմանդամների վերածելիության մասին R *դաշտի վրա։ Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե տված է* $f(x)$ *բազմանդամը, որի գործակիցները ռացիոնալ են, բայց ոչ բոլորն են ամբողջ, ապա գործակիցներն ընդհանուր հայտարարի բերելով և* $f(x)$*-ը բազմապատկելով այդ հայտարարով, որը հավասար է, օրինակ,* k*-ի, մենք կստանանք* $k\,f(x)$ *բազմանդամը, որի բոլոր գործակիցներն արդեն կլինեն ամբողջ թվեր։ Ակներև է, որ* $f(x)$ *և* $k\,f(x)$ *բազմանդամներն ունեն նույն արմատները։ Մյուս կողմից, նրանք միաժամանակ կլինեն վերածելի կամ անվերածելի* R *դաշտի վրա։*

Սակայն, մենք առայժմ իրավունք չենք ստացել հետագայում սահմանափակվելու ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների դիտարկումով։ Իրոք, դիցուք $g(x)$ *ամբողջաթիվ բազմանդամը (այսինքն՝ ամ-*

բողջ գործակիցներով բազմանդամը) վերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա, այսինքն՝ վերլուծվում է ռացիոնալ (ընդհանրապես ասած՝ կոտորակային) գործակիցներով ավելի փոքր աստիճանի արտադրիչների։ Հետևու՞մ է արդյոք այստեղից $g(x)$-ի վերածելիությունը ամբողջ գործակիցներով արտադրիչների։ Այլ կերպ ասած, ամբող գործակիցներով բազմանդամը, որը վերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտում, չի՞ կարող արդյոք անվերածելի լինել ամբողջ թվերի օղակի վրա։

Այս հարցերի պատասխանը կարող է ստացվել §51-ում արված դիտարկումներին համանման դիտարկումների օգնությամբ։ Ամբողջ գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամն անվանենք հասարակ (պրիմիտիվ) բազմանդամ, եթե նրա գործակիցները խմբովին փոխադարձ պարզ են, այսինքն՝ չունեն 1-ից և —1-ից տարբեր ընդհանուր բաժանարար։ Եթե տված է ռացիոնալ գործակիցներով $\varphi(x)$ կամավոր բազմանդամը, ապա այն կարելի է ներկայացնել, ընդ որում միարժեք ձևով, մի անկրճատելի կոտորակի և մի հասարակ բազմանդամի արտադրյալի տեսքով՝

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x)։ \tag{1}$$

Դրա համար հարկավոր է փակագծերից դուրս բերել $\varphi(x)$ բազմանդամի բոլոր գործակիցների ընդհանուր հայտարարը, ապա և այդ գործակիցների համարիչների ընդհանուր արտադրիչները։ Նկատենք, որ $\varphi(x)$-ի աստիճանը հավասար է $f(x)$-ի աստիճանին։ (1) ներկայացման միարժեքությունը (նշանի ճշտությամբ) ապացուցվում է հետևյալ կերպ։ Դիցուք

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x)=\frac{c}{d}g(x),$$

որտեղ $g(x)$-ը նորից հասարակ բազմանդամ է։ Այդ ժամանակ

$$adf(x)=bcg(x)։$$

Այսպիսով, (ad)-ն և (bc)-ն ստացվեցին հանելով բոլոր ընդհանուր արտադրիչները միևնույն ամբողջաթիվ բազմանդամի գործակիցներից և, հետևաբար, կարող են միմյանցից տարբերվել միայն նշանով։ Այստեղից հետևում է, որ $f(x)$ և $g(x)$ հասարակ բազմանդամները նույնպես կարող են տարբերվել միմյանցից միայն նշանով։

Ամբողջաթիվ հասարակ բազմանդամների համար իրավացի է մընում Գաուսի լեմման.

Երկու ամբողջաթիվ հասարակ բազմանդամների արտադրյալն ինքը հասարակ բազմանդամ է։

Իրոք, դիցուք տված են

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_ix^{k-i}+\dots+a_k,$$
$$g(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\dots+b_jx^{l-j}+\dots+b^l$$

ամբողջաթիվ հասարակ բազմանդամները և դիցուք՝

$$f(x)g(x)=c_0x^{k+l}+c_1x^{k+l-1}+\dots+c_{i+j}x^{(k+l)-(i+j)}+\dots+c_{k+l}։$$

Եթե այդ արտադրյալը հասարակ բազմանդամ չէ, ապա գոյություն ունի այնպիսի p պարզ թիվ, որը ծառայում է որպես ընդհանուր բաժանարար $c_0, c_1, \dots, c_{k+l}$ բոլոր գործակիցների համար։ Քանի որ $f(x)$ հասարակ բազմանդամի բոլոր գործակիցները չեն կարող բաժանվել p-ի վրա, ապա թո՛ղ a_i-ն լինի առաջին գործակիցը, որը չի բաժանվում p-ի վրա. Նման ձևով, b_j-ով կնշանակենք $g(x)$ բազմանդամի այն առաջին գործակիցը, որը չի բաժանվում p-ի վրա։ Բազմապատկելով անդամ առ անդամ $f(x)$-ն ու $g(x)$-ը և հավաքելով $x^{(k+l)-(i+j)}$ պարունակող անդամները, մենք կստանանք՝

$$c_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\dots+a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\dots։$$

Այս հավասարության ձախ մասը բաժանվում է p-ի վրա։ Նրա վրա անկասկած կբաժանվեն նաև աջ մասի բոլոր գումարելիները, բացի առաջինից։ Իրոք, նկատի ունենալով i-ի և j-ի ընտրության վրա դրված պայմանները՝ բոլոր $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots$, ինչպես նաև $b_{j-1}, b_{j-2}, \dots$, գործակիցները կբաժանվեն p-ի վրա։ Այստեղից հետևում է, որ a_ib_j արտադրյալը բաժանվում է p-ի վրա և, հետևաբար, նկատի ունենալով p թվի պարզ լինելը, p-ի վրա պետք է բաժանվի a_i, b_j գործակիցներից առնվազն մեկը, որը, սակայն, տեղի չունի։ Սրանով ավարտվում է լեմմայի ապացույցը։

Անցնենք վերևում դրված հարցերի պատասխանին։ Դիցուք ամբողջ գործակիցներով n աստիճանի $g(x)$ բազմանդամը վերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա՝

$$g(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x),$$

որտեղ $\varphi_1(x)$-ն ու $\varphi_2(x)$-ը ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամներ են և նրանց աստիճանները փոքր են n-ից։ Այդ ժամանակ

$$\varphi_i(x)=\frac{a_i}{b_i}f_i(x), \quad i=1, 2,$$

որտեղ $\frac{a_i}{b_i}$-ն անկրճատելի կոտորակ է, $f_i(x)$-ը՝ հասարակ բազմանդամ։ Այստեղից՝

$$g(x)=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}[f_1(x)f_2(x)]։$$

Այս հավասարության ձախ մասը ամբողջաթիվ բազմանդամ է, ուստի b_1b_2 հայտարարը աջ մասում պետք է կրճատվի։ Սակայն, քառակուսի փակագծերում գտնվող բազմանդամն ըստ Գաուսի լեմմայի կլինի հասարակ, հետևաբար ամեն մի պարզ արտադրիչ b_1b_2-ից կարող է կըրճատվել միայն որևէ պարզ արտադրիչի հետ՝ a_1a_2-ից, իսկ քանի որ a_i-ն և b_i-ն փոխադարձ պարզ են, $(i=1, 2)$, ապա a_2 թիվը պետք է առանց մնացորդի բաժանվի b_1-ի վրա, a_1-ը՝ b_2-ի վրա՝

$$a_2=b_1a'_2, \quad a_1=b_2a'_1:$$

Այստեղից՝

$$g(x)=a'_1a'_2f_1(x)f_2(x):$$

Կցագրելով $a'_1a'_2$ գործակիցը $f_1(x)$, $f_2(x)$ արտադրիչներից ցանկացածին, մենք կստանանք $g(x)$ բազմանդամի վերլուծությունը ամբողջ գործակիցներով ավելի փոքր աստիճանի արտադրիչների։ Սրանով ապացուցված է հետևյալ թեորեման.

Ամբողջ թվերի օղակի վրա անվերածելի ամբողջ գործակիցներով բազմանդամը անվերածելի կլինի նաև ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա։

Այժմ, վերջապես, մենք իրավունք ստացանք ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա բազմանդամների վերածելիությանը վերաբերող հարցերում սահմանափակվել ամբողջաթիվ բազմանդամներն այնպիսի արտադրիչների վերլուծելու դիտարկումով, որոնց բոլոր գործակիցները նույնպես ամբողջ են։

Մենք գիտենք, որ կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա վերածելի է ամեն մի բազմանդամ, որի աստիճանը մեծ է մեկից, իսկ իրական թվերի դաշտի վրա՝ ամեն մի բազմանդամ (իրական գործակիցներով), որի աստիճանը մեծ է երկուսից։ Բոլորովին այլ է դրությունը ռացիոնալ թվերի դաշտի դեպքում. ցանկացած n-ի համար կարելի է ցույց տալ ռացիոնալ (անգամ՝ ամբողջ) գործակիցներով n-րդ աստիճանի բազմանդամ, որն անվերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա։ Այս պնդման ապացույցը հիմնված է բազմանդամի R դաշտի վրա անվերածելիության հետևյալ բավարար հայտանիշի վրա, որը կոչվում է Էյզենշտեյնի հայտանիշ.

Դիցուք տված է ամբողջ գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

բազմանդամը։ Եթե կարելի է գոնե մեկ եղանակով ընտրել այնպիսի p պարզ թիվ, որը բավարարում է հետևյալ պահանջներին՝

1) a_0 ավագ գործակիցը չի բաժանվում p-ի վրա,

2) մյուս բոլոր գործակիցները բաժանվում են p-ի վրա,

3) ազատ անդամը, բաժանվելով p-ի վրա, չի բաժանվում p^2-ու վրա,

ապա $f(x)$ բազմանդամն անվերածելի է ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա։

Իրոք, եթե $f(x)$ բազմանդամը վերածելի է R դաշտի վրա, ապա այն վերլուծվում է ամբողջ գործակիցներով երկու ավելի փոքր աստիճանի արտադրիչների՝

$$f(x)=(b_0x^k+b_1x^{k-1}+\dots+b_k)(c_0x^l+c_1x^{l-1}+\dots+c_l),$$

որտեղ $k<n$, $l<n$, $k+l=n$։ Այստեղից, բաղդատելով գործակիցները հավասարության երկու մասերում, կստանանք՝

$$\left.\begin{array}{l} a_n=b_kc_l, \\ a_{n-1}=b_kc_{l-1}+b_{k-1}c_l, \\ a_{n-2}=b_kc_{l-2}+b_{k-1}c_{l-1}+b_{k-2}c_l \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0=b_0c_0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Քանի որ a_n-ը բաժանվում է p-ի վրա, իսկ p-ն պարզ թիվ է, (2) հավասարություններից առաջինից հետևում է, որ b_k, c_l արտադրիչներից մեկը պետք է բաժանվի p-ի վրա։ Նրանք երկուսը միաժամանակ չեն կարող բաժանվել p-ի վրա, քանի որ, ըստ պայմանի, a_n-ը չի բաժանվում p^2-ու վրա։ Դիցուք, օրինակ, b_k-ն բաժանվում է p-ի վրա և, հետևաբար, c_l-ը փոխադարձ պարզ է p-ի հետ։ Այժմ անցնենք (2) հավասարություններից երկրորդին։ Նրա ձախ մասը, ինչպես նաև աջ մասի առաջին գումարելին բաժանվում են p-ի վրա, ուստի p-ի վրա բաժանվում է և $b_{k-1}c_l$ արտադրյալը. քանի որ, սակայն, c_l-ը չի բաժանվում p-ի վրա, ապա p-ի վրա կբաժանվի p_{k-1}-ը։ Նման ձևով, (2)-ի երրորդ հավասարությունից մենք կստանանք, որ b_{k-2}-ը բաժանվում է p-ի վրա և այլն։ Վերջապես, $(k+1)$-րդ հավասարությունից կստացվի, որ p-ի վրա բաժանվում է b_0-ն, բայց այդ դեպքում (2) հավասարություններից վերջինից կբխեր, որ p-ի վրա բաժանվում է a_0-ն, որ հակասում է պայմանին։

Շատ հեշտ է ցանկացած n-ի համար գրել n-րդ աստիճանի այնպիսի ամբողջաթիվ բազմանդամներ, որոնք բավարարում են Էյզենշտեյնի հայտանիշի պայմաններին և, հետևաբար, անվերածելի են ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա։ Այդպիսին է, օրինակ, x^n+2 բազմանդամը. նրա նկատմամբ կիրառելի է Էյզենշտեյնի հայտանիշը $p=2$ դեպքում։ Էյզենշտեյնի հայտանիշը հանդիսանում է R դաշտի վրա անվերածելիության միայն բավարար պայման, բայց ամենևին ոչ անհրաժեշտ։ Եթե տված $f(x)$ բազմանդամի համար չի կարելի ընտրել այնպիսի p պարզ թիվ, որ տեղի ունենան Էյզենշտեյնի հայտանիշի պայմանները, ապա այն կարող է լինել վերածելի, ինչպես՝ x^2-5x+6-ը, բայց կարող է լինել նաև անվերածելի, ինչպես՝ x^2+1-ը։ Էյզենշտեյնի հայտանիշից բացի, գոյություն ունեն R դաշտի վրա բազմանդամների անվերածելիության շատ ուրիշ բավարար հայտանիշեր, սակայն դրանք քիչ նշանակալից են: Գոյություն ունի նաև մի մեթոդ, որը պատկանում է Կրոնեկերին և թույլատրում է ամբողջ գործակիցներով ցանկացած բազմանդամի համար որոշել՝ վերածելի՞ է արդյոք այն R դաշտի վրա, թե՞ ոչ: Սակայն, այդ մեթոդը շատ մեծածավալ է և գործնականորեն համարյա անկիրառելի:

Օրինակ: Դիտարկենք

$$f_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

բազմանդամը, որտեղ p-ն պարզ թիվ է: Այդ բազմանդամի արմատներ են ծառայում մեկից p-րդ աստիճանի այն արմատները, որոնք տարբեր են իրենից՝ մեկից. քանի որ այդ արմատները 1-ի հետ միասին կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանը բաժանում են p հավասար մասերի, ուստի $f_p(x)$ բազմանդամը կոչվում է շրջանի բաժանման բազմանդամ:

Այդ բազմանդամի նկատմամբ չի կարող անմիջականորեն կիրառվել Էյզենշտեյնի հայտանիշը: Կատարենք, սակայն, անհայտի փոխարինում, ընդունելով $x=y+1$: Կստանանք՝

$$g(y)=f_p(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}$$

$$=\frac{1}{y}\left[y^p+py^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-2}+\cdots+py\right]=$$

$$=y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3}+\cdots+p:$$

$g(y)$ բազմանդամի գործակիցները հանդիսանում են բինոմական գործակիցներ և, հետևաբար, բոլորը, բացի ավագ գործակցից, բաժանվում են p-ի վրա, ընդ որում՝ ազատ անդամը չի բաժանվում p^2-ու վրա: Այսպիսով, համաձայն Էյզենշտեյնի հայտանիշի՝ $g(y)$ բազմանդամը անվերածելի է R դաշտի վրա: Այստեղից հետևում է շրջանի բաժանման $f_p(x)$ բազմանդամի անվերածելիությունը R դաշտի վրա: Իրոք, եթե լիներ՝

$$f_p(x)=\varphi(x)\psi(x),$$

ապա կլիներ նաև՝

$$g(y)=\varphi(y+1)\psi(y+1),$$

որ հնարավոր չէ:

§ 57*. Ամբողջաթիվ բազմանդամների ռացիոնալ արմատները

Վերևում նշվեց, որ տված բազմանդամը ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա անվերածելի արտադրիչների վերլուծելու հարցը գործնականորեն չունի փոքր ի շատե բավարար լուծում: Սակայն, այս հարցի մասնավոր դեպքը, որը վերաբերում է ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամի գծային արտադրիչների առանձնացմանը, այսինքն՝ նրա ռացիոնալ արմատները գտնելուն, արդեն շատ պարզ է և լուծվում է առանց երկար հաշվումների: Ինքնին հասկանալի է, որ ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամի ռացիոնալ արմատները գտնելու հարցը ոչ մի չափով չի սպառում այդ բազմանդամի իրական արմատների վերաբերյալ ընդհանուր հարցը, այսինքն՝ իններորդ գլխում շարադրված մեթոդներն ու արդյունքները լրիվ պահպանում են իրենց արժեքը նաև ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների համար:

Անցնելով ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների ռացիոնալ արմատները որոնելու հարցին, նշենք, որ, ինչպես ցույց է տրվել նախորդ պարագրաֆում, կարելի է սահմանափակվել միայն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների դիտարկումով. ընդ որում, մենք դիտարկելու ենք ամբողջ արմատների դեպքն առանձին և կոտորակային արմատներինը՝ առանձին:

Եթե α ամբողջ թիվը ամբողջ գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամի արմատ է, ապա α-ն կլինի այդ բազմանդամի ազատ անդամի բաժանարար:

Իրոք, դիցուք

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n:$$

$f(x)$-ը բաժանենք $(x-\alpha)$-ի վրա՝

$$f(x)=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}):$$

Բաժանումը կատարելով § 22-ում շարադրված Հորների մեթոդով, մենք կստանանք, որ քանորդի բոլոր գործակիցները, այդ թվում և b_{n-1}-ը ամբողջ թվեր են, իսկ քանի որ

$$a_n=-\alpha b_{n-1}=\alpha(-b_{n-1}),$$

ապա մեր պնդումն ապացուցված է[1]:

Այսպիսով, եթե $f(x)$ ամբողջաթիվ բազմանդամն օժտված է ամբողջ արմատներով, ապա նրանք կգտնվեն ազատ անդամի բաժանարարների թվում: Հետևաբար, անհրաժեշտ է փորձարկել ազատ անդամի բոլոր հնարավոր բաժանարարները, ինչպես դրականները, այնպես էլ բացասականները. եթե նրանցից ոչ մեկը չի հանդիսանում բազմանդամի արմատ, ապա մեր բազմանդամն ընդհանրապես չունի ամբողջ արմատներ:

---

[1] Սխալ կլիներ այս թեորեման ապացուցել հենվելով այն բանի վրա, որ a_n ազատ անդամը հանդիսանում է (նշանի ճշտությամբ) $f(x)$ բազմանդամի բոլոր արմատների արտադրյալը. այդ արմատների մեջ կարող են հանդիպել և՛ կոտորակային, և՛ իռացիոնալ, և՛ կոմպլեքս արմատներ, ուստի և նախօրոք չի կարելի պնդել, որ բոլոր այդ արմատների արտադրյալը, բացի α-ից, կլինի ամբողջ:

Ազատ անդամի բոլոր բաժանարարների փորձարկումը կարող է շատ մեծածավալ լինել, եթե նույնիսկ բազմանդամի արժեքները հաշվենք Հորների մեթոդով, այլ ոչ թե անհայտի փոխարեն բաժանարարներից յուրաքանչյուրի անմիջական տեղադրումով։ Հետևյալ դիտողությունները թույլ են տալիս որոշ չափով պարզեցնել այդ հաշվումները։ Ամենից առաջ, քանի որ 1-ը և (—1)-ը միշտ հանդիսանում են ազատ անդամի բաժանարարներ, հաշվում ենք f(1)-ը և f(—1)-ը, որ դժվարություններ չի ներկայացնում։ Եթե, այնուհետև, α ամբողջ թիվը հանդիսանում է արմատ f(x)-ի համար՝

$$f(x)=(x-\alpha)q(x),$$

ապա, ինչպես ցույց է տրված վերևում, q(x) քանորդի բոլոր գործակիցները կլինեն ամբողջ թվեր, ուստի և

$$\frac{f(1)}{\alpha-1}=-q(1), \quad \frac{f(-1)}{\alpha+1}=-q(-1)$$

քանորդները պետք է լինեն ամբողջ թվեր։ Այսպիսով, փորձարկման ենթակա են ազատ անդամի միայն այն α բաժանարարները (1-ից և (—1)-ից տարբերների թվում), որոնց համար $\frac{f(1)}{\alpha-1}$, $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ քանորդներից յուրաքանչյուրն ամբողջ թիվ է։

Օրինակներ։ 1. Գտնել

$$f(x)=x^3-2x^2-x-6$$

բազմանդամի ամբողջ արմատները։

Ազատ անդամի բաժանարարներն են ±1, ±2, ±3, ±6 թվերը։ Քանի որ f(1)=—8, f(—1)=—8, ուստի 1-ը և (—1)-ը արմատներ չեն։ Այնուհետև,

$$\frac{-8}{2+1}, \quad \frac{-8}{-2-1}, \quad \frac{-8}{6-1}, \quad \frac{-8}{-6-1}$$

թվերը կոտորակային են, ուստի և 2, —2, 6, —6 բաժանարարները պետք է դեն գցվեն, այն ժամանակ երբ

$$\frac{-8}{3-1}, \frac{-8}{3+1}, \frac{-8}{-3-1}, \frac{8-}{-3+1}$$

թվերը ամբողջ են, և, հետևաբար, 3 ու —3 բաժանարարները դեռևս ենթակա են փորձարկման։ Կիրառենք Հորների մեթոդը՝

$$-3\left|\begin{array}{rrrr}1&-2&-1&-6\\\hline 1&-5&14&-48\end{array}\right.,$$

այսինքն՝ f(—3)=—48, ուստի 3-ը f(x)-ի համար արմատ չի հանդիսանում։ Վերջապես,

$$3\left|\begin{array}{rrrr}1&-2&-1&-6\\\hline 1&1&2&0\end{array}\right.,$$

այսինքն՝ f(3)=0, ուստի 3-ը f(x)-ի համար արմատ է։ Միաժամանակ մենք գտանք f(x)-ը (x—3)-ի վրա բաժանելուց առաջացած քանորդի գործակիցները՝

$$f(x)=(x-3)(x^2+x+2)։$$

Հեշտ է տեսնել, որ x^2+x+2 քանորդի համար 3-ը արմատ չի հանդիսանում, այսինքն՝ այդ թիվը չի հանդիսանում f(x)-ի համար բազմապատիկ արմատ։

2. Գտնել

$$f(x)=3x^4+x^3-5x^2-2x+2$$

բազմանդամի ամբողջ արմատները։

Այստեղ ազատ անդամի բաժանարարներ կլինեն ±1 և ±2։ Այնուհետև, (1)=—1, f(—)=1, այսինքն՝ 1-ը և (—1)-ը արմատներ չեն հանդիսանում։ Վերջապես, քանի որ

$$\frac{1}{2+1} \text{ և } \frac{-1}{-2-1}$$

թվերը կոտորակային են, ապա 2-ը և (—2)-ը նույնպես չեն լինի արմատներ, ուստի և f(x) բազմանդամն ընդհանրապես չունի ամբողջ արմատներ։

Անցնենք կոտորակային արմատների հարցին։

Եթե ամբողջաթիվ բազմանդամը, որի ավագ գործակիցը հավասար է մեկի, ունի ռացիոնալ արմատ, ապա այդ արմատը կլինի ամբողջ թիվ։

Դիցուք, իրոք, ամբողջ գործակիցներով

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

բազմանդամի արմատն է $\frac{b}{c}$ անկրճատելի կոտորակը, այսինքն՝

$$\frac{b^n}{c^n}+a_1\frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}+a_2\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}+\cdots+a_n=0;$$

Այստեղից՝

$$\frac{b^n}{c}=-a_1b^{n-1}-a_2b^{n-2}c-\cdots-a_nc^{n-1},$$

այսինքն՝ անկրճատելի կոտորակը հավասար է ամբողջ թվի, որ հնարավոր չէ։

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

ամբողջաթիվ բազմանդամի բոլոր ռացիոնալ (կոտորակային և ամբողջ) արմատները ստանալու համար հարկավոր է գտնել

$$\varphi(y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_0a_2y^{n-2}+\cdots+a_0^{n-2}a_{n-1}y+a_0^{n-1}a_n$$

բազմանդամի բոլոր ամբողջ արմատները և դրանք բաժանել a_0-ի վրա:

Իրոք, $f(x)$-ը բազմապատկենք a_0^{n-1}-ով և ապա կատարենք անհայտի փոխարինում, ընդունելով $y=a_0x$: Ակներև է, որ

$$\varphi(y)=\varphi(a_0x)=a_0^{n-1}f(x):$$

Այստեղից հետևում է, որ $f(x)$ բազմանդամի արմատները հավասար են $\varphi(y)$ բազմանդամի արմատներին՝ բաժանած a_0-ի վրա: Մասնավորապես, $f(x)$-ի ռացիոնալ արմատներին կհամապատասխանեն $\varphi(y)$-ի ռացիոնալ արմատներ, սակայն, քանի որ $\varphi(y)$-ի ավագ գործակիցը հավասար է մեկի, ապա այդ արմատները կարող են լինել միայն ամբողջ և մենք արդեն ունենք մեթոդ դրանք գտնելու համար:

Օրինակ: Գտնել

$$f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$$

բազմանդամի ռացիոնալ արմատները:

$f(x)$-ը բազմապատկելով 3^3-ով և ընդունելով $y=3x$, կստանանք՝

$$\varphi(y)=y^4+5y^3+3y^2+45y-54:$$

Փնտրենք $\varphi(y)$ բազմանդամի ամբողջ արմատները:

Գտնենք $\varphi(1)$-ը Հորների մեթոդով՝

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & 3 & 45 & -54 \\ \hline 1 & 1 & 6 & 9 & 54 & 0 \end{array}:$$

Այսպիսով, $\varphi(1)=0$, այսինքն՝ 1-ը հանդիսանում է արմատ $\varphi(y)$-ի համար, ընդորում՝

$$\varphi(y)=(y-1)q(y),$$

որտեղ՝

$$q(y)=y^3+6y^2+9y+54:$$

Գտնենք $q(y)$ բազմանդամի ամբողջ արմատները: Ազատ անդամի բաժանարարներ են ծառայում ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, ±27, ±54 թվերը: Այստեղ՝

$$q(1)=70,\quad q(-1)=50:$$

Հաշվելով՝ $\dfrac{q(1)}{\alpha-1}$ և $\dfrac{q(-1}{\alpha+1}$-ը յուրաքանչյուր α բաժանարարների համար, մենք կպարզենք, որ պետք է դեն գցվեն բոլոր բաժանարարները, բացի $\alpha=-6$-ից: Փորձարկենք այդ բաժանարարը՝

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ \hline -6 & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}:$$

Այսպիսով, $q(-6)=0$, այսինքն՝ (-6)-ը արմատ է հանդիսանում $q(y)$-ի համար, ուստի և $\varphi(y)$-ի համար:

Հետևաբար, $\varphi(y)$ բազմանդամն ունի 1 և -6 ամբողջ արմատները: Այսպիսով,

$f(x)$ բազմանդամի համար ռացիոնալ արմատներ կլինեն $\dfrac{1}{3}$ և -2 թվերը և միայն դրանք:

Հարկավոր է մի անգամ ևս ընդգծել, որ վերևում շարադրված մեթոդները կիրառելի են միայն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների նկատմամբ և միայն նրանց ռացիոնալ արմատները որոնելու համար:

§ 58*. Հանրահաշվական թվեր

n-րդ աստիճանի ռացիոնալ գործակիցներով ամեն մի բազմանդամ կոմպլեքս թվերի դաշտում ունի n արմատներ, որոնցից մի քանիսը (կամ, նույնիսկ, բոլորը) կարող են գտնվել ռացիոնալ թվերի դաշտից դուրս: Սակայն, ոչ ամեն մի կոմպլեքս կամ իրական թիվ կըծառայի ռացիոնալ գործակիցներով որևէ բազմանդամի արմատ: Այն կոմպլեքս (մասնավորապես՝ իրական) թվերը, որոնք հանդիսանում են այդպիսի բազմանդամների արմատներ, կոչվում են հանրահաշվական թվեր՝ ի հակադրություն տրանսցենդենտ թվերի: Հանրահաշվական թվեր են բոլոր ռացիոնալ թվերը՝ որպես ռացիոնալ գործակիցներով առաջին աստիճանի բազմանդամների արմատներ, ինչպես նաև $\sqrt[n]{a}$ տեսքի ամեն մի արմատ ենթարմատային a ռացիոնալ թվով՝ որպես x^n-a երկանդամի արմատ: Մյուս կողմից, մաթեմատիկական անալիզի լրիվ դասընթացներում ապացուցվում է բնական լոգարիթմների սիստեմի հիմքի՝ e թվի, ինչպես նաև տարրական երկրաչափությունից հայտնի π թվի տրանսցենդենտությունը:

Եթե α թիվը հանրահաշվական է, ապա այն կլինի նույնիսկ ամբողջ գործակիցներով որևէ բազմանդամի արմատ և, հետևաբար, այդ բազմանդամի նույնպես ամբողջ գործակիցներով անվերածելի բաժանարարներից մեկի արմատ: Այն անվերածելի ամբողջաթիվ բազմանդամը, որի արմատ է հանդիսանում α-ն, որոշված է միարժեքորեն՝ հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ, այսինքն՝ լրիվ միարժեքորեն, եթե պահանջվի, որ այդ բազմանդամի գործակիցները խմբովին լինեն փոխադարձ պարզ (այսինքն՝ որպեսզի բազմանդամը լինի հասարակ): Իրոք, եթե α-ն $f(x)$ և $g(x)$ երկու անվերածելի բազմանդամների արմատ է, ապա այդ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը մեկից տարբեր կլինի, ուստի և այդ բազմանդամները, նկատի ունենալով նրանց անվերածելի լինելը, կարող են միմյանցից տարբերվել միայն զրո աստիճանի բազմապատկիչով:

R դաշտի վրա անվերածելի միևնույն բազմանդամի արմատներ հանդիսացող հանրահաշվական թվերը կոչվում են միմյանց համալուծ[1]։ Հետևաբար, հանրահաշվական թվերի ողջ բազմությունը տրոհվում է միմյանց համալուծ թվերի՝ չփոխհատվող վերջավոր դասերի։ Ամեն մի ռացիոնալ թիվ, որպես առաջին աստիճանի բազմանդամի արմատ, իրենից տարբեր համալուծ թվեր չունի, և այդ հատկությունը ռացիոնալ թվերի համար բնորոշ հատկություն է. ամեն մի ոչ ռացիոնալ հանրահաշվական թիվ կլինի մեկից մեծ աստիճան ունեցող անվերածելի բազմանդամի արմատ, և հետևաբար, նրա համար գոյություն ունեն իրենից տարբեր համալուծ թվեր։

Բոլոր հանրահաշվական թվերի բազմությունը հանդիսանում է կոմպլեքս թվերի դաշտի ենթադաշտ։ Այլ կերպ ասած՝ հանրահաշվական թվերի գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը կլինեն հանրահաշվական թվեր:

Իրոք, դիցուք տված են α և β հանրահաշվական թվերը։ Նշանակենք $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ով α-ի հետ համալուծ բոլոր թվերը, $\beta_1=\beta$, $\beta_2, \ldots, \beta_s$-ով՝ β-ի հետ համալուծ թվերը, $f(x)$ և $g(x)$-ով՝ ռացիոնալ գործակիցներով այն անվերածելի բազմանդամները, որոնց արմատներն են համապատասխանաբար α-ն և β-ն։ Գրենք մի բազմանդամ, որի արմատներն են $\alpha_i+\beta_j$ բոլոր հնարավոր գումարները. այդ կլինի՝

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i+\beta_j)]:$$

Ակներևորեն, այդ բազմանդամի գործակիցները չեն փոխվի բոլոր α_i-երի միմյանց միջև, ինչպես նաև բոլոր β_j-երի՝ միմյանց միջև տեղափոխությունների դեպքում։ Հետևաբար, անհայտների երկու սիստեմների նկատմամբ սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ թեորեմայի հիման վրա (տե՛ս § 53-ի վերջը), նրանք հանդիսանում են բազմանդամներ՝ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների գործակիցների նկատմամբ։ Այլ կերպ ասած, $\varphi(x)$ բազմանդամի գործակիցները, պարզվում է, որ ռացիոնալ թվեր են, ուստի և $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$ թիվը, որը նրա արմատներից մեկն է, կլինի հանրահաշվական։

Նույն ձևով,

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i-\beta_j)]$$

և

$$\chi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_i\beta_j)$$

[1] Այս գաղափարը չպետք է շփոթել կոմպլեքս թվերի համալուծության հետ։

բազմանդամների օգնությամբ ապացուցվում է, որ հանրահաշվական են $\alpha-\beta$ և $\alpha\beta$ թվերը։

Քանորդի հանրահաշվական լինելն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ եթե α թիվը հանրահաշվական է և զրոյից տարբեր, ապա α^{-1}-ը նույնպես կլինի հանրահաշվական թիվ։ Դիցուք α-ն հանդիսանում է ռացիոնալ գործակիցներով

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

բազմանդամի արմատը։ Այդ ժամանակ, ակներևորեն, նույնպես ռացիոնալ գործակիցներով

$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

բազմանդամի արմատ կլինի α^{-1} թիվը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Հենց նոր ապացուցված թեորեմայից բխում է, որ ռացիոնալ թվի և արմատանշանով գրվող թվի ցանկացած գումարը, օրինակ՝ $1+\sqrt[3]{2}$, ինչպես նաև արմատանշաններով գրվող թվերի ցանկացած գումարը, օրինակ՝ $\sqrt{3}+\sqrt[7]{5}$, կլինեն հանրահաշվական թվեր։ Մենք առայժմ չենք կարող պնդել, սակայն, որ հանրահաշվական են «երկհարկանի» արմատանշաններով գրվող թվերը՝ օրինակ, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ թիվը։ Այդ կբխի միայն հետևյալ թեորեմայից.

