ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ՄԱՐՏԻՆ ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ | ԼԵՎՈՆ ԳԱԼՈՅԱՆ | ԱՐԹՈՒՐ ԿՈԲԵԼՅԱՆ

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt:$$

Իրական անալիզի ընտրովի բաժիններ

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(f)$$

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Լ. Ն. ԳԱԼՈՅԱՆ,
Ա. Խ. ԿՈԲԵԼՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԸՆՏՐՈՎԻ ԲԱԺԻՆՆԵՐ

Երևան
ԵՊՀ հրատարակչություն
2015

ՀՏԴ 517(07)
ԳՄԴ 22.161ց7
Գ 888

Տպագրվում է ԵՊՀ ֆիզիկայի
ֆակուլտետի խորհրդի որոշմամբ

Խմբագիր՝ ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ս. Ա. Եպիսկոպոսյան

Գրախոսներ՝ ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Հ. Հովհաննիսյան
ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Բ. Վ. Խաչատրյան

Մ. Գ. Գրիգորյան, Լ. Ն. Գալոյան, Ա. Խ. Կոբելյան
Գ 888 Իրական անալիզի ընտրովի բաժիններ/Մ. Գ. Գրիգորյան, Լ. Ն. Գալոյան, Ա. Խ. Կոբելյան/: -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2015 թ., 216 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված են բարձրագույն մաթեմատիկայի մի քանի կարևոր բաժինների ընտրովի նյութեր: Այն բաղկացած է 3 գլուխներից, որոնց վերջում ձևակերպված են խնդիրներ: Այն օգտակար կլինի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների, բարձր կուրսի ուսանողների, մագիստրոսների, ասպիրանտների, գիտաշխատողների, դասախոսների համար:

Ձեռնարկից օգտվելու համար ենթադրվում է ընթերցողից մաթեմատիկական անալիզի հիմնական բաժինների իմացություն (բակալավրիատի ծրագրի շրջանակներում):

ՀՏԴ 517(07)
ԳՄԴ 22.161ց7

ISBN 978-5-8084-2005-2

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Այս ձեռնարկի նպատակն է ընթերցողին ծանոթացնել իրական անալիզի կարևոր բաժինների որոշ հարցերին: Ձեռնարկը բաղկացած է 3 գլուխներից, որոնցում հիմնականում շարադրված են վերջին տարիներին Երևանի պետական համալսարանում (մագիստրատուրայում) կարդացված դասախոսությունները, որոնցից օգտվելու համար ենթադրվում է մաթեմատիկական անալիզի բակալավրիատի ծրագրի իմացություն:

1-ին գլուխը նվիրված է սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաների հատկություններին, մասնավորապես բերված են մոնոտոն և անընդհատ ֆունկցիաների հետ կապը բնորոշող արդյունքներ: Այդ գլխում շարադրված են նաև հանրահաշվական և եռանկյունաչափական բազմանդամներով անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկմանը նվիրված Վայերշտրասի թեորեմները և դրանց ընդհանրացումները: 2-րդ գլուխը նվիրված է չափելի ֆունկցիաների և Լեբեգի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիաների տեսությանը: 3-րդ գլխում շարադրված են ընդհանուր օրթոնորմալ համակարգերի որոշ հատկություններ և դասական համակարգերից եռանկյունաչափական ու Հաարի համակարգերին նվիրված մի շարք արդյունքներ: Յուրաքանչյուր գլխի վերջում ձևակերպված են տարբեր բարդության խնդիրներ:

Հեղինակները շնորհակալությամբ կընդունեն գործընկերների և ընթերցողների յուրաքանչյուր օգտակար դիտողություն:

Հեղինակներ

ԳԼՈՒԽ 1.

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԸ ԵՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ

§1.1. Սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիաներ

Այս պարագրաֆում ներկայացվում է մոնոտոն ֆունկցիաների դասի հետ սերտորեն կապված և մաթեմատիկական անալիզի շատ բաժինների համար կարևոր նշանակություն ունեցող ֆունկցիաների մի դաս, որը ներմուծվել է Ժորդանի կողմից:

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a,b]$ հատվածում: Դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի կամայական տրոհում՝

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} \dots < x_n = b\ ,$$

և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\ : \qquad (1.1.1)$$

Սահմանում 1.1.1: Եթե $[a,b]$ հատվածի բոլոր հնարավոր տրոհումներին համապատասխանող (1.1.1) գումարների բազմությունը սահմանափակ լինի վերևից, այդ դեպքում ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածի վրա ունի սահմանափակ փոփոխություն *(կամ սահմանափակ վարիացիա)*, և (1.1.1) գումարների բազմության ճշգրիտ վերին եզրը անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի լրիվ փոփոխություն $[a,b]$ հատվածի վրա ու նշանակում այսպես՝

$$\bigvee_a^b(f) = sup\{V\}:$$

Հակառակ դեպքում, երբ (1.1.1) գումարների բազմությունը սահմանափակ չէ վերևից, ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածի վրա չի պատկանում *սահմանափակ վարիացիա ունեցող ֆունկցիաների դասին և* $\bigvee_a^b(f) = +\infty$:

Այժմ նկարագրենք սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաների դասը:

Որպես սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիայի օրինակ կարող է հանդիսանալ $[a,b]$ հատվածի վրա մոնոտոն ցանկացած ֆունկցիա: Իրոք, մոնոտոն ֆունկցիայի դեպքում (1.1.1) գումարների մեջ մոդուլի տակ գրված տարբերությունները նույն նշանի են, հետևաբար ցանկացած այդպիսի գումար կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \right| = f(b) - f(a),$$

որտեղից

$$\bigvee_a^b (f) = f(b) - f(a):$$

Ապացուցվեց, որ $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա մոնոտոն ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիա ունի սահմանափակ փոփոխություն, որի

$$\bigvee_a^b (f) = f(b) - f(a):$$

Այստեղից անմիջապես ստանում ենք, որ սահմանափակ վարիացիայի դասին պատկանելու համար ֆունկցիայի անընդհատությունը անհրաժեշտ պայման չէ:

Նկատենք նաև, որ ոչ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաներն են պատկանում *սահմանափակ վարիացիայի դասին:*

Օրինակ՝ հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(x) = x\cos\frac{\pi}{2x}, 0 < x \le 1, f(0) = 0,$$

անընդհատ է [0,1] հատվածի վրա, մինչդեռ կարելի է այդ հատվածի այնպիսի տրոհումներ ընտրել, որոնց համապատասխանող (1.1.1) գումարների ճշգրիտ վերին եզրը լինի $+\infty$: Վերցնելով [0,1] հատվածի տրոհումների հետևյալ

$$0 < \tfrac{1}{2n} < \tfrac{1}{2n-1} < \cdots < \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} < 1, \text{ n: } 1,2,3\ldots.$$

հաջորդականությունը՝ հեշտությամբ կհամոզվենք, որ (տե՛ս (1.1.1))

$$V = 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}, \text{ n: } 1,2,3\ldots.:$$

Նկատի ունենալով, որ ստացված թվային հաջորդականությունը տարամիտում է անվերջության, անմիջապես կստանանք, որ (1.1.1) գումարների ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր թիվ լինել չի կարող, այսինքն՝ $\mathrm{V}_0^1(f) = +\infty$:

Սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիաների դասին է պատկանում հատվածի վրա որոշված մաս առ մաս մոնոտոն յուրաքանչյուր ֆունկցիա:

Թեորեմ 1.1.1: Եթե $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա որոշված $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ այդ հատվածը կարելի բաժանել վերջավոր թվով

$$[\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{a_{k+1}}]\ (\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{N} - \boldsymbol{1};\ \boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a_N} = \boldsymbol{b})$$

մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա այդ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ $[a, b]$ հատվածի կամայական տրոհմանը նոր տրոհման կետ ավելացնելիս (1.1.1) գումարները չեն նվազում: Իրոք, ենթադրենք՝ $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհմանն ավելացրել ենք x' կետը, որը գտնվում է հին տրոհման x_i և x_{i+1} կետերի միջև: Այս դեպքում նոր տրոհմանը համապատասխանող (1.1.1) գումարը հնից տարբերվում է միայն նրանով, որ վերջինիս մեջ $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ գումարելին փոխարինվում է $|f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)|$ գումարելիով, և նշված դիտարկումը հետևում է

$$|f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)| \geq |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

անհավասարությունից: Անցնենք թեորեմի ապացույցին: Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի կամայական տրոհում և այդ տրոհմանը համապատասխանող (1.1.1) գումարը նշանակենք V-ով: Տրված տրոհմանը ավելացնենք $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ կետերի հավաքածուն և ստացված նոր տրոհմանը համապատասխանող (1.1.1) գումարը նշանակենք V'-ով:

Ունենք $V' \geq V$: V' գումարի մեջ առանձնացնենք այն գումարելիները, որոնք համապատասխանում են $[a_k, a_{k+1}]$ հատվածին: Ակնհայտ է, որ դրանց $V_k{}'$ գումարն իրենից ներկայացնում է $[a_k, a_{k+1}]$ հատվածին համապատասխանող (1.1.1) տիպի գումար: Քանի որ այս հատվածի վրա մեր ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա նախորդ պարագրաֆի դատողություններով ունենք՝

$$V_k' = |f(a_{k+1}) - f(a_{k:})|,$$

որտեղից

$$V' = \sum_{k=0}^{N-1} |f(a_{k+1}) - f(a_{k:})|:$$

Վերջին գումարը ֆիքսած թիվ է, և $[a, b]$ հատվածի կամայական տրոհմանը համապատասխանող V գումարը բավարարում է

$$V \leq V' = \sum_{k=0}^{N-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)|$$

անհավասարությանը: Քանի որ սկզբնական տրոհումը կամայական էր, ուստի բոլոր հնարավոր V գումարների բազմությունը վերևից սահմանափակ է միևնույն թվով:

Թեորեմ 1.1.1-ն ապացուցված է: □

Սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիաների դասին է պատկանում տրված հատվածի վրա Լիպշիցի պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր ֆունկցիա:

Սահմանում 1.1.2: Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան տրված $[a, b]$ հատվածի վրա բավարարում է *Լիպշիցի պայմանին,* եթե գոյություն ունի այնպիսի K հաստատուն, որ ցանկացած $x, y \in [a, b]$ երկու կետերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|: \tag{1.1.2}$$

Նկատենք, որ $[a, b]$ հատվածի վրա սահմանափակ ածանցյալ ունեցող $f(x)$ ֆունկցիան, ինչպես երևում է Լագրանժի

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \ (x < z < y)$$

բանաձևից, ակնհայտորեն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին:

Դիտողություն 1.1.1: Լիպշիցի պայմանին բավարարելը չի ապահովում ֆունկցիայի ածանցելիությունը:

Թեորեմ 1.1.2: Եթե $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա որոշված $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի (1.1.2) **պայմանին, ապա այն ունի սահմանափակ փոփոխություն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա, ընդ որում՝**

$$\bigvee_a^b (f) \leq K(b - a):$$

Ապացույցն անմիջապես հետևում է

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq K \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = K(b - a)$$

անհավասարությունից:

Թեորեմ 1.1.2-ն ապացուցված է: □

Հետևանք: Եթե $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը այդ հատվածի բոլոր ներքին կետերում բավարարում է

$|f'(x)\,| \leq K$ անհավասարությանը, ապա այն ունի սահմանափակ փոփոխություն $[a, b]$ հատվածի վրա, ընդ որում՝

$$\bigvee_a^b(f) \leq K(b-a):$$

Թեորեմ 1.1.3: Եթե $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա որոշված $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ֆունկցիան ներկայացվում է վերին փոփոխական սահմանով ինտեգրալի տեսքով՝

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} + \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{du},$$

որտեղ $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$-ն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա որոշված բացարձակ ինտեգրելի (թեկուզ անիսկական իմաստով) ֆունկցիա է, ապա այն ունի սահմանափակ փոփոխություն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա, ընդ որում՝

$$\bigvee_a^b(f) \leq \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})| \boldsymbol{du}:$$

Ապացույց: Օգտվելով թեորեմի պայմաններից՝ կարող ենք գրել՝

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(u) du \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(u)| du = \int_a^b |\varphi(u)| du:$$

Թեորեմ 1.1.3-ն ապացուցված է:

Սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաների հատկությունները:

Թեորեմ 1.1.4: Սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ցանկացած ֆունկցիա սահմանափակ է:

Ապացույց: Իրոք, $a \leq x < b$ դեպքում

$$V = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \bigvee_a^b(f),$$

որտեղից

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b(f):$$

Թեորեմ 1.1.4-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.1.5: Սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաներ են:

Ապացույց: Դիցուք՝ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը $[a,b]$ հատվածի վրա սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաներ են, իսկ $s(x)$-ը նրանց գումարն է: Այդ դեպքում՝

$$|s(x_{k+1}) - s(x_k)| \le |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\bigvee_a^b (s) \le \bigvee_a^b (f) + \bigvee_a^b (g),$$

և հետևաբար $s(x)$-ը վերջավոր աճով ֆունկցիա է: Դիցուք՝ $p(x) = f(x)g(x)$: Նշանակենք $A = \sup\{|f(x)|\}, B = \sup\{|g(x)|\}$ (թեորեմ 1.1.4-ի համաձայն այս թվերը վերջավոր են): Ունենք՝

$$|p(x_{k+1}) - p(x_k)| \le$$

$$\le |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| + |f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \le$$

$$\le B|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + A|g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

որտեղից

$$\bigvee_a^b (p) \le B\bigvee_a^b (f) + A\bigvee_a^b (g):$$

Թեորեմ 1.1.5-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.1.6: Եթե $f(x)$-ը և $g(x)$-ը սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաներ են և $g(x) \ge \sigma > 0$, ապա $\frac{f(x)}{g(x)}$-ը սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիա է:

Ապացույց: Թեորեմ 1.1.5-ի համաձայն՝ բավական է պնդումն ապացուցել $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ ֆունկցիայի համար: Ունենք՝

$$|h(x_{k+1}) - h(x_k)| = \frac{|g(x_{k+1}) - g(x_k)|}{g(x_k)g(x_{k+1})} \le \frac{1}{\sigma^2}|g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

որտեղից

$$\bigvee_a^b (h) \le \frac{1}{\sigma^2}\bigvee_a^b (g):$$

Թեորեմ 1.1.6-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.1.7: **Դիցուք՝ $\boldsymbol{f(x)}$ ֆունկցիան որոշված է $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածում, և $\boldsymbol{a} < c < b$: Եթե այդ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա, ապա այն ունի սահմանափակ փոփոխություն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ և $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում և հակառակը, ընդ որում՝**

$$\mathrm{V}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{f}) = \mathrm{V}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{f}) + \mathrm{V}_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{f}): \tag{1.1.3}$$

Ապացույց: Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն $[a, b]$ հատվածի վրա: $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածները առանձին-առանձին տրոհենք հետևյալ կետերով՝

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c, c = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b,$$

և կազմենք հետևյալ գումարները՝

$$V_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|:$$

$\{y_k\}$ և $\{z_k\}$ կետերը բաժանում են ամբողջ $[a, b]$ հատվածը մասերի: Եթե V-ով նշանակենք այդ բաժանմանը համապատասխան (1.1.1) գումարը, ապա $V = V_1 + V_2$, որտեղից կհետևի, որ $V_1 + V_2 \leq \mathrm{V}_a^b(f)$, այսինքն՝ V_1 ու V_2 գումարներից յուրաքանչյուրը սահմանափակ է, և

$$\mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f) \leq \mathrm{V}_a^b(f): \tag{1.1.4}$$

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածների վրա: $[a, b]$ հատվածը բաժանենք $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ կետերով, այնպես, որ c կետը ընկած լինի այդ բաժանման կետերի մեջ (դրանից, ինչպես գիտենք, V գումարը չի փոքրանա): Եթե $c = x_m$, ապա V գումարը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$V = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|,$$

կամ ավելի հակիրճ՝ $V = V_1 + V_2$, որտեղ V_1 և V_2-ը $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածներին համապատասխան գումարներն են: Այստեղից՝ $V \leq \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f)$: Քանի որ բաժանման նոր կետերի ավելացումից V գումարը չի փոքրանում, ապա պարզ է դառնում, որ

$$\mathrm{V}_a^b(f) \leq \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f): \tag{1.1.5}$$

Համեմատելով (1.1.4) և (1.1.5) անհավասարությունները՝ համոզվում ենք, որ (1.1.3)-ը ճիշտ է:

Թեորեմ 1.1.7-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.1.7-ի հետևանք: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն $[a,b]$ հատվածի վրա, ապա

$$g(x) = \bigvee_a^x (f)$$

ֆունկցիան $(a,b]$ ինտերվալի վրա որոշված, սահմանափակ, մոնոտոն աճող (չնվազող) ֆունկցիա է:

Իրոք, համաձայն թեորեմ 1.1.7-ի՝ ցանկացած $x \in (a,b]$-ի համար $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն $[a,x]$ հատվածի վրա, ուստի $g(x)$-ը որոշված է $(a,b]$ ինտերվալի վրա: Մյուս կողմից՝ ցանկացած $x, x' \in (a,b], x > x'$ կետերի համար՝

$$g(x) - g(x') = \bigvee_x^{x'} (f) \geq 0:$$

Թեորեմ 1.1.8: Որպեսզի $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ հատվածում որոշված $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ֆունկցիան ունենա սահմանափակ փոփոխություն այդ հատվածի վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն հնարավոր լինի ներկայացնել երկու չնվազող ֆունկցիաների տարբերությամբ:

Ապացույց: Բավարարությունը հետևում է թեորեմներ (1.1.1) և (1.1.5)-ից: Անհրաժեշտությունը ապացուցելու համար դիտարկենք

$$\pi(x) = \bigvee_a^x (f) \ (a < x \leq b), \pi(a) = 0$$

ֆունկցիան: Թեորեմ (1.1.7)-ի հետևանքից եզրակացնում ենք, որ $\pi(x)$ ֆունկցիան չնվազող է: Եթե նշանակենք $\nu(x) = \pi(x) - f(x)$, ապա $\nu(x)$ ֆունկցիան նույնպես կլինի չնվազող, իրոք, եթե $a \leq x < y \leq b$, ապա ըստ թեորեմ (1.1.7)-ի՝

$$\nu(y) = \pi(y) - f(y) = \pi(x) + \bigvee_x^y (f) - f(y),$$

ուրեմն՝

$$\nu(y) - \nu(x) = \bigvee_x^y (f) - [f(y) - f(x)]:$$

Լրիվ վարիացիայի սահմանումից պարզ է, որ $f(y) - f(x) \leq \bigvee_x^y (f)$, հետևաբար $\nu(y) - \nu(x) \geq 0$, այսինքն՝ $\nu(x)$ ֆունկցիան չնվազող է: $f(x)$-ը կներկայացնենք հետևյալ կերպ՝ $f(x) = \pi(x) - \nu(x)$:

Թեորեմ 1.1.8-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.1.8-ի հետևանք: Սահմանափակ փոփոխության ֆունկ-ցիայի խզման կետերի բազմությունը հաշվելի է, և ցանկացած x_0 խզման կետում գոյություն ունեն ու վերջավոր են հետևյալ միակողմանի սահ-մանները՝

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0} f(x)\ (x>x_0), f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0} f(x)\ (x<x_0):$$

Երկրորդ գլխում կապացուցվի որ կամայական մոնոտոն ֆունկցիա համարյա ամենուրեք ունի ածանցյալ (թեորեմ 2.21.3): Հետևաբար սահ-մանափակ փոփոխության ֆունկցիան համարյա ամենուրեք կունենա ածանցյալ:

Թեորեմ 1.1.9: Սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել որպես նրա «թռիչքների ֆունկցիայի» և անընդհատ ու սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիայի գումար:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ $x_1, x_2, x_3, \dots$ $(a<x_n<b)$ հաջորդականու-թյունը բաղկացած է $\pi(x)$ կամ $\nu(x)$ ֆունկցիաներից մեկի բոլոր խզման կետերից: Դիտարկենք «թռիչքների» ֆունկցիաները՝

$$s_\pi(x)=[\pi(a+0)-\pi(a)]+\sum_{x_k<x}[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)]+$$
$$+[\pi(x)-\pi(x-0)]\,,(a<x\le b),$$
$$s_\nu(x)=[\nu(a+0)-\nu(a)]+\sum_{x_k<x}[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)]+$$
$$+[\nu(x)-\nu(x-0)]\,,(a<x\le b)$$

$$s_\pi(a)=s_\nu(a)=0:$$

Նշանակենք $s(x)=s_\pi(x)-s_\nu(x)$, այն կարելի է ներկայացնել հե-տևյալ կերպ՝

$$s(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(x)-f(x-0)],(a<x\le b),$$

$$s(a)=0:$$

Սա նույնպես *սահմանափակ փոփոխության* ֆունկցիա է և կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի թռիչքների ֆունկցիա: Պարզ է, որ $s(x)$ ֆունկցիայի սահմանումը չի փոխվի, եթե $x_1, x_2, \ldots$, հաջորդականությունից հանենք բոլոր այն կետերը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: Այսպիսով՝ կենթադրենք, որ այդ հաջորդականությունը բաղկացած է միայն $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետերից: Ունենք, որ $\pi(x) - s_\pi(x), \nu(x) - s_\nu(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ և աճող են ըստ մոնոտոն ֆունկցիաների թեորեմ 2-ից: Այստեղից հետևում է, որ $\varphi(x) = f(x) - s(x)$ ֆունկցիան անընդհատ և վերջավոր աճով ֆունկցիա է, ինչն էլ պետք էր ապացուցել:

Թեորեմ 1.1.9-ն ապացուցված է: □

Սահմանափակ փոփոխության անընդհատ ֆունկցիաներ

Թեորեմ 1.1.10: Դիցուք՝ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հատվածում որոշված $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն այդ հատվածի վրա: Եթե այն անընդհատ է այդ հատվածի ինչ-որ $\boldsymbol{x_0}$ կետում, ապա այդ կետում անընդհատ է նաև հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\pi(x) = \bigvee_a^x (f):$$

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $x_0 < b$, և ցույց տանք, որ $\pi(x)$-ը անընդհատ է այդ կետում աջից: Ֆիքսենք $\varepsilon > 0$ թիվը և $[x_0, b]$ հատվածը $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ բաժանման կետերով տրոհենք մասերի, այնպես, որ տեղի ունենա՝

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^b (f) - \varepsilon:$$

Քանի որ V գումարը միայն աճում է նոր կետեր ավելացնելիս, ապա կարելի է ենթադրել, որ $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$, այդ դեպքում ստանում ենք, որ

$$\bigvee_{x_0}^b (f) < \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 2\varepsilon +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^b (f):$$

Այսինքն՝ $\mathrm{V}_{x_0}^{x_1}(f) < 2\varepsilon$ և հետևաբար՝ $\pi(x_1) - \pi(x_0) < 2\varepsilon$, ուրեմն նաև՝ $\pi(x_0 + 0) - \pi(x_0) < 2\varepsilon$: Քանի որ ε-ը կամայական էր, ուրեմն $\pi(x_0 + 0) = \pi(x_0)$: Նույն կերպ ապացուցվում է նաև ձախից անընդհատությունը:

Թեորեմ 1.1.10-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.1.10-ի հետևանք: Սահմանափակ փոփոխությամբ անընդհատ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել երկու անընդհատ և չնվազող ֆունկցիաների տարբերության տեսքով:

Իրոք, եթե $f(x)$-ը սահմանափակ փոփոխությամբ անընդհատ ֆունկցիա է տրված $[a, b]$ հատվածում, ապա անընդհատ են նաև $\pi(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$ և $\nu(x) = \pi(x) - f(x)$ ֆունկցիաները, որոնք, ինչպես արդեն համոզվել ենք, չնվազող են:

Պարզվում է, որ անընդհատ ֆունկցիաների դեպքում լրիվ փոփոխության բանաձևի մեջ կարելի է ճշգրիտ վերին եզրը փոխարինել սահմանով: Դիցուք՝ $[a, b]$ հատվածում տրված է անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան: Տրոհենք $[a, b]$ հատվածը հետևյալ կետերով՝

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \ [\max(x_{k+1} - x_k) = \lambda],$$

և կառուցենք հետևյալ գումարները՝

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|, \Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k,$$

որտեղ ω_k-ն $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումն է $[x_k, x_{k+1}]$ հատվածի վրա:

Թեորեմ 1.1.11: Երբ $\lambda \to 0$, ապա V և Ω գումարներից յուրաքանչյուրը ձգտում է $f(x)$ ֆունկցիայի լրիվ աճին՝ $\mathrm{V}_a^b(f)$ ՝անվերջ կամ վերջավոր:

Ապացույց: Նոր բաժանման կետեր ավելացնելիս V գումարը չի նվազում: Մյուս կողմից՝ եթե այդ նոր կետը ընկած է x_k և x_{k+1} կետերի միջև, ապա V գումարի աճը չի գերազանցում ω_k տատանման կրկնակին: Նկատելով դա՝ վերցնենք ինչ-որ $A < \mathrm{V}_a^b(f)$ և գտնենք այնպիսի V^* գումար, որ $V^* > A$: Այդ գումարը համապատասխանում է հետևյալ բաժանմանը՝ $x_0^* = a < x_1^* < \cdots < x_m^* = b$: $\delta > 0$ թիվն ընտրենք այնքան փոքր, որ հենց որ $|x'' - x'| < \delta$, լինի

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - A}{4m}:$$

Ցույց տանք, որ ցանկացած բաժանման դեպքում, երբ $\lambda < \delta$, կունենանք $V > A$:

Իրոք, այդպիսի բաժանում ունենալու դեպքում նրան կավելացնենք $\{x_k^*\}$ բաժանման կետերը և կստանանք նոր տրոհում, որին համապատասխան V_0 գումարը՝ $V_0 \geq V^*$: Մյուս կողմից՝ նոր տրոհումը ստացվում է m անգամ նոր կետ ավելացնելու միջոցով, և քանի որ ամեն ավելացումը V-ն մեծացնում է ոչ ավել, քան $\frac{V^* - A}{2m}$-ով, ապա

$$V_0 - V < \frac{V^* - A}{2}:$$

Քանի որ $V_0 \geq V^*$, ապա

$$V > V_0 - \frac{V^* - A}{2} \geq \frac{A + V^*}{2} > A,$$

և քանի որ $V \leq \bigvee_a^b(f)$, ապա $\lim_{\lambda \to 0} V = \bigvee_a^b(f)$:

Թեորեմ 1.1.11-ն ապացուցված է: □

§1.2. Հելլիի ընտրության սկզբունքը

Այս պարագրաֆում մենք կապացուցենք Է. Հելլիի թեորեմներից մեկը, որի համար նախ ապացուցենք հետևյալ լեմմերը:

Լեմմ 1.2.1: Դիցուք՝ $[a, b]$ հատվածում տրված է անվերջ քանակի ֆունկցիաների $H = \{f(x)\}$ ընտանիք: Եթե բոլոր այդ ֆունկցիաները սահմանափակված են նույն թվով՝

$$|f(x)| \leq K, x \in [a, b], \tag{1.2.1}$$

ապա ինչպիսի $E \subset [a, b]$ հաշվելի բազմություն էլ որ վերցնենք, H ընտանիքից կարելի է առանձնացնել $\{f_n(x)\}$ հաջորդականություն, որը զուգամիտում է E բազմության վրա:

Ապացույց: Դիցուք՝ $E = \{x_n\}$, դիտարկենք $\{f(x_1)\}$ արժեքների բազմությունը: Ըստ (1.2.1)-ի՝ այդ բազմությունը սահմանափակ է, և Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմի համաձայն՝ դրանից կարելի է առանձնացնել զուգամիտող հաջորդականություն՝

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), \dots; \lim_{n \to \infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1:$$

Այժմ դիտարկենք $f_n^{(1)}(x), n = 1,2, \dots$ հաջորդականությունը x_2 կետում: Այն նույնպես սահմանափակ է, և նորից կարող ենք առանձնացնել այդ հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն, որը կհամարակալենք այսպես՝

$$f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), \dots ; \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2:$$

Այս պրոցեսը շարունակելով՝ կստանանք զուգամիտող հաջորդականությունների հաշվելի բազմություն՝

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), \dots ; \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = A_k, k = 1,2, \dots:$$

Կառուցենք այդ հաջորդականությունների անկյունագծերից բաղկացած էլեմենտների հաջորդականությունը՝

$$\left\{f_n^{(n)}(x)\right\} (n = 1,2,3, \dots):$$

Հենց այն էլ կլինի պահանջվող հաջորդականությունը, որը զուգամիտում է E բազմության կամայական կետում: Իրոք, ցանկացած ֆիքսված k-ի համար $\left\{f_n^{(n)}(x_k)\right\} (n \geq k)$ հաջորդականությունը կլինի $\left\{f_n^{(k)}(x_k)\right\}$ հաջորդականության մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է A_k-ին:

Լեմմ 1.2.1-ը ապացուցված է: □

Լեմմ 1.2.2: Դիցուք՝ $F = \{f(x)\}$-ը $[a, b]$ հատվածում որոշված անվերջ քանակով չնվազող ֆունկցիաների ընտանիք է: Եթե բոլոր այդ ֆունկցիաները սահմանափակ են նույն K թվով, ապա F-ից կարելի է առանձնացնել $\{f_n(x)\}$ հաջորդականություն, որը [a,b] հատվածի ցանկացած կետում զուգամիտում է $\varphi(x)$ չնվազող ֆունկցիային:

Ապացույց: $\{f(x)\}$ ֆունկցիաների ընտանիքի համար կիրառենք լեմմ 1.2.1-ը՝ որպես E բազմություն վերցնելով այն բազմությունը, որը բաղկացած է $[a, b]$ հատվածի բոլոր ռացիոնալ կետերից և a կետից, եթե այն իռացիոնալ է: Ցանկացած $x_k \in E$ կետում գոյություն ունի $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)$ վերջավոր սահմանը, որը առանձնացվել է F-ից՝ $F_0 = \{f^{(n)}(x)\}$: Ներմուծենք $\psi(x)$ ֆունկցիան $\psi(x_k) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_k)$ $(x_k \in E)$: Այն այժմ որոշված է E բազմության վրա, և պարզ է, որ կլինի չնվազող ֆունկցիա՝ $(\psi(x_k) \leq \psi(x_i)$ $(x_k < x_i)$: Շարունակենք այս ֆունկցիան ամբողջ $[a, b]$ հատվածի վրա բոլոր իռացիոնալ կետերի համար հետևյալ կերպ՝ $\psi(x) = \sup\{\psi(x_k)\}\,(x_k < x)$: Պարզ է, որ այն աճող է ամբողջ $[a,b]$ հատվածի վրա: Այդ դեպքում նրա խզման կետերի Q բազմությունը հաշվելի է: Ցույց տանք, որ ցանկացած x_0 կետում, որտեղ $\psi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, տեղի ունի՝

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \psi(x_0):$$

Իրոք, ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար կարելի է գտնել E բազմության այնպիսի x_k և x_i կետեր, որ

$$x_k < x_0 < x_i, \psi(x_i) - \psi(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Ֆիքսելով այդ կետերը՝ գտնենք այնպիսի n_0, որ $n > n_0$ դեպքում տեղի ունենան՝

$$\left|f^{(n)}(x_k) - \psi(x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|f^{(n)}(x_i) - \psi(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Պարզ է, որ այդպիսի n-երի դեպքում կլինի

$$\psi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_k) \leq f^{(n)}(x_i) < \psi(x_0) + \varepsilon,$$

իսկ քանի որ $f^{(n)}(x_k) \leq f^{(n)}(x_0) \leq f^{(n)}(x_i)$, ապա $n > n_0$ դեպքում տեղի ունի

$$\psi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_0) < \psi(x_0) + \varepsilon,$$

որտեղից էլ հետևում է $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \psi(x_0)$: Այսինքն՝ $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \psi(x)$ հավասարությունը կարող է տեղի չունենալ միայն հաշվելի Q բազմության վրա: Նկատելով դա՝ ևս մեկ անգամ կիրառենք լեմմ 1.2.1-ը F_0 հաջորդականության վրա՝ որպես E բազմություն վերցնելով Q-ի այն կետերը, որտեղ տեղի չունի $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \psi(x)$: Դա կհանգեցնի մեզ F_0-ից առանձնացված $\{f^{(n)}(x)\}$ հաջորդականության, որը զուգամիտում է արդեն $[a,b]$ հատվածի ցանկացած կետում, քանզի այնտեղ, որտեղ զուգամիտում է $\{f^{(n)}(x)\}$ հաջորդականությունը, կզուգամիտի նաև նրա $\{f_n(x)\}$ ենթահաջորդականությունը: Եթե նշանակենք $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ապա պարզ է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան կլինի չնվազող:

Լեմմ 1.2.2-ը ապացուցված է: □

Թեորեմ 1.2.1 (Հելլի): Դիցուք՝ $F = \{f(x)\}$ $[a,b]$ հատվածում որոշված անվերջ քանակով չնվազող ֆունկցիաների ընտանիք է: Եթե բոլոր այս ֆունկցիաները և նրանց լրիվ փոփոխությունները սահմանափակ են նույն K թվով՝

$$|f(x)| \le K, \bigvee_a^b (f) \le K,$$

ապա F ընտանիքից կարելի է առանձնացնել $[a,b]$ հատվածի ցանկացած կետում զուգամետ $\{f_n(x)\}$ հաջորդականություն, որի սահմանային $\varphi(x)$ ֆունկցիան նույնպես ունի սահմանափակ փոփոխություն:

Ապացույց: F ընտանիքի յուրաքանչյուր $f(x)$ ֆունկցիայի համար նշանակենք

$$\pi(x) = \bigvee_a^x (f)\,, \nu(x) = \pi(x) - f(x):$$

Այս երկու ֆունկցիաներն էլ չնվազող են: Ընդ որում՝ $|\pi(x)| \le K, |\nu(x)| \le 2K$: $\{\pi(x)\}$ ընտանիքի վրա կիրառելով լեմմ 1.2.2-ը՝ մենք կառանձնացնենք զուգամիտող $\{\pi_k(x)\}$ հաջորդականությունը՝

$$\lim_{n\to\infty} \pi_k(x) = \alpha(x):$$

Ցանկացած $\pi_k(x)$-ին համապատասխանում է $\nu_k(x)$ ֆունկցիա, որը լրացնում է այն մինչև $f_k(x)$ ֆունկցիան F ընտանիքից: Կիրառելով լեմմ 1.2.2-ը $\{\nu_k(x)\}$ ընտանիքի վրա՝ մենք կառանձնացնենք նրանից հետևյալ հաջորդականությունը՝ $\{\nu_{k_i}(x)\}$՝