Եթե ω թիվը հանդիսանում է արմատ

$$\varphi(x)=x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\cdots+\lambda x+\mu$$

բազմանդամի, որի գործակիցները հանրահաշվական թվեր են, ապա ω-ն նույնպես կլինի հանրահաշվական թիվ:

Դիցուք α_i, β_j, ..., λ_s, μ_t-ն ընդունում են այն թվային արժեքները, որոնք համալուծ են համապատասխանաբար $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ թվերին, ընդ որում, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, ..., $\lambda_1=\lambda$, $\mu_1=\mu$։ Դիտարկենք

$$\varphi_{i,j,\ldots,s,t}(x)=x^n+\alpha_ix^{n-1}+\beta_jx^{n-2}+\cdots+\lambda_sy+\mu_t$$

տեսքի բոլոր հնարավոր բազմանդամները, այնպես որ, $\varphi_{1,1,\ldots,1}(x)=\varphi(x)$ և վերցնենք բոլոր այդ բազմանդամների արտադրյալը՝

$$F(x)=\prod_{i,j,\ldots,s,t}\varphi_{i,j,\ldots,s,t}(x):$$

$F(x)$ բազմանդամի գործակիցները, ակներևորեն, սիմետրիկ են $\alpha_i, \beta_j, \ldots, \lambda_s, \mu_t$ սիստեմներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ, ուստի և (նորից ըստ § 53-ի թեորեմայի) նրանք բազմանդամներ են ռացիոնալ գործակիցներով այն անվերածելի բազմանդամների գործակիցների նկատմամբ, որոնց համար արմատներ ծառայում են համապատասխանաբար $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu$ թվերը, այսինքն՝ իրենք էլ ռացիոնալ թվեր են։ ω թիվը, հանդիսանալով $\varphi(x)$-ի արմատ, արմատ կլինի, հետևաբար, ռացիոնալ գործակիցներով $F(x)$ բազմանդամի համար, այսինքն՝ կլինի հանրահաշվական թիվ։

Այս թեորեման կիրառենք $\omega=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ թվի նկատմամբ։ $\alpha=1+\sqrt{2}$ թիվն, ըստ նախորդ թեորեմայի, հանրահաշվական է և, հետևաբար, ω թիվը հանդիսանում է հանրահաշվական գործակիցներով $x^2-\alpha$ բազմանդամի արմատ, այսինքն՝ ինքը հանրահաշվական է։ Ընդհանրապես, մի քանի անգամ կիրառելով նոր ապացուցված երկու թեորեմաները, ընթերցողն առանց դժվարության կհանգի հետևյալ եզրակացության.

Ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա արմատանշաններով գրվող ամեն մի թիվ (այսինքն՝ ամեն մի թիվ, որն արտահայտվում է արմատանշանների որքան կամենաք բարդ կոմբինացիայով, ընդհանուր դեպքում՝ «բազմահարկ») կլինի հանրահաշվական թիվ։

Արմատանշաններով գրվող հանրահաշվական թվերը ակներևորեն, կազմում են դաշտ։ Սակայն, հարկավոր է հիշել, ինչպես այդ բխում է § 38-ի վերջում արված (առանց ապացույցի) դիտողությունից, որ այդ դաշտը կլինի բոլոր հանրահաշվական թվերի դաշտի սոսկ մի մասը։

Վերևում նշվեց e և π երկու թվերի տրանսցենդենտությունը։ Սակայն՝ իրականում տրանսցենդենտ թվերն անվերջ շատ են։ Ավելին, օգտագործելով բազմությունների տեսությանը վերաբերող հասկացություններ ու մեթոդներ, մենք ցույց կտանք, որ տրանսցենդենտ թվերը, այսպես ասած, նույնիսկ ավելի շատ են, քան հանրահաշվական թվերը. այս արտահայտության ճշգրիտ իմաստը պարզ կդառնա ստորև։

M անվերջ բազմությունը կոչվում է հաշվելի, եթե այն կարող է դրվել փոխադարձ միարժեք համապատասխանության մեջ բնական թվերի բազմության հետ, այսինքն՝ եթե նրա էլեմենտները կարող են համարակալվել բոլոր բնական թվերի օգնությամբ, և անհաշվելի՝ հակառակ դեպքում։

Լեմմա 1. Ամեն մի անվերջ M բազմություն պարունակում է հաշվելի ենթաբազմություն։

Իրոք, M-ի մեջ վերցնենք a_1 կամավոր էլեմենտը։ Ընտրենք, այնուհետև a_1-ից տարբեր a_2 էլեմենտը։ Ընդհանրապես, դիցուք, M-ի մեջ ընտրված են $a_1, a_2, \dots, a_n$ n տարբեր էլեմենտները։ Քանի որ M բազմությունը, լինելով անվերջ, չի կարող սպառվել այդ էլեմենտներով, ապա կարելի է ցույց տալ նրանցից տարբեր a_{n+1} էլեմենտ։ Շարունակելով այս պրոցեսը, մենք կգտնենք M-ի մեջ անվերջ ենթաբազմություն, որը կազմված է

$$a_1\ a_2, \dots, a_n, \dots$$

էլեմենտներից. այս ենթաբազմության հաշվելիությունն ակներև է։

Լեմմա 2. A հաշվելի բազմության ամեն մի անվերջ B ենթաբազմություն ինքը հաշվելի է։

A բազմությունը, շնորհիվ նրա հաշվելիության, կարելի է գրել $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ տեսքով։ Դիցուք a_{k_1}-ը այդ հաջորդականության էլեմենտներից առաջինն է, որը պատկանում է B-ին, a_{k_2}-ը՝ երկրորդ էլեմենտը, այդ նույն հատկությամբ, և այլն։ Ընդունելով $a_{k_n}=b_n, (n=1, 2, \dots)$, մենք ստանում ենք, որ B ենթաբազմության էլեմենտները կազմում են

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

հաջորդականությունը, այսինքն՝ այդ ենթաբազմությունը հաշվելի է։

Լեմմա 3. Զույգ առ զույգ ընդհանուր էլեմենտներ չունեցող հաշվելի բազմությամբ վերջավոր բազմությունների միավորումը հաշվելի բազմություն է։

Իրոք, դիցուք տված են

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

վերջավոր բազմությունները և դիցուք նրանց միավորումն է B-ն։ Մենք կհամարակալենք, ակներևորեն, B բազմության բոլոր էլեմենտները, եթե կամավոր կերպով համարակալենք վերջավոր A_1 բազմության էլեմենտները, այնուհետև շարունակենք այդ համարակալումը՝ անցնելով A_2 բազմության էլեմենտներին և այլն։

Լեմմա 4. Ընդհանուր էլեմենտներ չունեցող երկու հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի բազմություն է։

Դիցուք տված են A հաշվելի բազմությունը՝

$$a_1, a_2, \dots, a_n \dots$$

էլեմենտներով և B հաշվելի բազմությունը՝

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

էլեմենտներով, և դիցուք այդ բազմությունների միավորումն է C-ն։ Եթե մենք ընդունենք

$$a_n=c_{2n-1}, \quad b_n=c_{2n}, \quad n=1, 2, \dots,$$

ապա C բազմության բոլոր էլեմենտները կներկայացվեն

$$c_1, c_2, \dots, c_{2n-1}, c_{2n}, \dots$$

հաջորդականության տեսքով, որը և ապացուցում է այդ բազմության հաշվելիությունը։

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեման.

Բոլոր հանրահաշվական թվերի բազմությունը հաշվելի է։

Նախապես ապացուցենք ամբողջ գործակիցներով մեկ անհայտից կախված բոլոր բազմանդամների բազմության հաշվելիությունը։ Եթե

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

այդպիսի բազմանդամ է, ընդ որում՝ զրոյից տարբեր, ապա այդ բազմանդամի բարձրություն անվանենք հետևյալ բնական թիվը՝

$$h_f=n+|a_0|+|a_1|+\dots+|a_{n-1}|+|a_n|:$$

Ակներև է, որ տված h բարձրությունն ունեցող ամբողջ բազմանդամներ գոյություն ունեն միայն վերջավոր թվով։ Նշանակենք այդ բազմությունը M_h-ով։ Բացի դրանից, միայն զրոյից կազմված բազմությունը նշանակենք M_0։ Բոլոր ամբողջաթիվ բազմանդամների բազմությունը կլինի հաշվելի բազմությամբ

$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ *վերջավոր բազմությունների միավորումը, այսինքն, ըստ 3-րդ լեմմայի, այն հաշվելի է։*

Ըստ 2 լեմմայի, այստեղից բխում է, որ **բոլոր ամբողջարժեք անվերածելի հասարակ բազմանդամների բազմությունը նույնպես հաշվելի է։** *Դրա հետ մեկտեղ մենք գիտենք, որ ամեն մի հանրահաշվական թիվ հանդիսանում է մեկ և միայն մեկ ամբողջաթիվ անվերածելի հասարակ բազմանդամի արմատ։ Հետևաբար, հավաքելով բոլոր այդպիսի բազմանդամների արմատները, այսինքն՝ վերցնելով հաշվելի բազմությամբ վերջավոր բազմությունների միավորում, մենք կստանանք բոլոր հանրահաշվական թվերի բազմությունը. այսպիսով, շնորհիվ 3-րդ լեմմայի, այդ բազմությունը կլինի հաշվելի։*

Ապացուցենք, վերջապես, հետևյալ թեորեման.

Բոլոր տրանսցենդենտ թվերի բազմությունն անհաշվելի է։

Նախ դիտարկենք բոլոր այն x իրական թվերի F բազմությունը, որոնք ընկած են զրոյի և մեկի միջև՝ $0<x<1$, և ապացուցենք, որ **այդ բազմությունն անհաշվելի** *է։ Հայտնի է, որ նշված x թվերից յուրաքանչյուրը կարելի է գրել կանոնավոր անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով՝*

$$x=0, \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

և որ այդ գրությունը միարժեք է, եթե հաշվի չառնենք այն կոտորակները, որոնց մեջ բոլոր n-երի համար, սկսած որևէ $n=N$-ից, բոլոր $\alpha_n=9$։ Հակադարձաբար, նշված տեսքի ամեն մի կոտորակ հավասար է որևէ x թվի՝ F բազմությունից։ Ենթադրենք այժմ, թե F բազմությունը հաշվելի է, այսինքն՝ որ բոլոր x թվերը կարելի է գրել հաջորդականության տեսքով՝

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \tag{2}$$

Թո՛ղ

$$x_k=0, \alpha_{k1}\,\alpha_{k2} \cdots \alpha_{k_n} \cdots \text{-ը}$$

լինի x_k թվի գրությունը անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով։ Գրենք այժմ

$$0, \beta_1\beta_2 \cdots \beta_n \cdots \tag{3}$$

անվերջ տասնորդական կոտորակը, ընդունելով β_1-ը x_1 կոտորակի առաջին տասնորդական նիշից տարբեր, այսինքն՝ $\beta_1 \neq \alpha_{11}$, β_2-ը՝ կոտորակի երկրորդ տասնորդական նիշից տարբեր, այսինքն՝ $\beta_2 \neq \alpha_{22}$ և, ընդհանրապես, $\beta_n \neq \alpha_{nn}$։ Բացի դրանից, ընդունենք, որ β_n նիշերի մեջ անվերջ շատ են այնպիսիք, որոնք տարբեր են 9-ից։ Պարզ է, որ դոյություն ունի բոլոր այս պահանջներին բավարարող (3) կոտորակը։ Հետևաբար, այն հանդիսանում է թիվ՝ F բազմությունից, բայց, ըստ իր կառուցման, տարբեր է (2) հաջորդականության բոլոր թվերից։ Այս հակասությունն ապացուցում է F բազմության անհաշվելիությունը։

Այստեղից հետևում է **բոլոր կոմպլեքս թվերի բազմության անհաշվելիությունը.** *եթե այն լիներ հաշվելի, ապա, շնորհիվ 2 լեմմայի, այն չէր կարող պարունակել F անհաշվելի բազմությունը։ Բոլոր տրանսցենդենտ թվերի բազմության անհաշվելիությունն այժմ ակներև է, շնորհիվ 4-րդ լեմմայի, քանի որ այդ բազմության միավորումը բոլոր հանրահաշվական թվերի հաշվելի բազմության հետ հանդիսանում է բոլոր կոմպլեքս թվերի բազմությունը, այսինքն՝ անհաշվելի է։*

Մեր ապացուցած երկու թեորեմները ցույց են տալիս, շնորհիվ 1-ին լեմմայի, որ տրանսցենդենտ թվերի բազմությունն իսկապես էլեմենտներով շատ ավելի հարուստ է, այսինքն՝ ավելի «հզոր» է, քան հանրահաշվական թվերի բազմությունը։

ԳԼՈՒԽ ՏԱՍՆԵՐԵՔԵՐՈՐԴ

ՄԱՏՐԻՑԻ ՆՈՐՄԱԼ ՁԵՎԸ

§ 59. λ-մատրիցների համարժեքությունը

Մենք կրկին վերադառնում ենք գծային հանրահաշվին վերաբերող հարցերին։ Ընթերցողն արդեն յոթերորդ գլխի ուսումնասիրման ընթացքում համոզվել է այն բանում, թե ինչպիսի կարևոր դեր է խաղում մատրիցների նմանության գաղափարը։ Այն է՝ n կարգի երկու քառակուսի մատրիցներ նման են այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրանք տալիս են (տարբեր բազիսներում) n-չափանի գծային տարածության միևնույն գծային ձևափոխությունը։ Սակայն, մենք առայժմ չենք կարող պատասխանել այն հարցին՝ նմա՞ն են արդյոք տված երկու կոնկրետ մատրիցները, թե՝ ոչ։ Մյուս կողմից, տված A մատրիցին նման բոլոր մատրիցների մեջ մենք առայժմ չենք կարող գտնել այն մատրիցը, որն այս կամ այն իմաստով ունի պարզագույն տեսքը և նույնիսկ այն պայմանների վերաբերյալ հարցը, որոնց դեպքում A մատրիցը նման է անկյունագծային մատրիցին, § 33-ում դիտարկվեց միայն մեկ մասնավոր դեպքում։ Հենց այս հարցերն են դիտարկվելու ներկա գլխում, ընդ որում՝ միանգամից ցանկացած P հիմնական դաշտի դեպքի համար։

Նախ զբաղվենք n կարգի այնպիսի քառակուսի մատրիցների ուսումնասիրմամբ, որոնց էլեմենտները λ մեկ անհայտի կամավոր ատիճանների բազմանդամներ են՝ P դաշտից վերցրած գործակիցներով։ Այդպիսի մատրիցները կոչվում են **բազմանդամային մատրիցներ, պոլինոմիալ մատրիցներ** *կամ ավելի կարճ՝* **λ-մատրիցներ։** *λ-մատրիցի օրինակ է ծառայում P դաշտի էլեմենտներով կամայական A քառակուսի մատրիցի $A-\lambda E$ բնութագրիչ մատրիցը։ Այդ մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գրված են առաջին աստիճանի բազմանդամներ,* գլխավոր անկյունագծից դուրս՝ զրո աստիճանի բազմանդամներ կամ զրոներ։ P դաշտին պատկանող էլեմենտներով ամեն մի մատրից (այդպիսի մատրիցները կարճության համար կանվանենք *թ վ ա յ ի ն մ ա տ ր ի ց ն ե ր*) նույնպես կլինի λ-մատրիցի մասնավոր դեպք. նրա էլեմենտները հանդիսանում են զրո աստիճանի բազմանդամներ կամ զրոներ։

Դիցուք տված է

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

λ-մատրիցը։ Այդ մատրիցի տարրական ձևափոխություններ անվանենք հետևյալ չորս տիպի ձևափոխությունները.

1) $A(\lambda)$ մատրիցի ցանկացած տողի բազմապատկումը P դաշտի զրոյից տարբեր ցանկացած α թվով,

2) $A(\lambda)$ մատրիցի ցանկացած սյան բազմապատկումը P դաշտի զրոյից տարբեր ցանկացած α թվով,

3) $A(\lambda)$ մատրիցի ցանկացած i-րդ տողին նրա ցանկացած j-րդ տողի $(j\neq i)$ գումարումը, այդ j-րդ տողը նախապես բազմապատկած $P[\lambda]$ օղակին պատկանող ցանկացած $\varphi(\lambda)$ բազմանդամով,

4) $A(\lambda)$ մատրիցի ցանկացած i-րդ սյանը նրա ցանկացած j-րդ սյան $(j\neq i)$ գումարումը, այդ j-րդ սյունը նախապես բազմապատկած $P[\lambda]$ օղակին պատկանող ցանկացած $\varphi(\lambda)$ բազմանդամով։

Հեշտ է նկատել, որ λ-մատրիցի տարրական ձևափոխություններից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի հակադարձ ձևափոխությունը, որը նույնպես տարրական ձևափոխություն է։ Այսպես, 1) ձևափոխության հակադարձը կլինի այն տարրական ձևափոխությունը, որը կայանում է նույն տողը α^{-1} թվով ($\alpha\neq 0$ պայմանի շնորհիվ գոյություն ունեցող) բազմապատկելու մեջ, 3) ձևափոխության հակադարձը կլինի i-րդ տողին j-րդ տողի գումարումը՝ վերջինը նախապես բազմապատկած $-\varphi(\lambda)$-ով։

$A(\lambda)$ մատրիցի մեջ մի քանի տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ կարելի է տեղափոխել ցանկացած երկու տողերը կամ ցանկացած երկու սյուները։

Դիցուք, օրինակ, հարկավոր է տեղափոխել $A(\lambda)$ մատրիցի i-րդ և j-րդ տողերը։ Այդ կարելի է անել չորս տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ սխեման.

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} i+j \\ -i \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

Այստեղ հաջորդաբար կատարվում են հետևյալ ձևափոխությունները.

ա) i-րդ տողին գումարվում է j-րդը, բ) j-րդ տողից հանվում է նոր i-րդը, գ) նոր i-րդ տողին գումարվում է նոր j-րդը, դ) նոր j-րդ տողը բազմապատկվում է (-1)-ով։

Կասենք, որ $A(\lambda)$ և $B(\lambda)$ λ-մատրիցները համարժեք են և կգրենք այդ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$ նշանով, եթե $A(\lambda)$ մատրիցից կարելի է անցնել $B(\lambda)$ մատրիցին վերջավոր թվով տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ։ Ակներև է, որ համարժեքության այդ առնչությունը անդրադարձ (ռեֆլեքսիվ) և տարանցիկ (տրանզիտիվ) է, ինչպես նաև համաչափ (սիմետրիկ)՝ շնորհիվ յուրաքանչյուր տարրական ձևափոխության համար հակադարձ տարրական ձևափոխության գոյության։ Այլ խոսքով, բոլոր n կարգի քառակուսի λ-մատրիցները P դաշտի վրա տրոհվում են համարժեք մատրիցների ոչփոխհատվող դասերի։

Մեր մերձավորագույն նպատակն է հանդիսանում տված $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք բոլոր λ-մատրիցների մեջ հնարավորին չափ պարզ տեսքի մատրիցի որոնումը։ Դրա համար մուծենք հետևյալ հասկացությունը. կանոնական λ-մատրից կոչվում է այն λ-մատրիցը, որն օժտված է հետևյալ երեք հատկություններով.

ա) այդ մատրիցն անկյունագծային է, այսինքն՝ ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

բ) ամեն մի $e_i(\lambda)$ բազմանդամ $(i=2, 3, \ldots, n)$ առանց մնացորդի բաժանվում է $e_{i-1}(\lambda)$ բազմանդամի վրա,

գ) յուրաքանչյուր $e_i(\lambda)$ բազմանդամի $(i=1, 2, \ldots, n)$ ավագ գործակիցը հավասար է մեկի, եթե այդ բազմանդամը զրոյից տարբեր է։

Նկատենք, որ եթե (1) կանոնական λ-մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող $e_i(\lambda)$ բազմանդամների թվում հանդիպում են զրոյի հավասար բազմանդամներ, ապա բ) հատկության շնորհիվ նրանք անպայման գրավում են վերջին տեղերը գլխավոր անկյունագծի վրա։ Մյուս կողմից, եթե $e_i(\lambda)$ բազմանդամների մեջ հանդիպում են զրո աստիճանի բազմանդամներ, ապա ըստ գ) հատկության նրանք բոլորը հավասար են 1-ի և ըստ բ) հատկության՝ (1) մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գրավում են առաջին տեղերը։

Կանոնական λ-մատրիցների թվին են պատկանում, մասնավորապես, որոշ թվային մատրիցներ, այդ թվում՝ միավոր և զրոյական մատրիցները։

Ամեն մի λ-մատրից համարժեք է որևէ կանոնական λ-մատրիցի, այսինքն, այլ կերպ ասած՝ տարրական ձևափոխություններով այն բերվում է կանոնական տեսքի։

Այս թեորեման ապացուցենք ինդուկցիայով՝ ըստ դիտարկվող λ-մատրիցների n կարգի, իրոք, $n=1$ դեպքում կլինի՝

$$A(\lambda)=(a(\lambda))։$$

Եթե $a(\lambda)=0$, ապա մեր մատրիցն արդեն կանոնական է։ Եթե $a(\lambda)\neq 0$, ապա բավական է $a(\lambda)$ բազմանդամը բաժանել նրա ավագ գործակիցի վրա (դա կլինի մատրիցի տարրական ձևափոխություն) և մենք կստանանք կանոնական մատրից։

Դիցուք թեորեման արդեն ապացուցված է $(n-1)$-րդ կարգի λ-մատրիցների համար։ Դիտարկենք n-րդ կարգի կամավոր $A(\lambda)$ λ-մատրիցը։ Եթե այն զրոյական մատրից է, ապա արդեն կանոնական է և ապացուցելու ոչինչ չկա։ Դրա համար կնդունենք, որ $A(\lambda)$ մատրիցի էլեմենտների մեջ կան ոչզրոյականներ։

Տեղափոխելով, եթե հարկ լինի, $A(\lambda)$ մատրիցի տողերը և սյուները, կարելի է ոչզրոյական էլեմենտներից մեկը տանել վերին ձախ անկյունը։ Այսպիսով, $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք λ-մատրիցների թվում կան այնպիսիները, որոնց վերին ձախ անկյուններում գտնվում է ոչզրոյական բազմանդամ։ Դիտարկենք բոլոր այդպիսի մատրիցները։ Այդ մատրիցների վերին ձախ անկյունում գրված բազմանդամները կարող են ունենալ տարբեր աստիճաններ։ Սակայն, բազմանդամի աստիճանը բնական թիվ է, իսկ բնական թվերի ամեն մի ոչդատարկ բազմության մեջ գոյություն ունի ամենափոքր թիվը։ Հետևաբար, $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք և վերին ձախ անկյունում ոչզրոյական էլեմենտ ունեցող բոլոր λ-մատրիցների մեջ կարելի է գտնել այնպիսիներից մեկը, որոնց վերին ձախ անկյունում գտնվող բազմանդամն ունենա հնարավոր ամենափոքր աստիճանը։ Բաժանելով, վերջապես, այդ մատրիցի առաջին տողը նշված բազմանդամի ավագ գործակցի վրա, մենք կստանանք $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք այնպիսի λ-մատրից՝

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \cdots & b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & \cdots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

որ $e_1(\lambda)\neq 0$, այդ բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է 1-ի և տարրական ձևափոխությունների ոչ մի կոմբինացիայով ստացված մատրիցից չի կարելի անցնել այնպիսի

մատրիցի, որի վերին ձախ անկյունում գրված լիներ ավելի փոքր աստիճանի ոչզրոյական բազմանդամ։

Ապացուցենք, որ ստացված մատրիցի առաջին տողի և առաջին սյան բոլոր էլեմենտները առանց մնացորդի բաժանվում են $e_1(\lambda)$-ի վրա։

Դիցուք, օրինակ, $2\leqslant j\leqslant n$ համար

$$b_{1j}(\lambda)=e_1(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

որտեղ $r(\lambda)$-ի աստիճանը փոքր է $e_1(\lambda)$-ի աստիճանից, եթե $r(\lambda)$-ն զրոյից տարբեր է։ Այդ ժամանակ, հանելով մեր մատրիցի j-րդ սյունից նրա առաջին սյունը՝ բազմապատկած $q(\lambda)$-ով, և ապա տեղափոխելով առաջին և j-րդ սյուները, մենք կհանգենք $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք այնպիսի մատրիցի, որի վերին ձախ անկյունում գտնվում է $r(\lambda)$ բազմանդամը, այսինքն՝ ավելի փոքր աստիճանի բազմանդամ, քան $e_1(\lambda)$-ն է, որը հակասում է այդ բազմանդամի ընտրությանը։ Այստեղից հետևում է $r(\lambda)=0$, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ հանելով մեր մատրիցի j-րդ սյունից նրա առաջին սյունը՝ բազմապատկած $q(\lambda)$-ով, մենք $b_{1j}(\lambda)$ էլեմենտը կփոխարինենք զրոյով։ Կատարելով այդպիսի ձևափոխություններ $j=2, 3, \ldots, n$ համար, մենք բոլոր $b_{1j}(\lambda)$ էլեմենտները կփոխարինենք զրոներով։ Համանման ճանապարհով զրոներով փոխարինվում են նաև բոլոր $b_{i1}(\lambda)$ էլեմենտները $(i=2, 3, \ldots, n)$։

Հետևաբար, մենք հանգում ենք $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք այնպիսի մատրիցի, որի վերին ձախ անկյունում գրված է $e_1(\lambda)$ բազմանդամը, իսկ առաջին տողի և առաջին սյան մյուս բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի՝

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \cdots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \cdots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

Ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն, մեր ստացած (2) մատրիցի ստորին աջ անկյունում գրված $(n-1)$-րդ կարգի մատրիցը տարրական ձևափոխություններով բերվում է կանոնական տեսքի՝

$$\begin{pmatrix} c_{22}(\lambda) & \cdots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2}(\lambda) & \cdots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} e_2(\lambda) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

Կատարելով այդ նույն ձևափոխությունները (2) մատրիցի համապատասխան տողերի և սյուների հետ (ակներևորեն, այդ դեպքում այդ *մատրիցի առաջին տողը և առաջին սյունը կմնան առանց փոփոխության), մենք կստանանք, որ*

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & \mathbf{0} \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Ապացուցելու համար, որ (3) մատրիցը կանոնական մատրից է, մնում է ցույց տալ, որ $e_2(\lambda)$*-ն առանց մնացորդի բաժանվում է* $e_1(\lambda)$*-ի վրա։ Դիցուք*

$$e_2(\lambda)=e_1(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

որտեղ $r(\lambda)\neq 0$ *և* $r(\lambda)$*-ի աստիճանը փոքր է* $e_1(\nu)$*-ի աստիճանից։ Սակայն, գումարելով (3) մատրիցի երկրորդ սյանը նրա առաջին սյունը՝ բազմապատկած* $q(\lambda)$*-ով, իսկ այնուհետև երկրորդ տողից հանելով առաջին տողը, մենք կփոխարինենք* $e_2(\lambda)$ *էլեմենտը* $r(\lambda)$ *էլեմենտով։ Այնուհետև, տեղափոխելով առաջին երկու տողերը և առաջին երկու սյուները, մենք* $r(\lambda)$ *բազմանդամը կտեղավորենք մատրիցի վերին ձախ անկյունում, որ, սակայն, հակասում է* $e_1(\lambda)$ *բազմանդամի ընտրությանը։ λ-մատրիցը կանոնական տեսքի բերելու վերաբերյալ թեորեմն ապացուցված է։ Այդ թեորեմն պետք է լրացվի հետևյալ միակության թեորեմայով.*

Ամեն մի λ-մատրից համարժեք է միայն մեկ կանոնական մատրիցի։

Իրոք, դիցուք տված է n-րդ կարգի ցանկացած $A(\lambda)$ *λ-մատրիցը։ Վերցնենք մի k բնական թիվ՝* $1\leqslant k\leqslant n$, *և դիտարկենք* $A(\lambda)$ *մատրիցի k-րդ կարգի բոլոր մինորները։ Հաշվելով այդ մինորները, մենք կստանանք λ-ի նկատմամբ մի վերջավոր սիստեմ. բազմանդամների այդ սիստեմի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ վերցված 1 ավագ գործակցով, նշանակենք* $d_k(\lambda)$*-ով։*

Հետևաբար, մենք կունենանք

$$d_1(\lambda),\quad d_2(\lambda),\ \ldots,\ d_n(\lambda) \tag{4}$$

բազմանդամները՝ միարժեքորեն որոշված հենց $A(\lambda)$ *մատրիցով։ Ընդ որում,* $d_1(\lambda)$*-ն* $A(\lambda)$ *մատրիցի բոլոր էլեմենտների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է՝ վերցրած 1 գործակցով, իսկ* $d_n(\lambda)$*-ն հավասար է* $A(\lambda)$ *մատրիցի դետերմինանտին՝ բաժանած նրա ավագ գործակցի վրա։ Նկատենք նաև, որ եթե* $A(\lambda)$ *մատրիցն ունի r ռանգը, ապա*

$$d_{r+1}(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=0,$$

այն ժամանակ, երբ (4) սիստեմի բոլոր մնացած բազմանդամները զրոյից տարբեր են։

$A(\lambda)$ λ-մատրիցի k-րդ կարգի բոլոր մինորների $d_k(\lambda)$ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ $k=1,\ 2,\ldots,n$, $A(\lambda)$ մատրիցի մեջ տարրական ձևափոխություններ կատարելիս չի փոխվում։

Այս պնդումը գրեթե ակներև է այն դեպքի համար, երբ $A(\lambda)$ *մատրիցի մեջ կատարվում է 1) կամ 2) տիպի տարրական ձևափոխություն։ Այսպես, օրինակ, եթե մատրիցի i-րդ տողը բազմապատկըվում է P դաշտից վերցրած α թվով,* $\alpha\neq 0$, *ապա k-րդ կարգի այն մինորները, որոնցով անցնում է i-րդ տողը, կբազմապատկվեն α-ով, իսկ բոլոր մնացած k-րդ կարգի մինորները կմնան առանց փոփոխության։ Սակայն, մի քանի բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը փնտրելիս՝ այդ բազմանդամներից ցանկացածը կարելի է անարգել բազմապատկել P դաշտից վերցրած զրոյից տարբեր թվերով։*

Դիտարկենք այժմ 3) կամ 4) տիպի տարրական ձևափոխությունները։ Դիցուք, օրինակ, $A(\lambda)$ *մատրից i-րդ տողին գումարվում է նրա j-րդ տողը* $(j\neq i)$*՝ բազմապատկած* $\varphi(\lambda)$ *բազմանդամով. այդ ձևափոխությունից հետո ստացված մատրիցը նշանակենք* $\bar{A}(\lambda)$*-ով, իսկ նրա բոլոր k-րդ կարգի մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ վերցված 1 ավագ գործակցով՝* $\bar{d}_k(\lambda)$*-ով։ Տեսնենք, թե ի՞նչ տեղի կունենա* $A(\lambda)$ *մատրիցի k-րդ կարգի մինորների հետ՝ նշված ձևափոխության դեպքում։*

Պարզ է, որ այն մինորները, որոնցով չի անցնում i-րդ տողը, չեն փոխվի։ Չեն փոխվի նաև այն մինորները, որոնցով անցնում են ինչպես i-րդ այնպես էլ j-րդ տողերը, քանի որ դետերմինանտի մի տողին նրա ուրիշ տողի բազմապատիկի ավելացումից դետերմինանտը չի փոխվի։ Վերջապես, վերցնենք k-րդ կարգի այն մինորներից ցանկացածը, որոնցով անցնում է i-րդ տողը, բայց չի անցնում j-րդը. նշանակենք այն M-ով։ Ակներև է, որ $\bar{A}(\lambda)$ *մատրիցի համապատասխան մինորը կարելի է ներկայացնել* $M+\varphi(\lambda)M'$ *տեսքով, որտեղ* $A(\lambda)$ *մատրիցի* M' *մինորն ստացվում է M մինորից՝* $A(\lambda)$ *մատրիցի i-րդ տողի էլեմենտները նրա j-րդ տողի համապատասխան էլեմենտներով փոխարինելով։ Քանի որ և՛ M-ը, և՛* M'*-ը բաժանվում են* $d_k(\lambda)$*-ի վրա, ապա* $M+\varphi(\lambda)M'$*-ը ևս կբաժանվի* $d_k(\lambda)$*-ի վրա։*

Ասածից հետևում է, որ $\bar{A}(\lambda)$ *մատրիցի k-րդ կարգի բոլոր մինորները առանց մնացորդի բաժանվում են* $d_k(\lambda)$*-ի վրա, ուստի և* $\bar{d}_k(\lambda)$*-ն ևս բաժանվում է* $d_k(\lambda)$*-ի վրա։ Սակայն, քանի որ դիտարկված տարրական ձևափոխության համար գոյություն ունի նույն տիպի հակադարձ տարրական ձևափոխություն, ապա* $d_k(\lambda)$*-ն էլ բաժանվում է* $\bar{d}_k(\lambda)$*-ի վրա։ Իսկ եթե հաշվի առնենք, որ այդ երկու բազմանդամների ավագ գործակիցներն էլ հավասար են 1-ի, ապա կստանանք՝* $\bar{d}_k(\lambda)=d_k(\lambda)$, *ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։*

Այսպիսով, $A(\lambda)$ մատրիցին համարժեք բոլոր λ-մատրիցներին համապատասխանում է (4) բազմանդամների միևնույն հավաքածուն։ *Մասնավորապես, այդ վերաբերում է $A(\lambda)$-ի հետ համարժեք ցանկացած (եթե նրանք մի քանի հատ են) կանոնական մատրիցին։ Դիցուք (3)-ը այդպիսի մատրիցներից մեկն է։*

Օգտվելով (3) մատրիցից, հաշվենք $d_k(\lambda)$ բազմանդամը, $k=1, 2, \ldots, n$։ *Պարզ է, որ այդ մատրիցի վերին ձախ անկյունում գտնվող k-րդ կարգի մինորը հավասար է*

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \cdots e_k(\lambda) \tag{5}$$

արտադրյալին։ Եթե, այնուհետև, մենք (3) մատրիցի մեջ վերցնենք k-րդ կարգի այն մինորը, որը գրված է $i_1, i_2, \ldots, i_k$ համարներով տողերում, որտեղ $i_1<i_2<\ldots<i_k$, և նույն համարներով սյուներում, ապա այդ մինորը հավասար է $e_{i_1}(\lambda)e_{i_2}(\lambda)\cdots e_{i_k}(\lambda)$ արտադրյալին, որը բաժանվում է (5)-ի վրա։ Իրոք, $1\leqslant i$, և դրա համար $e_{i_1}(\lambda)$-ն բաժանվում է $e_1(\lambda)$-ի վրա. $2\leqslant i_2$, և դրա համար $e_{i_2}(\lambda)$-ն բաժանվում է $e_2(\lambda)$-ի վրա և այլն։ Վերջապես, եթե (3) մատրիցի մեջ վերցված է k-րդ կարգի այն մինորը, որով անցնում է այդ մատրիցի l-րդ տողը թեկուզ և մեկ l-ի համար, բայց չի անցնում նրա l-րդ սյունը, ապա այդ մինորը պարունակում է զրոյական տող և, հետևաբար, հավասար է զրոյի։

Ասածից հետևում է, որ (5) արտադրյալն էլ հենց կլինի (3) մատրիցի, հետևաբար և ելակետային $A(\lambda)$ մատրիցի, k-րդ կարգի բոլոր մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝

$$d_k(\lambda)=e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_k(\lambda),\quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Այժմ հեշտ է ցույց տալ, որ $e_k(\lambda)$ բազմանդամները ($k=1, 2, \ldots, n$) միարժեքորեն որոշվում են հենց $A(\lambda)$ մատրիցով։ *Դիցուք այդ մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի։ Այդ ժամանակ, ինչպես մենք գիտենք, $d_r(\lambda)\neq 0$, բայց $d_{r+1}(\lambda)=0$ և, հետևաբար, (6)-ի շնորհիվ,* $e_{r+1}(\lambda)=0$։ *Այստեղից, կանոնական մատրիցի հատկությունների շնորհիվ, ընդհանրապես հետևում է, որ եթե $A(\lambda)$ մատրիցի r ռանգը փոքր է n-ից, ապա*

$$e_{r+1}(\lambda)=e_{r+2}(\lambda)=\cdots=e_n(\lambda)=0. \tag{7}$$

Մյուս կողմից, $k\leqslant r$ համար, շնորհիվ ${}_{k-1}(\lambda)\neq 0$, (6)-ից հետևվում է, որ

$$e_k(\lambda)=\frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}, \tag{8}$$

Դրանով ավարտվում է λ-մատրիցի կանոնական տեսքի միակության ապացույցը։ Միաժամանակ մենք ստացանք $e_k(\lambda)$ բազմանդամները, որոնք կոչվում են $A(\lambda)$ մատրիցի անփոփոխելի (ինվարիանտ) բազմապատկիչներ, *անմիջականորեն գտնելու եղանակ։*

Օրինակ։ Բերել կանոնական տեսքի հետևյալ λ-մատրիցը՝

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}.$$

Հաջորդաբար կատարելով տարրական ձևափոխություններ, կստանանք՝

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & \frac{2}{3}\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^3-\lambda & 0\\ \lambda^2+5\lambda & \lambda\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{pmatrix}.$$

Մյուս կողմից, կարելի էր անմիջականորեն հաշվել $A(\lambda)$ մատրիցի անփոփոխելի բազմապատկիչները։ Այն է, հաշվելով այդ մատրիցի էլեմենտների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, ստանում ենք՝

$$d_1(\lambda)=e_1(\lambda)=\lambda.$$

Հաշվելով $A(\lambda)$ մատրիցի դետերմինանտը և նկատելով, որ նրա ավագ գործակիցը հավասար է 1-ի, ստանում ենք՝

$$d_2(\lambda)=\lambda^4-10\lambda^3-3\lambda^2,$$

ուստի և՝

$$e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda.$$

§ 60. Միամոդուլ (ունիմոդուլյար) λ-մատրիցներ: Թվային մատրիցների նմանության կապը նրանց բնութագրիչ մատրիցների համարժեքության հետ

Նախորդող պարագրաֆի արդյունքներից բխում է λ-մատրիցների համարժեքության մի հայտանիշ, որին կարելի է տալ հետևյալ երկու համարյա նույնական ձևակերպումները.

Երկու λ-մատրիցներ համարժեք են այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրանք բերվում են միևնույն կանոնական տեսքին:

Երկու λ-մատրիցներ համարժեք են այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրանք օժտված են միևնույն անփոփոխելի բազմապատկիչներով:

Արտածենք մի հայտանիշ ևս, որն ունի արդեն այլ բնույթ:

Մենք գիտենք որ կանոնական λ-մատրիցների թվին է պատկանում E միավոր մատրիցը։ U(λ) λ-մատրիցը անվանենք միամոդուլ *(ունի մոդուլյար) մատրից, եթե նրա կանոնավոր տեսքի մատրիցը E միավոր մատրիցն է, այսինքն՝ եթե նրա բոլոր անփոփոխելի բազմապատկիչները հավասար են մեկի։*

U(λ) λ-մատրիցը միամոդուլ է այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրա դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, բայց λ-ից կախված չէ, այսինքն՝ զրոյից տարբեր թիվ է P հիմնական դաշտից։

Իրոք, եթե U(λ)∼E, ապա այդ երկու մատրիցներին համապատասխանում է միևնույն $d_n(\lambda)$ բազմանդամը։ Սակայն, միավոր մատրիցի համար $d_n(\lambda)=1$։ Այստեղից երևում է, որ U(λ) մատրիցի դետերմինանտը, որը $d_n(\lambda)$-ից տարբերվում է միայն զրոյից տարբեր թվային բազմապատկիչով, կլինի զրոյից տարբեր թիվ՝ P դաշտից։ Հակադարձաբար, եթե U(λ) մատրիցի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է և կախված չէ λ-ից, ապա այդ մատրիցի համար $d_n(\lambda)$ բազմանդամը հավասար կլինի 1-ի և հետևաբար, ըստ նախորդ պարագրաֆի (6)-ի, U(λ) մատրիցի բոլոր $e_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ անփոփոխելի բազմապատկիչները հավասար են մեկի։

Այստեղից հետևում է, որ ամեն մի չվերասերված թվային մատրից միամոդուլ λ-մատրից է: *Սակայն, միամոդուլ λ-մատրիցը կարող է ունենալ շատ բարդ տեսք։ Այսպես,*

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3+5 \\ \lambda^2-\lambda-4 & \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix}$$

λ-մատրիցը միամոդուլ է, քանի որ նրա դետերմինանտը հավասար է 20-ի, այսինքն՝ զրոյից տարբեր է և կախված չէ λ-ից։

Վերևում ապացուցված թեորեմայից հետևում է, որ միամոդուլ λ-մատրիցների արտադրյալն ինքը միամոդուլ մատրից է. *բավական է հիշել, որ մատրիցների բազմապատկման դեպքում նրանց դետերմինանտները բազմապատկվում են։*

U(λ) λ-մատրիցը միամոդուլ մատրից է այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրա համար գոյություն ունի հակադարձ մատրից, որը նույնպես հանդիսանում է λ-մատրից:

Իրոք, եթե տված է չվերասերվող λ-մատրից, ապա, սովորական եղանակով որոնելով հակադարձ մատրիցը, մենք պետք է տված մատրիցի էլեմենտների հանրահաշվական լրացումները բաժանենք այդ

մատրիցի դետերմինանտի վրա, այսինքն՝ λ-ի նկատմամբ մի որոշ բազմանդամի վրա։ Ուստի ընդհանուր դեպքում հակադարձ մատրիցի էլեմենտները կլինեն λ-ի նկատմամբ ռացիոնալ կոտորակներ, այլ ոչ թե բազմանդամներ, այսինքն՝ այդ մ ա տ ր ի ց ը չի լ ի ն ի λ-մ ա տ ր ի ց։ Իսկ եթե տված է միամոդուլ մատրից, ապա հանրահաշվական լրացումները հարկ է լինում բաժանել զրոյից տարբեր թվի վրա՝ P դաշտից, այսինքն՝ հակադարձ մատրիցի էլեմենտները կլինեն λ-ի նկատմամբ բազմանդամներ և, հետևաբար, հակադարձ մատրիցն ինքը ևս կլինի λ-մատրից։ Հակադարձաբար, եթե U(λ) λ-մատրիցը ունի $U^{-1}(\lambda)$ հակադարձ λ-մատրից, ապա այդ երկու մատրիցների դետերմինանտները հանդիսանում են բազմանդամներ λ-ի նկատմամբ, նրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի և, հետևաբար, երկու դետերմինանտներն էլ պետք է լինեն զրո աստիճանի բազմանդամներ։

Վերջին դիտողությունից բխում է հենց նոր ապացուցված թեորեմայի այսպիսի լրացում.

Միամոդուլ λ-մատրիցի հակադարձ λ-մատրիցն ինքը միամոդուլ մատրից է:

Միամոդուլ մատրիցի գաղափարն օգտագործվում է λ-մ ա տ ր ի ց ն ե ր ի հ ա մ ա ր ժ ե ք ո ւ թ յ ա ն հետևյալ նոր հ ա յ տ ա ն ի շ ի ձևակերպման մեջ.

n-րդ կարգի A(λ) և B(λ) երկու λ-մատրիցներ համարժեք են այն և միայն այն ժամանակ, եթե գոյություն ունեն նույն n-րդ կարգի այնպիսի U(λ) և V(λ) միամոդուլ λ-մատրիցներ, որ

$$B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)\text{:} \tag{1}$$

Նախ մուծենք հետևյալ գաղափարը, որն օգտագործվում է այդ հայտանիշի ապացուցման ժամանակ։ Տարրական մատրից *անվանենք հետևյալ թվային (և, հետևաբար՝ λ-) մատրիցը՝*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} (i), \tag{2}$$

որը տարբերվում է միավոր մատրիցից միայն նրանով, որ գլխավոր անկյունագծի որևէ i-րդ տեղում $(1\leqslant i\leqslant n)$ գրված է զ ր ո յ ի ց տ ա ր-

բեր մի կամավոր α թիվ P դաշտից: Մյուս կողմից, տարրական մատ-րից *անվանենք նաև հետևյալ մատրիցը.*

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots\ \varphi(\lambda)\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \ddots\ \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & \vdots & & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} , \qquad (3)$$

$$\begin{array}{c} (j) \end{array}$$

որը տարբերվում է միավոր մատրիցից միայն նրանով, որ i*-րդ տողի և* j*-րդ սյան հատման կետում* $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$ *ընդ որում՝* $i \neq j)$ *գրված է մի* $\varphi(\lambda)$ *կամավոր բազմանդամ* $P[\lambda]$ *օղակից:*

Ամեն մի տարրական մատրից միամոդուլ մատրից է: *Իրոք, (2) մատրիցի դետերմինանտը հավասար է* α*-ի, բայց, ըստ պայմանի,* $\alpha \neq 0$*, իսկ (3) մատրիցի դետերմինանտը հավասար է 1-ի:*

$A(\lambda)$ λ-մատրիցի մեջ ցանկացած տարրական ձևափոխության կատարումը համասարազոր է այդ մատրիցի բազմապատկմանը ձախից կամ աջից մի որոշ տարրական մատրիցով:

Իրոք, ընթերցողն առանց դժվարության կստուգի հետևյալ չորս պնդումների իրավացիությունը. 1) $A(\lambda)$ *մատրիցի ձախից բազմապատկումը (2) մատրիցով համասարազոր է* $A(\lambda)$ *մատրիցի* i*-րդ տողի բազմապատկմանը* α *թվով, 2)* $A(\lambda)$ *մատրիցի աջից բազմապատկումը (2) մատրիցով համասարազոր է* $A(\lambda)$ *մատրիցի* i*-րդ սյան բազմապատկմանը* α *թվով, 3)* $A(\lambda)$ *մատրիցի ձախից բազմապատկումը (3) մատրիցով համասարազոր է նրան, որ* $A(\lambda)$ *մատրիցի* i*-րդ տողին գումարվի նրա* j*-րդ տողը՝ բազմապատկած* $\varphi(\lambda)$*-ով, 4)* $A(\lambda)$ *մատրիցի աջից բազմապատկումն (3) մատրիցով համասարազոր է նրան, որ* $A(\lambda)$ *մատրիցի* j*-րդ սյանը գումարվի նրա* i*-րդ սյունը՝ բազմապատկած* $\varphi(\lambda)$*-ով:*

Այժմ անցնենք մատրիցների համարժեքության մեր հայտանիշի ապացուցմանը: Եթե $A(\lambda) \sim B(\lambda)$*, ապա* $A(\lambda)$*-ից կարելի է անցնել* $B(\lambda)$*-ին՝ վերջավոր թվով տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ: Այդ ձևափոխություններից յուրաքանչյուրը փոխարինելով բազմապատկումով ձախից կամ աջից տարրական մատրիցով, մենք կհանգենք հետևյալ հավասարությանը.*

$$B(\lambda) = U_1(\lambda) \cdot \cdot \cdot U_k(\lambda) A(\lambda) V_1(\lambda), \cdot \cdot \cdot V_l(\lambda), \qquad (4)$$

որտեղ բոլոր $U_1(\lambda), \ldots, U_k(\lambda),\ V_1(\lambda), \ldots, V_l(\lambda)$ *մատրիցները տարրական և, հետևաբար, միամոդուլ մատրիցներ են: Հետևաբար, միամոդուլ կլինեն նաև*

$$U(\lambda) = U_1(\lambda) \cdot \cdot \cdot U_k(\lambda), \quad V(\lambda) = V_1(\lambda) \cdot \cdot \cdot V_l(\lambda) \qquad (5)$$

մատրիցները, որոնք միամոդուլ մատրիցների արտադրյալներ են, իսկ (4) հավասարությունը կարտագրվի (1) տեսքով: Նկատենք, որ եթե, օրինակ, $k=0$*, այսինքն՝ տարրական ձևափոխությունները կատարվել են միայն սյուների հետ, ապա ուղղակի ընդունում ենք՝*

$$U(\lambda) = E.$$

Ապացույցի՝ մեր կողմից բերված մասը թույլատրում է միաժամանակ անել հետևյալ պնդումը.

λ-մատրիցը միամոդուլ է այն և միայն այն ժամանակ, եթե այն ներկայացնելի է տարրական մատրիցների արտադրյալի տեսքով:

Իրոք, մենք արդեն օգտվեցինք նրանից, որ տարրական մատրիցների արտադրյալը միամոդուլ մատրից է: Հակադարձաբար, եթե տված է կամավոր $W(\lambda)$ *միամոդուլ մատրիցը, ապա այն համարժեք է* E *միավոր մատրիցին: Վերևում բերված ապացույցը* $A(\lambda)$ *և* $B(\lambda)$ *մատրիցների փոխարեն կիրառելով* E *և* $W(\lambda)$ *մատրիցների նկատմամբ, մենք (4)-ից կստանանք*

$$W(\lambda) = U_1(\lambda) \cdot \cdot \cdot U_k(\lambda) V_1(\lambda) \cdot \cdot \cdot V_l(\lambda)$$

հավասարությունը, այսինքն՝ $W(\lambda)$ *մատրիցը ներկայացված եղավ տարրական մատրիցների արտադրյալի տեսքով:*

Այժմ հեշտ է ապացուցել մեր հայտանիշի նաև հակադարձ պնդումը: Դիցուք $A(\lambda)$ *և* $B(\lambda)$ *մատրիցների համար գոյություն ունեն այնպիսի* $U(\lambda)$ *և* $V(\lambda)$ *միամոդուլ մատրիցներ, որ տեղի ունի (1) հավասարությունը: Ըստ ապացուցվածի,* $U(\lambda)$ *և* $V(\lambda)$ *մատրիցները կարելի է ներկայացնել տարրական մատրիցների արտադրյալների տեսքով. թո՛ղ դրանք լինեն (5) ներկայացումները: (1) հավասարությունն այժմ կարտագրվի (4) տեսքով և, յուրաքանչյուր բազմապատկում տարրական մատրիցով փոխարինելով համապատասխան տարրական ձևափոխությամբ, մենք կստանանք, վերջապես, որ* $A(\lambda) \sim B(\lambda)$*:*

Մատրիցային բազմանդամներ: *λ-մատրիցի գաղափարին կարելի է նայել բոլորովին այլ կողմից:* n-րդ կարգի մատրիցային λ-բազմանդամ P դաշտի վրա *անվանենք այն բազմանդամը λ-ի նկատմամբ, որի համար գործակիցներ են ծառայում P դաշտի էլեմենտներից կազմված միևնույն* n*-րդ կարգի քառակուսի մատրիցները. Նրա ընդհանուր տեսքը կլինի՝*

$$A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \cdot \cdot \cdot + A_{k-1}\lambda + A_k. \qquad (6)$$

§ 15-ի համաձայն, A_i *մատրիցի բազմապատկումը* λ^{k-1}*-ով* $(i=0,$

1, . . . , k) հասկանալով որպես A_i մատրիցի բոլոր էլեմենտների բազմապատկում λ^{k-i}-ով, և ապա կատարելով մատրիցների գումարում, համաձայն նույն § 15-ի, մենք կստանանք, որ n-րդ կարգի ամեն մի մատրիցային λ-բազմանդամ կարելի է գրել n-րդ կարգի λ-մատրիցի տեսքով։
Այսպես,

$$\begin{pmatrix}4&0\\-1&1\end{pmatrix}\lambda^3+\begin{pmatrix}0&-3\\0&1\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\lambda^3+\lambda & -3\lambda^2+2\lambda+1\\ -\lambda_3 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda\end{pmatrix}.$$

Հակադարձաբար, n-րդ կարգի ամեն մի λ-մատրից կարող է գրվել n-րդ կարգի մատրիցային λ—բազմանդամի տեսքով։ Այսպես,

$$\begin{pmatrix}3\lambda^2-5 & \lambda+1\\ \lambda^4+2\lambda & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\lambda^4+\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-5&1\\0&-3\end{pmatrix}.$$

λ-մատրիցների և մատրիցային λ-բազմանդամների միջև համապատասխանությունը փոխմիարժեք և իզոմորֆ (§ 46-ի իմաստով) համապատասխանություն է։ Իրոք, (6) տեսքի λ-բազմանդամների հավասարությունը որպես մատրիցների հավասարություն հավասարազոր է λ-ի միևնույն աստիճանների մատրիցային գործակիցների հավասարությանը, իսկ մատրիցի բազմապատկումը λ-ով՝ հավասարազոր է նրա բազմապատկմանը գլխավոր անկյունագծի վրա λ ունեցող սկալյար մատրիցով։

Դիցուք տված է A(λ) λ-մատրիցը, ընդ որում՝

$$A(\lambda)=A_0\lambda^k+A_1\lambda^{k-1}+\cdots+A_{k-1}\lambda+A_k,$$

որտեղ A_0 մատրիցը զրոյական չէ։ K թիվն անվանենք A(λ) λ-մատրիցի աստիճան. ակներև է, դա կլինի A(λ) մատրիցի էլեմենտների ամենաբարձր աստիճանը (λ-ի նկատմամբ)։

λ-մատրիցի վրա որպես մատրիցային բազմանդամների վրա նայելը թույլատրում է λ-մատրիցների համար զարգացնել բաժանականության տեսությունը՝ համանման թվային բազմանդամների համար բաժանականության տեսությանը, բայց որը, հասկանալի է, բարդանում է մատրիցների բազմապատկման անտեղափոխելիությամբ և զրոյի բաժանարարների առկայությամբ։ Մենք սահմանափակվենք միայն մնացորդով բաժանման ալգորիթմի հարցով։

Դիցուք P դաշտի վրա տված են n-րդ կարգի

$$A(\lambda)=A_0\lambda^k+A_1\lambda^{k-1}+\cdots+A_{k-1}\lambda+A_k,$$

$$B(\lambda)=B_0\lambda^l+B_1\lambda^{l-1}+\cdots+B_{l-1}\lambda+B_l$$

λ-մատրիցները, ընդ որում ենթադրենք, որ B_0 մատրիցը չվերասերվող է, այսինքն՝ գոյություն ունի B_0^{-1} մատրիցը։ Այդ ժամանակ P դաշտի վրա կարելի է գտնել նույն n-րդ կարգի այնպիսի $Q_1(\lambda)$ և $R_1(\lambda)$ λ-մատրիցներ, որ

$$A(\lambda)=B(\lambda)Q_1(\lambda)+R_1(\lambda), \qquad (7)$$

ընդ որում $R_1(\lambda)$-ի աստիճանը փոքր է B(λ)-ի աստիճանից կամ թե $R_1(\lambda)=0$: Մյուս կողմից, P դաշտի վրա կարելի է գտնել n-րդ կարգի այնպիսի $Q_2(\lambda)$ և $R_2(\lambda)$ λ-մատրիցներ, որ

$$A(\lambda)=Q_2(\lambda)B(\lambda)+R_2(\lambda), \qquad (8)$$

ընդ որում $R_2(\lambda)$-ի աստիճանը փոքր է B(λ)-ի աստիճանից կամ թե $R_2(\lambda)=0$։ $Q_1(\lambda)$ և $R_1(\lambda)$, ինչպես նաև $Q_2(\lambda)$ և $R_2(\lambda)$ մատրիցները, որոնք բավարարում են այս պայմաններին, որոշվում են միարժեքորեն։

Այս թեորեմայի ապացույցն ընթանում է այնպես, ինչպես համապատասխան թեորեմայի ապացույցը թվային բազմանդամների համար (տե՛ս § 20)։ Դիցուք, օրինակ, (7) պայմանին բավարարում են նաև $\overline{Q}_1(\lambda)$ և $\overline{R}_1(\lambda)$ մատրիցները, ընդ որում $\overline{R}_1(\lambda)$-ի աստիճանը փոքր է B(λ)-ի աստիճանից։ Այդ ժամանակ՝

$$B(\lambda)[Q_1(\lambda)-\overline{Q}_1(\lambda)]=\overline{R}_1(\lambda)-R_1(\lambda).$$

Աջ մասի աստիճանը փոքր է l-ից, իսկ ձախ մասի աստիճանը (եթե քառակուսի փակագիծը տարբեր է զրոյից) մեծ է կամ հավասար l-ի, քանի որ B_0 մատրիցը չվերասերված է։ Այստեղից հետևում է $Q_1(\lambda)$ և $R_1(\lambda)$ մատրիցների միակությունը։ Այդ մատրիցների գոյությունն ապացուցելու համար նկատենք, որ $k_1 \geqslant l$ դեպքում

$$A(\lambda)-B(\lambda)\cdot B_0^{-1}A_0\lambda^{k-l}$$

տարբերության աստիճանը խստորեն փոքր կլինի k-ից, ուստի $B_0^{-1}A_0\lambda^{k-l}$-ը կլինի մատրիցային $Q_1(\lambda)$ λ-բազմանդամի ավագ անդամը։ Այնուհետև շարունակվում է այնպես, ինչպես § 20-ում։ Մյուս կողմից,

$$A(\lambda)-A_0B_0^{-1}\lambda^{k-l}\cdot B(\lambda)$$

տարբերության աստիճանը նույնպես խստորեն փոքր է k-ից, այսինքն՝ $A_0B_0^{-1}\lambda^{k-l}$-ը կլինի մատրիցային $Q_2(\lambda)$ λ-բազմանդամի ավագ անդամը։ Մենք տեսնում ենք, որ $Q_1(\lambda)$ և $Q_2(\lambda)$ (ինչպես նաև՝ $R_1(\lambda)$ և $R_2(\lambda)$) λ-մատրիցները, որոնք բավարարում են թեորեմայի պայմաններին, ընդհանուր դեպքում իսկապես տարբեր կլինեն։

Մատրիցների նմանության վերաբերյալ հիմնական թեորեմաներ։ Ինչպես արդեն նշվել է, մենք չունենք առայժմ եղանակ այն հարցի *լուծման համար, թե նմ՞ան են արդյոք տված A և B թվային մատրից-ները (այսինքն՝ P հիմնական դաշտի էլեմենտներով կազմած մատրից-ները)։ Մյուս կողմից, նրանց $A-\lambda E$ և $B-E\lambda$ բնութագրիչ մատրիցները հանդիսանում են λ-մատրիցներ և այդ մատրիցների համարժեքության վերաբերյալ հարցը լուծվում է լիովին արդյունավետորեն։ Ուստի հեշտ է հասկանալ, թե ինչքան մեծ է հետևյալ թեորեմայի նշանակությունը.*

P դաշտի էլեմենտներով կազմած A և B մատրիցները նման են այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրանց $A-\lambda E$ և $B-\lambda E$ բնութագրիչ մատրիցները համարժեք են։

Իսկապես, դիցուք A և B մատրիցները նման են, այսինքն՝ P դաշտի վրա գոյություն ունի այնպիսի C չվերասերված մատրից, որ

$$B=C^{-1}AC.$$

Այդ ժամանակ՝

$$C^{-1}(A-\lambda E)C=C^{-1}AC-\lambda(C^{-1}EC)=B-\lambda E.$$

Սակայն C^{-1} և C չվերասերված թվային մատրիցները հանդիսանում են միամոդուլ λ-մատրիցներ։ Մենք տեսնում ենք, որ $B-\lambda E$ մատրիցը ստացվել է $A-\lambda E$ մատրիցը ձախից և աջից միամոդուլ մատրիցներով բազմապատկելով, այսինքն՝ $A-\lambda E\sim B-\lambda E$։

Հակադարձ պնդման ապացույցը ավելի բարդ է։ Դիցուք

$$A-\lambda E\sim B-\lambda E.$$

Այդ ժամանակ գոյություն ունեն այնպիսի $U(\lambda)$ և $V(\lambda)$ միամոդուլ մատրիցներ, որ

$$U(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)=B-\lambda E. \tag{9}$$

Հաշվի առնելով, որ միամոդուլ մատրիցների համար գոյություն ունեն հակադարձ մատրիցներ և դրանք λ-մատրիցներ են, (9)-ից կստանանք հետևյալ հավասարությունները.

$$\left.\begin{aligned} U(\lambda)(A-\lambda E)&=(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda),\\ (A-\lambda E)V(\lambda)&=U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E),\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

որոնք կօգտագործվեն ստորև։

Քանի որ $B-\lambda E$ λ-մատրիցը λ-ի նկատմամբ ունի 1 աստիճան, ընդ որում համապատասխան մատրիցային բազմանդամի ավագ գործակից հանդիսանում է $-E$ չվերասերված մատրիցը, ապա $U(\lambda)$ և $B-\lambda E$ մատրիցների նկատմամբ կարելի է կիրառել մնացորդով բաժանման ալգորիթմը։ Գոյություն ունեն $Q_1(\lambda)$ և R_1 այնպիսի մատրիցներ (վերջինը, եթե այն զրոյից տարբեր է, պետք է λ-ի նկատմամբ ունենա 0 աստիճան, այսինքն՝ λ-ից կախված չէ), որ

$$U(\lambda)=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1. \tag{11}$$

Ճիշտ այդպես էլ՝

$$V(\lambda)=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2. \tag{12}$$

Օգտագործելով (11)-ը և (12)-ը՝ (9)-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} R_1(A-\lambda E)R_2&=(B-\lambda E)-U(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-\\ &-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\end{aligned}$$

կամ, (10)-ի շնորհիվ,

$$\begin{aligned} R_1(A-\lambda E)R_2&=(B-\lambda E)-(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-\\ &-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E)+\\ &+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)=(B-\lambda E)\times\\ &\times\{E-[V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)](B-\lambda E)\}.\end{aligned}$$

Աջ մասում գտնվող քառակուսի փակագիծը իրականում հավասար է զրոյի. հակառակ դեպքում այն, հանդիսանալով λ-մատրից, քանի որ և՛ $V^{-1}(\lambda)$-ն, և՛ $U^{-1}(\lambda)$-ն λ-մատրիցներ են, կունենար առնվազն 0 աստիճան, իսկ այդ ժամանակ ձևավոր փակագծի աստիճանը կլիներ 1-ից ոչ փոքր և, հետևաբար, ամբողջ աջ մասի աստիճանը կլիներ 2-ից ոչ փոքր։ Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ ձախ մասում գտնվում է 1 աստիճանի λ-մատրից։

Այսպիսով,

$$R_1(A-\lambda E)R_2=B-\lambda E,$$

որտեղից, հավասարեցնելով λ-ի միևնույն աստիճանների մատրիցային գործակիցները, ստանում ենք՝

$$R_1AR_2=B, \tag{13}$$

$$R_1R_2=E. \tag{14}$$

(14) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ R_2 թվային մատրիցը ոչ միայն զրոյից տարբեր է, այլ նույնիսկ չվերասերվող է, ընդ որում՝

$$R_2^{-1}=R_1,$$

իսկ այդ դեպքում (13) հավասարությունն ընդունում է

$$R_2^{-1}AR_2=B$$

տեսքը, որը և ապացուցում է A և B մատրիցների նմանությունը։

Միաժամանակ մենք սովորեցինք գտնել այն R_2 չվերասերված մատրիցը, որը A մատրիցը փոխակերպում է B մատրիցին։ Այն է, եթե $A-\lambda E$ և $B-\lambda E$ մատրիցները համարժեք են, ապա առաջինը վերջավոր թվով տարրական ձևափոխություններով բերվում է երկրորդին։

Այդ ձևափոխություններից վերցնենք նրանք, որոնք վերաբերում են սյուներին և համապատասխան տարրական մատրիցների արտադրյալը՝ վերցրած նույն կարգով, նշանակենք $V(\lambda)$-ով։ Բաժանենք, այնուհետև, $V(\lambda)$-ն $(B-\lambda E)$-ի վրա, ընդ որում այնպես, որպեսզի քանորդը գրվի բաժանարարից ձախ (տե՛ս (8))։ Այդ բաժանումից առաջացած մնացորդն էլ հենց կլինի R_2 մատրիցը։

Նշված բաժանումը կարելի է իրականում չկատարել, այլ օգտվել հետևյալ լեմմայից, որը կիրառություն կգտնի նաև § 62-ում.