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{k_i}(x) = \beta(x):$$

Բայց այդ դեպքում $f_{k_i}(x) = \pi_{k_i}(x) - \nu_{k_i}(x)$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը, որը առանձնացված է F ընտանիքից, կզուգամիտի $\varphi(x) = \alpha(x) - \beta(x)$-ի, ինչն էլ պետք էր ապացուցել:

Թեորեմ 1.2.1-ն ապացուցված է: □

Խնդիրներ

1. Ապացուցել, որ $[0,1]$ հատվածի վրա անընդհատ

$$f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x}, 0 < x \le 1, f(0) = 0$$

ֆունկցիան ունի այդ հատվածի վրա սահմանափակ փոփոխություն: Ցույց տալ նաև, որ այս ֆունկցիան «անվերջ տատանվում է» 0-ի շրջակայքում:

2. Ապացուցել, որ $[0,1]$ հատվածի վրա անընդհատ

$$f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}, 0 < x \leq 1, f(0) = 0$$

ֆունկցիան ունի այդ հատվածի վրա անսահմանափակ փոփոխություն: Այս օրինակի վրա համոզվել, որ 1.1.3. թեորեմի մեջ $\varphi(u)$ ֆունկցիայի բացարձակ ինտեգրելիության պահանջն ուղղակի ինտեգրելիությամբ փոխարինել չի կարելի:

3. Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a,\infty)$ միջակայքում և ունի սահմանափակ վարիացիա ցանկացած $[a,A]$ հատվածի վրա: f-ի լրիվ վարիացիա $[a,\infty)$ միջակայքի վրա սահմանում են այսպես՝

$$\bigvee_a^\infty(f) = sup_{A>a}\bigvee_a^A(f):$$

Բերել ֆունկցիայի օրինակ, որի համար $\bigvee_a^A(f)$-ը վերջավոր է ցանկացած A-ի համար, բայցևայնպես $\bigvee_a^\infty(f) = \infty$: Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է $[a,\infty)$ միջակայքում, և

$$f(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

թիվը վերջավոր է, ապա

$$\bigvee_a^\infty(f) = |f(\infty) - f(a)|:$$

4. Ցույց տալ, որ

$$f(x) = \int_0^x \frac{sint}{t}dt$$

ֆունկցիան $[0,\infty)$ միջակայքում ունի անսահմանափակ փոփոխություն:

5. Ապացուցել, որ թեորեմ 1.1.3-ի մեջ իրականում տեղի ունի հավասարության նշան՝

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b |\varphi(u)|du:$$

Ընդհանրացնել այս թեորեմն $[a,\infty)$ միջակայքում սահմանված ֆունկցիաների դեպքում:

§1.3. Վայերշտրասի թեորեմները

Ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկման տեսության առաջին և ամենակարևոր հարցը հանրահաշվական բազմանդամների օգնությամբ կամայական անընդհատ ֆունկցիայի նախապես տրված ճշտությամբ մոտարկման հարցն է: Այս հարցի սպառիչ պատասխանը տրվել է 1885 թ. Վայերշտրասի կողմից: Նրա արդյունքը ձևակերպվում է այսպես:

Թեորեմ 1.3.1. (Վայերշտրասի առաջին թեորեմը): Դիցուք՝ $f \in C[a,b]$: Ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամ, այնպիսին, որ $[a,b]$ հատվածին պատկանող բոլոր x-երի համար

$$\left|P(x)-f(x)\right|<\varepsilon:$$

Հայտնի են այս թեորեմի մի քանի ապացույցներ: Այստեղ կներկայացնենք այդ ապացույցներից մեկը, որն իրականացվում է **«Բեռնշտեյնի բազմանդամների»** օգնությամբ:

Սահմանում 1.3.1: Դիցուք՝ F-ը $[0,1]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիա է:

$$B_n(x,F)=\sum_{k=0}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, n=0,1,... \qquad (1.3.1)$$

բազմանդամները անվանում են F ֆունկցիայի **«Բեռնշտեյնի բազմանդամներ»:**

Նախ պարզենք (1.3.1) բազմանդամների որոշ հատկություններ:

Լեմմ 1.3.1: $[0,1]$ հատվածի վրա նույնաբար 1-ին հավասար ֆունկցիայի Բեռնշտեյնի $B_0(x,1),B_1(x,1),...,B_n(x,1),...$ բազմանդամները այդ հատվածի վրա նույնաբար 1 են, այլ կերպ ասած՝

$$\sum_{n=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1: \qquad (1.3.2)$$

Ապացույցն անմիջապես հետևում է $(a+b)^{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}a^k b^{n\text{-}k}$ բանաձևից՝ $a=\mathrm{x}$, $b=1-x$ փոխարինումների միջոցով: □

Լեմմ 1.3.2: Ցանկացած $x \in [0,1]$ իրական և n բնական թվերի դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4}:$$

Ապացույց: Ածանցելով ըստ t-ի

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = (1+t)^n$$

նույնության աջ և ձախ մասերը ու ստացված հավասարության երկու կողմերը բազմապատկելով t-ով՝ կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k t^k = nt(1+t)^{n-1}: \qquad (1.3.3)$$

Եվս մեկ անգամ կատարելով այս քայլը՝ կունենանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k t^k = nt(1+nt)^n (1+t)^{n-2}: \qquad (1.3.4)$$

(1.3.3) և (1.3.4) նույնությունների մեջ կատարելով $t = \dfrac{x}{1-x}, \quad x \in (0,1)$ փոխարինումը ու արդյունքում ստացված հավասարությունների երկու մասը $(1-x)^n$-ով բազմապատկելով՝ կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx):$$

Վերջին երկու նույնությունները և լեմմ 1.3.1-ը օգտագործելով՝ կարող ենք գրել՝

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \cdot \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} +$$

$$+ n^2 x^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx) - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x):$$

Լեմմ 1.3.2-ի պնդումը անմիջապես կհետևի վերջին նույնությունից և $x(x-1) \le 1/4$ ակնհայտ անհավասարությունից: □

Այժմ անցնենք Վայերշտրասի առաջին թեորեմի ապացուցմանը:

Դիցուք՝ $f \in C[a,b]$: Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝ $F(x) = f(a+(b-a)\cdot x)$: Ակնհայտ է, որ այս ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[0,1]$ հատվածի վրա: Նախ համոզվենք, որ $[0,1]$-ի վրա հավասարաչափ՝

$$B_n(x,F) \to F(x), \quad n \to \infty:$$

Դիցուք՝ $M \equiv \max\limits_{0\le x\le 1}|F(x)|$: Համաձայն Կանտորի թեորեմի՝ F-ը $[0,1]$-ի վրա կլինի հավասարաչափ անընդհատ, հետևաբար ցանկացած ε դրական թվի համար կգտնվի այնպիսի δ_ε դրական թիվ, որ $[0,1]$-ին պատկանող և $|x''-x'|<\delta_\varepsilon$ անհավասարությանը բավարարող ցանկացած x', x'' կետազույգի համար տեղի կունենա $|F(x'')-F(x')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ անհավասարությունը: Դիցուք՝

$$A_x \equiv \left\{k : k=0,1,\ldots,n; \quad \left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_\varepsilon\right\}, \quad B_x \equiv \{0,1,\ldots,n\}\setminus A_x : \quad (1.3.5)$$

(1.3.5)-ից պարզ է, որ B_x բազմության պատկանող կամայական k էլեմենտի համար տեղի ունի $\dfrac{(k-nx)^2}{n^2\delta_\varepsilon{}^2} \ge 1$ անհավասարությունը: Հաշվի առնելով սա և օգտվելով լեմմեր 1.3.1, 1.3.2-ից՝ կարող ենք գրել՝

$$|B_n(x,F)-F(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)-F(x)\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{k\in A_x}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)-F(x)\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| + \left|\sum_{k\in B_x}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)-F(x)\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \le$$

$$\le \left|\varepsilon \cdot \sum_{k\in A_x} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| + \left|2M \cdot \sum_{k\in B_x} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \le$$

$$\le \left|\varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| + \left|\frac{2M}{n^2 {\delta_\varepsilon}^2} \cdot \sum_{k\in B_x} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \le$$

$$\le \varepsilon + \frac{2M}{n^2 {\delta_\varepsilon}^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n{\delta_\varepsilon}^2} : \quad (1.3.6)$$

(1.3.6)-ից հետևում է, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի n_ε բնական թիվ (օրինակ՝ կարելի է վերցնել $n_\varepsilon = \left[M/\varepsilon{\delta_\varepsilon}^2\right] + 1$), այնպիսին, որ n_ε-ից մեծ ցանկացած n բնական թվի և ցանկացած $x \in [0,1]$ իրական թվի համար տեղի ունի $\left|B_n(x,F) - F(x)\right| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Այսպիսով՝ $B_1(x,F), B_2(x,F),...$ հաջորդականությունը n-ը անվերջի ձգտելու դեպքում զուգամիտում է F ֆունկցիային հավասարաչափ $[0,1]$ հատվածի վրա, այլ կերպ ասած՝ ցանկացած ε դրական թվի և բավականաչափ մեծ n բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|B_n(x,F) - f(a+(b-a)\cdot x)\right| < \varepsilon, \quad x \in [0,1],$$

կամ, որ նույնն է ($t = a + (b-a)\cdot x$ փոխարինումից հետո),

$$\left|B_n\left(\frac{t-a}{b-a}, F\right) - f(t)\right| < \varepsilon, \quad t \in [a,b]:$$

Մնում է նկատել, որ $P(t) = B_n\left(\dfrac{t-a}{b-a}, F\right)$-ը հանրահաշվական բազմանդամ է: Թեորեմն ապացուցված է: □

Դիտողություն 1.3.1: Վայերշտրասի թեորեմի ապացույցի ընթացքում ցույց տրվեց, որ կամայական $F \in C[0,1]$ ֆունկցիայի դեպքում $B_1(x,F), B_2(x,F),...$ հաջորդականությունը n-ը անվերջի ձգտելու դեպքում զուգամիտում է F ֆունկցիային հավասարաչափ $[0,1]$ հատվածի վրա: Այս պնդումը կարելի է մեկնաբանել (իհարկե այս մեկնաբանությունը զուրկ է մաթեմատիկական ապացուցմանը հատուկ խստությունից) այսպես. լեմմ 1.3.2-ը նշանակում է, որ Բեռնշտեյնի բազմանդամների մեջ մտնող այն գումարելիները, որոնց համար $\frac{k}{n}$–ը «հեռու է» x-ից (B_x բազմության վրայով տարածված գումարելիները), աննշան ներդրում են ունենում ամբողջ գումարի մեջ, մյուս կողմից՝ F-ի անընդհատության շնորհիվ $F\left(\frac{k}{n}\right)$-ը աննշան է տարբերվում $F(x)$-ից:

Այսպիսով՝

$$B_n(x,F) = \sum_{k\in A_x} F\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B_x} F\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \approx$$

$$\approx \sum_{k\in A_x} F\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \approx \sum_{k\in A_x} F(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \approx$$

$$\approx F(x) \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = F(x) \Rightarrow$$

$$B_n(x,F) \approx F(x):$$

Դիտողություն 1.3.2: Ապացուցված թեորեմի օգնությամբ կարող ենք դրական պատասխանել հետևյալ հարցին. դիցուք՝ f ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $M = \bigcup_{j=1}^{d} [a_j, b_j]$ բազմության վրա (d-ն ֆիքսած թիվ է): Գոյություն ունի՞ արդյոք f ֆունկցիան M բազմության վրա ցանկացած նախապես տրված ճշտությամբ հավասարաչափ մոտարկող հանրահաշվական բազմանդամ: Իրոք, դիտարկենք g օժանդակ ֆունկցիան, որը հանդիսանում է f-ի անընդհատ շարունակությունը մինչև $[a_1, b_d]$ հատվածը՝

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in M; \\ f(b_{j-1})+\dfrac{f(a_j)-f(b_{j-1})}{a_j-b_{j-1}}\cdot(x-b_{j-1}), & x\in[b_{j-1},a_j];\quad 1<j\le d\,: \end{cases}$$

Դժվար չէ հասկանալ, որ սա $[a_1,b_d]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիա է, հետևաբար, համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի, նախապես տրված ε դրական թվի համար կգտնվի այնպիսի $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամ, որ $|P(x)-g(x)|<\varepsilon$ $[a_1,b_d]$ հատվածին պատկանող բոլոր x-երի համար: Հետևաբար՝

$$\max_{x\in M}|P(x)-f(x)|=\max_{x\in M}|P(x)-g(x)|\le\max_{x\in[a_1,b_d]}|P(x)-g(x)|<\varepsilon\,:$$

Վայերշտրասի թեորեմին կարելի է տալ այլ ձևակերպումներ.

1. $[a,b]$ հատվածի վրա տրված կամայական անընդհատ ֆունկցիան հանդիսանում է հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականության հավասարաչափ սահման:
2. $[a,b]$ հատվածի վրա տրված կամայական անընդհատ ֆունկցիան հանդիսանում է հանրահաշվական բազմանդամներից բաղկացած հավասարաչափ զուգամիտող շարքի գումար:

Իրոք, եթե $f\in C[a,b]$, ապա Վայերշտրասի թեորեմի մեջ հաջորդաբար վերցնելով $\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$՝ կարող ենք փաստել, որ գոյություն ունի $P_1(x),P_2(x),\dots,P_n(x),\dots$ հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$|P_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n},\quad n=1,2,\dots;\quad x\in[a,b],$$

որտեղից հետևում է, որ $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է f ֆունկցիային $[a,b]$ հատվածի վրա հավասարաչափ: Երկրորդ ձևակերպումը միանգամից հետևում է $P_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(P_n(x)-P_{n-1}(x)\right)$ շարքի դիտարկումից:

Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը:

Թվային առանցքի վրա անընդհատ, 2π -պարբերական ֆունկցիաների (այսուհետ՝ $C_{2\pi}$ դաս) եռանկյունաչափական բազմանդամների օգնությամբ հավասարաչափ մոտարկման հնարավորությունը ձևակերպվում է Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմում:

Թեորեմ 1.3.2 (Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը): Դիցուք՝ $f \in C_{2\pi}$: Ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $T(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամ, որ բոլոր իրական x-երի համար ճշմարիտ է $\left|T(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

Նշենք, որ այստեղ ևս կարելի է թեորեմը ձևակերպել հանրահաշվական բազմանդամների համար համապատասխան պնդման 1 և 2 ձևակերպումների նման: Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի բավական պարզ ապացույց բերել է Վալե-Պուսենը 1908 թ.-ին: Նրա ապացույցի ներկայացմանը նախորդող մի շարք պարզ փաստեր ապացուցենք:

Լեմմ 1.3.3: Դիցուք՝ $\varphi \in C_{2\pi}$: Ցանկացած a իրական թվի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_{a}^{a+2\pi} \phi(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \phi(x)dx :$$

Ապացույց: Նախ հավասարության ձախ մասը ներկայացնենք այսպես՝

$$\int_{a}^{a+2\pi} \phi(x)dx = \int_{a}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{2\pi} \phi(x)dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} \phi(x)dx :$$

Վերջին ինտեգրալի մեջ կատարելով $x = z + 2\pi$ փոխարինումը և հաշվի առնելով $\varphi(z+2\pi) = \varphi(z)$ հավասարությունը՝ կարող ենք գրել՝

$$\int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x)dx = \int_{a}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{2\pi} \varphi(x)dx - \int_{a}^{0} \varphi(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \varphi(x)dx ,$$

որտեղից էլ կհետևի լեմմի պնդումը: □

Լեմմ 1.3.4: Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} : \qquad (1.3.7)$$

Ապացույց: (1.3.7) ինտեգրալը նշանակելով I_{2n}-ով և կիրառելով «մասերով ինտեգրման բանաձևը»՝ կարող ենք գրել՝

$$I_{2m} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} u d(\sin u) = \left[\sin u \cdot \cos^{2m-1} u\right]_0^{\pi/2} + (2m-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2} u \cdot \sin^2 u du =$$

$$= (2m-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2} u du - (2m-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} u du = (2m-1) \cdot (I_{2m-2} - I_{2m}),$$

որտեղից

$$I_{2m} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2m-2}, \quad m = 1,2,\ldots \qquad (1.3.8)$$

(1.3.8) առնչության մեջ m-ի փոխարեն հաջորդաբար վերցնելով $1,2,\ldots,n$՝ կստանանք՝

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot I_{2n-6} =$$

$$= \ldots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

որտեղից էլ կհետևի լեմմի պնդումը: □

Սահմանում 1.3.2: Դիցուք՝ $f \in C_{2\pi}$:

$$V_n(x, f) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \cos^{2n} \frac{u-x}{2} du, \qquad n = 0,1,\ldots \quad (1.3.9)$$

ինտեգրալը անվանում են **«Վալե-Պուսենի սինգուլյար ինտեգրալ»:**

Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը անմիջապես կհետևի հաջորդ թեորեմից:

Թեորեմ 1.3.3 (Վալե-Պուսեն): Դիցուք $f \in C_{2\pi}$: Բոլոր իրական x-երի համար հավասարաչափ՝

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x,f) = f(x):$$

Ապացույց: (1.3.9) ինտեգրալի մեջ կատարելով $u = x + 2t$ փոխարինումը՝ պարզ ձևափոխություններից հետո այն կարող ենք արտագրել այսպիսի տեսքով՝

$$V_n(x,f) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t)\cdot\cos^{2n} t dt =$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \{f(x+2t)+f(x-2t)\}\cdot\cos^{2n} t dt : \quad (1.3.10)$$