Լ ե մ մ ա: Դ ի ց ո ւ ք՝

$$V(\lambda)=V_0\lambda^s+V_1\lambda^{s-1}+\cdots+V_{s-1}\lambda+V_s, \quad V_0\neq 0, \tag{15}$$

Եթե

$$\begin{aligned} V(\lambda)&=(\lambda E-B)Q_1(\lambda)+R_1, \\ V(\lambda)&=Q_2(\lambda)(\lambda E-B)+R_2, \end{aligned} \tag{16}$$

ապա՝

$$\begin{aligned} R_1&=B^sV_0+B^{s-1}V_1+\cdots+BV_{s-1}+V_s, \\ R_2&=V_0B^s+V_1B^{s-1}+\cdots+V_{s-1}B+V_s, \end{aligned} \tag{17}$$

Բավական է ապացուցել լեմմայի երկու պնդումներից թեկուզ և առաջինը (երկրորդն ապացուցվում է համանման ձևով)։ Ապացույցը կայանում է (16) հավասարության իրավացիության անմիջական ստուգման մեջ, եթե $V(\lambda)$ բազմանդամը փոխարինվի նրա (15) գրությամբ, R_1-ի փոխարեն տեղադրվի (17)-ը, իսկ որպես $Q(\lambda)$ վերցվի հետևյալ բազմանդամը՝

$$Q_1(\lambda)=V_0\lambda^{s-1}+(BV_0+V_1)\lambda^{s-2}+(B^2V_0+BV_1+V_2)\lambda^{s-3}-\cdots$$
$$\cdots+(B^{s-1}V_0+B^{s-2}V_1+\cdots+V_{s-1}),$$

Այդ ստուգումը թողնվում է ընթերցողին։

Օրինակ։ Տված են

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-10 & -4\\ 26 & 11\end{pmatrix}$$

մատրիցները։ Նրանց բնութագրիչ մատրիցները համարժեք են, քանի որ բերվում են միևնույն կանոնական տեսքին՝

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda-6\end{pmatrix},$$

ուստի A և B մատրիցները նման են։

Գտնելու համար R_2 մատրիցը, որը փոխակերպում է A-ն B-ին, գտնենք տարրական ձևափոխությունների մի որևէ շղթա, որը բերում է $(A-\lambda E)$-ն $(B-\gamma E)$-ին։ Այսպես,

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ -16-8\lambda & 11-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}8+4\lambda & -4\\ -16-8\lambda & 11-\gamma\end{pmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{pmatrix}40+4\lambda & -4\\ -104 & 11-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-10-\lambda & -4\\ 26 & 11-\lambda\end{pmatrix}=B-\lambda E,$$

Սյուներին են վերաբերում վերջին երկու ձևափոխությունները. առաջին սյանը գումարվում է երկրորդը՝ բազմապատկած —8-ով, և ապա առաջին սյունը բազ-

մապատկվում է $\left(-\frac{1}{4}\right)$-ով։ Համապատասխան տարրական մատրիցների արտադրյալը կլինի՝

$$V(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & -0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցը կախված չէ λ-ից և, հետևաբար, այն կլինի որոնելի R_2 մատրիցը։

Իհարկե, A-ն B-ին փոխակերպող մատրիցը որոշվում է ամենևին էլ ոչ միարժեքորեն։ Օրինակ, այդպիսին կլինի նաև

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

մատրիցը։

§ 61. Ժորդանյան նորմալ ձև

Այժմ դիտարկելու ենք P դաշտի էլեմենտներից կազմած n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցներ։ Կառանձնացնենք այդպիսի մատրիցների մի հատուկ տիպ, այսպես կոչված ժորդանյան մատրիցը և ցույց կտանք, որ մատրիցների շատ լայն դասի համար այդ մատրիցները նորմալ ձև են ծառայում։ Այն է՝ այն մատրիցները, որոնց բոլոր բնութագրիչ արմատները գտնվում են P հիմնական դաշտում (և միայն այդպիսի մատրիցները) նման են որոշ ժորդանյան մատրիցների, այսինքն, ինչպես ասում են, նրանք բերվում են ժորդանյան նորմալ ձևի։ Եթե P դաշտի փոխարեն վերցվի կոմպլեքս թվերի դաշտը, այստեղից կհետևի, որ կոմպլեքս էլեմենտներով ամեն մի մատրից կոմպլեքս թվերի դաշտում բերվում է ժորդանյան նորմալ ձևի։

Մուծենք անհրաժեշտ սահմանումներ։ λ_0 թվին վերաբերող k-րդ կարգի ժորդանյան վանդակ կոչվում է k-րդ կարգի այն մատրիցը $(1\leqslant k\leqslant n)$, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \mathbf{0}\\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ \mathbf{0} & & & & \lambda_0\end{pmatrix}, \tag{1}$$

այլ կերպ ասած, նրա գլխավոր անկյունագծի վրա գրված է միևնույն λ_0 թիվը P դաշտից, գլխավոր անկյունագծին վերևից ընդհուպ մոտ զուգահեռը անընդմեջ զբաղված է 1 թվով. մատրիցի բոլոր մնացած էլեմենտները հավասար են զրոյի։ Այսպես,

$$(\lambda_0), \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

մատրիցները կլինեն համապատասխանաբար առաջին, երկրորդ և երրորդ կարգի ժորդանյան վանդակներ։

n-րդ կարգի ժորդանյան մատրից կոչվում է հետևյալ տեսքն ունեցող n-րդ կարգի մատրիցը՝

$$j = \begin{pmatrix} \boxed{j_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{j_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{j_s} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

այստեղ գլխավոր անկյունագծի երկայնքով գնում են որոշ (ոչ անպայման տարբեր) կարգի $j_1, j_2, \dots, j_s$ ժորդանյան վանդակները, որոնք վերաբերում են որոշ (դարձյալ ոչ անպայման տարբեր) թվերի՝ P դաշտից. այդ վանդակներից դուրս բոլոր տեղերը զբաղեցված են զրոներով։ Ընդ որում՝ $s \geqslant 1$, այսինքն՝ n-րդ կարգի ժորդանյան մեկ վանդակը պատկանում է այդ կարգի ժորդանյան մատրիցների թվին և, հասկանալի է, $s \leqslant n$։

Նկատենք (չնայած այդ հետագայում չի օգտագործվի), որ ժորդանյան մատրիցների կառուցվածքը կարելի էր նկարագրել՝ առանց դիմելու ժորդանյան վանդակի գաղափարին։ Այսպես, ակներև է, որ j մատրիցը կլինի ժորդանյան մատրից այն և միայն այն ժամանակ, եթե նա ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

որտեղ λ_i-երը ($i=1, 2, \dots, n$) կամավոր թվեր են P դաշտից, իսկ յուրաքանչյուր ε_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) հավասար է մեկի կամ զրոյի, ընդ որում, եթե $\varepsilon_j=1$, ապա $\lambda_j=\lambda_{j+1}$։

Անկյունագծային մատրիցները ժորդանյան մատրիցների մասնավոր դեպքն են. դրանք ճշտորեն կլինեն այն ժորդանյան մատրիցները, որոնց բոլոր ժորդանյան վանդակներն ունեն 1 կարգը։

Մեր մերձավորագույն նպատակն է՝ որոնել կանոնական տեսք n-րդ կարգի կամայական ժորդանյան j մատրիցի $j-\lambda E$ բնութագրիչ մատրիցի համար։ Նախապես գտնենք կանոնական տեսք k-րդ կարգի մեկ ժորդանյան (1) վանդակի

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_0-\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \tag{3}$$

բնութագրիչ մատրիցի համար։ Հաշվելով այդ մատրիցի դետերմինանտը և հիշելով, որ $d_k(\lambda)$ բազմանդամի ավագ գործակիցը պետք է հավասարվի 1-ի, կստանանք, որ՝

$$d_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k։$$

Մյուս կողմից, (3) մատրիցի $(k-1)$-րդ կարգի մինորների թվում կա միավորի հավասար մինոր, հենց այն, որն ստացվում է այդ մատրիցի առաջին սյունը և վերջին տողը ջնջելուց հետո։ Դրա համար էլ՝

$$d_{k-1}(\lambda)=1։$$

Այստեղից հետևում է, որ (3) մատրիցի համար կանոնական տեսք է ծառայում k-րդ կարգի հետևյալ λ-մատրիցը՝

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & (\lambda-\lambda_0)^k \end{pmatrix}։ \tag{4}$$

Այժմ ապացուցենք հետևյալ լեմման.

Եթե $P[\lambda]$ օղակին պատկանող $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots, \varphi_t(\lambda)$ բազմանդամները զույգ առ զույգ փոխադարձ պարզ են, ապա տեղի ունի հետևյալ համարժեքությունը.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & \mathbf{0} \\ & \varphi_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \varphi_t(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & \prod_{i=1}^{t} \varphi_i(\lambda) \end{pmatrix}:$$

Ակներևորեն, բավական է դիտարկել $t=2$ դեպքը։ Քանի որ $\varphi_1(\lambda)$ և $\varphi_2(\lambda)$ բազմանդամները փոխադարձ պարզ են, ապա $P[\lambda]$ օղակում գոյություն ունեն այնպիսի $u_1(\lambda)$ և $u_2(\lambda)$ բազմանդամներ, որ

$$\varphi_1(\lambda)u_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda)u_2(\lambda)=1\text{։}$$

Ուստի՝

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda) & 0\\ 0 & \varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda) & \varphi(\lambda)u_1(\lambda)\\ 0 & \varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda)u_2(\lambda)\\ & \varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda) & 1\\ 0 & \varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & \varphi_1(\lambda)\\ \varphi_2(\lambda) & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \varphi_1(\lambda)\\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\end{pmatrix},$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ անցնենք (2) տեսքի ժորդանյան j մատրիցի համար

$$j-\lambda E=\begin{pmatrix}\boxed{j_1-\lambda E_1} & & & \mathbf{0}\\ & \boxed{j_2-\lambda E_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{j_s-\lambda E_s}\end{pmatrix}\qquad(5)$$

բնութագրիչ մատրիցի դիտարկմանը. այստեղ E_i-ն $(i=1, 2, \ldots, s)$ նույն կարգի միավոր մատրից է, ինչ որ j_i վանդակը։ Դիցուք j մատրիցի ժորդանյան վանդակները վերաբերում են հետևյալ տարբեր թվերին՝ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_t$, որտեղ $t\leqslant s$։ Դիցուք, այնուհետև, λ_i թվին $(i=1, 2, \ldots, t)$ վերաբերում են q_i հատ ժորդանյան վանդակներ $(q_i\geqslant 1)$ և դիցուք այդ վանդակների կարգերն են, դասավորված չաճման կարգով՝

$$k_{i1}\geqslant k_{i2}\geqslant\cdots\geqslant k_{iq_i}\text{։}\qquad(6)$$

Նշենք, չնայած այդ չենք օգտագործի, որ

$$\sum_{i=1}^{t} q_i=s,$$

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{q_i}k_{ij}=n\text{։}$$

Կիրառելով տարրական ձևափոխություններ (5) մատրիցի այն տողերի և սյուների նկատմամբ, որոնք անցնում են այդ մատրիցի $j_i-\lambda E_i$ վանդակով, մենք, ակներևորեն, ձեռք չենք տա մյուս անկյունագծային վանդակներին։ Այստեղից հետևում է, որ (5) մատրիցի մեջ տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ յուրաքանչյուր $j_i-\lambda E_i$ վանդակ $(i=1, 2, \ldots, s)$ կարելի է փոխարինել (5) տեսքի համապատասխան վանդակով։ Այլ կերպ ասած, $j-\lambda E$ մատրիցը համարժեք է այնպիսի անկյունագծային մատրիցի, որի անկյունագծի վրա որոշ թվով մեկերից բացի գրված են նաև j մատրիցի բոլոր ժորդանյան վանդակներին համապատասխանող հետևյալ բազմանդամները.

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}},\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}}\\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\ \ldots,(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_2}},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}},\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{tq_t}}\text{։}\end{array}\right\}\qquad(7)$$

Ընդ որում, մենք ցույց չենք տալիս այն տեղերն անկյունագծի վրա, որտեղ գրված են (7) բազմանդամները, քանի որ ցանկացած անկյունագծային λ-մատրիցի մեջ կարելի է տողերի և համանուն սյուների տեղափոխման օգնությամբ անկյունագծային էլեմենտները կամայաբար տեղափոխել։ Այս դիտողությունը հարկավոր է հաշվի առնել նաև հետագայում։

Դիցուք q-ն ամենամեծն է q_i թվերի մեջ $(i=1, 2, \ldots, t)$։ Նշանակենք $e_{n-j+1}(\lambda)$-ով (7) աղյուսակի j-րդ սյունակում գրված բազմանդամների արտադրյալը $(j=1, 2, \ldots, q)$, այսինքն՝

$$e_{n-j+1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}},\qquad(8)$$

Եթե այդ ժամանակ j-րդ սյունակում կան դատարկ տեղեր (որոշ i-երի համար կարող է պատահել, որ $q_i<j$), ապա (8)-ի մեջ համապատասխան բազմապատկիչները կհամարենք հավասար մեկի։ Քանի որ, ըստ պայմանի, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ թվերը տարբեր են, ապա (7) աղյուսակի j-րդ սյունակում գրված գծային երկանդամների աստիճանները զույգ առ զույգ փոխադարձ պարզ են։ Հետևաբար, վերևում ապացուցված լեմմայի հիման վրա, տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ դիտարկվող անկյունագծային մատրիցի մեջ նրանք կարող են փոխարինվել իրենց $e_{n-j+1}(\lambda)$ արտադրյալով և որոշ թվով միավորներով։

Անելով այդ $J=1, 2, \dots, q$ համար, մենք կստանանք, որ

$$J-\lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & e_{n-1}(\lambda) & \\ \mathbf{0} & & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Հենց սա էլ կլինի $J-\lambda E$ մատրիցի որոնելի կանոնական տեսքը:

Իրոք, (9)-ի մեջ գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող բոլոր բազմանդամների ավագ գործակիցները հավասար են մեկի և այդ բազմանդամներից յուրաքանչյուրը, (6) պայմանի շնորհիվ, առանց մնացորդի բաժանվում է նախորդի վրա:

Օրինակ։ Դիցուք

$$J=\begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{2} & & & \\ & & \begin{array}{|cc|} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} & & \\ & & & \begin{array}{|cc|} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{2} \end{pmatrix},$$

Այս 9-րդ կարգի ժորդանյան մատրիցի համար (7) բազմանդամների աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$(\lambda-2)^3, \quad \lambda-2, \quad \lambda-2,$$
$$(\lambda-5)^2, \quad (\lambda-5)^2.$$

Ուստի J մատրիցի անփոփոխելի բազմապատկիչներ կլինեն

$$e_9(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-5)^2,$$
$$e_8(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)^2,$$
$$e_7(\lambda)=\lambda-2$$

բազմանդամները, այն ժամանակ երբ $e_6(\lambda)=\dots=e_1(\lambda)=1$:

Այժմ, երբ մենք սովորեցինք ըստ տված ժորդանյան J մատրիցի տեսքի՝ միանգամից գրել նրա բնութագրիչ մատրիցի կանոնական տեսքը, կարելի է ապացուցել հետևյալ թեորեմը.

Երկու ժորդանյան մատրիցներ նման են այն և միայն այն ժամանակ, եթե նրանք կազմված են միևնույն ժորդանյան վանդակներից, այսինքն՝ տարբերվում են, թերևս, միայն այդ վանդակների դասավորությամբ գլխավոր անկյունագծի երկայնքով:

Իսկապես, բազմանդամների (7) աղյուսակը լրիվ որոշվում էր J ժորդանյան մատրիցի ժորդանյան վանդակների հավաքածուով և նրա մեջ ոչ մի կերպ չէր արտացոլվում այդ մատրիցի գլխավոր անկյունագծի երկայնքով ժորդանյան վանդակների դասավորությունը: Այստեղից հետևում է, որ եթե J և J' ժորդանյան մատրիցները օժտված են ժորդանյան վանդակների միևնույն հավաքածուով, ապա նրանց համապատասխանում է բազմանդամների միևնույն (7) աղյուսակը և, հետևաբար, միևնույն (8) բազմանդամները: Այսպիսով, $J-\lambda E$ և $J'-\lambda E$ բնութագրիչ մատրիցները օժտված են միևնույն անփոփոխելի բազմապատկիչներով, այսինքն՝ համարժեք են և, հետևաբար, իրենք՝ J և J' մատրիցները նման են:

Հակադարձաբար, եթե J և J' ժորդանյան մատրիցները նման են, ապա նրանց բնութագրիչ մատրիցներն օժտված են միևնույն անփոփոխելի բազմապատկիչներով: Թող (8) բազմանդամները $J=1, 2, \dots, q$ համար լինեն այդ անփոփոխելի բազմապատկիչներից նրանք, որոնք միավորից տարբեր են: Սակայն, (8) բազմանդամներով վերականգնվում է բազմանդամների (7) աղյուսակը: Այն է՝ (8) բազմանդամները վերլուծվում են գծային բազմապատկիչների աստիճանների արտադրյալի, քանի որ, ինչպես արդեն ապացուցված է, այդ հատկությունով օժտված են բնութագրիչ մատրիցի անփոփոխելի բազմապատկիչները՝ ցանկացած ժորդանյան մատրիցի համար: (7) աղյուսակն էլ հենց կազմված է գծային բազմապատկիչների այն բոլոր առավելագույն աստիճաններից, որոնց վեր են ածվում (8) բազմանդամները: Վերջապես, (7) աղյուսակով վերականգնվում են ելակետային ժորդանյան մատրիցների ժորդանյան վանդակները. յուրաքանչյուր $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ բազմանդամի (7) աղյուսակից համապատասխանում է λ_i թվին վերաբերող k_{ij} կարգի ժորդանյան վանդակ: Սրանով ապացուցված է, որ J և J' մատրիցները կազմված են միևնույն ժորդանյան վանդակներից և կարող են, թերևս, տարբերվել միայն նրանց դասավորությամբ:

Այս թեորեմայից հետևում է, մասնավորաբար, որ անկյունագծային մատրիցին նման ժորդանյան մատրիցն ինքը անկյունագծային է և որ երկու անկյունագծային մատրիցներ նման են այն և միայն այն ժամանակ, եթե ստացվում են մեկը մյուսից՝ գլխավոր անկյունագծի վրա գրված թվերի տեղափոխությամբ:

Մատրիցի բերումը ժորդանյան նորմալ ձևի: Եթե P դաշտի էլեմենտներից կազմած A մատրիցը բերվում է ժորդանյան նորմալ ձևի, այսինքն՝ նման է ժորդանյան մատրիցին, ապա, ինչպես հետևում է վերևում ապացուցված թեորեմայից, A մատրիցի համար ժորդանյան նորմալ ձևը որոշվում է միարժեքորեն՝ գլխավոր անկյունագծի վրա ժորդանյան վանդակների դասավորման ճշտությամբ: Պայմանն այն բանի համար, որպեսզի A մատրիցը կարելի լինի այդպիսի տեսքի բերել, ցույց է տրվում հետևյալ թեորեմայում, որի ապացույցը միաժամանակ տալիս է գործնական եղանակ՝ A մատրիցին նման ժորդանյան մատրիցը գտնելու համար, եթե այդպիսի ժորդանյան մատրից գոյություն ունի: Ընդ որում նկատենք, որ P դաշտում վերածելիությունը նշանակում է, որ փոխակերպող մատրիցի բոլոր էլեմենտները կպարունակվեն P դաշտում:

P դաշտի էլեմենտներից կազմված A մատրիցը բերվում է P դաշտում ժորդանյան նորմալ ձևի այն և միայն այն ժամանակ, եթե A մատրիցի բոլոր բնութագրիչ արմատները գտնվում են նույն P հիմնական դաշտում:

Իրոք, եթե A մատրիցը նման է ժորդանյան J մատրիցին, ապա այդ երկու մատրիցներն ունեն միևնույն բնութագրիչ արմատները: Սակայն, J մատրիցի բնութագրիչ արմատները գտնվում են առանց որևէ դժվարության. քանի որ $J-\lambda E$ մատրիցի դետերմինանտը հավասար է գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող նրա էլեմենտների արտադրյալին, ապա $|J-\lambda E|$ բազմանդամը P դաշտի վրա վեր է ածվում գծային բազմապատկիչների և նրա արմատներ են ծառայում J մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա գրված թվերը և միայն նրանք:

Հակադարձաբար, դիցուք A մատրիցի բոլոր բնութագրիչ արմատները գտնվում են նույն P դաշտում: Եթե $A-\lambda E$ մատրիցի 1-ից տարբեր անփոփոխելի բազմապատկիչները լինեն

$$e_{u-q+1}(\lambda),\ \dots,\ e_{n-1}(\lambda),\ e_n(\lambda), \tag{10}$$

ապա՝

$$|A-\lambda E|=(-1)^n e_{n-q+1}(\lambda)\cdots e_{n-1}(\lambda)e_n(\lambda).$$

Իրոք, $A-\lambda E$ մատրիցի և նրա կանոնական մատրիցի դետերմինանտները կարող են իրարից տարբերվել միայն հաստատուն բազմապատկիչով, որը իրականում հավասար է $(-1)^n$, քանի որ հենց այդպիսին է $A-\lambda E$ բնութագրիչ բազմանդամի ավագ գործակիցը: Այսպիսով, (10) բազմանդամների թվում չկան զրոյի հավասարներ, այդ բազմանդամների աստիճանների գումարը հավասար է n-ի և նրանք բոլորը P դաշտի վրա վերլուծվում են գծային արտադրիչների (վերջինը շնորհիվ այն բանի, որ, ըստ պայմանի, $A-\lambda E$ բազմանդամն օժտված է այդպիսի վերլուծությամբ):

Դիցուք (8)-ը (10) բազմանդամների վերլուծություններն են գծային արտադրիչների աստիճաններով արտադրյալի: e_{n-j+1} բազմանդամի $j=1, 2, \dots, q$ տարրական բաժանարարներ անվանենք նրա (8)

վերլուծության մեջ մտնող տարբեր գծային երկանդամների մեկից տարբեր աստիճանները, այսինքն՝

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{2j}},\ \dots,\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{tj}}.$$

(10)-ի բոլոր բազմանդամների տարրական բաժանարարներն անվանենք A մատրիցի տարրական բաժանարարներ և դրանք արտագրենք (7) աղյուսակի տեսքով: Այժմ վերցնենք n-րդ կարգի J ժորդանյան մատրիցը՝ կազմված այնպիսի ժորդանյան վանդակներից, որոնք որոշված են հետևյալ կերպ. A մատրիցի յուրաքանչյուր $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ տարրական բաժանարարին համապատասխանեցնենք λ_i թվին վերաբերող k_{ij} կարգի ժորդանյան վանդակը: Ակնհայտ է, որ $J-\lambda E$ մատրիցի 1-ից տարբեր անփոփոխելի բազմապատկիչներ կլինեն (10) բազմանդամները և միայն նրանք: Ուստի $A-\lambda E$ և $J-\lambda E$ մատրիցները համարժեք են և, հետևաբար, A մատրիցը նման է J ժորդանյան մատրիցին:

Օրինակ: Դիցուք տված է

$$A=\left\{\begin{matrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{matrix}\right\}$$

մատրիցը:

$A-\lambda E$ մատրիցը սովորական եղանակով բերելով կանոնական տեսքի, կստանանք, որ այդ մատրիցի մեկից տարբեր անփոփոխելի բազմապատկիչները կլինեն

$$e_4(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$
$$e_3(\lambda)=\lambda=1$$

բազմանդամները: Մենք տեսնում ենք, որ A մատրիցը բերվում է ժորդանյան նորմալ ձևի նույնիսկ ռացիոնալ թվերի դաշտում: Նրա տարրական բաժանարարներ են հանդիսանում $(\lambda-1)^2$, $\lambda-1$ և $\lambda+2$ բազմանդամները և այդ պատճառով A մատրիցի ժորդանյան նորմալ ձև է հանդիսանում

$$J=\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right.$$

մատրիցը:

Եթե մենք ցանկանայինք գտնել այն չվերասերված մատրիցը, որը A մատրիցը փոխակերպում է J մատրիցին, ապա պետք է օգտվեինք նախորդ պարագրաֆի վերջում արված ցուցումներից:

Նախորդ արդյունքների հիման վրա կարող է ապացուցվել, վերջապես, մատրիցը անկյունագծային տեսքի բերելու հետևյալ անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, որից անմիջապես բխում է § 33-ում ապացուցված անկյունագծային տեսքի բերելու բավարար հայտանիշը:

P դաշտի էլեմենտներից կազմած n-րդ կարգի A մատրիցը բերվում է անկյունագծային տեսքի այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրա բնութագրիչ մատրիցի $e_n(\lambda)$ վերջին անփոփոխելի բազմապատկչի բոլոր արմատները գտնվում են P դաշտում, ընդ որում այդ արմատների թվում չկան բազմապատիկ արմատներ:

Իրոք, մատրիցի բերելը անկյունագծային տեսքի համարժեք է այնպիսի ժորդանյան տեսքի բերելուն, որի բոլոր ժորդանյան վանդակներն ունեն 1 կարգը: Այլ կերպ ասած, A մատրիցի բոլոր տարրական բաժանարարները պետք է լինեն առաջին աստիճանի բազմանդամներ: Սակայն, քանի որ A—λE մատրիցի բոլոր անփոփոխելի բազմապատկիչները հանդիսանում են $e_n(\lambda)$ բազմանդամի բաժանարարներ, ապա վերջին պայմանը համարժեք է այն բանին, որ $e_n(\lambda)$ բազմանդամի բոլոր տարրական բաժանարարներն ունեն 1 աստիճանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել:

§ 62. Նվազագույն բազմանդամ

Դիցուք տված է P դաշտի էլեմենտներից կազմած n-րդ կարգի A քառակուսի մատրիցը: Եթե

$$f(\lambda)=\alpha_0\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}\lambda+\alpha_k$$

կամավոր բազմանդամ է $P[\lambda]$ օղակից, ապա

$$f(A)=\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}A+\alpha_kE$$

մատրիցը կկոչվի f(λ) բազմանդամի արժեք λ=A *դեպքում. ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ f(λ) բազմանդամի ազատ անդամն այդ դեպքում բազմապատկվում է A մատրիցի զրո աստիճանով, այսինքն՝ E միավոր մատրիցով:*

Հեշտությամբ ստուգվում է, որ եթե

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)$$

կամ

$$f(\lambda)=u(\lambda)v(\lambda),$$

ապա՝

$$f(A)=\varphi(A)+\psi(A)$$

և համապատասխանաբար,

$$f(A)=u(A)v(A).$$

Եթե f(λ) բազմանդամը A մատրիցով դարձվում է զրո, այսինքն՝

$$f(A)=0,$$

ապա A մատրիցը կանվանենք f(λ) բազմանդամի մատրիցային արմատ *կամ (այնտեղ, որտեղ դա չի կարող թյուրիմացություն առաջացնել) ուղղակի՝ f(λ) բազմանդամի* արմատ:

Ամեն մի A մատրից հանդիսանում է մի որոշ ոչզրոյական բազմանդամի արմատ:

Իրոք, մենք գիտենք, որ բոլոր n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցները P դաշտի վրա կազմում են n^2-չափանի վեկտորական տարածություն: Այստեղից հետևում է, որ n^2+1 մատրիցների

$$A^{n^2},\ A^{n^2-1},+\cdots+,\ A,\ E$$

սիստեմը գծայնորեն կախյալ է P դաշտի վրա, այսինքն՝ P-ում գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}, \alpha_{n^2+1}$ էլեմենտներ, ոչ բոլորը հավասար զրոյի, որ

$$\alpha_0A^{n^2}+\alpha_1A^{n^2-1}+\cdots+\alpha_{n^2}A+\alpha_{n^2+1}E=0.$$

Այսպիսով, A մատրիցը արմատ հանդիսացավ

$$\varphi(\lambda)=\alpha_0\lambda^{n^2}+\alpha_1\lambda^{n^2-1}+\cdots+\alpha_{n^2}\lambda+\alpha_{n^2+1}$$

ոչզրոյական բազմանդամի համար, որի աստիճանը չի գերազանցում n^2-ն:

A մատրիցը արմատ է ծառայում նաև մի քանի այնպիսի բազմանդամների համար, որոնց ավագ գործակիցները հավասար են միավորի. բավական է վերցնել A մատրիցով զրո դարձնող ցանկացած ոչզրոյական բազմանդամ և բաժանել այդ բազմանդամը իրեն ավագ գործակցի վրա: 1 ավագ գործակցով ամենափոքր աստիճանի բազմանդամը, որը զրո է դառնում A մատրիցով, կոչվում է A մատրիցի նվազագույն (մինիմալ) բազմանդամ: *Նկատենք, որ A* մատրիցի նվազագույն բազմանդամը որոշված է միարժեքորեն, *քանի որ այդպիսի երկու բազմանդամների տարբերությունը կունենար ավելի փոքր աստիճան, քան նրանցից յուրաքանչյուրը, բայց նույնպես զրո կդառնար A մատրիցով:*

A մատրիցով զրո դարձող ամեն մի f(λ) բազմանդամ առանց մնացորդի բաժանվում է այդ մատրիցի m(λ) նվազագույն բազմանդամի վրա:

Իրոք, եթե

$$f(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

որտեղ $r(\lambda)$-ի աստիճանը փոքր է $m(\lambda)$-ի աստիճանից, ապա՝

$$f(A)=m(A)q(A)+r(A)$$

և $f(A)=m(A)=0$ հավասարությունից հետևում է $r(A)=0$, որը հակասում է նվազագույն բազմանդամի սահմանմանը։

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

A մատրիցի նվազագույն բազմանդամը համընկնում է $A-\lambda E$ բնութագրիչ մատրիցի $e_n(\lambda)$ վերջին անփոփոխելի բազմապատկչի հետ։

Ապացույց։ Պահպանելով § 59-ի նշանակումները և օգտագործելով այնտեղի արդյունքները, կարելի է գրել

$$(-1)^n|A-\lambda E|=d_{n-1}(\lambda)e_n(\lambda) \tag{1}$$

հավասարությունը։

Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ $e_n(\lambda)$ և $d_{n-1}(\lambda)$ բազմանդամները զրոյական չեն լինի։ Այնուհետև, $B(\lambda)$-ով նշանակենք $A-\lambda E$ մատրիցի փոխադարձ մատրիցը (տե՛ս § 14)՝

$$B(\lambda)=(A-\lambda E)^*.$$

Ինչպես հետևում է § 14-ի (3) հավասարությունից, իրավացի է

$$(A-\lambda E)B(\lambda)=|A-\lambda E|E \tag{2}$$

հավասարությունը։ Մյուս կողմից, քանի որ $A(\lambda)$ մատրիցի էլեմենտներ են ծառայում $A-\lambda E$ մատրիցի $(n-1)$-րդ կարգի մինորները՝ վերցրած պլյուս կամ մինուս նշաններով, և միայն նրանք, իսկ $d_{n-1}(\lambda)$ բազմանդամը բոլոր այդ մինորների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, ապա՝

$$B(\lambda)=d_{n-1}(\lambda)C(\lambda), \tag{3}$$

ընդ որում $C(\lambda)$ մատրիցի էլեմենտների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 1-ի։

(2), (3) և (1) հավասարություններից բխում է

$$(A-\lambda E)d_{n-1}(\lambda)C(\lambda)=(-1)^n d_{n-1}(\lambda)e_n(\lambda)E$$

հավասարությունը։ Այս հավասարությունը կարելի է կրճատել $d_{n-1}(\lambda)$ ոչզրոյական բազմապատկիչով, ինչպես այդ բխում է հետևյալ ընդհանուր դիտողությունից. եթե $\varphi(\lambda)$-ն ոչզրոյական բազմանդամ է, $D(\lambda)=(d_{ij}(\lambda))$-ն ոչզրոյական λ-մատրից է, ընդ որում դիցուք $d_{st}(\lambda)\neq 0$, ապա $\varphi(\lambda)D(\lambda)$ մատրիցի մեջ (s, t) տեղում կգտնվի $\varphi(\lambda)d_{st}(\lambda)$ զրոյից տարբեր էլեմենտը։ Այսպիսով՝

$$(A-\lambda E)C(\lambda)=(-1)^n e_n(\lambda)E,$$

որտեղից՝

$$e_n(\lambda)E=(\lambda E-A)[(-1)^{n+1}C(\lambda)]. \tag{4}$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ ձախ մասում գրված λ-մատրիցը $\lambda E-A$ երկանդամի վրա «ձախից» բաժանելիս առաջացած մնացորդը հավասար է զրոյի։ § 60-ի վերջում ապացուցված լեմմայից բխում է, սակայն, որ այդ մնացորդը հավասար է $e_n(A)E=e_n(A)$ մատրիցին։ Իրոք, $e_n(\lambda)E$ մատրիցը կարող է գրվել որպես մատրիցային λ-բազմանդամ, որի գործակիցները հանդիսանում են սկալյար մատրիցներ՝ այսինքն՝ տեղափոխելի են A մատրիցի հետ։ Այսպիսով,

$$e_n(A)=0,$$

այսինքն՝ $e_n(\lambda)$ բազմանդամը իրոք զրո է դառնում A մատրիցով։

Այստեղից հետևում է, որ $e_n(\lambda)$ բազմանդամը առանց մնացորդի բաժանվում է A մատրիցի $m(\lambda)$ նվազագույն բազմանդամի վրա՝

$$e_n(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda). \tag{5}$$

Պարզ է, որ $q(\lambda)$ բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է մեկի։

Քանի որ $m(A)=0$, ապա նորից, շնորհիվ § 60-ի նույն լեմմայի, $m(\lambda)E$ λ-մատրիցի $\lambda E-A$ երկանդամի վրա ձախ բաժանումից առաջացած մնացորդը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$m(\lambda)E=(\lambda E-A)Q(\lambda). \tag{6}$$

(5), (4) և (6) հավասարությունները հանգում են

$$(\lambda E-A)[(-1)^{n+1}C(\lambda)]=(\lambda E-A)[Q(\lambda)q(\lambda)]$$

հավասարությանը։

Այս հավասարության երկու մասերը կարելի է կրճատել $\lambda E-A$ ընդհանուր բազմապատկիչով, քանի որ այդ մատրիցային λ-բազմանդամի E ավագ գործակիցը չվերասերված մատրից է։

Այսպիսով,

$$C(\lambda)=(-1)^{n+1}Q(\lambda)q(\lambda).$$

Սակայն, մենք հիշում ենք, որ $C(\lambda)$ մատրիցի էլեմենտների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 1-ի։ Ուստի $q(\lambda)$ բազմանդամը պետք է ունենա զրոյական աստիճան, իսկ քանի որ նրա ավագ գործակիցը հավասար է 1-ի, ապա $q(\lambda)=1$։ Այսպիսով, (5)-ի շնորհիվ,

$$e_n(\lambda)=m(\lambda),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Քանի որ, (1)-ի շնորհիվ, A մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը տանց մնացորդի բաժանվում է $e_n(\lambda)$ բազմանդամի վրա, ապա նոր ապացուցված թեորեմայից բխում է հետևյալ թեորեման.

Համիլտոնի-Կելիի թեորեմա։ Ամեն մի մատրից հանդիսանում է իր բնութագրիչ բազմանդամի արմատ:

Գծային ձևափոխության նվազագույն բազմանդամը: *Նախ ապացուցենք հետևյալ պնդումը.*

Եթե A և B մատրիցները նման են և եթե $f(\lambda)$ բազմանդամը A մատրիցով դառնում է զրո, ապա այն զրո է դառնում նաև B մատրիցով:

Իրոք, դիցուք

$$B=C^{-1}AC,$$

եթե

$$f(\lambda)=\alpha_0\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}\lambda+\alpha_k,$$

ապա,

$$\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}A+\alpha_kE=0:$$

Փոխակերպելով այս հավասարության երկու մասն էլ C մատրիցով, կստանանք՝

$$\begin{aligned} &C^{-1}(\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}A+\alpha_kE)C=\\ &=\alpha_0(C^{-1}AC)^k+\alpha_1(C^{-1}AC)^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}(C^{-1}AC)+\alpha_kE=\\ &=\alpha_0B^k+\alpha_1B^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}B+\alpha_kE=0, \end{aligned}$$

այսինքն՝ $f(B)=0$։

Այստեղից հետևում է, որ նման մատրիցներն ունեն միևնույն նվազագույն բազմանդամը։

Դիցուք այժմ φ-ն n-չափանի գծային տարածության գծային ձևափոխություն է P դաշտի վրա։ Տարածության տարբեր բազիսներում այդ ձևափոխությունը կատարող մատրիցները նման են իրար։ Այդ մատրիցների ընդհանուր նվազագույն բազմանդամը կոչվում է φ գծային ձևափոխության նվազագույն բազմանդամ:

Օգտագործելով գծային ձևափոխությունների նկատմամբ կատարվող գործողությունները, որ մուծեցինք § 32-ում, կարելի է մուծել $P[\lambda]$ *օղակին պատկանող*

$$f(\lambda)=\alpha_0\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}\lambda+\alpha_k$$

բազմանդամի արժեքի *գաղափարը այն դեպքում, երբ λ-ն հավասար է φ գծային ձևափոխությանը. դա կլինի*

$$f(\varphi)=\alpha_0\varphi^k+\alpha_1\varphi^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}\varphi+\alpha_k\varepsilon$$

գծային ձևափոխությունը, որտեղ ε-ը նույնական ձևափոխություն է։ Մենք կասենք, այնուհետև, որ $f(\lambda)$ *բազմանդամը* զրո է դառնում *φ գծային ձևափոխությամբ, եթե*

$$f(\varphi)=\omega,$$

որտեղ ω-ն զրոյական ձևափոխություն է։

Հաշվի առնելով գծային ձևափոխությունների և մատրիցների հետ կատարվող գործողությունների միջև եղած կապը, ընթերցողն առանց դժվարության կապացուցի, որ φ գծային ձևափոխության նվազագույն բազմանդամը 1 ավագ գործակցով ամենափոքր աստիճանի այն միարժեքորեն որոշված բազմանդամն է, որը զրո է դառնում φ ձևափոխությամբ:

Դրանից հետո, վերևում ստացված արդյունքները, մասնավորապես՝ Համիլտոնի-Կելիի թեորեման, կարող են վերաձևակերպվել գծային ձևափոխությունների լեզվով։

ԳԼՈՒԽ ՏԱՍՆՉՈՐՍԵՐՈՐԴ

ԽՄԲԵՐ

§ 63. Խմբի սահմանումը և օրինակներ

Օղակները և դաշտերը, որոնք այնքան մեծ դեր էին խաղում նախորդ գլուխներում, հանդիսանում են հանրահաշվական սիստեմներ երկու անկախ գործողություններով՝ գումարումով և բազմապատկումով։ Մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում և նրա կիրառություններում, սակայն, շատ հաճախ են հանդիպում նաև այնպիսի հանրահաշվական սիստեմներ, որոնց մեջ որոշված է միայն մեկ հանրահաշվական գործողություն։ Այսպես, սահմանափակվելով առայժմ այնպիսի օրինակներով, որոնք արդեն երևացել են մեր գրքում, նշենք, որ n-րդ աստիճանի տեղադրությունների բազմության մեջ (տե՛ս § 3) մեր կողմից սահմանվել է միայն մեկ գործողություն՝ բազմապատկումը։ Մյուս կողմից, վեկտորական տարածության սահմանման մեջ (§ 8) մտնում է վեկտորների գումարումը, այն ժամանակ, երբ վեկտորների բազմապատկումը մեր կողմից սահմանված չի եղել (նկատենք, որ վեկտորի բազմապատկումը թվով չի բավարարում § 44-ում տրված հանրահաշվական գործողության սահմանմանը)։

Մեկ գործողությամբ հանրահաշվական սիստեմների կարևոր տեսակ են խմբերը։ Այս գաղափարը կիրառումների արտակարգ լայն բնագավառ ունի և ծառայում է որպես մի մեծ ինքնուրույն գիտության՝ խմբերի տեսության առարկա։ Ներկա գլուխը կարող է դիտարկվել որպես խմբերի տեսության ներածություն. նրա մեջ կշարադրվեն տարրական տեղեկություններ խմբերի մասին, որոնց հետ ծանոթությունը անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր մաթեմատիկոսի։ Գլուխը կվերջանա մի՝ պակաս չափով տարրական թեորեմայով։

Պայմանավորվենք, ինչպես այդ ընդունված է խմբերի ընդհանուր

տեսության մեջ, դիտարկվող հանրահաշվական գործողությունը բազմապատկում *անվանել և օգտագործել համապատասխան նշանակումներ։ Հիշեցնենք (տե՛ս § 44), որ հանրահաշվական գործողությունը ենթադրվում է միշտ իրագործելի և միարժեք. դիտարկվող բազմության ցանկացած* a *և* b *երկու էլեմենտների համար* ab *արտադրյալը գոյություն ունի և այդ բազմության միարժեքորեն որոշված էլեմենտ է։*

Խումբ *է կոչվում մեկ հանրահաշվական գործողությամբ* G *բազմությունը, ընդ որում այդ գործողությունը զուգորդելի է (թեկուզ և ոչ անպայման տեղափոխելի) և նրա համար պետք է գոյություն ունենա հակադարձ գործողությունը։*

Այդ դեպքում, խմբային գործողության հնարավոր ոչտեղափոխելիության շնորհիվ, հակադարձ գործողության իրագործելիությունը նշանակում է հետևյալը. G*-ի ցանկացած* a *և* b *երկու էլեմենտների համար* G*-ի մեջ գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված այնպիսի* x *էլեմենտ և միարժեքորեն որոշված այնպիսի* y *էլեմենտ, որ*

$$ax=b,\quad ya=b.$$

Եթե G *խումբը կազմված է վերջավոր թվով էլեմենտներից, ապա այն կոչվում է* վերջավոր խումբ, *իսկ էլեմենտների թիվը նրա մեջ՝* խմբի կարգ*։ Եթե* G *խմբում որոշված գործողությունը կոմուտատիվ (տեղափոխելի) է, ապա* G*-ն կոչվում է* կոմուտատիվ *(տեղափոխելի)* *խումբ կամ* աբելյան *խումբ։*

Նշենք խմբի սահմանումից բխող պարզագույն հետևանքները։ § 44-ում արդեն արված դատողությունների հիման վրա կարելի է պնդել, որ զուգորդելիության օրենքը թույլատրում է միարժեք ձևով խոսել խմբի ցանկացած վերջավոր թվով էլեմենտների արտադրյալի մասին, *որոնք տրված են (խմբային գործողության հնարավոր ոչտեղափոխելիության շնորհիվ) որոշակի կարգով։*

Անցնենք հակադարձ գործողության գոյությունից բխող հետևանքներին։ Դիցուք G *խմբում տրված է կամավոր* a *էլեմենտը։ Խմբի սահմանումից բխում է միարժեքորեն որոշված այնպիսի* e_a *էլեմենտի գոյությունը* G*-ում, որ* $ae_a=a$, *հետևաբար, այդ էլեմենտը խաղում է միավորի դեր՝* a *էլեմենտը աջից նրանով բազմապատկելիս։ Եթե* b*-ն* G *խմբի ցանկացած ուրիշ էլեմենտ է և եթե* y*-ը խմբի այնպիսի էլեմենտ է, որը բավարարում է* $ay=b$ *հավասարությանը (նրա գոյությունը հետևում է խմբի սահմանումից) ապա մենք կստանանք՝*

$$b=ya=y(ae_a)=(ya)e_a=be_a.$$

Այսպիսով, e_a *էլեմենտը խաղում է աջ միավորի դեր* G *խմբի բոլոր էլեմենտների նկատմամբ և ոչ միայն* a *ելակետային էլեմենտի նկատմամբ։ Ուստի մենք այն կնշանակենք* e'*-ով։ Հակադարձ գործողության* *սահմանման մեջ մտնող միարժեքությունից բխում է այդ էլեմենտի միակությունը։*

Նույնպիսի ճանապարհով կարելի է ապացուցել G *խմբում այնպիսի* e'' *էլեմենտի գոյությունն ու միակությունը, որը բավարարում է* $e''a=a$ *պայմանին* G*-ից վերցրած բոլոր* a*-երի համար։ Իրականում* e' *և* e'' *էլեմենտները համընկնում են, քանի որ* $e''e'=e''$ *և* $e''e'=e'$ *հավասարություններից բխում է, որ* $e''=e'$*։ Սրանով ապացուցվեց, որ* ամեն մի G խմբում գոյություն ունի միարժեքորեն որոշված e էլեմենտ, որը բավարարում է

$$ae=ea=a$$

պայմանին G*-ին պատկանող բոլոր* a*-երի համար։ Այդ էլեմենտը կոչվում է* G *խմբի* միավոր *և սովորաբար նշանակվում է 1 նշանով։*

Խմբի սահմանումից բխում է, այնուհետև, ամեն a *էլեմենտի համար այնպիսի* a' *և* a'' *էլեմենտների գոյությունն ու միակությունը, որ*

$$aa'=1,\quad a''a=1.$$

Իրականում a' *և* a'' *էլեմենտները համընկնում են.*

$$a''aa'=a''(aa')=a''\cdot 1=a'',$$
$$a''aa'=(a''a)a'=1\cdot a'=a'$$

հավասարություններից հետևում է, որ $a''=a'$*։ Այդ էլեմենտը կոչվում է* a *էլեմենտի* հակադարձ էլեմենտ *և նշանակվում է* a^{-1}*-ով, այսինքն՝*

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

Այսպիսով, խմբի ամեն մի էլեմենտ ունի միարժեքորեն որոշված հակադարձ էլեմենտ։

Վերջին հավասարություններից բխում է, որ a^{-1} *էլեմենտի համար հակադարձ էլեմենտ է ծառայում ինքը՝* a *էլեմենտը։ Այնուհետև, հեշտ է նկատել, որ մի քանի էլեմենտների արտադրյալի համար հակադարձ էլեմենտ կլինի արտադրիչների հակադարձ էլեմենտների արտադրյալը, ընդ որում՝ վերցրած հակառակ կարգով՝*

$$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)^{-1}=a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

Վերջապես, միավորի համար հակադարձ էլեմենտ կլինի ինքը՝ միավորը։

Այն բանի ստուգումը, թե հանդիսանու՞մ է արդյոք խումբ տրված մեկ գործողությամբ բազմությունը, շատ հեշտանում է նրանով, որ խմբի սահմանման մեջ հակադարձ գործողության իրագործելիության պահանջը կարելի է փոխարինել միավորի և հակադարձ էլեմենտների գոյության ենթադրությամբ. ընդ որում՝ միայն մեկ կողմից (օրինակ՝ աջից) և առանց ենթադրության նրանց միակության մասին։ Այդ բխում է հետևյալ թեորեմայից.

Մեկ զուգորդելի գործողությամբ G բազմությունը կլինի խումբ, եթե G-ի մեջ գոյություն ունի առնվազն մեկ էլեմենտ, որը օժտված է

$$ae=a$$

հատկությամբ G-ին պատկանող բոլոր a-երի համար, և եթե այդ աջակողմյան միավոր էլեմենտների թվում գոյություն ունի առնվազն մեկ այնպիսի e_0 էլեմենտ, որ նրա նկատմամբ G-ի ամեն մի a էլեմենտ օժտված է առնվազն մեկ a^{-1} աջակողմյան հակադարձ էլեմենտով՝

$$aa^{-1}=e_0.$$

Ապացույց։ Դիցուք a^{-1}*-ը* a*-ի համար աջակողմյան հակադարձ էլեմենտներից մեկն է։ Այդ ժամանակ՝*

$$aa^{-1}=e_0=e_0e_0=e_0aa^{-1},$$

այսինքն՝ $aa^{-1}=e_0aa^{-1}$*։ Այս հավասարության երկու մասերն էլ աջից բազմապատկելով* a^{-1}*-ի համար աջակողմյան հակադարձ էլեմենտներից մեկով, մենք կստանանք՝* $ae_0=e_0ae_0$*, որտեղից՝* $a=e_0a$*, քանի որ* e_0*-ն* G*-ի համար աջակողմյան միավոր է։ Այսպիսով՝* e_0 *էլեմենտը հանդիսանում է նաև ձախակողմյան միավոր* G*-ի համար։ Եթե այժմ* e_1*-ը ցանկացած աջակողմյան միավոր է,* e_2*-ը՝ ցանկացած ձախակողմյան միավոր, ապա*

$$e_2e_1=e_1 \text{ և } e_2e_1=e_2$$

հավասարություններից հետևում է, որ $e_1=e_2$*, այսինքն՝ ցանկացած աջակողմյան միավոր հավասար է ցանկացած ձախակողմյան միավորի։ Սրանով ապացուցված են* G *բազմության մեջ միավոր էլեմենտի գոյությունն ու միակությունը. այն կնշանակենք, ինչպես վերևում, 1-ով։*

Այնուհետև,

$$a^{-1}=a^{-1}\cdot 1=a^{-1}aa^{-1},$$

այսինքն՝ $a^{-1}=a^{-1}aa^{-1}$*, որտեղ* a^{-1}*-ը* a*-ի համար աջակողմյան հակադրած էլեմենտներից մեկն է։ Վերջին հավասարության երկու մասն էլ աջից բազմապատկելով* a^{-1}*-ի համար աջակողմյան հակադարձ էլեմենտներից մեկով, մենք ստանում ենք՝* $1=a^{-1}a$*, այսինքն՝* a^{-1} *էլեմենտը* a*-ի համար կծառայի նաև ձախակողմյան հակադարձ էլեմենտ։ Եթե այժմ* a_1^{-1}*-ը* a*-ի համար ցանկացած աջակողմյան հակադարձ էլեմենտ է,* a_2^{-1}*-ը՝ ցանկացած ձախակողմյան հակադարձ էլեմենտ, ապա*

$$a_2^{-1}aa_1^{-1}=(a_2^{-1}a)a_1^{-1}=a_1^{-1},$$
$$a_2^{-1}aa_1^{-1}=a_2^{-1}(aa_1^{-1})=a_2^{-1}$$

հավասարություններից հետևում է, որ $a_1^{-1}=a_2^{-1}$*, այսինքն՝ հետևում են* G*-ի ամեն մի* a *էլեմենտի համար* a^{-1} *հակադարձ էլեմենտի գոյությունն ու միակությունը։*

Այժմ հեշտ է ցույց տալ, որ G *բազմությունը խումբ կլինի։ Իրոք,*

$ax=b$, $ya=b$ հավասարումներին կբավարարեն, ինչպես հեշտ է տեսնել,

$$x=a^{-1}b,\quad y=ba^{-1}$$

էլեմենտները։ Այս լուծումների միակությունը հետևում է այն բանից, որ եթե, օրինակ, $ax_1=ax_2$, ապա, այս հավասարության երկու մասն էլ ձախից բազմապատկելով a^{-1}-ով, մենք ստանում ենք՝ $x_1=x_2$։ Թեորեման ապացուցված է։

Մենք արդեն մի քանի անգամ հանդիպել ենք իզոմորֆիզմի գաղափարին՝ օղակների համար, գծային տարածությունների համար, էվկլիդյան տարածությունների համար։ Այս գաղափարը կարող է սահմանվել նաև խմբերի համար և խմբերի տեսության մեջ նույնքան մեծ դեր է կատարում, ինչքան և օղակների տեսության մեջ։ G և G' խմբերը կոչվում են մեկը մյուսին իզոմորֆ, եթե նրանց միջև կարելի է հաստատել այնպիսի փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն, որի դեպքում G-ի ցանկացած a, b էլեմենտների և G'-ի՝ նրանց համապատասխանող a', b' էլեմենտների համար ab արտադրյալին համապատասխանում է $a'b'$ արտադրյալը։ Ինչպես § 46-ում (զրոյի և հակադիր էլեմենտի համար օղակում), կարելի է ցույց տալ, որ G և G' խմբերի միջև իզոմորֆ համապատասխանության դեպքում G խմբի միավորին համապատասխանում է G' խմբի միավորը, և եթե G-ի a էլեմենտին համապատասխանում է G'-ի a' էլեմենտը, ապա a^{-1} էլեմենտին համապատասխանում է a'^{-1} էլեմենտը։

Անցնելով խմբերի օրինակներին, նշենք, որ եթե G խմբում որոշված գործողությունը անվանված լիներ գումարում, ապա խմբի միավորը կկոչվեր զրո և կնշանակվեր 0 նշանով, իսկ հակադարձ էլեմենտի փոխարեն մենք կխոսեինք հակադիր էլեմենտի մասին և այն կնշանակեինք $-a$-ով։

Որպես խմբերի առաջին օրինակ նշենք, որ գումարման նկատմամբ ամեն մի օղակ (և, մասնավորապես՝ ամեն մի դաշտ) հանդիսանում է խումբ, ընդ որում՝ աբելյան խումբ. դա, այսպես կոչված, օղակի ադդիտիվ խումբն է։ Այս դիտողությունը միանգամից տալիս է խմբերի մեծ թվով կոնկրետ օրինակներ՝ ամբողջ թվերի ադդիտիվ խումբը, զույգ թվերի ադդիտիվ խումբը, ռացիոնալ թվերի ադդիտիվ խումբը, իրական թվերի, կոմպլեքս թվերի ադդիտիվ խմբերը և այլն։ Նկատենք, որ ամբողջ թվերի և զույգ թվերի ադդիտիվ խմբերը միմյանց իզոմորֆ են, չնայած երկրորդը հանդիսանում է առաջինի միայն մի մասը. ամեն մի k ամբողջ թվին $2k$ զույգ թիվը համապատասխանության մեջ դնող արտապատկերումը կլինի նշված խմբերից առաջինի փոխադարձ միարժեք և, ինչպես հեշտ է ստուգել, նույնիսկ՝ իզոմորֆ արտապատկերում երկրորդի վրա։

Բազմապատկման նկատմամբ ոչ մի օղակ խումբ չի հանդիսանում, քանի որ հակադարձ գործողությունը՝ բաժանումը, ոչ միշտ է իրագործելի։ Դրությունը չի փոխվի նաև ցանկացած օղակից դաշտին անցնելու դեպքում, քանի որ դաշտում անիրագործելի է մնում զրոյի վրա բաժանումը։ Դիտարկենք, սակայն, դաշտի զրոյից տարբեր բոլոր էլեմենտների համախումբը։ Քանի որ դաշտը չի պարունակում զրոյի բաժանարարներ, այսինքն՝ զրոյից տարբեր երկու էլեմենտների արտադրյալն ինքը տարբեր է զրոյից, ապա դիտարկվող համախմբի համար բազմապատկումը կլինի հանրահաշվական գործողություն, միաժամանակ զուգորդելի և տեղափոխելի, ընդ որում՝ բաժանումն արդեն միշտ իրագործելի է և դուրս չի բերում այդ համախմբի սահմաններից։ Այսպիսով, ցանկացած դաշտի զրոյից տարբեր էլեմենտների համախումբը աբելյան խումբ է. այդ խումբը կոչվում է դաշտի մուլտիպլիկատիվ խումբ։ Սրան վերաբերող օրինակներ կլինեն ռացիոնալ թվերի, իրական թվերի, կոմպլեքս թվերի մուլտիպլիկատիվ խմբերը։

Բազմապատկման նկատմամբ խումբ են կազմում, ակներևաբար, բոլոր դրական իրական թվերը։ Այդ խումբը իզոմորֆ է բոլոր իրական թվերի ադդիտիվ խմբին. ամեն մի a դրական թվին համապատասխանության մեջ դնելով $\ln a$ իրական թիվը, մենք կստանանք առաջին խմբի այնպիսի փոխադարձ միարժեք արտապատկերում երկրորդի վրա, որը կլինի իզոմորֆիզմ

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$

հավասարության շնորհիվ։

Վերցնենք, այնուհետև, կոմպլեքս թվերի դաշտում մեկից n-րդ աստիճանի արմատների համախումբը։ § 19-ում ապացուցվել է, որ մեկից n-րդ աստիճանի երկու արմատների արտադրյալը, ինչպես նաև մեկից n-րդ աստիճանի արմատի հակադարձ թիվը պատկանում են թվերի դիտարկվող համախմբին։ Քանի որ, հասկանալի է, մեկը նույնպես պատկանում է այդ համախմբին և քանի որ ցանկացած կոմպլեքս թվերի բազմապատկումը զուգորդելի և տեղափոխելի է, ապա մենք ստանում ենք, որ մեկից n-րդ աստիճանի արմատները բազմապատկման նկատմամբ կազմում են աբելյան խումբ, ընդ որում՝ n-րդ կարգի վերջավոր խումբ։ Այսպիսով, ցանկացած n բնական թվի համար գոյություն ունեն n-րդ կարգի վերջավոր խմբեր։

Մեկից n-րդ աստիճանի արմատների խումբը (բազմապատկման նկատմամբ) իզոմորֆ է § 45-ում կառուցված Z_n օղակի ադդիտիվ խմբին։ Իրոք, եթե ε-ը մեկից n-րդ աստիճանի նախնական արմատ է, ապա անվանված խմբերից առաջինի բոլոր էլեմենտներն ունեն ε^k տեսքը, $k=0, 1, \ldots, n-1$։ Եթե մենք ամեն մի ε^k թվին համապատասխանության մեջ դնենք Z_n օղակի C_k էլեմենտը, այսինքն՝ այն ամբողջ թվերի դասը, որոնք n-ի վրա բաժանելիս տալիս են k

մնացորդը, ապա կստանանք իզոմորֆ համապատասխանություն դիտարկվող խմբերի միջև. եթե $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$ և եթե $k+l=nq+r$, որտեղ $0 \leqslant r \leqslant n-1$, իսկ q-ն հավասար է 0-ի կամ 1-ի, ապա $\varepsilon^k \cdot \varepsilon^l = \varepsilon^r$ և, դրա հետ մեկտեղ, $C_k + C_l = C_r$:

Այժմ տեղին է ցույց տալ թվային բազմությունների մի քանի օրինակներ, որոնք խմբեր չեն հանդիսանում: Այսպես, բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունը խումբ չի լինի բազմապատկման նկատմամբ, բոլոր դրական իրական թվերի բազմությունը խումբ չի լինի, գումարման նկատմամբ, բոլոր կենտ թվերի բազմությունը խումբ չի լինի գումարման նկատմամբ, բոլոր բացասական իրական թվերի բազմությունը խումբ չի լինի բազմապատկման նկատմամբ: Այս բոլոր պնդումների ստուգումը դժվարություն չի ներկայացնում:

Վերևում դիտարկված բոլոր թվային խմբերը հանդիսանում են, իհարկե, աբելյան խմբեր: Ոչ թվերից կազմված աբելյան խմբերի օրինակներ են ծառայում գծային տարածությունները. ինչպես բխում է նրանց սահմանումից (տե՛ս §§ 29, 47), ամեն մի գծային տարածություն կամավոր P դաշտի վրա կլինի աբելյան խումբ՝ գումարման գործողության նկատմամբ:

Անցնենք ոչկոմուտատիվ խմբերի օրինակներին:

P դաշտի վրա n-րդ կարգի բոլոր մատրիցների բազմությունը խումբ չի լինի բազմապատկման գործողության նկատմամբ, քանի որ հակադարձ էլեմենտի գոյության պահանջը խախտվում է: Սակայն, եթե մենք սահմանափակվենք միայն չվերասերվող մատրիցներով, ապա արդեն խումբ կստանանք: Իրոք, ինչպես մենք գիտենք, երկու չվերասերվող մատրիցների արտադրյալը կլինի չվերասերվող մատրից, միավոր մատրիցը չվերասերվող է, ամեն մի չվերասերվող մատրից օժտված է նույնպես չվերասերվող հակադարձ մատրիցով և, վերջապես, զուգորդելիության օրենքը, որը տեղի ունի բոլոր մատրիցների համար, մասնավորապես իրավացի է չվերասերվող մատրիցների համար: Հետևաբար, կարելի է խոսել P դաշտի վրա n-րդ կարգի չվերասերվող մատրիցների խմբի մասին՝ *խմբային գործողություն համարելով մատրիցների բազմապատկումը. այդ խումբը կոմուտատիվ չէ $n \geqslant 2$ դեպքում:*

Ոչկոմուտատիվ վերջավոր խմբերի շատ կարևոր օրինակներ է բերում § 3-ում մուծված տեղադրությունների բազմապատկումը: Մենք գիտենք, որ n-րդ աստիճանի բոլոր տեղադրությունների բազմության մեջ բազմապատկումը կլինի հանրահաշվական գործողություն, այն էլ՝ զուգորդելի, թեկուզ և $n \geqslant 3$ դեպքում ոչկոմուտատիվ. որ E նույնական տեղադրությունը այդ բազմապատկման համար միավոր է ծառայում և որ ամեն մի տեղադրության համար գոյություն ունի հակադարձ տեղադրություն: Այսպիսով, n-րդ աստիճանի տեղադրությունների բազմու-

թյունը բազմապատկման նկատմամբ խումբ է կազմում, ընդ որում վերջավոր խումբ՝ n! կարգի: *Այդ խումբը կոչվում է* n-րդ աստիճանի սիմետրիկ խումբ. *այն ոչկոմուտատիվ է $n \geqslant 3$ դեպքում:*

n-րդ աստիճանի բոլոր տեղադրությունների համախմբի փոխարեն դիտարկենք այժմ միայն զույգ տեղադրությունների համախումբը, որը, ինչպես գիտենք, կազմված է $\frac{1}{2}n!$ էլեմենտներից: Օգտագործելով § 3-ում ապացուցված թեորեմն այն մասին, որ տեղադրության զույգությունը համընկնում է այն դիրքափոխությունների թվի զույգության հետ, որոնք մտնում են այդ տեղադրության որևէ վերլուծության մեջ՝ դիրքափոխությունների արտադրյալի տեսքով, մենք ստանում ենք, որ երկու զույգ տեղադրությունների արտադրյալն ինքը զույգ տեղադրություն է. *իսկապես, AB-ի ներկայացումը դիրքափոխությունների արտադրյալի տեսքով մենք կստանանք՝ A-ի և B-ի համար համապատասխան վերլուծությունները գրելով մեկը մյուսի հետևից: Այնուհետև, տեղադրությունների բազմապատկման զուգորդելիությունը մեզ հայտնի է, նույնական տեղադրության զույգությունը ակներև է: Վերջապես, A զույգ տեղադրության դեպքում A^{-1} տեղադրության զույգությունը հետևում է թեկուզ և նրանից, որ այդ տեղադրությունների գրառումները կարելի է ստանալ մեկը մյուսից՝ վերին և ստորին տողերի տեղերը փոխելով, այսինքն՝ նրանք պարունակում են հավասար թվով կարգափոխություններ: Այսպիսով,* n-րդ աստիճանի զույգ տեղադրությունների բազմությունը կլինի $\frac{1}{2}n!$ կարգի վերջավոր խումբ բազմապատկման նկատմամբ: *Այդ խումբը կոչվում է* n-րդ աստիճանի նշանափոխ խումբ. *հեշտ է ստուգել, որ $n \geqslant 4$ դեպքում այն կոմուտատիվ չէ, չնայած $n=3$ դեպքում կլինի կոմուտատիվ:*

Սիմետրիկ և նշանափոխ խմբերը շատ մեծ դեր են խաղում վերջավոր խմբերի տեսության, ինչպես նաև Գալուայի տեսության մեջ: Նկատենք, որ նշանափոխ խմբերի համանմանությամբ անհնար կլիներ բազմապատկման նկատմամբ խումբ կառուցել կենտ տեղադրություններից, քանի որ երկու կենտ տեղադրությունների արտադրյալը միշտ զույգ տեղադրություն է:

Խմբերի մեծ թվով զանազան օրինակներ են տալիս երկրաչափության տարբեր ճյուղերը: Նշենք այդպիսի մի պարզագույն օրինակ. գնդի բոլոր պտույտների բազմությունը իր կենտրոնի շուրջը կլինի խումբ, այն էլ՝ ոչկոմուտատիվ, եթե երկու պտույտների արտադրյալ անվանենք նրանց հաջորդական կատարման արդյունքը:

§ 64. Ենթախմբեր

G խմբի A ենթաբազմությունը կոչվում է այդ խմբի **ենթախումբ**, եթե նա ինքը խումբ է G խմբում որոշված գործողության նկատմամբ:

Այն բանի ստուգման համար, թե հանդիսանու՞մ է արդյոք G խմբի A ենթաբազմությունը այդ խմբի ենթախումբ, բավական է ստուգել. 1) պարունակվու՞մ է արդյոք A-ի մեջ A-ի ցանկացած երկու էլեմենտների արտադրյալը, 2) պարունակու՞մ է արդյոք A-ն իր ամեն մի էլեմենտի հետ նաև նրա հակադարձ էլեմենտը: Իրոք, G խմբում զուգորդելիության օրենքի իրավացիությունից հետևում է նրա իրավացիությունը A-ի էլեմենտների համար, իսկ G խմբի միավորի պատկանելությունը A-ին բխում է 2)-ից և 1)-ից:

Նախորդ պարագրաֆում նշված խմբերից շատերը հանդիսանում են հենց այնտեղ նշված ուրիշ խմբերի ենթախմբեր: Այսպես, զույգ թվերի ադդիտիվ խումբը հանդիսանում է բոլոր ամբողջ թվերի ադդիտիվ խմբի ենթախումբ, իսկ վերջինս իր հերթին՝ ռացիոնալ թվերի ադդիտիվ խմբի ենթախումբն է: Բոլոր այս խմբերը, ինչպես և ընդհանրապես թվերի ադդիտիվ խմբերը, հանդիսանում են կոմպլեքս թվերի ադդիտիվ խմբի ենթախմբեր: Դրական իրական թվերի մուլտիպլիկատիվ խումբը հանդիսանում է զրոյից տարբեր բոլոր իրական թվերի մուլտիպլիկատիվ խմբի ենթախումբ: n-րդ աստիճանի նշանափոխ խումբը այդ նույն աստիճանի սիմետրիկ խմբի ենթախումբ է:

Ընդգծենք, որ ենթախմբի սահմանման մեջ պարունակվող այն պահանջը, որ G խմբի A ենթախումբը G խմբում որոշված խմբային գործողության նկատմամբ լինի խումբ, էական է: Այսպես, դրական իրական թվերի մուլտիպլիկատիվ խումբը չի հանդիսանում բոլոր իրական թվերի ադդիտիվ խմբի ենթախումբ, չնայած առաջին բազմությունը, որպես ենթաբազմություն պարունակվում է երկրորդի մեջ:

Եթե G խմբում վերցված են A և B ենթախմբեր, ապա նրանց A∩B փոխհատույթը, այսինքն՝ և՛ A-ի, և՛ B-ի մեջ պարունակվող էլեմենտների համախումբը նույնպես կլինի G խմբի ենթախումբ:

Իրոք, եթե A∩B փոխհատույթի մեջ պարունակվում են x և y էլեմենտներ, ապա նրանք պարունակվում են A ենթախմբում և, հետևաբար, A-ին պատկանում են և՛ xy արտադրյալը, և՛ x^{-1} հակադարձ էլեմենտը: Նույն նկատառումներով xy և x^{-1} էլեմենտները պատկանում են նաև B ենթախմբին և, հետևաբար, նրանք մտնում են նաև A∩B-ի մեջ:

Ինչպես հեշտ է նկատել, ստացված արդյունքն իրավացի է ոչ

միայն երկու ենթախմբերի համար, այլև ցանկացած վերջավոր թվով կամ, նույնիսկ՝ անվերջ թվով ենթախմբերի համար:

Ակներև է, որ G խմբի՝ միայն 1 էլեմենտից կազմված ենթաբազմությունը կլինի այդ խմբի ենթախումբ. այդ ենթախումբը, որը պարունակվում է G խմբի ցանկացած ուրիշ ենթախմբում, կոչվում է G խմբի **միավոր ենթախումբ**: Մյուս կողմից, G խումբն ինքը հանդիսանում է իր ենթախմբերից մեկը:

Ենթախմբերի հետաքրքիր օրինակ են ծառայում այսպես կոչված ցիկլիկ ենթախմբերը: Նախ մտցնենք G խմբի a էլեմենտի աստիճանի գաղափարը: Եթե n-ը ցանկացած բնական թիվ է, ապա a-ին հավասար n հատ էլեմենտների արտադրյալը կոչվում է a էլեմենտի n-րդ **աստիճան** և նշանակվում է a^n-ով: a էլեմենտի **բացասական աստիճանները** կարելի է սահմանել կա՛մ որպես G խմբի այնպիսի էլեմենտներ, որոնք այդ էլեմենտի դրական աստիճանների հակադարձ էլեմենտներն են, կա՛մ որպես a^{-1} էլեմենտին հավասար մի քանի արտադրիչների արտադրյալ:

Իրականում այդ սահմանումները համընկնում են՝

$$(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n,\quad n>0: \tag{1}$$

Այդ ապացուցելու համար բավական է վերցնել 2n հատ արտադրիչների արտադրյալը, որոնցից առաջին n հատ արտադրիչները հավասար են a-ի, իսկ մնացածները՝ a^{-1}-ի, և կատարել բոլոր կրճատումները: (1) հավասարության ինչպես ձախ, այնպես էլ աջ մասին հավասար էլեմենտը կնշանակենք a^{-n}-ով: Վերջապես, պայմանավորվենք a էլեմենտի a^0 **զրո աստիճանի** տակ հասկանալ 1 էլեմենտը:

Նկատենք, որ եթե գործողությունը G խմբում կոչվում է գումարում, ապա a էլեմենտի աստիճանների փոխարեն հարկավոր է խոսել այդ էլեմենտի **բազմապատիկների** մասին և գրել այն ka-ով:

Առանց դժվարության ստուգվում է, որ ցանկացած G խմբում ցանկացած a էլեմենտի աստիճանների համար ցանկացած (դրական, բացասական կամ զրո) m և n ցուցիչների դեպքում տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$a^n \cdot a^m=a^m \cdot a^n=a^{n+m}, \tag{2}$$

$$(a^n)^m=a^{nm}: \tag{3}$$

G խմբի՝ a էլեմենտի բոլոր աստիճաններից կազմված ենթաբազմությունը նշանակենք {a}-ով. նրա մեջ մտնում է և ինքը՝ a էլեմենտը, որը հանդիսանում է իր առաջին աստիճանը: {a} ենթաբազմությունը կլինի G խմբի ենթախումբ. {a}-ի էլեմենտների արտադրյալը, (2)-ի շնորհիվ, գտնվում է {a}-ի մեջ, {a}-ի մեջ մտնում է a^0-ին հավասար 1 էլեմենտը և, վերջապես, {a}-ն իր ամեն մի էլեմենտի հետ միասին պարունակում է նաև նրա հակադարձ էլեմենտը, քանի որ (3)-ից հետևում է

$$(a^n)^{-1}=a^{-n}$$

հավասարությունը։

{a} ենթախումբը կոչվում է G խմբի՝ a էլեմենտով առաջացած ցիկլային ենթախումբ։ Ինչպես ցույց է տալիս (2) հավասարությունը, այն միշտ կոմուտատիվ է, եթե նույնիսկ G խումբն ինքը կոմուտատիվ չէ։

Նկատենք, որ վերևում ոչ մի տեղ չի ասվել, որ a էլեմենտի բոլոր աստիճանները խմբի տարբեր էլեմենտներ են։ Եթե այդ իրոք այդպես է, ապա a-ն կոչվում է անվերջ կարգի էլեմենտ։ Դիցուք, սակայն, a էլեմենտի աստիճանների թվում կան հավասարները, օրինակ՝ $a^k=a^l$ $k\neq l$ դեպքում. վերջավոր խմբերի դեպքում, այդ միշտ տեղի ունի, բայց կարող է պատահել և անվերջ խմբում։ Եթե $k>l$, ապա՝

$$a^{k-l}=1,$$

այսինքն՝ գոյություն ունեն a էլեմենտի այնպիսի դրական աստիճաններ, որոնք հավասար են միավորի։ Դիցուք n-ը այն դրական ամենափոքր թիվն է, որի դեպքում a^n-ը հավասար է մեկի, այսինքն՝

1) $a^n=1$, $n>0$,

2) եթե $a^k=1$, $k>0$ ապա $k\geqslant n$։

Այդ դեպքում ասում են, որ a-ն վերջավոր կարգի, այն է՝ n կարգի էլեմենտ է։

Եթե a էլեմենտն ունի n վերջավոր կարգ, ապա

$$1, a, a^2, \dots, a^{n-2}$$

էլեմենտները, ինչպես հեշտ է տեսնել, բոլորը տարբեր կլինեն։ a էլեմենտի ամեն մի այլ աստիճան՝ դրական կամ բացասական, հավասար է (4)-ի էլեմենտներից մեկին։ Իրոք, եթե k-ն ցանկացած ամբողջ թիվ է, ապա k-ն բաժանելով n-ի, կստանանք՝

$$k=nq+r,\quad 0\leqslant r<n,$$

ուստի, շնորհիվ (2)-ի և (3)-ի,

$$a^k=(a^n)^q\cdot a^r=a^r: \qquad (5)$$

Այստեղից հետևում է, որ եթե a էլեմենտն ունի n վերջավոր կարգ և $a^k=1$, ապա k-ն պետք է առանց մնացորդի բաժանվի n-ի վրա։ Մյուս կողմից. քանի որ

$$-1=n(-1)+(n-1),$$

ապա n վերջավոր կարգի a էլեմենտի համար

$$a^{-1}=a^{n-1}:$$

Քանի որ (4) սիստեմը պարունակում է n հատ էլեմենտներ, ապա վերևում ստացված արդյունքներից բխում է, որ վերջավոր կարգ ունեցող a էլեմենտի համար նրա n կարգը համընկնում է {a} ցիկլային ենթախմբի կարգի (այսինքն՝ էլեմենտների թվի) հետ։

Նկատենք, վերջապես, որ ամեն մի խումբ ունի առաջին կարգի միայն մեկ էլեմենտ. դա կլինի 1 էլեմենտը։ Ակներևորեն, {1} ցիկլային ենթախումբը համընկնում է միավոր ենթախմբի հետ։

Ցիկլային խմբեր։ G խումբը կոչվում է ցիկլային (շրջանային) խումբ, եթե այն կազմված է իր մի որևէ a էլեմենտի աստիճաններից, այսինքն՝ համընկնում է իր {a} ցիկլային ենթախմբերից մեկի հետ. a էլեմենտն այդ դեպքում կոչվում է G խմբի ծնորդ էլեմենտ։ Ակներև է, որ ամեն մի ցիկլային խումբ աբելյան խումբ է։

Անվերջ ցիկլային խմբի օրինակ է ծառայում ամբողջ թվերի ադդիտիվ խումբը. ամեն մի ամբողջ թիվ 1 թվի բազմապատիկն է, այսինքն՝ այդ թիվը ծառայում է որպես դիտարկվող խմբի ծնորդ էլեմենտ. որպես ծնորդ էլեմենտ կարելի էր վերցնել նաև −1 թիվը։

n կարգի վերջավոր ցիկլային խմբի օրինակ է ծառայում մեկից n-րդ աստիճանի արմատների մուլտիպլիկատիվ խումբը. § 19-ում ցույց է տրվել, որ բոլոր այդ արմատները հանդիսանում են նրանցից մեկի, այն է՝ նախնական արմատի աստիճաններ։

Հետևյալ թեորեման ցույց է տալիս, որ այս օրինակներով ըստ էության սպառվում են բոլոր ցիկլային խմբերը։

Բոլոր անվերջ ցիկլային խմբերն իզոմորֆ են միմյանց. միմյանց իզոմորֆ են նաև տված n կարգի բոլոր վերջավոր ցիկլային խմբերը։

Իրոք, a ծնորդ էլեմենտ ունեցող անվերջ ցիկլային խումբը փոխադարձ միարժեքորեն արտապատկերվում է ամբողջ թվերի ադդիտիվ խմբին, եթե այդ խմբի ամեն մի a^k էլեմենտին համապատասխանության մեջ է դրվում k թիվը. այդ արտապատկերումը կլինի իզոմորֆ արտապատկերում, քանի որ, ըստ (2)-ի, a էլեմենտի աստիճանները բազմապատկելիս ցուցիչները գումարվում են։ Իսկ եթե տված է n կարգի վերջավոր ցիկլային G խումբ a ծնորդ էլեմենտով, ապա մեկից n-րդ աստիճանի նախնական արմատը նշանակենք ε-ով և G խմբի ամեն մի a^k էլեմենտին համապատասխանեցնենք ε^k թիվը, $0\leqslant k<n$։ Դա կլինի G խմբի այնպիսի փոխադարձ միարժեք արտապատկերում 1-ից n-րդ աստիճանի արմատների մուլտիպլիկատիվ խմբի վրա, որի իզոմորֆությունը հետևում է (2)-ից և (5)-ից։

Այս թեորեման թույլատրում է խոսել պարզապես անվերջ ցիկլային խմբերի կամ n կարգի ցիկլային խմբի մասին։

Դիտարկենք, օրինակ, 3-րդ աստիճանի S_3 սիմետրիկ խումբը, ընդ որում, § 3-ին համապատասխան, նրա էլեմենտները կգրենք ցիկլերի միջոցով։ Որպես A ենթախումբ վերցնենք (12) էլեմենտի ցիկլային ենթախումբը. այն կազմված է նույնական տեղադրությունից և հենց (12) տեղադրությունից։ Ձախից հարևան մյուս դասերը կլինեն՝ (13) · A դասը, որը բաղկացած է (13) և (132) տեղադրություններից, և (23) · A դասը, որը բաղկացած է (23) և (123) տեղադրություններից։ Մյուս կողմից, S_3 խմբի՝ A ենթախմբի նկատմամբ աջից հարևան դասեր կլինեն՝ ինքը՝ A ենթախումբը, A · (13) դասը, որը բաղկացած է (13) և (123) տեղադրություններից, և A · (23) դասը, որը բաղկացած է (23) և (132) տեղադրություններից։ Մենք տեսնում ենք, որ աջակողմյան վերլուծությունը դիտարկվող դեպքում տարբերվում է ձախակողմյանից։

Վերջավոր խմբերի դեպքում խմբի՝ ենթախմբի նկատմամբ վերլուծությունների գոյությունը բերում է հետևյալ կարևոր թեորեմային.

Լ ա գ ր ա ն ժ ի թ ե ո ր ե մ ա ն։ Ամեն մի վերջավոր խմբում ցանկացած ենթախմբի կարգը հանդիսանում է խմբի կարգի բաժանարարը։

Իրոք, դիցուք n կարգի G վերջավոր խմբում տրված է k կարգի A ենթախումբը։ Դիտարկենք G խմբի ձախակողմյան վերլուծությունը A ենթախմբի նկատմամբ։ Դիցուք այն բաղկացած է j հատ դասերից. j թիվը կոչվում է A ենթախմբի ինդեքս G խմբում։ Յուրաքանչյուր xA ձախ դաս բաղկացած է ճիշտ k հատ էլեմենտներից, քանի որ եթե՝

$$xa_1 = xa_2,$$

որտեղ a_1-ը և a_2-ը A-ի էլեմենտներ են, ապա $a_1 = a_2$։ Այսպիսով՝

$$n = kj,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Քանի որ էլեմենտի կարգը համընկնում է նրա ցիկլային ենթախմբի կարգի հետ, ապա Լագրանժի թեորեմայից հետևում է, որ վերջավոր խմբի ամեն մի էլեմենտի կարգը հանդիսանում է խմբի կարգի բաժանարար։

Լագրանժի թեորեմայից հետևում է նաև, որ ամեն մի վերջավոր խումբ, որի կարգը պարզ թիվ է, կլինի ցիկլային խումբ։ Իրոք, այդ խումբը պետք է համընկնի նրա՝ միավորից տարբեր ցանկացած էլեմենտով առաջացած ցիկլային ենթախմբի հետ։ Այստեղից բխում է, շնորհիվ վերևում ստացված ցիկլային խմբերի նկարագրության, որ ամեն մի p պարզ թվի համար գոյություն ունի միակ (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ) p կարգի վերջավոր խումբ։

§ 65. Նորմալ բաժանարարներ, բազմապատկիչ-խմբեր (ֆակտոր-խմբեր), հոմոմորֆիզմներ (նմանաձևություններ)

G խմբի A ենթախումբը կոչվում է այդ խմբի նորմալ բաժանարար կամ անփոփոխելի (ինվարիանտ) ենթախումբ, եթե G խմբի ձախակողմյան վերլուծությունն A ենթախմբի նկատմամբ համընկնում է աջակողմյանի հետ։ Այսպիսով, աբելյան խմբի բոլոր ենթախմբերը նրա մեջ նորմալ բաժանարարներ են։ Մյուս կողմից, ամեն մի G խմբում և՛ միավոր ենթախումբը, և՛ ինքը՝ այդ խումբը, կլինեն նորմալ բաժանարարներ. G խմբի երկու վերլուծություններն էլ միավոր ենթախմբի նկատմամբ համընկնում են խմբի առանձին էլեմենտների վերլուծության հետ։

G խմբի երկու վերլուծություններն էլ այդ նույն G խմբի նկատմամբ կազմված են մեկ G դասից։

Նշենք նորմալ բաժանարարների ավելի հետաքրքիր օրինակներ ոչկոմուտատիվ խմբերում։ S_3 3-րդ աստիճանի սիմետրիկ խմբում (123) էլեմենտի ցիկլային ենթախումբը, որը բաղկացած է նույնական տեղադրությունից և (123) ու (132) տեղադրություններից, կլինի նորմալ բաժանարար. S_3 խմբի երկու վերլուծություններում, ըստ այդ ենթախմբի, երկրորդ հարևան դասը բաղկացած է (12), (13) և (23) տեղադրություններից։

Ընդհանրապես, n-րդ աստիճանի S_n սիմետրիկ խմբում n-րդ աստիճանի A_n նշանափոխ խումբը կլինի նորմալ բաժանարար։ Իրոք, A_n խումբն ունի $\frac{1}{2}n!$ կարգը, դրա համար էլ S_n խմբում՝ A_n ենթախմբին հարևան ամեն մի դաս պետք է բաղկացած լինի նույնքան էլեմենտներից և, հետևաբար, այդպիսի դաս կա էլի՛ միայն մեկը, այն է՝ կենտ տեղադրությունների համախումբը։

P դաշտի էլեմենտներից կազմած n կարգի չվերասերվող քառակուսի մատրիցների մուլտիպլիկատիվ խմբում այն մատրիցները, որոնց դետերմինանտը հավասար է 1-ի, ակներևորեն, կազմում են ենթախումբ։ Դա կլինի նույնիսկ նորմալ բաժանարար, քանի որ այդ ենթախմբի՝ M մատրիցով առաջացած հարևան դասը, միաժամանակ ձախից և աջից, հանդիսանում է բոլոր այն մատրիցների դասը, որոնց դետերմինանտը հավասար է M մատրիցի դետերմինանտին. բավական է հիշել, որ մատրիցները բազմապատկելիս նրանց դետերմինանտները բազմապատկվում են։

Նորմալ բաժանարարի վերևում բերված սահմանմանը կարելի է տալ հետևյալ ձևը.

G խմբի A ենթախումբը կոչվում է այդ խմբի նորմալ բաժանարար, եթե G-ի ամեն մի x էլեմենտի համար

$$xA = Ax, \tag{1}$$

Դիտարկենք, օրինակ, 3-րդ աստիճանի S_3 սիմետրիկ խումբը, ընդ որում, § 3-ին համապատասխան, նրա էլեմենտները կգրենք ցիկլերի միջոցով։ Որպես A ենթախումբ վերցնենք (12) էլեմենտի ցիկլային ենթախումբը. այն կազմված է նույնական տեղադրությունից և հենց (12) տեղադրությունից։ Ձախից հարևան մյուս դասերը կլինեն՝ (13) · A դասը, որը բաղկացած է (13) և (132) տեղադրություններից, և (23) · A դասը, որը բաղկացած է (23) և (123) տեղադրություններից։ Մյուս կողմից, S_3 խմբի՝ A ենթախմբի նկատմամբ աջից հարևան դասեր կլինեն՝ ինքը՝ A ենթախումբը, A · (13) դասը, որը բաղկացած է (13) և (123) տեղադրություններից, և A · (23) դասը, որը բաղկացած է (23) և (132) տեղադրություններից։ Մենք տեսնում ենք, որ աջակողմյան վերլուծությունը դիտարկվող դեպքում տարբերվում է ձախակողմյանից։

Վերջավոր խմբերի դեպքում խմբի՝ ենթախմբի նկատմամբ վերլուծությունների գոյությունը բերում է հետևյալ կարևոր թեորեմային.

Լագրանժի թեորեմա։ Ամեն մի վերջավոր խմբում ցանկացած ենթախմբի կարգը հանդիսանում է խմբի կարգի բաժանարարը։

Իրոք, դիցուք n կարգի G վերջավոր խմբում տրված է k կարգի A ենթախումբը։ Դիտարկենք G խմբի ձախակողմյան վերլուծությունը A ենթախմբի նկատմամբ։ Դիցուք այն բաղկացած է j հատ դասերից. j թիվը կոչվում է A ենթախմբի ինդեքս *G խմբում։ Յուրաքանչյուր xA ձախ դաս բաղկացած է ճիշտ k հատ էլեմենտներից, քանի որ եթե՝*

$$xa_1 = xa_2,$$

որտեղ a_1-ը և a_2-ը A-ի էլեմենտներ են, ապա $a_1 = a_2$։ Այսպիսով՝

$$n = kj,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Քանի որ էլեմենտի կարգը համընկնում է նրա ցիկլային ենթախմբի կարգի հետ, ապա Լագրանժի թեորեմայից հետևում է, որ վերջավոր խմբի ամեն մի էլեմենտի կարգը հանդիսանում է խմբի կարգի բաժանարար։

Լագրանժի թեորեմայից հետևում է նաև, որ ամեն մի վերջավոր խումբ, որի կարգը պարզ թիվ է, կլինի ցիկլային խումբ։ *Իրոք, այդ խումբը պետք է համընկնի նրա՝ միավորից տարբեր ցանկացած էլեմենտով առաջացած ցիկլային ենթախմբի հետ։ Այստեղից բխում է, շնորհիվ վերևում ստացված ցիկլային խմբերի նկարագրության, որ* ամեն մի p պարզ թվի համար գոյություն ունի միակ (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ) p կարգի վերջավոր խումբ։

§ 65. Նորմալ բաժանարարներ, բազմապատկիչ-խմբեր (ֆակտոր-խմբեր), հոմոմորֆիզմներ (նմանաձևություններ)

G *խմբի* A *ենթախումբը կոչվում է այդ խմբի* **նորմալ բաժանարար կամ անփոփոխելի (ինվարիանտ) ենթախումբ,** *եթե* G *խմբի ձախակողմյան վերլուծությունն* A *ենթախմբի նկատմամբ համընկնում է աջակողմյանի հետ։ Այսպիսով, աբելյան խմբի բոլոր ենթախմբերը նրա մեջ նորմալ բաժանարարներ են։ Մյուս կողմից, ամեն մի* G *խմբում և՛ միավոր ենթախումբը, և՛ ինքը՝ այդ խումբը, կլինեն նորմալ բաժանարարներ.* G *խմբի երկու վերլուծություններն էլ միավոր ենթախմբի նկատմամբ համընկնում են խմբի առանձին էլեմենտների վերլուծության հետ։*

G *խմբի երկու վերլուծություններն էլ այդ նույն* G *խմբի նկատմամբ կազմված են մեկ* G *դասից։*

Նշենք նորմալ բաժանարարների ավելի հետաքրքիր օրինակներ ոչկոմուտատիվ խմբերում։ S_3 *3-րդ աստիճանի սիմետրիկ խմբում (123) էլեմենտի ցիկլային ենթախումբը, որը բաղկացած է նույնական տեղադրությունից և (123) ու (132) տեղադրություններից, կլինի նորմալ բաժանարար.* S_3 *խմբի երկու վերլուծություններում, ըստ այդ ենթախմբի, երկրորդ հարևան դասը բաղկացած է (12), (13) և (23) տեղադրություններից։*

Ընդհանրապես, n-րդ աստիճանի S_n *սիմետրիկ խմբում n-րդ աստիճանի* A_n *նշանափոխ խումբը կլինի նորմալ բաժանարար։ Իրոք,* A_n *խումբն ունի* $\frac{1}{2}n!$ *կարգը, դրա համար էլ* S_n *խմբում՝* A_n *ենթախմբին հարևան ամեն մի դաս պետք է բաղկացած լինի նույնքան էլեմենտներից և, հետևաբար, այդպիսի դաս կա էլ՛ միայն մեկը, այն է՝ կենտ տեղադրությունների համախումբը։*

P *դաշտի էլեմենտներից կազմված* n *կարգի չվերասերվող քառակուսի մատրիցների մուլտիպլիկատիվ խմբում այն մատրիցները, որոնց դետերմինանտը հավասար է 1-ի, ակներևորեն, կազմում են ենթախումբ։ Դա կլինի նույնիսկ նորմալ բաժանարար, քանի որ այդ ենթախմբի՝* M *մատրիցով առաջացած հարևան դասը, միաժամանակ ձախից և աջից, հանդիսանում է բոլոր այն մատրիցների դասը, որոնց դետերմինանտը հավասար է* M *մատրիցի դետերմինանտին. բավական է հիշել, որ մատրիցները բազմապատկելիս նրանց դետերմինանտները բազմապատկվում են։*

Նորմալ բաժանարարի վերևում բերված սահմանմանը կարելի է տալ հետևյալ ձևը.

G *խմբի* A *ենթախումբը կոչվում է այդ խմբի նորմալ բաժանարար, եթե* G*-ի ամեն մի* x *էլեմենտի համար*

$$xA = Ax, \tag{1}$$

այսինքն՝ եթե G-ի ամեն մի x էլեմենտի և A-ի a էլեմենտի համար A-ի մեջ կարելի է ընտրել այնպիսի a′ և a″ էլեմենտներ, որ՝

$$xa=a'x, \quad ax=xa''. \qquad (2)$$

Կարելի է նշել նորմալ բաժանարարի ուրիշ սահմանումներ ևս, որոնք հավասարազոր են ելակետայինին։ Այսպես, G խմբի a և b էլեմենտներն անվանենք իրար համալուծ, եթե G-ում գոյություն ունի թեկուզ մեկ այնպիսի x էլեմենտ, որ

$$b=x^{-1}ax, \qquad (3)$$

այսինքն, ինչպես ասում են, b էլեմենտը ստացվում է a էլեմենտից՝ x էլեմենտով փոխակերպելով։ Ակներևորեն (3)-ից հետևում է

$$a=xbx^{-1}=(x^{-1})^{-1}bx^{-1}$$

հավասարությունը։

G խմբի A ենթախումբը կլինի նորմալ բաժանարար G-ում այն և միայն այն ժամանակ, երբ իր ամեն մի a էլեմենտի հետ միասին այն պարունակում է նաև բոլոր այն էլեմենտները, որոնք նրան համալուծ են G-ում։

Իրոք, եթե A-ն նորմալ բաժանարար է G-ում, ապա, ըստ (2)-ի, A-ի՝ մեր կողմից ընտրված a էլեմենտի և G-ի ցանկացած x էլեմենտի համար կարելի է A-ում ընտրել այնպիսի a″ էլեմենտ, որ

$$ax=xa'',$$

այստեղից՝

$$x^{-1}ax=a'',$$

այսինքն՝ a-ին համալուծ ամեն մի էլեմենտ պարունակվում է A-ում։ Հակադարձաբար, եթե A ենթախումբը իր ամեն մի a էլեմենտի հետ միասին պարունակում է նաև նրան համալուծ բոլոր էլեմենտները, ապա A-ում պարունակվում է, մասնավորապես,

$$x^{-1}ax=a''$$

էլեմենտը, որտեղից հետևում է (2) հավասարություններից երկրորդը։ Նույն պատճառով A-ում պարունակվում է նաև

$$(x^{-1})^{-1}ax^{-1}=xax^{-1}=a'$$

էլեմենտը, որտեղից հետևում է (2) հավասարություններից առաջինը ևս։

Օգտվելով այս արդյունքից, հեշտ է ապացուցել, որ **G խմբի ցանկացած նորմալ բաժանարարների փոխհատույթն ինքը կլինի այդ խմբի նորմալ բաժանարար։**

Իրոք, եթե A-ն և B-ն G խմբի նորմալ բաժանարարներ են, ապա, ինչպես ցույց է տրվել նախորդ պարագրաֆում, $A \cap B$ փոխհատույթը կլինի G խմբի ենթախումբ։ Դիցուք c-ն ցանկացած էլեմենտ է $A \cap B$-ից, x-ը՝ ցանկացած էլեմենտ է G խմբից։ Այդ ժամանակ

$x^{-1}cx$ էլեմենտը պետք է պարունակվի և՛ A-ի, և՛ B-ի մեջ, քանի որ այդ երկու նորմալ բաժանարարն էլ պարունակում են c էլեմենտը։ Այստեղից հետևում է, որ $x^{-1}cx$ էլեմենտը մտնում է $A \cap B$ փոխհատույթի մեջ,

Բազմապատկիչ-խումբ (ֆակտոր-խումբ)։ Նորմալ բաժանարարի գաղափարի նշանակությունը հիմնված է այն բանի վրա, որ նորմալ բաժանարարին հարևան դասերից (նկատի ունենալով (1)-ը՝ ձախից և աջից հարևան դասերը կարելի է այս դեպքում չտարբերել) մի շատ բնական եղանակով կարելի է կառուցել մի նոր խումբ։

Նախ նկատենք, որ եթե A-ն G խմբի կամայական ենթախումբ է, ապա՝

$$AA=A, \qquad (4)$$

քանի որ A ենթախմբի ցանկացած երկու էլեմենտների արտադրյալը պատկանում է A-ին և, դրա հետ միասին, A-ի բոլոր էլեմենտները բազմապատկելով մեկով, մենք արդեն կստանանք ամբողջ A ենթախումբը։

Թո՛ղ A-ն լինի G խմբի նորմալ բաժանարար։ **Այդ դեպքում G խմբի՝ A ենթախմբի նկատմամբ հարևան ցանկացած երկու դասերի արտադրյալը** (G խմբի ենթաբազմությունների բազմապատկման իմաստով) **ինքը կլինի հարևան դաս** A-ի նկատմամբ։ Իրոք, օգտագործելով խմբի ենթաբազմությունների բազմապատկման զուգորդելիությունը, (4) հավասարությունը և

$$yA=Ay$$

հավասարությունը (համեմատել (1)-ի հետ), մենք G խմբի ցանկացած x և y էլեմենտների համար կստանանք՝

$$xA \cdot yA=xyAA=xyA. \qquad (5)$$

(5) հավասարությունը ցույց է տալիս, որ՝ որպեսզի գտնենք G խմբի A նորմալ բաժանարարի նկատմամբ տված երկու հարևան դասերի արտադրյալը, պետք է այդ հարևան դասերում կամավորապես ընտրել մեկական ներկայացուցիչ (հիշեցնենք, որ ամեն մի հարևան դաս առաջանում է իր էլեմենտներից յուրաքանչյուրով) և վերցնել հարևան այն դասը, որում գտնվում է այդ ներկայացուցիչների արտադրյալը։

Այսպիսով, G խմբի A նորմալ բաժանարարի նկատմամբ հարևան դասերի բազմության մեջ որոշված է բազմապատկման գործողությունը։ Ցույց տանք, որ **այդ դեպքում կատարվում են խմբի սահմանման մեջ մտնող բոլոր պահանջները։** Իսկապես, հարևան դասերի բազմապատկման զուգորդելիությունը հետևում է խմբի ենթաբազմությունների բազմապատկման զուգորդելիությունից։ Միավորի դերը խաղում է A նորմալ բաժանարարն ինքը, որը հանդիսանում է A-ի նկատմամբ G-ի վերլուծության հարևան դասերից մեկը, այն է, նկատի ունենալով (4)-ը և (1)-ը, G-ի ցանկացած x էլեմենտի համար կլինի՝

$$xA\cdot A=xA,\quad A\cdot xA=xAA=xA.$$

Վերջապես, xA հարևան դասի համար հակադարձը կլինի $x^{-1}A$ հարևան դասը, քանի որ

$$xA\cdot x^{-1}A=1\cdot A=A.$$

Մեր կառուցած խումբը կոչվում է G խմբի բազմապատկիչ-խումբ (ֆակտոր-խումբ) A նորմալ բաժանարարի նկատմամբ և նշանակվում է G/A-ով։

Մենք տեսնում ենք, որ ամեն մի խմբի հետ կապվում է նոր խմբերի մի ամբողջ հավաքածու՝ նոր բազմապատկիչ-խմբերը տարբեր նորմալ բաժանարարների նկատմամբ։ Ընդ որում, G խմբի բազմապատկիչ-խումբը միավոր ենթախմբի նկատմամբ կլինի, հասկանալի է, իզոմորֆ հենց G խմբին։

G աբելյան խմբի ամեն մի G/A բազմապատկիչ-խումբ ինքը հանդիսանում է աբելյան խումբ, քանի որ $xy=yx$ հավասարությունից հետևում է՝

$$xA\cdot yA=xyA=yxA=yA\cdot xA.$$

G ցիկլային խմբի ամեն մի G/A բազմապատկիչ-խումբ ինքը ցիկլային խումբ է, քանի որ եթե G-ն առաջանում է g էլեմենտով՝ $G=\{g\}$, և եթե տրված է xA կամավոր հարևան դասը, ապա գոյություն ունի այնպիսի k ամբողջ թիվ, որ

$$x=g^k$$

և դրա համար՝

$$xA=(gA)^k.$$

G վերջավոր խմբի ցանկացած G/A բազմապատկիչ-խմբի կարգը հանդիսանում է նույն այդ խմբի կարգի բաժանարար։ Իրոք, G/A բազմապատկիչ-խմբի կարգը հավասար է A նորմալ բաժանարարի ինդեքսին G խմբում, ուստի և կարելի է օգտվել նախորդ պարագրաֆի (7) հավասարությունից։

Բերենք բազմապատկիչ-խմբերի մի քանի օրինակներ։ Քանի որ ամբողջ թվերի ադիտիվ խմբում k բնական թվին բազմապատիկ թվերի ենթախումբը ունի (ինչպես ցույց է տրվել նախորդ պարագրաֆում) k ինդեքսը, ապա մեր խմբի բազմապատկիչ-խումբն այդ ենթախմբի նկատմամբ կլինի k կարգի վերջավոր խումբ, այն էլ՝ ցիկլային, քանի որ դիտարկվող խումբն ինքը ցիկլային է։

S_n n-րդ աստիճանի սիմետրիկ խմբի բազմապատկիչ-խումբն n-րդ աստիճանի A_n նշանափոխ խմբի նկատմամբ կլինի 2-րդ կարգի խումբ, ընդ որում, նկատի ունենալով 2 թվի պարզ լինելը, կլինի ցիկլային խումբ (տե՛ս նախորդ պարագրաֆի վերջը)։

Վերևում բերված է P դաշտի էլեմենտներից կազմած n-րդ կարգի

չվերասերվող մատրիցների մուլտիպլիկատիվ խմբի՝ այն նորմալ բաժանարարի նկատմամբ հարևան դասերի նկարագիրը, որը կազմված է այնպիսի մատրիցներից, որոնց դետերմինանտը հավասար է 1-ի։ Այդ նկարագրից հետևում է, որ համապատասխան բազմապատկիչ-խումբն իզոմորֆ է P դաշտի զրոյից տարբեր թվերի մուլտիպլիկատիվ խմբին։

Հոմոմորֆիզմներ (նմանաձևություններ)։ Նորմալ բաժանարարի և բազմապատկիչ-խմբի գաղափարները սերտորեն կապված են իզոմորֆիզմի գաղափարի հետևյալ ընդհանրացման հետ։

G խմբի այնպիսի φ արտապատկերումը G′ խմբին, որը համապատասխանության մեջ է դնում G-ի ամեն մի a էլեմենտին G′-ի միարժեքորեն որոշված $a'=a\varphi$ էլեմենտը, կոչվում է G-ի **հոմոմորֆ (նմանաձև) արտապատկերում** *G′-ին (կամ, պարզապես,* **հոմոմորֆիզմ (նմանաձևություն)**, *եթե G′-ի ամեն մի a′ էլեմենտ այդ արտապատկերման ժամանակ ծառայում է G-ի մի որոշ a էլեմենտի կերպար՝ $a'=a\varphi$ և եթե G խմբի ցանկացած a, b էլեմենտների համար՝*

$$(ab)\varphi=a\varphi\cdot b\varphi.$$

Ակներև է, որ չպահանջելով φ արտապատկերման փոխադարձ միարժեքությունը, մենք կստանայինք մեզ արդեն հայտնի իզոմորֆիզմի (նույնաձևության) սահմանումը։

Եթե φ-ն G խմբի նմանաձև արտապատկերումն է G′ խմբի վրա և 1-ն ու a-ն G խմբի համապատասխանաբար միավորն ու կամավոր էլեմենտն են, 1′-ը՝ G′ խմբի միավորը, ապա՝

$$1\varphi=1',$$
$$(a^{-1})\varphi=(a\varphi)^{-1}.$$

Իրոք, եթե $1\varphi=e'$ և x'-ը G′ խմբի կամավոր էլեմենտ է, ապա G-ում գոյություն ունի այնպիսի x էլեմենտ, որ $x\varphi=x'$։ Այստեղից՝

$$x'=x\varphi=(x\cdot 1)\varphi=x\varphi\cdot 1\varphi=x'\cdot e'.$$

Նման ձևով նաև՝

$$x'=e'x'$$

և, հետևաբար, $e'=1'$։

Մյուս կողմից, եթե $(a^{-1})\varphi=b'$, ապա՝

$$1'=1\varphi=(aa^{-1})\varphi=a\varphi\cdot(a^{-1})\varphi=a\varphi\cdot b'.$$

Նման ձևով՝

$$1'=b'\cdot a\varphi,$$

որտեղից՝

$$b'=(a\varphi)^{-1}.$$

G′ խմբի վրա G խմբի φ հոմոմորֆիզմի (նույնաձևության) **կորիզ** *անվանենք G խմբի այն էլեմենտների համախումբը, որոնք φ արտապատկերումը կատարելիս արտապատկերվում են G′ խմբի 1′ միավորին։*

G խմբի ամեն մի φ հոմոմորֆիզմի կորիզ հանդիսանում է G խմբի նորմալ բաժանարար։

Իրոք, եթե G խմբի a, b էլեմենտները մտնում են φ հոմոմորֆիզմի կորիզի մեջ, այսինքն՝

$$a\varphi = b\varphi = 1',$$

ապա՝

$$(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = 1' \cdot 1' = 1',$$

այսինքն՝ ab արտադրյալը ևս պարունակվում է φ հոմոմորֆիզմի կորիզում։ Մյուս կողմից, եթե $a\varphi = 1'$, ապա՝

$$(a^{-1})\varphi = (a\varphi)^{-1} = 1'^{-1} = 1',$$

այսինքն՝ նաև a^{-1}-ն է մտնում φ հոմոմորֆիզմի կորիզի մեջ։ Վերջապես, եթե $a\varphi = 1'$, իսկ x-ը G խմբի կամավոր էլեմենտ է, ապա

$$(x^{-1}ax)\varphi = (x^{-1})\varphi \cdot a\varphi \cdot x\varphi = (x\varphi)^{-1} 1' \cdot x\varphi = 1'։$$

Դիտարկվող հոմոմորֆիզմի կորիզը հանդիսացավ G խմբի ենթախումբ, որը իր ամեն մի էլեմենտի հետ միասին պարունակում է և նրանց համալուծ բոլոր էլեմենտները. հետևաբար, այն կլինի նորմալ բաժանարար։

Դիցուք այժմ A-ն G խմբի կամայական նորմալ բաժանարար է։ G խմբի ամեն մի x էլեմենտին համապատասխանության մեջ դնելով այն xA հարևան դասն A նորմալ բաժանարարի նկատմամբ, որի մեջ գտնվում է այդ էլեմենտը, մենք կստանանք G խմբի արտապատկերումը ողջ G/A բազմապատկիչ-խմբի վրա։ G/A խմբում բազմապատկման սահմանումից (տե՛ս (5)) հետևում է, որ այդ արտապատկերումը կլինի հոմոմորֆ։

Ստացված հոմոմորֆիզմը կոչվում է G խմբի բնական հոմոմորֆիզմ *G/A բազմապատկիչ-խմբի վրա։ Ակներևորեն, այդ հոմոմորֆիզմի կորիզ է ծառայում A նորմալ բաժանարարն ինքը։*

Այստեղից հետևում է, որ G խմբի նորմալ բաժանարարները և միա՛յն նրանք են ծառայում այդ խմբի հոմոմորֆիզմների կորիզներ: *Այս արդյունքը կարելի է դիտել որպես նորմալ բաժանարարի ևս մի սահմանում։*

Պարզվում է, որ բոլոր այն խմբերը, որոնց վրա G խումբը կարող է հոմոմորֆ արտապատկերվել, ըստ էության սպառվում են այդ խմբի բազմապատկիչ-խմբերով, իսկ G խմբի բոլոր հոմոմորֆիզմները՝ նրա բնական հոմոմորֆիզմներով իրենց բազմապատկիչ-խմբերի վրա։ Ավելի ճիշտ, իրավացի է հետևյալ թեորեման.