Ըստ պայմանի՝ f ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Հայտնի են օրինակներ, երբ թվային առանցքի վրա անընդհատ ֆունկցիաները հավասարաչափ անընդհատ չեն: Բայց մեր դեպքում f ֆունկցիան նաև պարբերական է. այս պայմաններին բավարարող ֆունկցիաները, դժվար չէ նկատել, հանդիսանում են նաև հավասարաչափ անընդհատ, այնպես որ ցանկացած ε դրական թվի համար կգտնվի δ_ε դրական թիվ այնպիսին, որ $|x''-x'| < \delta_\varepsilon$ անհավասարությանը բավարարող ցանկացած x', x'' կետազույգի համար տեղի կունենա $|f(x'')-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ անհավասարությունը: Վերցնենք $M \equiv \max_{x\in R}|f(x)|$: Հաշվի առնելով լեմմ 1.3.1-ը և (1.3.10)-ը՝ կարող ենք գրել՝

$$V_n(x,f)-f(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\}\cdot\cos^{2n} t dt =$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta_\varepsilon/2} \{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\}\cdot\cos^{2n} t dt +$$

$$+ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\delta_\varepsilon/2}^{\pi/2} \{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\}\cdot\cos^{2n} t dt =$$

$$=V_n^{(1)}(x,f)+V_n^{(2)}(x,f):\qquad (1.3.11)$$

$V_n^{(1)}(x,f)$ արտահայտության մեջ ինտեգրալը տարածվում է այնպիսի t-երի համար, որոնք բավարարում են $0\le 2t\le \delta_\varepsilon$ անհավասարությանը: Հավասարաչափ անընդհատության շնորհիվ այսպիսի t-երի և ցանկացած $x\in R$ թվի համար՝

$$\left|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right|\le\left|f(x+2t)-f(x)\right|+\left|f(x)+f(x-2t)\right|\le\varepsilon,$$

հետևաբար՝

$$\left|V_n^{(1)}(x,f)\right|\le\varepsilon\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_\varepsilon/2}\cos^{2n}tdt\le\varepsilon\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}tdt=\frac{\varepsilon}{2}:\qquad (1.3.12)$$

$V_n^{(2)}(x,f)$ արտահայտության մեջ հանդես եկող ինտեգրալի համար ունենք՝

$$\left|V_n^{(2)}(x,f)\right|\le 4M\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\delta_\varepsilon/2}^{\pi/2}\cos^{2n}tdt\le 2M\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\cos^{2n}\frac{\delta_\varepsilon}{2}:\qquad (1.3.13)$$

Հաշվի առնելով

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\frac{2n}{2n-1}<\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-4}\cdot\frac{2n}{2n-2}=2n$$

անհավասարությունը և $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot q^n=0\quad(0<q<1)$ սահմանային առնչությունը՝ կարող ենք (1.3.13)-ը հաշվի առնելով ասել, որ գոյություն ունի n_ε բնական թիվ, այնպիսին, որ n_ε-ից մեծ ցանկացած n բնական թվի համար տեղի ունի

$$\left|V_n^{(2)}(x,f)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad n>n_3\qquad (1.3.14)$$

անհավասարությունը: Ամփոփելով (1.3.11), (1.3.12) և (1.3.14) կետերը՝ կարող ենք ասել, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի n_ε բնական թիվ, այնպիսին, որ n_ε-ից մեծ ցանկացած n բնական թվի համար

$$\left|V_n(x,f)-f(x)\right|<\varepsilon:$$

Թեորեմ 1.3.3-ն ապացուցված է: □

Դիտողություն 1.3.3: Վալե-Պուսենի թեորեմը, չնայած իր ապացույցի մեջ առկա տեխնիկական բարդություններին, ունի շատ պարզ մեկնաբանություն: Բանն այն է, որ $\cos^{2n} t$ արտահայտությունը «0-ից կտրված» t-երի համար, n-ը անվերջի ձգտելիս, շատ արագ (ցուցչային արագությամբ) ձգտում է 0-ի, հետևաբար պարբերական ու անընդհատ և այդպիսով սահմանափակ ֆունկցիաների համար $V_n(x,f)$ սինգուլյար ինտեգրալի մեջ (տե՛ս (1.3.11) ներկայացումը) էական ներդրում է ունենում միայն 0-ի անմիջական շրջակայքով տարածված ինտեգրալը: Բայց 0-ի շրջակայքում անընդհատության շնորհիվ $f(x+2t)+f(x-2t)\approx 2f(x)$: Ասվածը կարելի է նկարագրել այսպես՝

$$V_n(x,f)\approx\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_\varepsilon/2}\left\{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right\}\cdot\cos^{2n} t dt\approx$$

$$\approx\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_\varepsilon/2}2f(x)\cos^{2n} t dt=f(x)\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta_\varepsilon/2}\cos^{2n} t dt\approx$$

$$\approx f(x)\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} t dt=f(x)\Rightarrow V_n(x,f)\approx f(x):$$

Վայերշտրասի թեորեմների ընդհանրացումը

Թեորեմ 1.3.4: Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածում ունենա r-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ հավասար $\varphi(x)$-ին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $\left\{P_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ հանրահաշվական բազմանդամների այնպիսի հաջորդականություն, որ $\mathbf{n}\to\infty$ դեպքում՝

$$P_n(x)\to f(x) \tag{1.3.15}$$

$$P_n^{(r)}(x)\to\varphi(x) \tag{1.3.16}$$

հավասարաչափ ըստ $x\in[a,b]$-ի:

Նախ ներկայացնենք մի քանի օժանդակ փաստեր:

Լեմմ 1.3.5: Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածում ունենա r-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ հավասար $\varphi(x)$-ին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր $x\in[a,b]$-երի համար տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$f(x) = q_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}\varphi(t)dt, \qquad (1.3.17)$$

որտեղ $q_{r-1}(x)$-ը ինչ որ հանրահաշվական բազմանդամ է, որի կարգը r-1-ից բարձր չէ:

Ապացույց (բավարարություն): Ընդունենք, որ (1.3.17)-ը ճշմարիտ է: Այդ դեպքում հաջորդական դիֆերենցումով կստանանք՝

$$f'(x) = q'_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-2}\varphi(t)dt$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(r-1)}(x) = q_{r-1}^{(r-1)}(x) + \int_a^x \varphi(t)dt:$$

$$f^{(r)}(x) = \varphi(x):$$

Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք, որ f(x)-ը [a,b]-ում ունի անընդհատ r-րդ կարգի ածանցյալ: Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt,$$

որը, r անգամ մասերով ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt = \frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} +$$

$$+\frac{1}{(r-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)dt = \cdots$$

$$\dots = -\sum_{k=1}^{r-1}\frac{f^{(r-k)}(a)}{(r-k)!}(x-a)^{r-k} + \int_a^x f'(t)dt = -\sum_{k=1}^{r}\frac{f^{(r-k)}(a)}{(r-k)!}(x-a)^{r-k} + f(x):$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (1.3.17)-ի ճիշտ լինելը, եթե ընդունենք, որ

$$\varphi(x) = f^{(r)}(x),$$

և

$$q_{r-1}(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(r-k)}(a)}{(r-k)!}(x-a)^{r-k} = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^{s}$$

Լեմմ 1.3.5-ը ապացուցված է: □

Լեմմ 1.3.6: Դիցուք՝ $\{q_{ki}(x)\}$, i=1,2,…-ը հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականություն է, որի անդամների կարգը k-ն չի գերազանցում: Եթե այս հաջորդականությունը $i \to \infty$ ձգտելիս [a,b] միջակայքում հավասարաչափ զուգամիտում է g(x) ֆունկցիային, ապա g(x)-ը նույնպես հանդիսանում է բազմանդամ, որի կարգը k-ն չի գերազանցում:

Ապացույց: Ֆիքսենք [a,b] հատվածին պատկանող k+1 կետեր՝ $a \le x_0 < x_1 \dots < x_k \le b$, և օգտվենք Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևից՝

$$q_{ki}(x) = \sum_{\nu=0}^{k} q_{ki}(x_\nu) l_\nu(x),$$

որտեղ $l_\nu(x) = \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq\nu}}^{k} \frac{x-x_s}{x_\nu - x_s}$: Լեմմի պայմանների ներքո՝

$$q_{ki}(x_\nu) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} g(x_\nu),$$

ուստի հավասարաչափ [a, b]-ի վրա

$$q_{ki}(x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{\nu=0}^{k} g(x_\nu) l_\nu(x)$$

Այստեղից և պայմաններից հետևում է, որ

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{k} g(x_\nu) l_\nu(x):$$

Այսինքն՝ g(x)-ը նույնպես հանդիսանում է բազմանդամ, որի կարգը k-ն չի գերազանցում: □

Թեորեմ 1.3.4-ի ապացույցը (**բավարարություն**): Ենթադրենք, որ տեղի ունեն (1.3.15) և (1.3.16) առնչությունները: Լեմմ 1.3.6-ից հետևում է, որ

$$P_n(x) = q_{r-1,n}(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} P_n^{(r)}(t)dt:$$

Քանի որ հավասարաչափ $[a,b]$-ի վրա $P_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, ուստի

$$\int_a^x (x-t)^{r-1} P_n^{(r)}(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)dt,$$

որտեղից

$$q_{r-1,n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) - \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)dt:$$

Նկատենք, որ $q_{r-1,n} \in H_{r-1}$ բոլոր n-երի համար, հետևաբար լեմմ 1.3.6-ից՝

$$f(x) - \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)dt = q_{r-1}(x),$$

որտեղ $q_{r-1}(x) \in H_{r-1}$: Այստեղից՝ լեմմ 1.3.1-ից օգտվելով՝ կարող ենք եզրակացնել, որ f(x)-ը [a,b]-ում ունի $\varphi(x)$-ին հավասար r-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ, ապա լեմմ 1.3.6-ից՝

$$f(x) = q_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)dt:$$

Վայերշտրասի առաջին թեորեմից օգտվելով՝ կգտնենք հանրահաշվական բազմանդամների $\{Q_{n-r}(x)\}_{n=r+1}^{\infty}$ հաջորդականություն այնպիսին, որ հավասարաչափ [a;b]-ի վրա $Q_{n-r}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$:

Նշանակենք

$$P_n(x) = q_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} Q_{n-r}(t)dt:$$

Ակնհայտ է , որ $P_n \in H_n$, և լեմմ 3.1-ից

$$P_n^{(r)}(x) = Q_{n-r}(x)$$

$\{P_n(x)\}$ հաջորդականությունը հանդիսանում է պահանջվողը:

$$P_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)dt = f(x)$$

և

$$P_n^{(r)}(x) = Q_{n-r}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$$

Թեորեմ 1.3.4-ն ապացուցված է: □

Ճշմարիտ է նաև նման թեորեմը եռանկյունաչափական բազմանդամներով մոտարկման դեպքում:

Թեորեմ 1.3.5: **Որպեսզի 2π պարբերությամբ $f(x)$ ֆունկցիան (-∞; ∞)-ում ունենա r-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ $\varphi(x)$ -ին հավասար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ եռանկյունաչափական բազմանդամների այնպիսի հաջորդականություն, որ $n \to \infty$ ձգտելիս ըստ $x \in R$ -ի հավասարաչափ** $T_n(x) \to f(x)$ և $T_n^{(r)}(x) \to \varphi(x)$:

Դիտողություն 1.3.4: Եթե պարբերական անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ փոփոխության դասի է (ունի սահմանափակ վարիացիա՝ $\bigvee_a^b(f) < \infty$), այդ դեպքում Վայերշտրասի (եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականությամբ անընդհատ ֆունկցիաների մոտարկման) թեորեմում որպես $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ կհանդիսանա $f(x)$ -ի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝

$$T_n(x) \equiv S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}, \;\; c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt:$$

Այս փաստը հետևում է հետևյալ թեորեմից, որի ապացույցը բերված է 3-րդ գլխում (թեորեմ 3.6.2.):

Թեորեմ (Ժորդան): Եթե $[-\pi,\pi]$-ում որոշված $y = f(x)$ պարբերական, անընդհատ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն, ապա նրա Ֆուրիեի շարքը, ըստ եռանկյունաչափական համակարգի, $[-\pi,\pi]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է իրեն:

Նշենք, որ անընդհատ ֆունկցիայի սահմանափակ վարիացիա ունենալը $[-1,1]$-ում բավարար չէ, որ հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականությունը՝ $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, որը հավասարաչափ մոտարկում է այդ ֆունկցիային, լինի ինչ-որ աստիճանային շարքի մասնակի գումարների հաջորդականություն, նույնիսկ անվերջ դիֆերենցելիությունը չի կարող դա ապահովել, օրինակ՝

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}:$$

Այս ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է, սակայն այն հնարավոր չէ ներկայացնել աստիճանային շարքով. այդ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը չի զուգամիտում իրեն:

Խնդիրներ

1. Դիցուք՝ $f(t)\in C[0,1]$: Ցույց տալ, որ (0,1) ինտերվալի բոլոր x-երի համար

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\Phi_n(t,x)dt = f(x),$$

որտեղ $\Phi_n(t,x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{n}{1+n^2(t-x)^2}$:

2. Դիցուք՝ $f(t)\in C_{2\pi}$: Ցույց տալ, որ $(-\pi,\pi)$ ինտերվալի բոլոր x-երի համար

$$\lim_{r\to 1-0} P_r(x,f) = f(x),$$

որտեղ

$$P_r(x,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cdot\cos(t-x)+r^2}\cdot f(t)\,dt \qquad (0< r <1):$$

3. (**Լանդաու**) Դիցուք՝ $f(t)\in C[0,1]$: Ցույց տալ, որ (0,1) ինտերվալի բոլոր x-երի համար $\lim_{n\to\infty} L_n(x,f) = f(x)$,

որտեղ $L_n(x,f)=\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\cdot\displaystyle\int_0^1\left(1-(t-x)^2\right)^n\cdot f(t)dt$:

4. (**Կանտորովիչ**) Դիցուք՝ $f(t)\in C[0,1]$: Ցույց տալ, որ [0,1] հատվածի վրա հավասարաչափ

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n(x,f) = f(x),$$

որտեղ $\widetilde{B}_n(x,f) = (n+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\cdot\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(u)du$:

ԳԼՈՒԽ 2.

ԶԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ԼԵԲԵԳԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§2.1. Գործողություններ բազմությունների հետ: Բազմությունների հզորությունը

Բազմությունները սովորաբար նշանակվում են մեծատառերով՝ $A, B, C, \ldots, X$, իսկ դրանց տարրերը կամ էլեմենտները՝ փոքրատառերով: a էլեմենտի պատկանելը A բազմությանը նշվում է հետևյալ կերպ՝ $a \in A$, նույն կերպ՝ $x \in X$ և այլն:

Օրինակ: $A = [0,1], \frac{1}{2} \in A$: $B = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$-զրո կենտրոնով միավոր շրջանն է: $P = \{p(x)\}$ բոլոր բազմանդամների բազմությունն է, և $x^2 + 1 \in P$: $C_{[a,b]}$-ն $[a, b]$ հատվածում որոշված անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունն է և այլն:

Սահմանում 2.1.1: Կասենք, որ A բազմությունը B բազմության ենթաբազմություն է, կամ A բազմությունը ընկած է B բազմության մեջ, եթե ցանկացած տարր A-ից պատկանում է B-ին: Այդ դեպքում կնշանակենք $A \subset B$:

Դիցուք՝ A-ն և B-ն կամայական բազմություններ են:

Սահմանում 2.1.2: Կասենք, որ $A = B$, եթե միաժամանակ $A \subset B$ և $B \subset A$:

Սահմանում 2.1.3: Եթե A-ն և B-ն կամայական բազմություններ են, ապա նրանց միավորումը $A \bigcup B$ այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A, B բազմություններից գոնե մեկին:

Նկատենք, որ $A \subset A \bigcup B$ և $B \subset A \bigcup B$:

Սահմանում 2.1.4: A և B բազմությունների հատումը $A \bigcap B$ այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են միաժամանակ A և B բազմություններին:

Պարզ է, որ $A \cap B \subset A$ և $A \cap B \subset B$:

Սահմանում 2.1.5: Եթե A-ն և B-ն ցանկացած բազմություններ են, ապա $A \setminus B$ ասելով հասկանում ենք բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք պատկանում են A-ին և չեն պատկանում B-ին:

$$A \setminus B = \{x, x \in A, x \notin B\}$$

A և B բազմությունների սիմետրիկ տարբերությունը նշանակվում է $A\Delta B$ և սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $A\Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$:

Խնդիր: Ապացուցել, որ $A\Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$:

Ապացույց: Դիցուք՝ $x \in A\Delta B$, կամ $x \in (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$: Ենթադրենք՝ $x \in A \setminus B$: Ստանում ենք $x \in A$, $x \notin B$, և $x \in A \cup B$, $x \notin A \cap B$, հետևաբար $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap A)$: Եթե $x \in B \setminus A$, նման ձևով $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap A)$: Այսպիսով՝ $A\Delta B \subset (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$: Նման դատողություններով ստանում ենք $(A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B) \subset A\Delta B$:

Վերջավոր թվով բազմությունների գումարը և արտադրյալը սահմանվում են նման ձևով: Եթե ունենք $A_1, A_2, \ldots, A_n$ բազմություններ, ապա $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ասելով հասկանում ենք բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք պատկանում են նշված բազմություններից գոնե մեկին: $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$-ն բոլոր այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են նշված բազմություններից յուրաքանչյուրին: Համանման ձևով գումարման և բազմապատկման գործողությունները կարելի է սահմանել անվերջ քանակի բազմությունների դեպքում:

Օրինակ: Դիցուք՝ R^2-ը $(x0y)$ կոորդինատային հարթությունն է: Նշանակենք I_y - Ox առանցքին զուգահեռ և y օրդինատ ունեցող ուղիղը: Պարզ է, որ եթե այդ ուղիղները դիտենք որպես բազմություններ, ապա

$$R^2 = \bigcup_{y \in (-\infty, \infty)} I_y :$$

Սահմանում 2.1.6: A և B բազմությունները կոչվում են համարժեք, եթե նրանց միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն: Ընդունված է հետևյալ նշանակումը՝ $A \sim B$:

Ակնհայտ է, որ եթե A և B բազմությունները վերջավոր են, ապա $A \sim B$ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց էլեմենտների քանակները հավասար են: Անվերջ բազմությունների դեպքում դա այդպես չէ, հնարավոր է $A \subset B$ (խիստ իմաստով) և $A \sim B$. օրինակ՝ $A=[0,1]$, $B=[0,2]$ բազմությունները համարժեք են: $y=2x$ ֆունկցիան A-ն փոխմիարժեք արտապատկերում է B բազմության վրա: Ընդհանրապես, եթե $A=[a,b]$, $B=[c,d]$ կամայական երկու հատվածներ են $(a<b,\ c<d)$, ապա $y=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ ֆունկցիայով ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն այդ բազմությունների միջև: Այսպիսով՝ ցանկացած երկու հատված համարժեք են: Մենք հետագայում կապացուցենք, որ ցանկացած փակ, բաց, կիսաբաց միջակայքեր համարժեք են, ավելին՝ ցանկացած հատված համարժեք է իրական առանցքին: Այժմ միայն նկատենք, որ $y=tgx$ ֆունկցիան փոխմիարժեք արտապատկերում է $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ բազմությունը $(-\infty;\infty)$ իրական առանցքի վրա: Հետևաբար, այդ բազմությունները համարժեք են: Կարելի է բերել բազմաթիվ համարժեք բազմությունների օրինակներ: Հետևյալ հատկությունները կարելի է հեշտությամբ ստուգել:

1. Ցանկացած A բազմության համար $A \sim A$:
2. Եթե $A \sim B$, ապա $B \sim A$:
3. Եթե $A \sim B$, $B \sim C$, ապա $A \sim C$:
4. Դիցուք՝ $A_1, A_2, A_3 \ldots$ և $B_1, B_2, B_3 \ldots$ բազմությունները երկու հաջորդականություններ են, այնպես, որ A_n-երը իրար հետ չեն հատվում, իսկ B_n-երը՝ իրար հետ: Եթե ցանկացած n-ի համար $A_n \sim B_n,\ (n=1,2,\ldots)$, ապա

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k :$$

Սահմանում 2.1.7: Եթե A, B բազմությունները համարժեք են, ասում ենք, որ նրանք ունեն նույն հզորությունը: Եթե A բազմության հզորությունը նշանակենք $|A|$, ապա ստանում ենք $|[a,b]|=|[c,d]|$ ցանկացած $[a,b]$ և $[c,d]$ հատվածների համար: Վերջավոր բազմությունների դեպքում հզորությունը համարվում է հավասար այդ բազմության տարրերի քանակին: Օրինակ՝ եթե $A=\{1,2,\ldots 99\}$, ապա $|A|$=99: Կարող ենք ասել նաև, որ $|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})|=|(-\infty,\infty)|$:

Սահմանում 2.1.8: Կասենք, որ $|A|<|B|$, եթե

1. $A \nsim B$,

2. գոյություն ունի $B_1 \subset B$, այնպես, որ $A \sim B_1$:

Օրինակ: Եթե A -ն վերջավոր է, B -ն՝ անվերջ, ապա $|A|<|B|$:

Դիտարկենք կամայական A -բազմության բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը, որը կնշանակենք $\widetilde{A}$ -ով:

Օրինակ: Եթե $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$-ն վերջավոր բազմություն է, ապա

$$\widetilde{A}=\Big\{\varnothing, \{a_1\},\{a_2\},\ldots,\{a_N\},\{a_1,a_2\}\ldots\{a_1,a_2\ldots a_N\}\Big\}:$$

Թեորեմ 2.1.1: Կամայական ոչ դատարկ A բազմության համար $|A|<|\widetilde{A}|$:

Ապացույց. առաջին դեպք: Ենթադրենք՝ A-ն վերջավոր է և կազմված է N տարրերից: Այդ դեպքում

$$|\widetilde{A}|=1+1+N+C_N^2+\ldots+C_N^{N-1}=2^N:$$

Համապատասխանաբար ամբողջ բազմությունը, դատարկ բազմությունը մեկ էլեմենտ պարունակող ենթաբազմություններ են, երկու էլեմենտ պարունակող և այդպես շարունակ:

Քանի որ $2^N>N$, ստանում ենք թեորեմի ապացույցը վերջավոր բազմությունների դեպքում:

Երկրորդ դեպք: Ենթադրենք՝A-ն անվերջ բազմություն է: B_1 -ով նշանակենք $\widetilde{A}$-ի այն ենթաբազմությունը, որը բաղկացած է 1 էլեմենտանոց ենթաբազմություններից՝ $B_1 = \{\{a\}\} \subset \widetilde{A}$: Պարզ է, որ $A \sim B_1$: Ցույց տանք, որ $A \not\sim \widetilde{A}$: Ենթադրենք հակառակը՝ $A \sim \widetilde{A}$, այսինքն՝ գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն A և $\widetilde{A}$ բազմությունների միջև: Այդ համապատասխանությունը նշանակենք φ տառով: $a \in A$ տարրը անվանենք «լավ», եթե այդ համապատասխանության դեպքում a-ն պատկանում է իր պատկերին, այսինքն՝ $a \in \varphi(a)$: Հակառակ դեպքում այն կանվանենք «վատ» տարր: Քանի որ $A \in \widetilde{A}$, գոյություն ունի $a_1 \in A$ տարր այնպես, որ $\varphi(a_1) = A$, և a_1-ը լավ տարր է: Նման ձևով գոյություն ունի $a_2 \in A$ այնպես, որ $\varphi(a_2) = \varnothing$, և հետևաբար «լավ» և «վատ» տարրերի բազմությունը դատարկ չէ: Նկատենք նաև, որ ցանկացած տարր կամ «լավ» է կամ «վատ»: Նշանակենք A_1-ով բոլոր «վատ» տարրերից կազմված ենթաբազմությունը: Այդ դեպքում, քանի որ $A_1 \in \widetilde{A}$, ապա գոյություն ունի $a_0 \in A$ տարր, այնպես, որ $\varphi(a_0) = A_1$: Հեշտ է նկատել, որ a_0-ն ոչ «լավ», ոչ էլ «վատ» տարր է: Ստանում ենք հակասություն, հետևաբար $A \not\sim \widetilde{A}$: □

Թեորեմ 2.1.2. (Է. Կանտոր, Ֆ. Բեռնշտեյն): Եթե A և B բազմություններն այնպիսին են, որ նրանցից յուրաքանչյուրը համարժեք է մյուսի ենթաբազմությանը, ապա այդ բազմությունները համարժեք են:

Ապացույց: Դիցուք՝ $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$ և $B \sim A_1$, $A_1 \subset A$: Այդ փոխմիարժեք արտապատկերումները թող լինեն φ-ն և ψ-ն. $\varphi(A) = B_1$, $\psi(B) = A_1$: Նշանակենք $A_2 = \psi(B_1)$, $B_2 = \varphi(A_1)$: Պարզ է, որ $A_2 \subset A_1$, $B_2 \subset B_1$ և $A \setminus A_1 \sim B_1 \setminus B_2$, $B \setminus B_1 \sim A_1 \setminus A_2$: Ընդ որում՝ առաջին համապատասխանությունը իրագործվում է φ, իսկ մյուսը՝ ψ արտապատկերումով: Եթե $A_3 = \psi(B_2)$, $B_3 = \varphi(A_2)$, ապա $A_3 \subset A_2$, $B_3 \subset B_2$, և $A_1 \setminus A_2 \sim B_2 \setminus B_3$, $B_1 \setminus B_2 \sim A_2 \setminus A_3$: Նման ձևով սահմանվում են $A_4, A_5, \dots$ և $B_4, B_5, \dots$ բազմությունները, որոնց համար տեղի ունեն վերը բերված հատկությունները, այսինքն՝

$A_n \subset A_{n+1}$, $B_n \subset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, և

$$A_n \setminus A_{n+1} \sim B_{n+1} \setminus B_{n+2}, \quad B_n \setminus B_{n+1} \sim A_{n+1} \setminus A_{n+2}, \quad n = 1, 2, \ldots : \tag{2.1.1}$$

Ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$A = (A - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \ldots + (A_n - A_{n+1}) + \ldots + A^*,$$

$$B = (B - B_1) + (B_1 - B_2) + (B_2 - B_3) + \ldots + (B_n - B_{n+1}) + \ldots + B^*,$$

որտեղ $A^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $B^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$:

Նկատենք, որ այս հավասարությունների աջ մասերի գումարելիները՝ A^*, $(A \setminus A_1)$, $(A_1 \setminus A_2)$, $(A_2 \setminus A_3), \ldots$ և B^*, $(B \setminus B_1)$, $(B_1 \setminus B_2)$, $(B_2 \setminus B_3), \ldots$ զույգ առ զույգ չեն հատվում: Օգտվելով (1)-ից և համարժեք բազմությունների հատկություններից՝ կարող ենք պնդել, որ $A \sim B$: Թեորեմը ապացուցվեց: □

§2.2. Հաշվելի և ոչ հաշվելի անվերջ բազմություններ

Սահմանում 2.2.1: Բազմությունը կոչվում է հաշվելի, եթե այն համարժեք է բնական թվերի՝ $N = \{1,2,3,\ldots\}$ բազմությանը, այսինքն՝ $A \sim N$:

Սահմանումից հետևում է, որ A բազմությունը հաշվելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն կարելի է համարակալել, այսինքն՝ $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n \ldots\}$: Իրոք, եթե $A \sim N$, ապա գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն A և N բազմությունների միջև: Յուրաքանչյուր n բնական թվին համապատասխանում է որևէ տարր A-ից: Նշանակելով այդ տարրը a_n՝ ստանում ենք պահանջվող ներկայացումը: Մյուս կողմից՝ եթե A բազմությունը համարակալված է, ապա առկա է փոխմիարժեք համապատասխանություն այդ բազմության և N-ի միջև: Հաշվելի բազմություններն ունեն հետևյալ հատկությունները:

1. Հաշվելի բազմության և վերջավոր բազմության միավորումը հաշվելի բազմություն է:

Իրոք, դիցուք՝ $A=\{a_1,a_2,\dots a_n\dots\}$ հաշվելի բազմություն է, իսկ $B=\{b_1,b_2,\dots b_N\}$ որևէ վերջավոր բազմություն է: Ենթադրենք՝ այդ բազմությունները չեն հատվում: Կատարելով A և B բազմությունների միավորման և բնական թվերի բազմության հետևյալ համապատասխանությունը՝

$$A+B=\left\{\begin{matrix} b_1, & b_2, & \dots & b_N, & a_1, & a_2, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & 2 & & N & N+1 & & \end{matrix}\right\}:$$

Համոզվում ենք, որ $A+B$ բազմության տարրերը հնարավոր է համարակալել, ուրեմն այն հաշվելի է: Եթե բազմությունները հատվում են, նշանակենք $B_1=B\setminus A$ կստանանք $A+B=A+B_1$: Քանի որ B_1-ը վերջավոր բազմություն է, հանգում ենք նախորդ դեպքին:

2. Ցանկացած անվերջ բազմություն ունի հաշվելի ենթաբազմություն:

3. Հաշվելի բազմության ցանկացած ենթաբազմություն վերջավոր է կամ հաշվելի:

4. Երկու հաշվելի բազմությունների գումարը հաշվելի բազմություն է:

Իրոք, եթե $A=\{a_1,a_2,\dots\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots\}$ հաշվելի բազմություններ են, ապա հնարավոր է հետևյալ երկու դեպքը:

ա) $A\cap B=\varnothing$: Այդ դեպքում $A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\dots\}$, և $A\cup B$ բազմությունը կարելի է համարակալել, հետևաբար $A\cup B\sim N$:

բ) Ենթադրենք՝ $A\cap B\neq\varnothing$: $B\setminus A$ բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի: Եթե վերջավոր է, ստանում ենք $A\cup B=A+(B\setminus A)$, որտեղ A և $B\setminus A$ չհատվող հաշվելի բազմություններ են: Ըստ ա) դեպքի՝ $A\cup B\sim N$: Եթե $B\setminus A$-ն վերջավոր է, հանգում ենք 1 հատկությանը:

5. Վերջավոր թվով հաշվելի բազմությունների գումարը հաշվելի է:

6. Հաշվելի թվով վերջավոր բազմությունների գումարը հաշվելի է կամ վերջավոր:

Դիցուք՝ այդ բազմություններն են

$$A_1=\{a_1^1,a_2^1,\dots a_{n_1}^1\},\ A_2=\{a_1^2,a_2^2,\dots a_{n_2}^2\},\dots:$$

Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը:

ա) Այդ բազմությունները իրար հետ չեն հատվում: Գումարը կներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{a_1^1, a_2^1, \ldots a_{n_1}^1, a_1^2, a_2^2, \ldots a_{n_2}^2 \; \ldots \; a_1^m, a_2^m, \ldots a_{n_2}^m, \ldots\},$$

որը ակնհայտորեն կարելի է համարակալել:

բ) Այդ բազմությունների որևէ զույգ հատվում է: Դիտարկենք հետևյալ բազմությունները՝

$$B_1 = A_1, \;\; B_2 = A_2 \setminus A_1, \;\; B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus (\sum_{k=1}^{n-1} A_k), \ldots \; :$$

B_n բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում, վերջավոր են, և

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \; :$$

Այժմ, եթե սկսած որևէ համարից B_n բազմությունները դատարկ են, ստանում ենք, որ նրանց գումարը վերջավոր է: Եթե այդպես չէ, հանգում ենք նախորդ՝ ա) դեպքին:

7. Հաշվելի թվով հաշվելի բազմությունների գումարը հաշվելի է:

Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը:

ա) Այդ բազմությունները իրար հետ չեն հատվում: Ապացուցելու համար յուրաքանչյուր բազմությունը ներկայացնենք հաջորդականության տեսքով՝

$A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1 \ldots\}$

$A_2 = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2 \ldots\}$

$A_3 = \{a_1^3, a_2^3, a_3^3 \ldots\}$

....