Թեորեմա հոմոմորֆիզմների մասին։ Դիցուք տված է G խմբի φ հոմոմորֆիզմը G′ խմբի վրա և դիցուք A-ն այդ հոմոմորֆիզմի կորիզն է: Այդ ժամանակ G′ խումբը իզոմորֆ է G/A բազմապատկիչ-խմբին, ընդ որում գոյություն ունի այդ խմբերից առաջինի

այնպիսի σ իզոմորֆ արտապատկերում երկրորդի վրա, որ φ և σ արտապատկերումների հաջորդական կատարման արդյունքը համընկնում է G խմբի բնական հոմոմորֆիզմի հետ G/A բազմապատկիչ-խմբի վրա:

Իրոք, դիցուք x′-ը G′ խմբի կամայական էլեմենտ է, իսկ x-ը G խմբի այնպիսի էլեմենտ է, որ $x\varphi = x'$։ Քանի որ φ հոմոմորֆիզմի A կորիզի ցանկացած a էլեմենտի համար տեղի ունի $a\varphi = 1'$ հավասարությունը, ապա՝

$$(xa)\varphi = x\varphi \cdot a\varphi = x' \cdot 1' = x',$$

այսինքն՝ xA հարևան դասի բոլոր էլեմենտները φ-ի դեպքում արտապատկերվում են x′ էլեմենտին։

Մյուս կողմից, եթե z-ը G խմբի ցանկացած այնպիսի էլեմենտ է, որ $z\varphi = x'$, ապա՝

$$(x^{-1}z)\varphi = x^{-1}\varphi \cdot z\varphi = (x\varphi)^{-1} \cdot z\varphi = x'^{-1} \cdot x' = 1',$$

այսինքն՝ $x^{-1}z$-ը պարունակվում է φ հոմոմորֆիզմի A կորիզում։ Եթե մենք ընդունենք $x^{-1}z = a$, ապա $z = xa$, այսինքն՝ z էլեմենտը պարունակվում է xA հարևան դասի մեջ։ Այսպիսով, հավաքելով G խմբի բոլոր այն էլեմենտները, որոնք φ հոմոմորֆիզմի դեպքում արտապատկերվում են G′ խմբի x′ անշարժ էլեմենտին, մենք ճշտորեն ստանում ենք xA հարևան դասը։

Այն σ համապատասխանությունը, որը G′-ի յուրաքանչյուր x′ էլեմենտին վերագրում է G խմբի այն հարևան դասը A նորմալ բաժանարարի նկատմամբ, որը կազմված է φ-ի դեպքում x′-ն իրենց կերպար ունեցող G խմբի բոլոր էլեմենտներից կլինի G′ խմբի փոխադարձ միարժեք արտապատկերում A/A խմբի վրա։

Այդ σ արտապատկերումը, կլինի իզոմորֆիզմ, քանի որ եթե

$$x'\sigma = xA, \quad y'\sigma = yA,$$

այսինքն՝

$$x\varphi = x', \quad y\varphi = y',$$

ապա՝

$$(xy)\varphi = x\varphi \cdot y\varphi = x'y',$$

և, հետևաբար,

$$(x'y')\sigma = xyA = xA \cdot yA = x'\sigma \cdot y'\sigma։$$

Վերջապես, եթե x-ը կամավոր էլեմենտ է G-ից և $x\varphi = x'$, ապա՝

$$(x\varphi)\sigma = x'\sigma = xA,$$

այսինքն՝ φ հոմոմորֆիզմի և σ իզոմորֆիզմի հաջորդական կատարումը իրոք արտապատկերում է x էլեմենտը՝ նրանով առաջացած xA հարևան դասի մեջ։ Թեորեմն ապացուցված է։

§ 66. Աբելյան խմբերի ուղղակի գումարները

Մենք ցանկանում ենք գլուխը վերջացնել խմբային-տեսաբանական մի ավելի խոր թեորեմայով, քան խմբերի այն տարրական հատկությունները, որոնք շարադրվեցին վերևում։ Այն է, հենվելով § 64-ից մեզ արդեն հայտնի ցիկլային խմբերի նկարագրության վրա, մենք հաջորդ պարագրաֆում կստանանք վերջավոր աբելյան խմբերի լրիվ նկարագիրը։

Ինչպես ընդունված է աբելյան խմբերի տեսության մեջ, խմբային գործողության համար կօգտագործվի ադդիտիվ գրություն. մենք կխոսենք խմբի a *և* b *էլեմենտների* $a+b$ *գումարի մասին, 0 զրոյական ենթախմբի մասին, որևէ* a *էլեմենտի* ka *բազմապատիկների մասին և այլն։*

Այս պարագրաֆում մենք կուսումնասիրենք մի կառուցվածք, որը կշարադրենք աբելյան խմբերի նկատմամբ, չնայած այն կարելի էր մուծել միանգամից՝ ցանկացած (այսինքն՝ ոչ անպայման կոմուտատիվ) խմբերի համար։ Այդ կառուցվածքը թելադրվում է հետևյալ օրինակներով։ Հարթությունը, դիտարկված որպես երկչափ իրական գծային տարածություն, հանդիսանում է աբելյան խումբ վեկտորների գումարման նկատմամբ։ Այդ հարթության մեջ ամեն մի ուղիղ, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, կլինի նշված խմբի ենթախումբ։ Եթե A_1*-ը և* A_2*-ը այդպիսի երկու տարբեր ուղիղներ են, ապա, ինչպես հայտնի է, կոորդինատների սկզբնակետից ելնող ամեն մի վեկտոր հարթության վրա միարժեքորեն ներկայացվում է* A_1 *և* A_2 *ուղիղների վրա իրենց պրոյեկցիաների գումարի տեսքով։ Նման ձևով, եռաչափ գծային տարածության ամեն մի վեկտոր միարժեքորեն գրվում է երեք վեկտորների գումարի տեսքով, որոնք պատկանում են տված երեք* A_1, A_2 *և* A_3 *ուղիղներին, եթե միայն այդ ուղիղները չեն գտնվում մի հարթության մեջ։*

G *աբելյան խումբը կոչվում է իր* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *ենթախմբերի* **ուղղակի** *կամ* **անմիջական գումար**՝

$$G=A_1+A_2+\cdots+A_k, \tag{1}$$

եթե G *խմբի ամեն մի* x *էլեմենտ գրվում է, այն էլ միակ ձևով,* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *համապատասխան ենթախմբերից վերցրած* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *էլեմենտների գումարի տեսքով՝*

$$x=a_1+a_2+\cdots+a_k. \tag{2}$$

(1) գրելաձևը կոչվում է G *խմբի* **ուղղակի** *կամ* **անմիջական վերլուծություն**, A_i, $i=1, 2, \ldots, k$, *ենթախմբերը՝ այդ վերլուծության* **ուղղակի կամ անմիջական գումարելիներ**, *իսկ* a_i *էլեմենտը (2)-ից՝* x

էլեմենտի **բաղադրիչ** *(1) վերլուծության* A_i *ուղղակի գումարելիում* ($i=1, 2, \ldots, k$)։

Եթե տված է G խմբի (1) ուղղակի վերլուծությունը և եթե այդ վերլուծության A_i ուղղակի գումարելիները՝ բոլորը կամ մի քանիսը, իրենք էլ վերլուծված են ուղղակի գումարների.

$$A_i=A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{ik_i}, \quad k_i\geqslant 1,$$

ապա G խումբը կլինի իր բոլոր

$$A_{ij}, \quad j=1, 2, \ldots, k_i, \ i=1, 2, \ldots, k$$

ենթախմբերի ուղղակի գումար։

Իրոք, G *խմբի կամայական* x *էլեմենտի համար գոյություն ունի (2) գրությունը՝ (1) ուղղակի վերլուծության նկատմամբ, իսկ յուրաքանչյուր* a_i, $i=1, 2, \ldots, k$, *բաղադրիչի համար՝*

$$a_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{ik_i} \tag{4}$$

գրությունը՝ A_i *խմբի (3) ուղղակի վերլուծության նկատմամբ։ Պարզ է, որ* x*-ը կլինի բոլոր* a_{ij}, $j=1, 2, \ldots, k_i$, $i=1, 2, \ldots, k$ *էլեմենտների գումարը։ Այս գրության միակությունը բխում է այն բանից, որ վերցնելով* x *էլեմենտի ցանկացած գրությունը՝* A_{ij} *ենթախմբերում մեկական վերցրած էլեմենտների գումարի տեսքով և դասավորելով միևնույն* A_i, $i=1, 2, \ldots, k$, *ենթախմբին պատկանող գումարելիները, մենք պետք է ստանանք հենց (2) հավասարությունը. մյուս կողմից, յուրաքանչյուր* a_i *էլեմենտ օժտված է (4) տեսքի միայն մեկ գրությամբ։*

Ուղղակի գումարի սահմանմանը կարելի է տալ ուրիշ ձև։ Նախ մուծենք ևս մի գաղափար։ Եթե G *աբելյան խմբում տրված են մի քանի* $B_1, B_2, \ldots, B_l$ *ենթախմբեր, ապա* $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$*-ով նշանակենք* G *խմբի այն* y *էլեմենտների համախումբը, որոնք առնվազն մեկ եղանակով կարող են գրվել համապատասխանաբար* $B_1, B_2, \ldots, B$ *ենթախմբերում վերցրած* $b_1, b_2, \ldots, b_l$ *էլեմենտների գումարի տեսքով՝*

$$y=b_1+b_2+\cdots+b_l. \tag{5}$$

$\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ բազմությունը կլինի G խմբի ենթախումբ։ *Ասում են, որ այդ ենթախումբն* **առաջացել է** $B_1, B_2, \ldots, B_l$ *ենթախմբերով։*

Ապացուցելու համար $B_1, B_2, \ldots, B_l$*-ի մեջ վերցնենք (5) գրությամբ* y *էլեմենտը, ինչպես նաև* y' *էլեմենտը, որն օժտված է համանման գրությամբ՝*

$$' \quad {}_1+b_2+\cdots+b'_l,$$

որտեղ b'_i-ը էլեմենտ է B_i-ից, $i=1, 2, \dots, l$։ Այդ ժամանակ՝

$$y+y'=(b_1+b'_1)+(b_2+b'_2)+\dots+(b_l+b'_l),$$
$$-y=(-b_1)+(-b_2)+\dots+(-b_l),$$

այսինքն՝ $y+y'$ և $-y$ էլեմենտները ևս օժտված են (5) տեսքի առնըվազն մեկ գրությամբ և, հետևաբար, պատկանում են $\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ բազմությանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

$\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ ենթախումբը իր մեջ պարունակում է B_i, $i=1,2,\dots,l$, ենթախմբերից յուրաքանչյուրը։ Իրոք, G խմբի ամեն մի ենթախումբ պարունակում է այդ խմբի զրոն և, հետևաբար, վերցնելով, օրինակ, B_1 ենթախմբում ցանկացած b_1 էլեմենտը, իսկ $B_2, \dots, B_l$ ենթախմբերում՝ 0 էլեմենտը, մենք b_1 էլեմենտի համար կստանանք (5) տեսքի հետևյալ գրությունը․

$$b_1=b_1+0+\dots+0\text{։}$$

Աբելյան G խումբը այն և միայն այն ժամանակ կլինի իր $A_1, A_2, \dots, A_k$ ենթախմբերի ուղղակի գումար, երբ այն առաջանում է այդ ենթախմբերով՝

$$G=\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \tag{6}$$

և երբ յուրաքանչյուր A_i, $i=2, \dots, k$, ենթախմբի փոխհատույթը բոլոր նախորդող $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$, ենթախմբերով առաջացած ենթախմբի հետ պարունակում է միայն զրոն՝

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\} \cap A_i=0, \quad i=2, \dots, k\text{։} \tag{7}$$

Իրոք, եթե G խումբն ունի (1) ուղղակի վերլուծությունը, ապա G-ի ամեն մի x էլեմենտի համար գոյություն ունի (2) գրությունը, ուստի և տեղի ունի (6) հավասարությունը։ (7) հավասարությունների իրավացիությունը բխում է ցանկացած x էլեմենտի համար (2) գրության միակությունից․ եթե որևէ i-ի համար $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\}\cap A_i$ փոխհատույթը պարունակեր ոչզրոյական x էլեմենտ, ապա, մի կողմից x-ը կարելի էր գրել որպես a_i էլեմենտ A_i-ից, այսինքն՝ $x=a_i$ և, հետևաբար՝

$$x=0+\dots+0+a_i+0+\dots+0. \tag{8}$$

մյուս կողմից, x-ը որպես $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\}$ ենթախմբի էլեմենտ օժտված է

$$x=a_1+a_2+\dots+a_{i-1}$$

տեսքի գրությամբ, այսինքն՝

$$x=a_1+a_2+\dots+a_{i-1}+0+\dots+0\text{։} \tag{9}$$

Ակնհայտորեն, (8)-ը և (9)-ը կլինեն (2) տեսքի երկու տարբեր գրություններ x էլեմենտի համար։

Հակադարձաբար, դիցուք տեղի ունեն (6) և (7) հավասարությունները․ (6)-ից հետևում է, որ G խմբի ցանկացած x էլեմենտն օժտված է (2) տեսքի առնվազն մեկ գրությամբ։ Դիցուք, սակայն, որևէ x էլեմենտի համար գոյություն ունեն (2) տեսքի երկու տարբեր գրություններ՝

$$x=a_1+a_2+\dots+a_k=a'_1+a_2+\dots+a'_k\text{։} \tag{10}$$

Այդ ժամանակ կարելի է գտնել այնպիսի i, $i\leqslant k$, որ

$$a_k=a'_k, \quad a_{k-1}=a'_{k-1}, \quad \dots, a_{i+1}=a'_{i+1}, \tag{11}$$

բայց

$$a_i\neq a'_i,$$

այսինքն՝

$$a_i-a'_i\neq 0\text{։} \tag{12}$$

(9)-ից և (11)-ից հետևում է, սակայն,

$$a_i-a'_i=(a'_1-a_1)+(a'_2-a_2)+\dots+(a'_{i-1}-a_{i-1})$$

հավասարությունը, որը, նկատի ունենալով (12)-ը, հակասում է (7) հավասարությանը։ Թեորեմն ապացուցված է։

Ուղղակի գումարի գաղափարին կարելի է նայել բոլորովին այլ կողմից։ Դիցուք տրված են կամայական $A_1, A_2, \dots, A_k$ աբելյան խմբերը, որոնց մեջ կարող են լինել և իրար իզոմորֆ խմբեր։ $A_1, A_2, \dots, A_k$ խմբերից յուրաքանչյուրի մեջ մեկական վերցրած էլեմենտներից կազմված

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \tag{13}$$

տեսքի բոլոր հնարավոր սիստեմների համախումբը նշանակենք G-ով։

G բազմությունը կդառնա աբելյան խումբ, եթե (13) տեսքի սիստեմների գումարումը որոշվի հետևյալ կանոնով․

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)+(a'_1, a'_2, \dots, a'_k)= =(a_1+a'_1, a_2+a'_2, \dots, a_k+a'_k), \tag{14}$$

այսինքն՝ էլեմենտները տրված $A_1, A_2, \dots, A_k$ խմբերից յուրաքանչյուրում գումարվում են առանձին։ Իրոք, այդ գումարման զուգորդելիությունն ու տեղափոխելիությունը բխում են այդ հատկությունների իրավացիությունից՝ տրված խմբերից յուրաքանչյուրում․ զրոյի դերը խաղում է

$$(0_1, 0_2, \dots, 0_k)$$

սիստեմը, որտեղ 0_i-ով նշանակված է A_i, $i=1, 2, \dots, k$, խմբի զրոյական էլեմենտը․ (13) սիստեմի համար հակադիր կլինի

$$(-a_1, -a_2, \dots, -a_k)$$

սիստեմը։

Կառուցված G աբելյան խումբը կոչվում է $A_1, A_2, \dots, A_k$ խմբերի ուղղակի կամ անմիջական գումար և, ինչպես վերևում, գրվում է այսպես՝

$$G = A_1 + A_2 + \dots + A_k.$$

Այդ անվանման համար արդարացում է հանդիսանում այն, որ հենց նոր սահմանված իմաստով $A_1, A_2, \dots, A_k$ խմբերի ուղղակի գումար հանդիսացող G խումբը կարող է վերլուծվել իր $A_1', A_2', \dots, A_k'$ ենթախմբերի ուղղակի գումարի, որոնք իզոմորֆ են համապատասխանաբար $A_1, A_2, \dots, A_k$ խմբերին։

Իսկապես, A_i'-ով, $i=1, 2, \dots, k$, նշանակենք G խմբի այն էլեմենտների, այսինքն՝ (13) տեսքի այն սիստեմների համախումբը, որոնց i-րդ տեղում գրված է a_i կամայական էլեմենտը A_i խմբից, իսկ բոլոր մնացած տեղերը զբաղված են համապատասխան խմբերի զրոներով. հետևաբար, դրանք կլինեն՝

$$(0_1, \dots, 0_{i-1}, a_i, 0_{i+1}, \dots, 0_k), \tag{15}$$

տեսքի սիստեմներ։ Գումարման (14) սահմանումը ցույց է տալիս, որ A_i բազմությունը կլինի G խմբի ենթախումբ. այդ ենթախմբի իզոմորֆիզմը A_i խմբի հետ մենք կստանանք, յուրաքանչյուր (15) սիստեմին համապատասխանեցնելով A_i խմբի a_i էլեմենտը։

Մնում է ապացուցել, որ G խումբը հանդիսանում է $A_1', A_2', \dots, A_k'$ ենթախմբերի ուղղակի գումար։ Իրոք, G խմբի ցանկացած (13) էլեմենտը կարելի է ներկայացնել նշված ենթախմբերի էլեմենտների գումարի տեսքով՝

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, 0_2, \dots, 0_k) + $$
$$+ (0_1, a_2, 0_3, \dots, 0_k) + \dots + (0_1, 0_2, \dots, 0_{k-1}, a_k)$$

Այս ներկայացման միակությունը բխում է այն բանից, որ (13) տեսքի տարբեր սիստեմները հանդիսանում են G խմբի տ ա ր բ ե ր էլեմենտներ։

Եթե տված են աբելյան խմբերի երկու սիստեմներ՝ $A_1, A_2, \dots, A_k$ և $B_1, B_2, \dots, B_k$, ընդ որում A_i և B_i խմբերն իզոմորֆ են, $i=1, 2, \dots, k$, ապա

$$G = A_1 + A_2 + \dots + A_k$$

և

$$H = B_1 + B_2 + \dots + B_k$$

խմբերը նույնպես կլինեն իզոմորֆ։

Իրոք, եթե $i=1, 2, \dots, k$-ի համար A_i և B_i խմբերի միջև հաստատված է φ_i իզոմորֆիզմը, որը յուրաքանչյուր a_i էլեմենտին A_i-ից համապատասխանեցնում է $a_i\varphi_i$ էլեմենտը B_i-ից, ապա φ արտապատկերումը, որը G խմբի ամեն մի $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ էլեմենտին համապատասխանեցնում է

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)\varphi = (a_1\varphi_1, a_2\varphi_2, \dots, a_k\varphi_k)$$

հավասարությունով որոշվող H խմբի էլեմենտը, ակներևորեն, կլինի G խմբի իզոմորֆ արտապատկերումը H խմբի վրա։

Եթե տված են $A_1, A_2, \dots, A_k$ աբելյան վերջավոր խմբերը, որոնք ունեն համապատասխանաբար $n_1, n_2, \dots, n_k$ կարգերը, ապա խմբերի G ուղղակի գումարը նույնպես կլինի վերջավոր խումբ և նրա n կարգը հավասար է ուղղակի գումարելիների կարգերի արտադրյալին՝

$$n = n_1 n_2 \dots n_k. \tag{16}$$

Իրոք, (13) տեսքի տարբեր սիստեմների թիվը, որոնց a_1 էլեմենտը կարող է ընդունել n_1 հատ տարբեր արժեքներ, a_2 էլեմենտն ընդունում է n_2 հատ տարբեր արժեքներ և այլն, որոշվում է (16) հավասարությունով։

Դիտարկենք մի քանի օ ր ի ն ա կ ն ե ր։

Ե թ ե $\{a\}$ վ ե ր ջ ա վ ո ր ց ի կ լ ա յ ի ն խ մ բ ի n կ ա ր գ ը վ ե ր լ ու ծ վ ու մ է ե ր կ ու փ ո խ ա դ ա ր ձ պ ա ր զ բ ն ա կ ա ն թ վ ե ր ի ա ր տ ա դ ր յ ա լ ի՝

$$n = st, \quad (s, t) = 1,$$

ապա $\{a\}$ խ ու մ բ ը վ ե ր լ ու ծ վ ու մ է հ ա մ ա պ ա տ ա ս խ ա ն ա բ ա ր s և t կ ա ր գ ե ր ու ն ե ց ո ղ ե ր կ ու ց ի կ լ ա յ ի ն խ մ բ ե ր ի ու ղ ղ ա կ ի գ ու մ ա ր ի։

$\{a\}$ խմբի համար կօգտագործենք ադդիտիվ գրությունը։ Եթե ընդունենք $b = ta$,

ապա՝

$$sb = (st)a = na = 0,$$

բայց $0 < k < s$ համար՝

$$kb = (kt)a \neq 0,$$

այսինքն՝ $\{b\}$ ցիկլային ենթախումբն ունի s կարգը. համանմանությամբ, $c = sa$ էլեմենտի $\{c\}$ ցիկլային ենթախումբն ունի t կարգը։ $\{b\} \cap \{c\}$ փոխհատույթը պարունակում է միայն զրոն, քանի որ եթե $kb = lc$, երբ

$$0 < k < s, \quad 0 < l < t,$$

ապա՝

$$(kt)\, a = (ls)a,$$

որտեղից, քանի որ kt և lc թվերը փոքր են n-ից,

$$kt = ls,$$

որ անհնար է, շնորհիվ s և t թվերի փոխադարձ պարզության։ Վերջապես, գոյություն ունեն այնպիսի u և v թվեր, որ

$$su + tv = 1,$$

ուստի և

$$a = v(ta) + u(sa) = vb + uc,$$

և, հետևաբար, $\{a\}$ խմբի ցանկացած էլեմենտը կարելի է ներկայացնել որպես $\{b\}$ և $\{c\}$ ենթախմբերի էլեմենտների գումար։

Աբելյան H խումբն անվանենք անվերածելի, եթե այն չի կարելի վերլուծել զրոյական ենթախմբից տարբեր նրա երկու կամ մի քանի ենթախմբերի ուղղակի գումարի։ Վերջավոր ցիկլային խումբը, որի կարգը p պարզ թվի որևէ աստիճան է, կոչվում է p պարզ թվին վերաբերող առաջնային (պրիմառ) ցիկլային խումբ։ Կիրառելով մի քանի անգամ վերևում ապացուցված պնդումը, մենք կստանանք, որ ամեն մի վերջավոր ցիկլային խումբ վերլուծվում է տարբեր պարզ թվերին վերաբերող առաջնային խմբերի ուղղակի գումարի։ Ավելի ճշգրիտ՝

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

կարգի ցիկլային խումբը, որտեղ $p_1, p_2, \ldots, p_s$-ը տարբեր պարզ թվեր են, վերլուծվում է s հատ ցիկլային խմբերի ուղղակի գումարի, որոնք ունեն, համապատասխանաբար, $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_s^{k_s}$ կարգերը։

Ամեն մի առաջնային ցիկլային խումբ անվերլուծելի է։ Իրոք, դիցուք տված է p^k կարգի վերջավոր $\{a\}$ ցիկլային խումբը, որտեղ p-ն պարզ թիվ է։ Եթե այդ խումբը լիներ վերլուծելի, ապա, ըստ (7)-ի, այն կունենար ոչզրոյական այնպիսի ենթախմբեր, որոնց փոխհատույթը հավասար կլիներ զրոյի։ Իրականում, սակայն, մեր խմբի ամեն մի ոչզրոյական ենթախումբ պարունակում է զրոյից տարբեր

$$b = p^{k-1}a$$

էլեմենտ։ Ապացուցելու համար վերցնենք մեր խմբի մի կամայական ոչզրոյական x էլեմենտ՝

$$x = sa, \quad 0 < s < p^k.$$

s թիվը կարելի է գրել

$$s = p^l s', \quad 0 \leqslant l < k$$

տեսքով, որտեղ s' թիվն արդեն չի բաժանվում p-ի վրա և, հետևաբար, փոխադարձ պարզ է նրա հետ, ուստի գոյություն ունեն այնպիսի u և v թվեր, որ

$$s'u + pv = 1.$$

Այդ ժամանակ՝

$$(p^{k-l-1}u)s = (p^{k-l-1}us)a = (p^{k-1}us')a =$$
$$= p^{k-1}(1-pv)a = (p^{k-1} - p^k v)a = p^{k-1}a - v(p^k a) = p^{k-1}a = b,$$

այսինքն՝ b էլեմենտը մտնում է $\{x\}$ ցիկլային ենթախմբի մեջ։

Ամբողջ թվերի ադդիտիվ խումբը (այսինքն՝ անվերջ ցիկլային

խումբը), ինչպես նաև բոլոր ռացիոնալ թվերի ադդիտիվ խումբը անվերլուծելի խմբեր են։

Նշված երկու խմբերի անվերլուծելիությունը բխում է այն բանից, որ այդ խմբերից յուրաքանչյուրում ցանկացած երկու ոչզրոյական էլեմենտների համար գոյություն ունի ոչզրոյական ընդհանուր բազմապատիկ, այսինքն՝ ցանկացած երկու ոչզրոյական ցիկլային ենթախմբեր ունեն ոչզրոյական փոխհատույթ։

Նկատենք, որ եթե աբելյան G խմբում սահմանված գործողությունը կոչվում է բազմապատկում, ապա հարկավոր է խոսել ոչ թե ուղղակի գումարի, այլ ուղղակի արտադրյալի մասին։

Զրոյից տարբեր իրական թվերի մուլտիպլիկատիվ խումբը վերլուծվում է դրական իրական թվերի մուլտիպլիկատիվ խմբի և 1 ու —1 թվերից կազմված բազմապատկումով որոշված խմբի ուղղակի արտադրյալի։

Իրոք, մեր խմբի նշված երկու ենթախմբերի փոխհատույթի մեջ պարունակվում է միայն 1 թիվը՝ այդ խմբի միավոր էլեմենտը։ Մյուս կողմից, ամեն մի դրական թիվ հանդիսանում է իր և 1 թվի արտադրյալ, ամեն մի բացասական թիվ՝ իր բացարձակ մեծության և —1 թվի արտադրյալ։

§ 67. Վերջավոր աբելյան խմբեր

Եթե մենք վերցնենք առաջնային ցիկլային խմբերի ցանկացած վերջավոր հավաքածու, որոնցից մի քանիսը կարող են վերաբերել միևնույն պարզ թվին կամ նույնիսկ ունենալ միևնույն կարգը, այսինքն՝ իզոմորֆ լինել, ապա այդ խմբերի ուղղակի գումարը կլինի վերջավոր աբելյան խումբ։ Պարզվում է, որ դրանով սպառվում են բոլոր վերջավոր աբելյան խմբերը։

Աբելյան վերջավոր խմբերի վերաբերյալ հիմնական թեորեմա։ Զրոյական խումբ չհանդիսացող ամեն մի G աբելյան վերջավոր խումբ վերլուծվում է առաջնային ցիկլային ենթախմբերի ուղղակի գումարի։

Այս թեորեմայի ապացույցն սկսենք այն դիտողությունից, որ G խմբում անպայման կգտնվեն ոչզրոյական էլեմենտներ, որոնց կարգերը հանդիսանում են պարզ թվերի աստիճաններ։ Իրոք, եթե G խմբի որևէ ոչզրոյական x էլեմենտ ունի l կարգը, $lx = 0$, և եթե p^k-ը, $k > 0$, p պարզ թվի այնպիսի աստիճան է, որի վրա l թիվը բաժանվում է՝

$$l = p^k m,$$

ապա mx էլեմենտը տարբեր է զրոյից և ունի p^k կարգը։

Դիցուք

$$p_1, p_2, \dots, p_s \qquad (1)$$

իրարից տարբեր բոլոր այն պարզ թվերն են, որոնց որոշ աստիճանները ծառայում են G խմբի որոշ էլեմենտների կարգեր։ p-ով նշանակենք այդ թվերից ցանկացածը, իսկ P-ով՝ G խմբի այն էլեմենտների համախումբը, որոնց կարգերը p թվի աստիճաններն են։

P բազմությունը հանդիսանում է G խմբի ենթախումբ։ Իրոք, P-ի մեջ մտնում է 0 էլեմենտը, քանի որ 0-ի կարգն է $1=p^0$։ Այնուհետև, եթե $p^kx=0$, ապա նաև $p^k(-x)=0$։ Վերջապես, եթե $p^kx=0$, $p^ly=0$ և եթե, օրինակ, $k\geq l$, ապա՝

$$p^k(x+y)=0,$$

այսինքն՝ $x+y$ էլեմենտի կարգ է ծառայում կամ p^k թիվը, կամ այդ թվի բաժանարարը, այսինքն՝ բոլոր դեպքերում p թվի որևէ աստիճանը։

Որպես p թիվ վերցնելով (1) թվերից յուրաքանչյուրը հերթականությամբ, մենք կստանանք ոչզրոյական s հատ ենթախմբեր՝

$$P_1, P_2, \dots, P_s. \qquad (2)$$

G խումբը հանդիսանում է այդ ենթախմբերի ուղղակի գումար՝

$$G=P_1+P_2+\dots+P_s. \qquad (3)$$

Իրոք, եթե x-ը G խմբի կամայական էլեմենտ է, ապա նրա l կարգը կարող է բաժանվել միայն (1) սիստեմին պատկանող որոշ պարզ թվերի վրա, այսինքն՝

$$l=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s},$$

որտեղ $k\geq 0$, $i=1, 2, \dots, s$։ Ուստի, ինչպես ցույց է տրված նախորդ պարագրաֆի վերջում, $\{x\}$ ցիկլային ենթախումբը վերլուծվում է այնպիսի առաջնային ցիկլային ենթախմբերի ուղղակի գումարի, որոնք ունեն համապատասխանաբար $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s}$ կարգերը։ Այդ առաջնային ցիկլային ենթախմբերը գտնվում են (2)-ի համապատասխան ենթախմբերում և, հետևաբար, x էլեմենտը ներկայացվում է այն էլեմենտների գումարի տեսքով, որոնք վերցված են մեկական՝ (2) ենթախմբերից բոլորի կամ մի քանիսի մեջ։ Սրանով ապացուցված է

$$G=\{P_1, P_2, \dots, P_s\}$$

հավասարությունը, որը համանման է նախորդ պարագրաֆի (6) հավասարությանը։

Նույն պարագրաֆի (7) հավասարությանը համանման հավասարությունն ապացուցելու համար վերցնենք ցանկացած i, $2\leq i\leq s$։ Այդ ժամանակ $\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}\}$ ենթախմբի ցանկացած y էլեմենտը ունի

$$y=a_1+a_2+\dots+a_{i-1}$$

տեսքը, որտեղ a_j, $j=1, 2, \dots, i-1$ էլեմենտը գտնվում է P_j ենթախմբում, այսինքն՝ ունի $p_j^{k_j}$ կարգը։ Այդ դեպքում

$$\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}\right)y=0,$$

այսինքն՝ y էլեմենտի կարգ ծառայում է $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_{i-1}^{k_{i-1}}$ թվի որևէ բաժանարարը և, հետևաբար, y էլեմենտը, եթե այն տարբեր է զրոյից, չի կարող պարունակվել P_i ենթախմբում։ Սրանով ապացուցվեց, որ

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}\}\cap P_i=0,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Նկատենք, որ աբելյան այնպիսի ենթախումբը, որի բոլոր էլեմենտների կարգերը հանդիսանում են միևնույն p պարզ թվի աստիճաններ, կոչվում է առաջնային (պրիմար) խումբ p թվի նկատմամբ։ Առաջնային ցիկլային խմբերը առաջնային խմբերի մասնավոր դեպքն են։ Այսպիսով, (2) ենթախմբերը առաջնային խմբեր են։ Նրանք կոչվում են G խմբի **առաջնային բաղադրիչներ**, իսկ (3) ուղղակի վերլուծությունը՝ **այդ խմբի վերլուծություն առաջնային բաղադրիչների**։ Քանի որ (2) ենթախմբերը G խմբում որոշված են միարժեք ձևով, ապա G **խմբի վերլուծությունը առաջնային բաղադրիչների նույնպես որոշված է միարժեքորեն**։

Ամեն մի աբելյան վերջավոր խմբի վերլուծելիությունը առաջնային խմբերի ուղղակի գումարի, հասկանալի է, հիմնական թեորեմայի ապացույցը հանգեցնում է մի որոշ p պարզ թվի վերաբերող աբելյան վերջավոր առաջնային P խմբի դեպքին։ Դիտարկենք այդ դեպքը։

Դիցուք a_1-ը P խմբի էլեմենտներից մեկն է, որն ունի նրա մեջ ամենաբարձր կարգը։ Եթե, այնուհետև, P խմբում կան ոչզրոյական էլեմենտներ, որոնց ցիկլային ենթախմբերը փոխհատվում են $\{a_1\}$ ցիկլային ենթախմբի հետ միայն զրոյով, ապա a_2-ով նշանակենք այդ հատկությունն ունեցող էլեմենտների մեջ ամենաբարձր կարգի էլեմենտներից մեկը. այսպիսով՝

$$\{a_1\}\cap\{a_2\}=0։$$

Դիցուք արդեն ընտրված են $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ էլեմենտները։ P խմբի այն ենթախումբը, որն առաջացել է դրանց ցիկլային ենթախմբերով, նշանակենք $\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$-ով՝

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_{i-1}\}\}=\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}։ \qquad (4)$$

Ակներևորեն, այն կազմված է P խմբի բոլոր այն էլեմենտներից, որոնք կարող են գրվել $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ էլեմենտներին բազմապատիկ էլեմենտների գումարի տեսքով. կասենք, որ այդ ենթախումբն առաջանում է $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ էլեմենտներով։ Նշանակենք այժմ a_i-ով ամենաբարձր կարգի էլեմենտներից մեկը P խմբի այն էլեմենտների մեջ, որոնց ցիկլային ենթախմբերը ունեն զրոյի հավասար փոխհատույթ $\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$ ենթախմբի հետ. այսպիսով՝

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}\cap\{a_i\}=0, \qquad (5)$$

Նկատի ունենալով P խմբի վերջավոր լինելը, այս պրոցեսը պետք է կանգ առնի. դիցուք դա տեղի կունենա այն բանից հետո, երբ կընտրվեն $a_1, a_2, \ldots, a_s$ էլեմենտները։ Եթե P'-ով մենք նշանակենք այդ էլեմենտներով առաջացված ենթախումբը՝

$$P'=\{a_1, a_2, \ldots, a_s\},$$

այսինքն՝

$$P'=\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_s\}\}, \qquad (6)$$

ապա, հետևաբար, P խմբի ցանկացած ոչզրոյական էլեմենտի ցիկլային ենթախումբն ունի P' ենթախմբի հետ ոչզրոյական փոխհատույթ։ (6) հավասարությունը և (5) հավասարությունը, որն իրավացի է $i=2, 3, \ldots, s$ համար, նկատի ունենալով (4)-ը, ցույց են տալիս, որ P' ենթախումբը հանդիսանում է $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_s\}$ ցիկլային ենթախմբերի ուղղակի գումար՝

$$P'=\{a_1\}+\{a_2\}+\cdots+\{a_s\}։ \qquad (7)$$

Մնում է ապացուցել, որ P' ենթախումբն իրականում համընկնում է ամբողջ P խմբի հետ։

Դիցուք x-ը P խմբի ցանկացած էլեմենտ է, որն ունի p կարգը։ Քանի որ

$$P'\cap\{x\}\neq 0,$$

իսկ $\{x\}$ ենթախումբը չունի իրենից տարբեր ոչզրոյական ենթախմբեր (հիշեցնենք, որ ենթախմբի կարգը հանդիսանում է խմբի կարգի բաժանարար, իսկ p-ն պարզ թիվ է), ապա իրականում $\{x\}$ ենթախումբը պարունակվում է P' ենթախմբում և, հետևաբար, x-ը պատկանում է P'-ին։ Այսպիսով, P խմբի p կարգի բոլոր էլեմենտները մտնում են P' ենթախմբի մեջ։

Դիցուք արդեն ապացուցված է, որ P' ենթախմբի մեջ մտնում են P խմբի բոլոր այն էլեմենտները, որոնց կարգը չի գերազանցում p^{k-1} թիվը, և դիցուք x-ը P-ի ցանկացած էլեմենտ է, որն ունի p^k կարգ։ Ինչպես ցույց է տալիս $a_1, a_2, \ldots, a_s$ էլեմենտների ընտրությունը, նրանց կարգերը չեն աճում և, հետևաբար, կարելի է ցույց տալ այնպիսի i, $1\leqslant i-1\leqslant s$, որ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ էլեմենտների կարգերը մեծ կամ հավասար են p^k-ից, իսկ $i-1<s$ դեպքում՝ a_i էլեմենտի կարգը խստորեն փոքր է այդ թվից, այսինքն՝ փոքր է x էլեմենտի կարգից։ Այստեղից հետևում է, նկատի ունենալով այն պայմանները, որոնց ենթարկվում է a_i էլեմենտի ընտրությունը, որ եթե

$$Q=\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\},$$

ապա՝

$$Q\cap\{x\}\neq 0։$$

Նախորդ պարագրաֆում ապացուցվել է, սակայն, որ p^k կարգի առաջնային ցիկլային $\{x\}$ խմբի ամեն մի ոչզրոյական ենթախումբ պարունակում է

$$y=p^{k-1}x \qquad (8)$$

էլեմենտ։ Հետևաբար, y էլեմենտը մտնում է $Q\cap\{x\}$ փոխհատույթի մեջ, ուստի նաև Q ենթախմբի մեջ։ Դա թույլ է տալիս y-ը գրել այն էլեմենտների գումարի տեսքով, որոնք բազմապատիկ են $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ էլեմենտներին՝

$$y=l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_{i-1}a_{i-1}։ \qquad (9)$$

(8)-ից հետևում է, որ y էլեմենտն ունի p կարգը։ Ուստի՝

$$(pl_1)a_1+(pl_2)a_2+\cdots+(pl_{i-1})a_{i-1}=0,$$

այսինքն, նկատի ունենալով (7) ուղղակի վերլուծության գոյությունը՝

$$(pl_j)a_j=0, \qquad j=1, 2, \ldots i-1։$$

pl_j թիվը, հետևաբար, պետք է բաժանվի a_j էլեմենտի կարգի վրա, ուստի և p^k թվի վրա, որտեղից բխում է, որ l_j-ն բաժանվում է p^{k-1}-ի վրա.

$$l_j=p^{k-1}m_j, \qquad j=1, 2, \ldots, i-1, \qquad (10)$$

Դիցուք

$$z=m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_{i-1}a_{i-1}.$$

Դա կլինի էլեմենտ Q ենթախմբից, ուստի նաև P′ ենթախմբից, ընդ որում, նկատի ունենալով (9)-ը և (10)-ը,

$$y=p^{k-1}z. \tag{11}$$

(8)-ից և (11)-ից բխում է

$$p^{k-1}(x-z)=0$$

հավասարությունը, այսինքն՝

$$t=x-z$$

էլեմենտի կարգը մեծ չէ p^{k-1}-ից և, հետևաբար, ինդուկտիվ ենթադրության շնորհիվ, t-ն պարունակվում է P′ ենթախմբի մեջ։ Ուստի x էլեմենտը, որպես P′-ի երկու էլեմենտների գումար՝ $x=z+t$, պատկանում է P′ ենթախմբին։ Դրանով ապացուցված է, որ p^k կարգի բոլոր էլեմենտները P խմբից կպարունակվեն P′-ի մեջ։

Մեր ինդուկտիվ ապացույցը թույլատրում է, հետևաբար, պնդել, որ P խմբի բոլոր էլեմենտները մտնում են P′ ենթախմբի մեջ, այսինքն՝ $P'=P$։ Հիմնական թեորեմայի ապացույցն ավարտված է։

Որպես նման մի արդյունք մենք ստանում ենք, որ աբելյան վերջավոր խումբը այն և միայն այն ժամանակ կլինի առաջնային p պարզ թվի նկատմամբ, եթե նրա կարգը հանդիսանում է այդ p թվի աստիճան։ Իսկապես, ցույց է տրվել, որ աբելյան ամեն մի վերջավոր առաջնային (ըստ p-ի) P խումբ վերլուծվում է առաջնային (ըստ p-ի) ցիկլային խմբերի ուղղակի գումարի, ուստի P խմբի կարգը հավասար է այդ ցիկլային խմբերի կարգերի արտադրյալին, այսինքն՝ p թվի աստիճան է։ Հակադարձաբար, եթե աբելյան վերջավոր խումբն ունի p^k կարգ, որտեղ p-ն պարզ թիվ է, ապա նրա ցանկացած էլեմենտի կարգը կլինի այդ թվի բաժանարար, այսինքն՝ նույնպես p թվի որևէ աստիճան, և դրա շնորհիվ ստացվում է, որ խումբն առաջնային է p-ի նկատմամբ։

Հիմնական թեորեման դեռևս չի սպառում աբելյան վերջավոր խմբերի լրիվ նկարագրի հարցը, քանի որ առայժմ բացառված չէ այն բանի հնարավորությունը, որ այնպիսի ցիկլային խմբերի երկու տարբեր հավաքածուների ուղղակի գումարները, որոնք առաջնային են որոշ պարզ թվերի նկատմամբ, կարող են իզոմորֆ խմբեր լինել։ Իրականում այդ տեղի չունի, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ թեորեման.

Եթե աբելյան G վերջավոր խումբը երկու եղանակներով վերլուծված է առաջնային ցիկլային ենթախմբերի ուղղակի գումարի՝

$$G=\{a_1\}+\{a_2\}+\dots+\{a_s\}=\{b_1\}+b_2\}+\dots+\{b_t\}, \tag{12}$$

ապա երկու ուղղակի վերլուծությունները ունեն միևնույն թվով ուղղակի գումարելիներ՝ $s=t$, և այդ վերլուծությունների ուղղակի գումարելիների միջև կարելի է հաստատել այնպիսի փոխադարձ միարժեք համապատասխանություն, որ համապատասխան գումարելիները լինեն միևնույն կարգի ցիկլային խմբեր, այսինքն՝ իզոմորֆ են։

Նախ նկատենք, որ եթե մենք (12) ուղղակի վերլուծություններից, օրինակ, առաջինի մեջ հավաքենք այն ուղղակի գումարելիները, որոնք վերաբերում են տված p պարզ թվին, ապա նրանց ուղղակի գումարը կլինի G խմբի առաջնային (ըստ p-ի) ենթախումբ և նույնիսկ՝ այդ խմբի առաջնային բաղադրիչ, քանի որ նրա կարգը հավասար է p թվի ամենաբարձր աստիճանին, որի վրա բաժանվում է G խմբի կարգը։ Միավորելով այս եղանակով ուղղակի գումարելիները (12) վերլուծություններից յուրաքանչյուրի մեջ, մենք երկու դեպքում էլ կստանանք G խմբի վերլուծությունը առաջնային բաղադրիչների, որի միակությունն արդեն նշվել է վերևում։

Դա թույլ է տալիս մեր թեորեման ապացուցելու այն ենթադրությամբ, որ G խումբն ինքն առաջնային է p պարզ թվի նկատմամբ։ Դիցուք ուղղակի գումարելիների համարակալումը (12) վերլուծություններից յուրաքանչյուրի մեջ ընտրված է այնպես, որ այդ գումարելիների կարգերը չեն աճում, այսինքն՝ $a_1, a_2, \dots, a_s$ էլեմենտներն ունեն, համապատասխանաբար,

$$p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_s}$$

կարգերը, ընդ որում՝

$$k_1\geqslant k_2\geqslant\dots\geqslant k_s,$$

իսկ $b, b_2, \dots, b_t$ էլեմենտները՝

$$p^{l_1}, p^{l_2}, \dots, p^{l_t}$$

կարգերը, ընդ որում՝

$$l_1\geqslant l_2\geqslant\dots\geqslant l_t.$$

Եթե մեր թեորեմայի պնդումը տեղի չունենար, ապա կգտնվեր այնպիսի i, $i>1$, որ՝

$$k_1=l_1,\dots,k_{i-1}=l_{i-1}, \tag{13}$$

սակայն՝

$$k_i\neq l_i.$$

Հասկանալի է, որ $i\leqslant\min(s, t)$, քանի որ (12) վերլուծություններից յուրաքանչյուրի համար բոլոր ուղղակի գումարելիների կարգերի արտադրյալը հավասար է G խմբի կարգին։ Ցույց տանք, որ մեր ենթադրությունը բերում է հակասության։

Դիցուք, օրինակ,

$$k_i<l_i. \tag{14}$$

H-ով նշանակենք G խմբի այն էլեմենտների համախումբը, որոնց կարգերը չեն գերազանցում p^{k_i}-ին։ Դա կլինի G խմբի ենթախումբ, քանի որ եթե x-ն ու y-ը H-ի էլեմենտներ են, ապա և $(x+y)$-ը, և $(-x)$-ը ունեն այնպիսի կարգեր, որոնք չեն գերազանցում p^{k_i} թվեց։

Նկատենք, որ H ենթախմբին են պատկանում, մասնավորապես, հետևյալ էլեմենտները՝

$$p^{k_1-k_i}a_1,\ p^{k_2-k_i}a_2, \dots, p^{k_{i-1}-k_i}a_{i-1},\ a_i,\ a_{i+1}, \dots, a_s.$$

Մյուս կողմից, եթե $1\leqslant j\leqslant i-1$, ապա $p^{k_j-k_i-1}a_j$ էլեմենտն ունի p^{k_i+1} կարգը, ուստի և H-ի մեջ չի մտնում։ Այստեղից հետևում է, որ a_j+H հարևան դասը (հիշեցնենք, որ մենք օգտագործում ենք ադդիտիվ գրությունը), որպես G/H բազմապատկիչ-խմբի էլեմենտ, ունի $p^{k_j-k_i}$ կարգը. այդպիսին է նաև նրա $\{a_j+H\}$ ցիկլային ենթախմբի կարգը։ Ապացուցենք, որ G/H խումբը հանդիսանում է $\{a_j+H\}$, $j=1, 2, \dots, i-1$, ցիկլային ենթախմբերի ուղղակի գումար՝

$$G/H=\{a_1+H\}+\{a_2+H\}+\dots+\{a_{i-1}+H\} \qquad (15)$$

և, հետևաբար, նրա կարգը հավասար է

$$p^{(k_1-k_i)+(k_2-k_i)+\dots+(k_{i-1}-k_i)} \qquad (16)$$

թվին։ Եթե x-ը G խմբի կամայական էլեմենտ է, ապա գոյություն ունի

$$x=m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_sa_s$$

գրությունը։ Դիցուք $j=1, 2, \dots, i-1$ համար

$$m_j=p^{k_j-k_i}q_j+n_j,$$

որտեղ՝

$$0\leqslant n_j<p^{k_j-k_i}. \qquad (17)$$

Այդ ժամանակ՝

$$m_ja_j=q_j(p^{k_j-k_i}a_j)+n_ja_j$$

և քանի որ աջ մասի առաջին գումարելին պարունակվում է H-ի մեջ, ապա՝

$$m_ja_j+H=n_ja_j+H.$$

Մյուս կողմից՝

$$m_ia_i+H=H, \dots, m_sa_s+H=H.$$

Ուստի՝

$$x+H=(m_1a_1+H)+(m_2a_2+H)+\dots+(m_sa_s+H)=$$
$$=(n_1a_1+H)+(n_2a_2+H)+\dots+(n_{i-1}a_{i-1}+H). \qquad (18)$$

Դիցուք գոյություն ունի ևս մեկ այդպիսի գրություն՝

$$x+H=(n'_1a_1+H)+(n'_2a_2+H)+\dots+(n'_{i-1}a_{i-1}+H), \qquad (19)$$

որտեղ՝

$$0\leqslant n'_j<p^{k_j-k_i}, \quad j=1, 2, \dots, i-1. \qquad (20)$$

Այդ ժամանակ

$$n_1a_1+n_2a_2+\dots+n_{i-1}a_{i-1}$$

$$n'_1a_1+n'_2a_2+\dots+n'_{i-1}a_{i-1}$$

էլեմենտները գտնվում են H-ի նկատմամբ հարևան միևնույն դասում, այսինքն՝ նրանց տարբերությունը պատկանում է H-ին, ուստի և՝

$$p^{k_i}[(n_1-n'_1)a_1+(n_2-n'_2)a_2+\dots+(n_{i-1}-n'_{i-1})a_{i-1}]=0.$$

Այստեղից հետևում է (քանի, որ (12) վերլուծություններից առաջինն ուղղակի է), որ

$$p^{k_i}(n_j-n'_j)a_j=0, \quad j=1, 2, \dots, i-1,$$

ուստի և $p^{k_i}(n_j-n'_j)$ թիվը պետք է բաժանվի a_j էլեմենտի p^{k_j} կարգի վրա և, հետևաբար, $n_j-n'_j$ տարբերությունը կբաժանվի $p^{k_j-k_i}$ թվի վրա։ Այստեղից, նկատի ունենալով (17)-ը և (20)-ը, հետևում է, որ

$$n_j=n'_j, \quad j=1, 2, \dots, i-1,$$

այսինքն՝ (18) և (19) գրությունները նույնական են։ Դրանով ապացուցված է (15) ուղղակի վերլուծության գոյությունը։ (12) ուղղակի վերլուծություններից երկրորդի համար համանման դիտարկումները ցույց կտան, որ այդ նույն G/H բազմապատկիչ-խումբն ունի

$$G/H=\{b_1+H\}+\{b_2+H\}+\dots+\{b_{i-1}+H\}+\{b_i+H\}+\dots$$

ուղղակի վերլուծությունը, այսինքն, նկատի ունենալով (13)-ը և (14)-ը, նրա կարգը պետք է լինի (16) թվից էապես մեծ։ Այդ հակասությունն ապացուցում է թեորեման։

Աբելյան վերջավոր խմբերի լրիվ նկարագիրն այժմ արդեն մեր կողմից ստացված է։ Այն է՝ վերցնենք մեկից տարբեր, բայց ոչ անպայման իրարից տարբեր

$$(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

բնական թվերի բոլոր հնարավոր վերջավոր հավաքածուները, ընդ որում այդ թվերից յուրաքանչյուրը պետք է լինի որևէ պարզ թվի աստիճան։ Յուրաքանչյուր այդպիսի հավաքածուի համապատասխանեցնենք այն ցիկլային խմբերի ուղղակի գումարը, որոնց համար կարգեր են ծառայում այդ հավաքածուի թվերը։ Այս ճանապարհով ստացված բոլոր աբելյան վերջավոր խմբերը կլինեն զույգ առ զույգ ոչիզոմորֆ, իսկ ցանկացած ուրիշ աբելյան վերջավոր խումբ իզոմորֆ է այդ խմբերից մեկին։

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

Սույն ցանկում բերված են հանրահաշվի տարբեր բաժիններին վերաբերող այն գրքերը, որոնք ռուսերեն լեզվով լույս են տեսել վերջին քսան-քսանհինգ տարում։ Այդ գրքերից մի քանիսը համալսարանական կամ մանկավարժական ինստիտուտի հանրահաշվի դասընթացի դասագրքեր կամ ուսումնական ձեռնարկներ են, իսկ մյուսները՝ պատ ստեղծագործություններ կամ մենագրություններ են առանձին հարցերի շուրջը, որոնք նկատի ունեն լավ նախապատրաստված ընթերցողին։

Բարձրագույն հանրահաշիվ

Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, изд. 4, Гостехиздат, 1941.
Окунев Л. Я., Высшая алгебра, Учпедгиз, 1958.
Шапиро Г. М., Высшая алгебра, изд. 4, Учпедгиз, 1940.
Ляпин Е. С., Курс высшей алгебры. изд. 2, Учпедгиз, 1955.
Фаддеев Д. К, и Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, изд. 3, Гостехиздат, 1952.
Виноградов С. П., Основания теории детерминантов, изд. 4, ОНТИ, 1935.

Գծային հանրահաշիվ

Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 2, Гостехиздат, 1951.
Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, изд. 2, Гостехиздат, 1956.
Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, изд. 2, Гостехиздат, 1956.
Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Гостехиздат, 1957.
Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
Бохер М., Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1933.
Шрейер О. и Шпернер Е., Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, т. 1, ОНТИ, 1934.
Шрейер О. и Шпернер Е., Теория матриц. ОНТИ, 1936.
Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.
Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.
Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, Гостехиздат, 1948.

Խմբերի, օղակների և ստրուկտուրաների տեսություն

Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. 1 и 2, Гостехиздат, 1947.
Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, изд. 2, ОНТИ, 1933. (См. также Шмидт О. Ю., Избранные труды, Математика, изд. АН СССР. 1959.)
Курош А. Г., Теория групп, изд 2, Гостехиздат, 1953.
Александров П. С., Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1938.
Джекобсон Н., Теория колец, ИЛ, 1947.
Чеботарев Н. Г., Введение в теорию алгебр, Гостехиздат, 1949.
Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, ГНТИ Украины, 1937.
Окунев Л. Я., Основы современной алгебры, Учпедгиз, 1941.
Бер Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, 1955.
Ляпин Е. С., Полугруппы, Физматгиз, 1960.
Картан А. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.
Джекобсон Н., Строение колец, ИЛ, 1961.
Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, физматгиз, 1932.

Դաշտերի տեսություն

Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. I, ОНТИ, 1934.
Чеботарев Н. Г., Теория Галуа, ОНТИ, 1936.
Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, 1940.
Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, ИЛ, 1947.
Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.
Ходж В. и Пидо Д., Методы алгебраической геометрии тт. 1 и 2, ИЛ 1954; т. 3. ИЛ, 1955.
Граве Д. А., Трактат по алгебраическому анализу. тт. 1 и 2, изд. АН УССР, 1938—1939.

Անընդհատ խմբեր

Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, 1954.
Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.
Шевалле К., Теория групп Ли, ч. 1, ИЛ. 1948, ч. ч. 2. 3, ИЛ, 1958.
Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, ИЛ, 1950.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Վեցերորդ հրատարակության առաջաբանը 3
Ներածություն 5

Գլուխ առաջին. Գծային հավասարումների սիստեմներ։ Դետերմինանտներ 16

§ 1. Անհայտների հաջորդական արտաքսման մեթոդը 16
§ 2. Երկրորդ և երրորդ կարգի դետերմինանտներ 24
§ 3. Տեղափոխություններ և տեղադրություններ 30
§ 4. n-րդ կարգի դետերմինանտներ 40
§ 5. Մինորներ և նրանց հանրահաշվական լրացուցիչները 48
§ 6. Դետերմինանտների հաշվումը 52
§ 7. Կրամերի կանոնը 59

Գլուխ երկրորդ. Գծային հավասարումների սիստեմներ (ընդհանուր տեսություն) 66

§ 8. n-չափանի վեկտորական տարածություն 66
§ 9. Վեկտորների գծային կախումը 70
§ 10. Մատրիցի ռանգը 78
§ 11. Գծային հավասարումների սիստեմներ 86
§ 12. Գծային համասեռ հավասարումների սիստեմներ 92

Գլուխ երրորդ. Մատրիցների հանրահաշիվ 98

§ 13. Մատրիցների բազմապատկումը 98
§ 14. Հակադարձ մատրից 104
§ 15. Մատրիցների գումարումը և մատրիցի բազմապատկումը թվով 112
§ 16*. Դետերմինանտների տեսության աքսիոմատիկ կառուցումը 116

Գլուխ չորրորդ. Կոմպլեքս թվեր 121

§ 17. Կոմպլեքս թվերի սիստեմը 121
§ 18. Կոմպլեքս թվերի հետագա ուսումնասիրությունը 127
§ 19. Կոմպլեքս թվերից արմատ հանելը 136

Գլուխ հինգերորդ. Բազմանդամներ և նրանց արմատները 145

§ 20. Գործողություններ բազմանդամների հետ 145
§ 21. Բաժանարարներ։ Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը 152
§ 22. Բազմանդամների արմատները 161

§ 23. Հիմնական թեորեմ 166
§ 24. Հետևանքներ հիմնական թեորեմայից 176
§ 25*. Ռացիոնալ կոտորակներ 482

Գլուխ վեցերորդ. Քառակուսային ձևեր 188

§ 26. Քառակուսային ձևի բերումը կանոնական տեսքի 188
§ 27. Իներցիայի օրենքը 197
§ 28. Դրական որոշյալ ձևեր 203

Գլուխ յոթերորդ. Գծային տարածություններ 209

§ 29. Գծային տարածության սահմանումը։ Իզոմորֆիզմ 209
§ 30. Վերջավորչափանի տարածություններ։ Բազիս 215
§ 31. Գծային ձևափոխություններ 221
§ 32*. Գծային ենթատարածություններ 229
§ 33. Բնութագրիչ արմատներ և սեփական արժեքներ 235

Գլուխ ութերորդ. Էվկլիդյան տարածություններ 240

§ 34. Էվկլիդյան տարածության սահմանումը։ Օրթոնորմավորված բազիսներ 240
§ 35. Օրթոգոնալ մատրիցներ, օրթոգոնալ ձևափոխություններ 248
§ 36. Սիմետրիկ ձևափոխություններ 253
§ 37. Քառակուսային ձևի բերումը գլխավոր առանցքներին։ Ձևերի զույգեր . 258

Գլուխ իններորդ. Բազմանդամների արմատների հաշվումը 265

§ 38*. Երկրորդ, երրորդ և չորրորդ աստիճանի հավասարումներ 265
§ 39. Արմատների սահմանները 274
§ 40. Շտուրմի թեորեմ 280
§ 41. Այլ թեորեմներ իրական արմատների թվի վերաբերյալ 287
§ 42. Արմատների մոտավոր հաշվումը 295

Գլուխ տասներորդ. Դաշտեր և բազմանդամներ 303

§ 43. Թվային օղակներ և դաշտեր 303
§ 44. Օղակ 308
§ 45. Դաշտ 315
§ 46. Օղակների (դաշտերի) իզոմորֆիզմը։ Կոմպլեքս թվերի դաշտի միակությունը 322
§ 47. Գծային հանրահաշիվը և բազմանդամների հանրահաշիվը կամայական դաշտի վրա 327
§ 48. Բազմանդամների վերլուծումն անվերածելի բազմապատկիչների 332
§ 49*. Արմատների գոյության թեորեմ 343
§ 50*. Ռացիոնալ կոտորակների դաշտը 351

Գլուխ տասնմեկերորդ. Բազմանդամներ մի քանի անհայտներից 359

§ 51. Մի քանի անհայտներից կազմած բազմանդամների օղակը 359
§ 52. Սիմետրիկ բազմանդամներ 370
§ 53*. Լրացուցիչ դիտողություններ սիմետրիկ բազմանդամների վերաբերյալ 378
§ 54*. Ռեզուլտանտ։ Անհայտի արտաքսումը։ Դիսկրիմինանտ 385

§ 55*. Կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի հիմնական թեորեմայի երկրորդ ապացույցը 398

Գլուխ տասներկուերորդ. Բազմանդամներ ռացիոնալ գործակիցներով . . 403

§ 56*. Բազմանդամների վերածելիությունը ռացիոնալ թվերի դաշտի վրա . . 403
§ 57*. Ամբողջաթիվ բազմանդամների ռացիոնալ արմատները 408
§ 58*. Հանրահաշվական թվեր 413

Գլուխ տասներեքերորդ. Մատրիցի նորմալ ձևը 419

§ 59. λ-մատրիցների համարժեքությունը 419
§ 60. Միամոդուլ (ունիմոդուլյար) λ-մատրիցներ։ Թվային մատրիցների նմանության կապը նրանց բնութագրիչ մատրիցների համարժեքության հետ 427
§ 61. Ժորդանյան նորմալ ձև 437
§ 62. Նվազագույն բազմանդամ 446

Գլուխ տասնչորսերորդ. Խմբեր 452

§ 63. Խմբի սահմանումը և օրինակներ 452
§ 64. Ենթախմբեր 460
§ 65. Նորմալ բաժանարարներ, բազմապատկիչ-խմբեր (ֆակտոր-խմբեր), հոմոմորֆիզմներ (նմանաձևություններ) 467
§ 66. Աբելյան խմբերի ուղղակի գումարները 474
§ 67. Վերջավոր աբելյան խմբեր 481
Գրականության ցանկ 490

Ա. Գ. ԿՈՒՐՈՇ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Գեղ. խմբագիր՝ Բ. Վ. Մազմանյան
Տեխն. խմբագիր՝ Ռ. Ե. Ալիխյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Վ. Ա. Ներսիսյան

Պատվեր 1124 Տպաքանակ 5000

Հանձնված է արտադրության 12/VII 1965 թ.։ Ստորագրված է տպագրության 26/XI 1965 թ.։ Թուղթ՝ $60\times90^{1}/_{16}$։
Տպագր. 31 մամ., հրատ. 28,4 մամ.։

Գինը՝ 1 ռուբլի։

Հայկական ՍՍՌ Մինիստրների սովետի մամուլի պետական կոմիտեի պոլիգրաֆարդյունաբերության գլխավոր վարչության № 1 տպարան, Երևան, Ալավերդյան փող. № 65։