..........................:

Հաջորդաբար ընտրելով այս բազմությունների այն տարրերը, որոնց վերին և ստորին ինդեքսների գումարը հավասար է 1-ի, 2-ի և այլն, տրված բազմությունների գումարը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_3^1, a_2^2, a_1^3, a_4^1, \ldots\} :$$

Այսինքն՝ նախորդ՝ 6-րդ. հատկության համաձայն՝ տրված բազմությունների գումարը հաշվելի է:

բ) Երբ այդ բազմություններից որևէ զույգ հատվում է: Դիտարկենք հետևյալ բազմությունները՝

$$B_1 = A_1,\ \ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ \ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k), \ldots,$$

որոնք զույգ առ զույգ չեն հատվում, և

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n :$$

Նշանակենք S_1-ով բոլոր այն B_n բազմությունների միավորումը, որոնք վերջավոր են, և S_2-ով բոլոր այն B_n բազմությունների գումարը, որոնք հաշվելի են: Քանի որ S_2-ը հաշվելի է, իսկ S_1-ը հաշվելի է կամ վերջավոր, և $S = S_1 \cup S_2$, ստանում ենք, որ S-ը նույնպես հաշվելի է:

Օրինակ: Ռացիոնալ թվերի բազմությունը հաշվելի է: Ապացույցի համար նշանակենք բոլոր դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, որոնց հայտարարը հավասար է մեկի, A_1-ով: A_2-ով նշանակենք երկու հայտարարով դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, իսկ A_k-ով՝ բոլոր դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, որոնց հայտարարը հավասար է k-ի: Պարզ է, որ ցանկացած k-ի համար A_k բազմությունը հաշվելի է, և

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k :$$

Ըստ 7-րդ հատկության՝ R^+-ը հաշվելի է: R^+-ը դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունն է: Նշանակելով R^--ով բացասական ռացիոնալ թվերի բազմությունը՝ ստանում ենք $R^- \sim R^+$: Այժմ պարզ է, որ R-ը հաշվելի բազմություն է, քանի որ $R = R^+ \cup R^- \cup \{0\}$: Այսպիսով՝ ռացիոնալ թվերի բազմությունը համարժեք է բնական թվերի բազմությանը, կամ, որ նույնն է, այդ բազմությունները ունեն նույն հզորությունը:

Վերը շարադրվածից կարող է ստեղծվել տպավորություն, թե բոլոր բազմությունները հաշվելի են կամ վերջավոր: Իրականում այդպես չէ. ցանկացած հատված ոչ հաշվելի բազմություն է: Քանի որ ցանկացած երկու հատված իրար համարժեք են, բավական է ապացուցել, որ $[0;1]$ հատվածը հաշվելի չէ:

Թեորեմ 2.2.1: $[0;1]$ **հատվածը ոչ հաշվելի բազմություն է (ոչ հաշվելի անվերջ բազմություն):**

Ապացույց: Ենթադրենք՝ այս բազմությունը հաշվելի է, այսինքն՝ այն կարելի է համարակալել՝ $[0;1]=\{x_1,x_2,\ldots x_n\ldots\}$: $[0;1]$-ը ներկայացնենք որպես երեք հատվածների միավորում՝

$$[0;1]=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]:$$

Այդ երեք հատվածներից Δ_1-ով նշանակենք այն, որին x_1-ը չի պատկանում $(x_1\notin\Delta_1)$: Կատարենք նման տրոհում Δ_1-ի նկատմամբ և Δ_2-ով նշանակենք այն հատվածը, որին չի պատկանում x_2 կետը: Նման ձևով վարվելով Δ_2-ի նկատմամբ՝ կստանանք $\Delta_3\subset\Delta_2$, $x_3\notin\Delta_3$ և այլն: Ստանում ենք $\Delta_1,\Delta_2,\ldots\Delta_n,\ldots$ ներդրված հատվածների հաջորդականություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$x_k\notin\Delta_k,\ k=1,2,\ldots,$$

$$\Delta_1\supset\Delta_2\supset\ldots\supset\Delta_n\supset\ldots,$$

$$\text{երկարություն}(\Delta_n)=\frac{1}{3^n}\to 0,\ n\to\infty:$$

Կիրառելով ներդրված հատվածների մասին լեմմը՝ կստանանք, որ գոյություն ունի x_0 կետ $[0;1]$ բազմությունից այնպես, որ $x_0\in\Delta_n$ ցանկացած բնական $n\geq 1$-ի համար: Այդ կետը $[0;1]=\{x_1,x_2,\ldots x_n\ldots\}$ հաջորդականությանը պատկանել չի կարող, քանի որ այդ դեպքում այն չէր կարող պատկանել ցանկացած Δ_n միջակայքին: Այսպիսով՝ $[0;1]\neq\{x_1,x_2,\ldots x_n\ldots\}$: Թեորեմը ապացուցված է: □

Սահմանում 2.2.2: Եթե A բազմությունը համարժեք է $[0;1]$ բազմությանը, ապա կասենք, որ այն ունի կոնտինում հզորություն կամ c հզորություն:

Քանի որ ցանկացած $A=[a,b]$ հատված համարժեք է $[0;1]$ հատվածին, ուրեմն այդ բազմություններն ունեն c հզորություն: Թեորեմ 1–ից հետևում է, որ եթե A-ն հաշվելի է, B-ն ունի կոնտինում հզորություն, ապա $|A|<|B|$: Ապացուցելու համար նկատենք, որ ցանկացած անվերջ բազմությունից կարող ենք անջատել հաշվելի ենթաբազմություն: Հետևաբար B բազմությունը պարունակում է B_1 հաշվելի ենթաբազմություն: Քանի որ B_1-ը համարժեք է A-ին, և A-ն համարժեք չէ B-ին, ստանում ենք $|A|<|B|$:

Թեորեմ 2.2.2: Եթե անվերջ M բազմությանը ավելացնենք A վերջավոր կամ հաշվելի բազմություն, ապա նրա հզորությունը չի փոխվի:

Ապացույց: M բազմությունից առանձնացնենք D հաշվելի բազմությունը և նշանակենք $M\setminus D=P$: Այդ դեպքում $M=D\cup P,\ \ M\cup A=P\cup(D\cup A)$: Քանի որ $P\sim P,\ \ D\cup A\sim D$, ապա $M\cup A\sim M$: □

Թեորեմ 2.2.3: Եթե անվերջ ոչ հաշվելի M բազմությունից հեռացնենք վերջավոր կամ հաշվելի A բազմություն, ապա նրա հզորությունը չի փոխվի:

Ապացույց: $P=M\setminus A$ բազմությունը չի կարող լինել վերջավոր կամ հաշվելի: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $M\setminus A\sim M$: Թեորեմներ **2.2.1**-ից և **2.2.2**-ից հետևում է, որ ցանկացած $[a,b]$ հատված և ցանկացած բաց (c,d) կամ կիսաբաց $(e,f]$ միջակայք ունի նույն c հզորրությունը: Իրական առանցքը՝ $(-\infty,\infty)$, նունպես ունի c հզորություն: Այսպիսով՝ $\|[a,b]\|=|(c,d)|=(d,e]=(-\infty,+\infty)=c$: □

Թեորեմ 2.2.4: Վերջավոր թվով, իրար հետ չհատվող c հզորության բազմությունների միավորումը նույնպես ունի c հզորություն:

Ապացույց: Դիցուք՝ $S=\bigcup_{k=1}^{N}E_k$, որտեղ յուրաքանչյուր E_k բազմություն ունի c հզորություն: $[0,1)$ կիսաբաց միջակայքը $0=c_0<c_1<...<c_{N-1}<c_N=1$ կետերով տրոհենք N կիսաբաց միջակայքերի՝ $[c_k,c_{k+1})$, $k=1,2,..,N$, որոնք իրար հետ չեն հատվում և ունեն c հզորություն: Քանի որ $E_k\sim[c_{k-1},\,c_k)$,

$$[0,1)=\bigcup_{k=1}^{N}[c_{k-1},c_k),$$

ստանում ենք $S\sim[0,1)$ և $|S|=c$: □

Թեորեմ 2.2.5: Հաշվելի բազմությամբ, իրար հետ չհատվող c հզորության բազմությունների գումարը նույնպես ունի c հզորություն:

Ապացույց: Դիցուք՝

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\ ,$$

որտեղ յուրաքանչյուր E_k բազմությունը ունի c հզորություն: Վերցնենք $0=c_0<c_1<...<c_n...$ հաջորդականությունը այնպես, որ $c_k\to 1,\ k\to\infty$: Նախորդ թեորեմին համանման ստանում ենք $|S|=c$: □

Թեորեմ 2.2.6: Կոնտինուում բազմությամբ, իրար հետ չհատվող c հզորության բազմությունների միավորումը նույնպես ունի c հզորություն:

Այս թեորեմը ապացուցելու համար ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմ 2.2.6: Հարթության կետերի բազմությունը ունի c հզորություն:

Ապացույց: $x=n$ և $y=m$ ուղիղներով, որտեղ m-ը և n-ը ամբողջ թվեր են, R_2 հարթությունը տրոհենք միավոր կողմով քառակուսիների և նշանակենք

$$R_{m,n} = \{(x,y),\ m \le x < m+1,\ n \le y < n+1\}:$$

Պարզ է, որ այդ քառակուսիները իրար համարժեք են, և

$$R_2 = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} R_{m,n}:$$

Դիտարկենք $R_{0,0} = \{(x,y),\ 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1\}$ քառակուսին: Եթե ապացուցենք, որ $\left|R_{0,0}\right| = c$, թեորեմ **2.2.5**-ից կհետևի լեմմի ապացույցը: Դիցուք՝ $(x,y) \in R_{0,0}$ որևէ կետ է: Քանի որ $x \in [0,1),\ y \in [0,1)$, այդ թվերը կարելի է ներկայացնել անվերջ երկուական կոտորակի տեսքով՝

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots,\qquad y = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\ldots:$$

Այս վերլուծությունները այնպիսին են, որ եթե x-ը կամ y-ը $\frac{m}{2^n}$ տեսքի թիվ է, ապա բոլոր նիշերը ինչ-որ համարից սկսված հավասար են զրոյի, այսինքն՝ այդ վերլուծություններում բացառվում է որևէ համարից միայն 1 նիշի անվերջ կրկնությունը կամ, որ նույնն է, պարբերության մեջ հանդես գալը: Յուրաքանչյուր $(x,y) \in R_{0,0}$ կետին համապատասխանեցնենք

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots\alpha_n\beta_n\ldots$$

թիվը $[0,1)$ միջակայքից: Եթե նշանակենք P_0-ով $[0,1)$-ի ենթաբազմությունը, որի յուրաքանչյուր կետի երկուական անվերջ վերլուծությունը զույգ և կենտ համարներում չի պարունակում 1 նիշը պարբերության մեջ, ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն $R_{0,0}$ և $P_0 \subset [0,1)$ բազմությունների միջև: Եթե

$$R_{0,0}^{(1)} = \{(x,0),\ 0 \le x < 1\},$$

ապա $R_{0,0}^{(1)} \subset R_{0,0}$, և $[0,1) \sim R_{0,0}^{(1)}$: Այժմ լեմմի ապացույցը հետևում է Կանտոր-Բրոնշտեյնի թեորեմից: □

Թեորեմ 2.2.6-ի ապացույցը: Դիցուք՝ $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, և I բազմությունը ունի c հզորություն: R^2 հարթությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$R^2 = \bigcup_{x \in R_1} I_x \ ,$$

որտեղ R_1-ը թվային առանցքն է, I_x-ը x աբսցիսը ունեցող y առանցքին զուգահեռ ուղիղն է: Քանի որ $I \sim R_1$, գոյություն ունի փոխմիարժեք φ արտապատկերում այդ բազմությունների միջև: Ցանկացած $\alpha \in I$-ի համար $E_\alpha \sim I_{\phi(\alpha)}$, և հետևաբար $E \sim R_2$:

Ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Թեորեմ 2.2.7: Հաշվելի բազմության ենթաբազմությունների բազմությունը ունի c հզորություն:

Ապացույց: Կարող ենք դիտարկել բնական թվերի N բազմությունը և նշանակենք N_1, N_2 այդ բազմության համապատասխանաբար վերջավոր և անվերջ ենթաբազմությունների բազմությունները: Ցույց տանք, որ $|N_2| = c$: Իրոք, ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն ունի հետևյալ տեսքը, $(k_1 < k_2 < \ldots < k_n, \ldots)$, որտեղ $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ թվերը բնական թվեր են: Յուրաքանչյուր այդպիսի ենթաբազմությանը համապատասխանեցնենք $[0,1)$ կիսաբաց միջակայքից $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ թիվը, որը ներկայացված է անվերջ երկուական համակարգում, այնպես, որ k_n համարներով թվերը հավասար են 0-ի, իսկ մնացած բոլոր նիշերը՝ 1-ի: Պարզ է, որ ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն N_2-ի և $[0,1)$ բազմության միջև: Թեորեմի ապացույցի համար մնում է ցույց տալ, որ N_1 բազմությունը հաշվելի է: Դիցուք՝ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_n)$-ը կամայական վերջավոր ենթաբազմություն է: Այդ ենթաբազմությանը համապատասխանեցնենք

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

թիվը, այնպես, որ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ համարներին համապատասխանող թվանշանները լինեն 1, իսկ մնացած համարներում լինեն 0-ներ: Ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն N_1 բազմության և

$$T_2 = \left\{ \frac{m}{2^k},\ m = 1, 2, ..., 2^k - 1,\ \ k = 1, 2, ... \right\}$$

թվերի միջև: Քանի որ T_2 բազմությունը հաշվելի է, ուրեմն հաշվելի է նաև N_1 բազմությունը: Թեորեմն ապացուցվեց: □

§2.3. Բաց բազմություններ

Այսուհետև մենք հիմնականում դիտարկելու ենք բազմություններ թվային ուղղի վրա՝ R_1-ից:

Սահմանում 2.3.1: Դիցուք՝ $E \in R_1$: x_0 կետը կոչվում է E բազմության ներքին կետ, եթե՝

ա) $x_0 \in E$: բ) գոյություն ունի $\delta > 0$, այնպես, որ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E,$ այսինքն՝ x_0-ն պատկանում է E բազմությանը իր որևէ շրջակայքի հետ միասին:

Օրինակ: $(0,1)$ միջակայքի ցանկացած կետ ներքին կետ է: $[0,1]$ հատվածի ցանկացած կետ, բացառությամբ 0 և 1 կետերը, ներքին կետ է: $[0,1]$ հատվածի իռացիոնալ և ռացիոնալ թվերի բազմությունները՝ I_0 և Q_0, ներքին կետ չունեն:

Սահմանում 2.3.2: E բազմությունը կոչվում է բաց, եթե նրա ցանկացած կետ ներքին կետ է:

Օրինակ: $(0,1)$, (a,b), $(0,\infty), (-\infty,\infty)$ բազմությունները բաց են: $[0,1]$ բազմությունը բաց չէ:

Թեորեմ 2.3.1: Բաց բազմությունների գումարը և արտադրյալը բաց բազմություն են:

Ապացույց: Դիցուք՝ G_1-ը և G_2-ը բաց բազմություններ են, և $x_0 \in G_1 \bigcup G_2$: Պետք է ապացուցել, որ x_0-ն $G_1 \bigcup G_2$ բազմության ներքին կետ է: Ըստ բազմությունների գումարի սահմանման՝ x_0-ն պատկանում է G_1 և G_2 բազմություններից գոնէ մեկին: Դիցուք՝ $x_0 \in G_1$:

Գոյություն ունի $\delta>0$, այնպես, որ $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)\subset G_1$, և ուրեմն $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)\subset G_1 \bigcup G_2$: Այժմ դիտարկենք $G_1 \bigcap G_2$ բազմությունը: Եթե $x_0 \in G_1 \bigcap G_2$, ապա $x_0 \in G_1$, և $x_0 \in G_2$: Գոյություն ունի $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, այնպես, որ $\left(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1\right)\subset G_1$, $\left(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2\right)\subset G_2$: Այժմ վերցնելով $\delta=\min\left(\delta_1, \delta_2\right)$՝ կստանանք $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)\subset G_1$ և $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)\subset G_2$, և ուրեմն $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)\subset G_1 \cup G_2$: Նման ձևով՝

1. ցանկացած վերջավոր թվով բաց բազմությունների գումարը և արտադրյալը բաց բազմություն են (ապացույցը ըստ ինդուկցիայի),
2. ցանկացած բազմությամբ բաց բազմությունների գումարը բաց է:

Անվերջ բազմությամբ բաց բազմությունների արտադրյալը կարող է բաց չլինել:

Օրինակ: Եթե

$$G_k=\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right),\ k=1,2,\ldots,$$

ապա

$$\prod_{k=1}^{\infty} G_k=\{0\},$$

և $\{0\}$ բազմությունը բաց չէ:

Սահմանում 2.3.3: (a,b) բաց միջակայքը կոչվում է G բաց բազմության բաղադրիչ, եթե $(a,b)\subset G$, և $a\notin G,\ b\notin B$:

Բաց բազմությունների հատկություններից հետևում է, որ ցանկացած բազմությամբ բաց միջակայքերի գումարը բաց բազմություն է: Հակառակ պնդումը նույնպես տեղի ունի:

Թեորեմ 2.3.2: Ցանկացած G բաց բազմություն կարելի է ներկայացնել զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող վերջավոր կամ հաշվելի թվով բաց միջակայքերի գումարի տեսքով:

$$G=\bigcup_{k=1}\left(a_k, b_k\right),$$

որտեղ $\left(a_k, b_k\right)\cap\left(a_m, b_m\right)=\varnothing,\ k\neq m$:

Ապացույց: Վերցնենք $x \in G$: I_x -ով նշանակենք այն միջակայքը, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

1. $x \in I_x$,

2. $I_x \subset G$,

3. I_x -ը պարունակում է բոլոր այն (a,b) միջակայքերը, որոնք ընկած են G -ի մեջ և պարունակում են x կետը:

Պարզ է, որ ցանկացած $x \in G$ -ի համար I_x -ը G բաց բազմության բաղադրիչ է: Նկատենք նաև, որ I_x բազմությունները կամ համընկնում են կամ չեն հատվում: Այժմ դիտարկենք I բազմությունը, որի տարրերն են G բազմության բոլոր իրար հետ չհատվող I_x բաղադրիչները: Հեշտ է համոզվել, որ I բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի: Իրոք, վերցնելով յուրաքանչյուր միջակայքից մեկ ռացիոնալ թիվ՝ ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն ռացիոնալ թվերի ենթաբազմության և I բազմության միջև: Քանի որ ռացիոնալ թվերի բազմությունը հաշվելի է, ապա նրա ենթաբազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի: Թեորեմի ապացուցման համար մնում է նկատել, որ

$$G = \sum_{I_x \in I} I_x : \square$$

§2.4. Փակ բազմություններ

Դիցուք՝ $E \subset R_1$ -ը որևէ բազմություն է:

Սահմանում 2.4.1: x_0 կետը E բազմության համար կոչվում է կուտակման կամ սահմանային կետ, եթե նրա ցանկացած շրջակայքում գոյություն ունի որևէ կետ E բազմությունից, որը տարբեր է x_0 -ից:

Օրինակ: $E = (0,1)$ բազմության ցանկացած կետ կուտակման կետ է: Այդ բազմության համար կուտակման կետեր են նաև իրեն չպատկանող 0 և 1 կետերը: $E = [0,1]$ բազմության համար կուտակման կետեր են միայն E բազմության կետերը:

Այսպիսով՝ E բազմության կուտակման կետերը կարող են պատկանել և կարող են չպատկանել իրեն:

Օրինակ: Ռացիոնալ թվերի բազմության դեպքում ցանկացած ռացիոնալ և իռացիոնալ թիվ հանդիսանում է կուտակման կետ:

Սահմանում 2.4.2: E բազմությունը կոչվում է փակ, եթե նրա ցանկացած կուտակման կետ պատկանում է իրեն:

Օրինակ: $E=[0,1]$ բազմությունը փակ է: $E=(-\infty,\infty)$ բազմությունը և՛ բաց է, և՛ փակ:

Թեորեմ 2.4.1: x_0 կետը E բազմության կուտակման կետ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի E-ն պարունակի իրարից տարբեր կետերի $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ հաջորդականություն, այնպես, որ տեղի ունենա

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 :$$

Ապացույց: Պայմանի բավարար լինելը ակնհայտ է և անմիջապես հետևում է սահմանի սահմանումից: Դիցուք՝ x_0 կետը E բազմության կուտակման կետ է: Ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունի $x_n \in E$, այնպես, որ

$$x_n \in \left(x_o - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n} \right)$$

Պարզ է, որ ստացված հաջորդականությունը ձգտում է x_0-ին: Պարզ է նաև, որ այդ հաջորդականությունը պարունակում է անվերջ թվով իրարից տարբեր տարրեր: Կազմելով նոր հաջորդականություն՝ այդ տարրերից կստանանք x_0-ին ձգտող և թեորեմի պայմաններին բավարարող հաջորդականություն: Թեորեմը ապացուցվեց: □

Սահմանում 2.4.3: Դիցուք՝ E_1-ը և E_2-ը երկու կետային բազմություններ են: Եթե $E_1 \subset E_2$, ապա $E_2 - E_1$ բազմությունը կոչվում է E_1 բազմության լրացում մինչև E_2 բազմությունը և նշանակվում է $C_{E_2}(E_1)$:

Մասնավորաբար եթե E_2-ը ամբողջ իրական առանցքն է, ապա E բազմության լրացումը մինչև ամբողջ իրական առանցքը ընդունված է նշանակել $C(E)$: Հետագայում մենք այդ նշանակումը կօգտագործենք նաև այն դեպքում, երբ E_2-ը E_1 բազմությունը պարունակող կամայական բաց միջակայք է: Մենք հաճախ օգտվելու ենք հետևյալ առնչություններից, որոնց ապացույցը տրամադրվում է ընթերցողին որպես վարժություն:

Թեորեմ 2.4.2: Դիցուք՝ E_1-ը և E_2-ը կամայական բազմություններ են $(A,\ B)$ միջակայքում: Այդ դեպքում

$$C(E_1 \cup E_2) = C(E_1) \cap C(E_2),\ C(E_1 \cap E_2) = C(E_1) \cup C(E_2):$$

Թեորեմի պնդումը ճիշտ է ցանկացած վերջավոր և անվերջ բազմությունների համար, որը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. դիցուք՝ ունենք E_α բազմությունները, որտեղ $\alpha \in I$, I-ն ինդեքսների բազմությունն է՝ վերջավոր կամ անվերջ, այդ դեպքում

$$C\left(\sum_{\alpha\in I} E_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in I} C(E_\alpha),\ C\left(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in I} C(E_\alpha):$$

Ապացույցը նույնպես առաջադրվում է ընթերցողին որպես վարժություն:

Թեորեմ 2.4.3: Դիցուք՝ E-ն որևէ բազմություն է, իսկ $E_2 = (A,B)$-ն՝ կամայական միջակայք, այնպես, որ $E \subset (A,B)$: Որպեսզի E բազմությունը լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա լրացումը՝ $C(E)$, մինչև $E_2 = (A,B)$ բազմությունը լինի բաց:

Ապացույց: Դիցուք՝ E-ն փակ բազմություն է, և $x_0 \in C(E)$ կամայական կետ է: Գոյություն ունի $\delta > o$, այնպես, որ $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset C(E)$: Հակառակ դեպքում x_0 կետը կլինի կուտակման կետ E բազմության համար և կպատկանի իրեն: Այսպիսով՝ x_0-ն ներքին կետ է $C(E)$ բազմության համար: Այժմ ենթադրենք՝ $C(E)$ բազմությունը բաց է, և x_1-ը E բազմության կամայական կուտակման կետ է: Այդ դեպքում x_1 կետի ցանկացած շրջակայքում կա իրենից տարբեր կետ E բազմությունից, և հետևաբար x_1-ը $C(E)$ բազմության ներքին կետ չէ: Հետևաբար $x_1 \notin C(E)$ և $x_1 \in E$: Թեորեմը ապացուցվեց: □

Հետևանք: Ցանկացած E վերջավոր բազմություն փակ է: Իրոք, E բազմության լրացումն իրեն պարունակող ցանկացած բաց միջակայքի նկատմամբ բաց բազմություն է և վերջավոր թվով միջակայքերի գումար է:

Նախորդ թեորեմից հետևում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.4.4: F_1, F_2 **փակ բազմությունների գումարը և արտադրյալը նույնպես փակ բազմություն են:**

Ապացույց: Օգտվելով թեորեմ 2-ից՝ ստանում ենք $C(F_1 \cup F_2) = C(F_1) \cap C(F_2)$: Քանի որ $C(F_1)$, $C(F_2)$ բազմությունները բաց են, բաց է նաև $C(F_1 \cup F_2)$ բազմությունը: Ըստ թեորեմ 3-ի՝ $F_1 \cup F_2$ բազմությունը փակ է: Նույն դատողություններով ապացուցվում է, որ $F_1 \cap F_2$ բազմությունը փակ է: □

Ըստ ինդուկցիայի՝ ցանկացած վերջավոր թվով փակ բազմությունների գումարը և արտադրյալը փակ են:

Թեորեմ 2.4.5: Ցանկացած բազմության փակ բազմությունների հատումը փակ է, իսկ գումարը կարող է փակ չլինել:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ E_α բազմությունները փակ են ցանկացած $\alpha \in I$ դեպքում: Քանի որ

$$C\left(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in I} C(E_\alpha),$$

և վերջին հավասարության աջ կողմի բազմությունը բաց է, բաց է նաև աջ կողմի բազմությունը: Հետևաբար նրա լրացումը, որը հավասար է

$$\prod_{\alpha \in I} E_\alpha ,$$

փակ բազմություն է: Փակ բազմությունների գումարը կարող է փակ չլինել:

Օրինակ՝

$$(0,1) = \sum_{x \in (0,1)} \{x\},$$

որտեղ յուրաքանչյուր $\{x\}$ բազմություն փակ է, և նրանց գումարը հավասար է $(0,1)$ -ի, որը փակ չէ:

§2.5. Մետրիկական առնչություններ փակ բազմությունների միջև

Դիցուք՝ x-ը և y-ը իրական առանցքի երկու կետեր են: $|x-y|$ մեծությունը կոչվում է x և y կետերի հեռավորություն և նշանակվում է $\rho(x,y)$: Ակնհայտ է, որ $\rho(x,y)=\rho(y,x)\geq 0$ և $\rho(x,y)=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y$:

Սահմանում 2.5.1: x_0 կետի և ոչ դատարկ E բազմության հեռավորություն կոչվում է հետևյալ մեծությունը՝

$$\rho(x_0,E)=\inf_{x\in E}|x_0-x|:$$

Համանման ձևով սահմանվում է երկու ոչ դատարկ E_1 և E_2 բազմությունների հեռավորությունը՝

$$\rho(E_1,E_2)=\inf_{x\in E,\, y\in E_2}|x-y|:$$

Պարզ է, որ եթե E_1 և E_2 բազմությունները ունեն ընդհանուր կետ կամ հատվում են, ապա նրանց հեռավորությունը հավասար է զրոյի՝ $\rho(E_1,E_2)=0$:

Թեորեմ 2.5.1: Դիցուք՝ E_1-ը և E_2-ը փակ բազմություններ են, և նրանցից մեկը սահմանափակ է: Այդ դեպքում $\rho(E_1,E_2)=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ բազմությունները հատվում են, այսինքն՝ գոյություն ունի x_0 կետ, այնպես, որ $x_0\in E_1$, $x_0\in E_2$:

Ապացույց: Դիցուք՝ $\rho(E_1,E_2)=0$: Ըստ ճշգրիտ ստորին եզրի սահմանման՝ ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունեն $x_n\in E_1$, $y_n\in E_2$ կետեր, այնպես, որ

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}:$$

Որոշակիության համար ենթադրենք՝ E_1 բազմությունը սահմանափակ է: Այդ դեպքում x_n, $n=1,2,\ldots$ հաջորդականությունից կարելի է ընտրել զուգամետ x_{n_k}, $k=1,2,\ldots$ ենթահաջորդականություն, որի սահմանը նշանակենք x_0: Ստանում ենք

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k},$$

հետևաբար

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}:$$

Քանի որ E_1 և E_2 բազմությունները փակ են, ապա $x_0 \in E_1$, $x_0 \in E_2$: Այսպիսով՝ E_1 և E_2 բազմությունները հատվում են:

Հետևանք: Դիցուք՝ E-ն փակ բազմություն է: Այդ դեպքում, եթե $\rho(x_0, E) = 0$, ապա $x_0 \in E$: E բազմության փակ լինելը էական է: Օրինակ: Եթե $E = (0,1)$, և $x_0 = 1$, ապա $\rho(1, E) = 0$, և $1 \notin E$:

Դիտողություն: Եթե E_1 և E_2 փակ բազմությունները անսահմանափակ են, ապա հնարավոր է, որ նրանց հեռավորությունը լինի զրո, և նրանք չհատվեն: Օրինակ՝

$$E_1 = \{2, 3, \ldots n, \ldots\},\ E_2 = \left\{2 + \frac{1}{2},\ 3 + \frac{1}{3}, \ldots, n + \frac{1}{n}, \ldots\right\}:$$

Այս բազմությունները փակ են, սահմանափակ չեն, չեն հատվում, և $\rho(E_1, E_2) = 0$:

Ենթադրենք՝ $E \subset R_1$ որևէ կետային բազմություն է, իսկ Ω-ն բաց միջակայքերի որևէ համախումբ է:

Սահմանում 2.5.2: Կասենք, որ $\Omega = \{(\alpha, \beta)\}$ բաց միջակայքերի համախումբը E բազմության ծածկույթ է, եթե ցանկացած $x \in E$ կետի համար գոյություն ունի $(\alpha, \beta) \in \Omega$, այնպես, որ $x \in (\alpha, \beta)$:

Օրինակ: $E = [0,1]$ բազմության համար ծածկույթ է ցանկացած (a, b) միջակայք, որտեղ $a < 0,\ b > 1$: Ծածկույթ է նաև $\Omega = \{(\alpha,\ \beta)\}$ համախումբը, որտեղ $\alpha < \beta$ կամայական ռացիոնալ թվեր են $(-1,\ 2)$ միջակայքից:

Ω համախումբը կարող է կազմված լինել վերջավոր կամ անվերջ բազմությամբ միջակայքերից: Փակ բազմությունների համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.5.2: Դիցուք՝ E-ն փակ սահմանափակ բազմություն է, իսկ Ω-ն E-ի որևէ ծածկույթ է, որը պարունակում է միջակայքերի անվերջ

համախումբ: Այդ դեպքում Ω-ից կարելի է անջատել վերջավոր Ω^* համախումբ, որը E-ի համար նույնպես ծածկույթ է:

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք հակասող ենթադրության մեթոդով: Դիցուք՝ Ω ծածկույթից հնարավոր չէ ընտրել վերջավոր ծածկույթ: Այստեղից մասնավորաբար հետևում է, որ E-ն անվերջ բազմություն է: Դիցուք՝ $E \subset [A, B]$: Դիտարկենք $\left[A, \frac{A+B}{2}\right]$ և $\left[\frac{A+B}{2}, B\right]$ հատվածներն ու $E\left[A, \frac{A+B}{2}\right]$ և $E\left[\frac{A+B}{2}, B\right]$ փակ բազմությունները: Այս երկու բազմությունները ծածկված են նույն Ω ծածկույթով, և կարող ենք պնդել, որ նրանցից գոնե մեկի համար չենք կարող ընտրել վերջավոր ծածկույթ: Այդ բազմությունը նշանակենք E_1. $E_1 = E[A_1, B_1]$: Վարվելով նույն կերպ՝ կստանանք՝ $E_2 = E[A_2, B_2]$, որի համար չենք կարող ընտրել վերջավոր ծածկույթ և այլն: $E_1, E_2 \cdots$ բազմությունները ունեն հետևյալ հատկությունները.

1. անվերջ են,
2. $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$,
3. գոյություն ունի x_0, այնպես, որ $x_0 \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots$:

Իրոք, դիտարկենք $[A_k, B_k]$ հատվածների հաջորդականությունները՝ $k = 1, 2, \ldots$: Այս հատվածները բավարարում են ներդրված հատվածների մասին լեմմի պայմաններին: Հետևաբար գոյություն ունի $x_0 \in [A, B]$, այնպես, որ $x_0 \in [A_k, B_k]$, $k = 1, 2, \ldots$: $\{A_k\}$ և $\{B_k\}$ հաջորդականությունները զուգամիտում են x_0-ին և x_k-ին, $k = 1, 2, \ldots$ կետերի հաջորդականությունը E-ից կարող ենք ընտրել այնպես, որ $A_k < x_k < B_k$, և այդ հաջորդականությունը նույնպես զուգամիտում է x_0-ին: Քանի որ E-ն փակ բազմություն է, $x_0 \in E$, և գոյություն ունի $(\alpha, \beta) \in \Omega$, այնպես, որ $x_0 \in (\alpha, \beta)$: Այժմ, եթե n-ը բավականաչափ մեծ է, ապա $[A_n, B_n] \subset (\alpha, \beta)$, և ավելին՝ $E[A_n, B_n] \subset (\alpha, \beta)$, այսինքն՝ $E[A_n, B_n]$ բազմությունը ծածկվում է Ω համակարգի մեկ միջակայքով, որը հակասում է $[A_n, B_n]$ բազմությունների սահմանմանը: □

§2.6. Բաց բազմության չափ

Դիցուք՝ G -ն որևէ բաց բազմություն է: Այն ներկայացնենք վերջավոր կամ հաշվելի բազմությամբ իրար հետ չհատվող բաղադրիչ միջակայքերի գումարի տեսքով՝

$$G=\bigcup_{k=1}(a_k,b_k):$$

Ենթադրենք՝ G -ն սահմանափակ է, և $G\subset(A,B)$:

Սահմանում 2.6.1: G բաց բազմության չափը նշանակվում է $m(G)$ և սահմանվում հետևյալ կերպ՝

$$m(G)=\sum_{k=1}(b_k-a_k)\ : \qquad (2.6.1)$$

Եթե (a_k,b_k) բաղադրիչ միջակայքերի քանակը վերջավոր է, ապա այս գումարը վերջավոր է: Ցույց տանք, որ եթե բաղադրիչների քանակը հաշվելի է, ապա այդ գումարը նույնպես վերջավոր է, այսինքն՝ (2.6.1) շարքը զուգամետ է: Իրոք, նշանակենք

$$G_n=\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\subset(A,B):$$

Պարզ է, որ

$$m(G_n)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<B-A:$$

Վերջին անհավասարությունից հետևում է, որ (1) շարքի մասնակի գումարները հավասարաչափ սահմանափակ են, հետևաբար այդ շարքը զուգամետ է:

Թեորեմ 2.6.1: Եթե G_1-ը և G_2-ը բաց բազմություններ են, և $G_1\bigcap G_2=\varnothing$, ապա

$$m(G_1\cup G_2)=m(G_1)+m(G_2): \qquad (2.6.2)$$

Ապացույց: Ըստ բաց բազմությունների հատկության՝ $G_1\cup G_2$-ը բաց բազմություն է, և ուրեմն

$$G_1\cup G_2=\bigcup_{k=1}\Delta_k\ ,$$

որտեղ Δ_k-երը իրար հետ չհատվող բաց միջակայքեր են (բաղադրիչներ են):

Քանի որ $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$, ապա Δ_k-ն բաղադրիչ է G_1-ի կամ G_2-ի համար (չի կարող լինել բաղադրիչ G_1 և G_2 բազմությունների համար միաժամանակ): Ըստ բաց բազմության չափի սահմանման՝

$$m(G_1 \bigcup G_2) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta_k):$$

Աջ մասի գումարը, որպես դրական անդամներով զուգամետ շարք, կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta_k) = \sum{}^{(1)} m(\Delta_k) + \sum{}^{(2)} m(\Delta_k),$$

որտեղ $\sum^{(1)}$ գումարը տարածված է ըստ G_1-ի, իսկ $\sum^{(2)}$-ը՝ ըստ G_2-ի բաղադրիչների, և

$$m(G_1) = \sum{}^{(1)} m(\Delta k),\ m(G_2) = \sum{}^{(2)} m(\Delta k),$$

որտեղից հետևում է (2.6.2) հավասարությունը: (2.6.2)-ը կոչվում է չափի ադիտիվության հատկություն: □

Թեորեմ 2.6.2: Դիցուք՝ ունենք $G_1, G_2, \ldots, G_n \ldots$ հաշվելի զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող բազմություններ, ընդ որում՝ $G_n \subset (A,B)$: Այդ դեպքում

$$m(G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \cdots) = m(G_1) + m(G_2) + m(G_3) + \ldots : \quad (2.6.3)$$

Ապացույց: $G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \cdots$ բազմությունը բաց է և կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k ,$$

որտեղ Δ_k բազմությունները իրար հետ չհատվող միջակայքեր են:

Քանի որ $G_1, G_2, \ldots, G_n \ldots$ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում, Δ_k միջակայքերը կլինեն բաղադրիչ այդ բազմություններից միայն մեկի համար: Ըստ բաց բազմության չափի սահմանման և դրական անդամներով զուգամետ շարքերի տեղափոխելիության հատկության՝ ստանում ենք՝

$$m\left(G_1+G_2+\ldots+G_n+\cdots\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m\left(\Delta_k\right)=\sum^{(1)}m\left(\Delta_k\right)+\sum^{(2)}m\left(\Delta_k\right)+\ldots,$$

որտեղ $\sum^{(n)}$ գումարը տարածված է միայն G_n բազմության բաղադրիչներով: Սակայն

$$m(G_n)=\sum^{(n)}m(\Delta_k),$$

և ըստ նախորդ հավասարության ստանում ենք (2.6.3)-ը: (2.6.3)-ը կոչվում է չափի հաշվելի կամ լրիվ ադիտիվության բանաձև: □

Թեորեմ 2.6.3: Եթե $G_1 \subset G_2$, ապա $m(G_1)\le m(G_2)$:

Ապացույց: Քանի որ $G_1 \subset G_2$, G_1-ի ցանկացած բաղադրիչ G_2 բազմության որևէ բաղադրիչի ենթաբազմություն է: Դիցուք՝

$$G_2=\sum_{k=1}(a_k,b_k):$$

Նշանակենք $G_1^{(n)}$ G_1 բազմության բոլոր այն բաղադրիչների գումարը, որոնք (a_k,b_k) միջակայքի ենթաբազմություն են: Պարզ է, որ

$$m\left(G_1^{(n)}\right)\le b_n-a_n:$$

Քանի որ

$$m(G_2)=\sum_{k=1}b_k-a_k,$$

և

$$G_1=\sum_{k=1}G_1^{(n)},$$

թեորեմը հետևում է թեորեմ **2.6.2**-ից՝

$$m(G_1)=\sum_{k=1}^{\infty}m\left(G_1^{(k)}\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)=m(G_2): \square$$

Թեորեմ 2.6.4: Եթե G_1-ը և G_2-ը բաց բազմություններ են, ապա

$$m\left(G_1+G_2\right)\le m\left(G_1\right)+m\left(G_2\right): \tag{2.6.4}$$

Ապացույց: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ G_1+G_2-ը միջակայք է, այսինքն՝ $G_1+G_2=(A,B)$: Դիցուք՝ $\varepsilon>o$ կամայական թիվ է, և

$[A_0, B_0] \subset (A,B)$ ընտրված է այնպես, որ $B_0 - A_0 > B - A - \varepsilon$: G_1 և G_2 բազմությունների բաղադրիչների համախումբը $[A_0, B_0]$ փակ բազմության ծածկույթ է: Այդ համախմբից կարող ենք ընտրել $[A_0, B_0]$ փակ բազմության վերջավոր Ω_0 ծածկույթ: Նշանակենք G_1^0-ով և G_2^0-ով համապատասխանաբար G_1 և G_2 բազմությունների բաղադրիչների գումարը, որոնք պատկանում են Ω_0 ծածկույթին: Քանի որ այդ բաղադրիչները վերջավոր են, ապա

$$B_0 - A_0 < m(G_1^0) + m(G_2^0):$$

Այսպիսով՝

$$B - A < m(G_1^0) + m(G_2^0) + \varepsilon \le m(G_1) + m(G_2) + \varepsilon,$$

որտեղ $\varepsilon > 0$ կամայական է, հետևաբար

$$B - A \le m(G_1) + m(G_2), \tag{2.6.5}$$

և թեորեմն ապացուցված է այն դեպքում, երբ $G_1 + G_2 = (A,B)$ միջակայք է: Այժմ, դիցուք,

$$G_1 + G_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k, B_k):$$

Համապատասխանաբար նշանակենք G_1^n-ով և G_2^n-ով G_1 և G_2 բազմությունների այն բաղադրիչների գումարը, որոնք (A_k, B_k) միջակայքի ենթաբազմություն են: Ըստ (2.6.5)-ի՝

$$B_k - A_k \le m(G_1^k) + m(G_2^k), \quad k = 1,2,....:$$

Քանի որ

$$m(G_1 + G_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k - A_k),$$

$$m(G_1) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_1^k), \; m(G_2) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_2^k),$$

ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Թեորեմ 2.6.5: Եթե G_1 -ը և G_2 -ը բաց բազմություններ են, ապա

$$m\left(G_1 \cup G_2\right) = m(G_1) + m(G_1) - m\left(G_1 \cap G_2\right): \qquad (2.6.6)$$

Ապացույց: Դիցուք՝ G_1 -ը և G_2 -ը բաց բազմություններ են և բաղկացած են վերջավոր թվով բաղադրիչներից՝

$$G_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1}\left(a_k^{(1)}, b_k^{(1)}\right),\ G_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2}\left(a_k^{(2)}, b_k^{(2)}\right):$$

Նկատենք հետևյալը: Եթե G -ն բաց բազմություն է, և նրանից հեռացնում ենք վերջավոր թվով կետեր, ապա կստացվի բաց բազմություն: Նշանակենք

$$\widetilde{G}_1 = G_1 \setminus \left\{a_k^{(2)}, b_k^{(2)}, k = 1, 2, \ldots, N_2\right\},\ \widetilde{G}_2 = G_2 \setminus \left\{a_k^{(1)}, b_k^{(1)}, k = 1, 2, \ldots, N_1\right\}:$$

Նկատենք նաև, որ $\widetilde{G}_1 \cap \widetilde{G}_2$ բաց բազմությունը կազմված է բաղադրիչներից, որոնք միաժամանակ բաղադրիչ են $\widetilde{G}_1$ -ի և $\widetilde{G}_2$ -ի համար: Ստանում ենք $\widetilde{G}_1 = G_1' + \left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right)$, $\widetilde{G}_2 = G_2' + \left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right)$, որտեղ $G_1^{'} = \widetilde{G}_1 \setminus \left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right)$-ը, $G_1^{''} = \widetilde{G}_2 \setminus \left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right)$-ը նույնպես բաց բազմություններ են: Քանի որ

$$\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2 = G_1^1 + G_2^1 + \left(\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2\right),$$

և աջ կողմում գումարելիները չեն հատվում, ապա

$$m\left(\widetilde{G}_1 \bigcup \widetilde{G}_2\right) = m(G_1') + m(G_2') + m\left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right):$$

Քանի որ $\widetilde{G}_1 \cap \widetilde{G}_2 = G_1 \cap G_2$, $m\left(\widetilde{G}_1\right) = m(G_1)$, $m\left(\widetilde{G}_2\right) = m(G_2)$, և

$$m\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right) = m(G_1 \cup G_2),$$

$$m\left(\widetilde{G}_1\right) = m(G_1') + m\left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right),\ m\left(\widetilde{G}_2\right) = m(G_2') + m\left(\widetilde{G}_1 \bigcap \widetilde{G}_2\right),$$

ստանում ենք (2.6.6) բանաձևը, երբ G_1 և G_2 բաց բազմությունները բաղկացած են վերջավոր թվով բաղադրիչներից: Այժմ ենթադրենք՝

$$G_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k),\ G_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty}(c_k, d_k):$$

Ըստ բաց բազմության չափի սահմանման՝

$$m(G_1) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k),\ m(G_2) = \sum_{k=1}^{\infty}(d_k - c_k):$$

Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$: Գոյություն ունի N_1 >0, այնպես, որ

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty}(b_k - a_k) < \varepsilon\,,\quad \sum_{k=N_2+1}^{\infty}(d_k - c_k) < \varepsilon,$$

և եթե նշանակենք

$$\widetilde{G}_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1}(a_k, b_k),\ \widetilde{G}_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2}(c_k, d_k),$$

կստանանք՝

$$\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right) = m\left(\widetilde{G}_1\right) + m\left(\widetilde{G}_2\right) - m\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right): \qquad (2.6.7)$$

Քանի որ

$$m(G_1) - \varepsilon < m\left(\tilde{G}_1\right) < m(G_1),$$

և

$$m(G_2) - \varepsilon < m\left(\widetilde{G}_2\right) < m(G_2)\,,$$

$$m\left(\widetilde{G}_1\right) \le m(G_1) \le m\left(\widetilde{G}_1\right) + \varepsilon\ ,$$

հետևաբար՝

$$m\left(\tilde{G}_2\right) \le m(G_2) \le m\left(\tilde{G}_2\right) + \varepsilon,$$

$$\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2 \subset G_1 \cup G_2 \subset \widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2 + G_1' + G_2'\,,$$

որտեղ $G_1' = G_1 \setminus \widetilde{G}_1$, $G_2' = G_2 \setminus \widetilde{G}_2$: Ըստ (2.6.7)-ի, թեորեմ 2.6.2-ի և թեորեմ 2.6.4-ի՝

$$m\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right) \le m(G_1 \cup G_2) \le m\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right) + m(G_1') + m(G_2') \le m\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right) + 2\varepsilon:$$

Նման ձևով

$$\widetilde{G}_1 \cap \widetilde{G}_2 \subset G_1 \cup G_2 \subset \widetilde{G}_1 \cap \widetilde{G}_2 + G_1' + G_2'\,,$$

$$m\left(\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2\right) \le m(G_1 \cap G_2) \le m\left(\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2\right) + 2\varepsilon,$$

և

$$m(G_1) + m(G_2) - m(G_1 \cup G_2) - m(G_1 \cap G_2) \le$$
$$m\left(\widetilde{G}_1\right) + \varepsilon + m\left(\widetilde{G}_2\right) + \varepsilon - m\left(\widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_2\right) = 2\varepsilon:$$

Մյուս կողմից՝

$$m(G_1) + m(G_2) - m(G_1 \cup G_2) - m(G_1 \cap G_2) \ge$$

$$m\left(\tilde{G}_1\right)+m\left(\tilde{G}_2\right)-m\left(\tilde{G}_1\bigcup\tilde{G}_2\right)-2\varepsilon-m\left(\tilde{G}_1\bigcap\tilde{G}_2\right)-2\varepsilon>-4\varepsilon:$$

Այսպիսով՝

$$\left|m(G_1)+m(G_2)-m(G_1\bigcup G_2)-m(G_1\bigcap G_2)\right|\le 4\varepsilon$$

կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար: Վերջին անհավասարությունից ստանում ենք (2.6.6) հավասարությունը՝

$$m(G_1\bigcup G_2)=m(G_1)+m(G_2)-m(G_1\bigcap G_2):$$

§2.7. Փակ բազմության չափ

Դիտարկելու ենք փակ բազմություններ, որոնք ընկած են որևէ (A,B) միջակայքում: Դիցուք՝ F-ը որևէ փակ բազմություն է այդ միջակայքից՝ $F\subset(A,B)$: $C(F)=(A,B)\setminus F$ բաց բազմությունը F բազմության լրացումն է մինչև (A,B) միջակայքը:

Սահմանում 2.7.1: Եթե $F\subset(A,B)$ կամայական փակ բազմություն է, ապա

$$m(F)=B-A-m(C(F)): \qquad (2.7.1)$$

Նկատենք, որ եթե F-ը կամայական փակ բազմություն է, և $F\subset(A,B)$, ապա $m(F)\ge 0$:

Օրինակ 1: Եթե $F=\{a_1,a_2,...,a_N\}$-ը վերջավոր բազմություն է, ապա $m(F)=0$: Իրոք, $C(F)=(A,a_1)+(a_1,a_2)+...+(a_N,B)$, և ըստ (**2.7.1**)-ի՝

$$m(F)=B-A-(a_1-A)-(a_2-a_1)-...-(B-a_N)=0:$$

Օրինակ 2: Եթե $F=[a,b]$, ապա $m(F)=b-a$:

Իրոք, $C(F)=(A,a)+(b,B)$, և

$$m(C(F))=a-A+B-b:$$

Ըստ (**2.7.1**)-ի՝

$$m(F)=B-A-m(C(F))=B-A-(a-A)-(B-b)=b-a:$$

Թեորեմ 2.7.1: Եթե $F_1\bigcap F_2=\varnothing$, **ապա** $m(F_1\bigcup F_2)=m(F_1)+m(F_2)$:

Ապացույց: Քանի որ $F_1\bigcap F_2=\varnothing$, ապա $C(F)_1\bigcup C(F_2)=(A,B)$

և

$$m\big(C(F_1)\bigcup C(F_2)\big)=m\big(C(F_1)\big)+m\big(C(F_2)\big)-m\big(C(F_1)\bigcap C(F_2)\big):$$

Ըստ (**2.7.1**)-ի՝

$$B-A=B-A-m(F_1)+B-A-m(F_2)-m\big(C(F_1\bigcup F_2)\big):$$

Քանի որ $B-A-m\big(C(F_1\bigcup F_2)\big)=m(F_1\cup F_2)$, ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Հետևանք: Եթե $F_1,F_2,\ldots,F_n$ փակ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում, ապա

$$m\left(F_1\bigcup F_2\bigcup\ldots\bigcup F_n\right)=m(F_1)+\ldots+m(F_n):$$

Թեորեմ 2.7.2: Եթե $F_1\subset F_2\subset(A,B)$**, ապա** $m(F_1)\le m(F_2)$:

Ապացույց: Քանի որ $C(F_1)\supset C(F_2)$, և $m\big(C(F_1)\big)\ge m\big(C(F_2)\big)$, ուստի $B-A-m\big(C(F_1)\big)\le B-A-m\big(C(F_2)\big)$, որտեղից օգտվելով՝ (**2.7.1**)-ից ստանում ենք՝ $m(F_1)\le m(F_2)$: □

Թեորեմ 2.7.3: Եթե $F\subset G\subset(A,B)$, F **-ը փակ է,** G **-ն՝ բաց, ապա** $m(F)<m(G)$:

Ապացույց: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ $C(F)+G=(A,B)$: Ըստ բաց բազմությունների գումարի չափի բանաձևի՝ ստանում ենք՝

$$B-A=m(C(F))+m(G)-m(C(F)\cap G):$$

Քանի որ $B-A-m(C(F))=m(F)$, և $m(C(F)\cap G)>0$, ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Թեորեմ 2.7.4: Եթե F_1 **-ը և** F_2 **-ը փակ են, ապա**

$$m\left(F_1\bigcup F_2\right)=m(F_1)+m(F_2)-m\left(F_1\bigcap F_2\right):$$

Ապացույց: Քանի որ

$$m\big(C(F_1)\bigcup C(F_2)\big)=m\big(C(F_1)\big)+m\big(C(F_2)\big)-m\big(C(F_1)\cap C(F_2)\big),$$

ապա

$$B-A-m\left(F_1\bigcap F_2\right)=B-A-m(F_1)+B-A-m(F_2)-B+A+m\left(F_1\bigcup F_2\right),$$

որտեղից հետևում է թեորեմի ապացույցը: □

§2.8. Չափելի բազմություններ: Սահմանումը և օրինակներ: Չափելի բազմությունների հիմնական հատկությունները

Մենք սահմանեցինք չափ բաց և փակ բազմությունների համար: Օգտվելով այդ հասկացողություններից՝ կարելի է չափը տարածել այլ սահմանափակ բազմությունների վրա:

Սահմանում 2.8.1: $E \in (A, B)$ բազմությունը կոչվում է չափելի, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն G բաց և F փակ բազմություններ, այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

ա) $F \subset E \subset G$,

բ) $m(G) - m(F) < \varepsilon$:

Եթե E բազմությունը չափելի է, ապա նրա չափը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$m(E) = \inf_{G \supset E} m(G) = \sup_{F \subset E} m(F) : \qquad (2.8.1)$$

Սահմանումից հետևում է, որ եթե E-ն չափելի բազմություն է, ապա նրա լրացումը ցանկացած (A, B) միջակայքի նկատմամբ նույնպես չափելի բազմություն է: Իրոք, դիցուք՝ $\varepsilon > 0$ և F, G փակ և բաց բազմությունները ընտրված են այնպես, որ $F \subset E \subset G$, $m(G) - m(F) < \varepsilon$: Այդ դեպքում $C(G) \subset C(E) \subset C(F)$, և $m(C(G)) = B - A - m(G)$, $m(C(F)) = B - A - M(F)$: Ստանում ենք՝ $m(C(F)) - m(C(G)) = m(G) - M(F) < \varepsilon$: Ուրեմն $C(E)$-ն չափելի է: (**2.8.1**)-ից հետևում է նաև, որ

$$m(C(E)) = B - A - m(E) : \qquad (2.8.2)$$

Օրինակ 1: Եթե E-ն բաց բազմություն է՝ $E = \sum (a_k, b_k)$, ապա

այն չափելի է, և $m(E) = \sum_{k \geq 1} (b_k - a_k)$:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ E-ն կազմված է իրար հետ չհատվող վերջավոր թվով միջակայքերից՝

$$E = \sum_{k=1}^{N} (a_k, b_k) :$$

Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$-ն որևէ դրական թիվ է: $[a'_k, b'_k]$ փակ միջակայքը վերցնենք այնպես, որ տեղի ունենա անհավասարությունը՝

$$b'_k - a'_k > b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2N} :$$

Վերցնելով

$$F = \sum_{k=1}^{N} [a'_k, b'_k], \quad G = E\text{՝}$$

ստանում ենք $F \subset E \subseteq G$, և

$$m(G) - m(F) = \sum_{k=1}^{N} [b'_k - a'_k] - \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \varepsilon :$$

Այսպիսով՝ E-ն չափելի է, և

$$m(E) = \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) :$$

Եթե E-ն բաղկացած է հաշվելի թվով բաղադրիչներից, ապա E-ն պարունակող բաց բազմությունը վերցնենք հենց ինքը՝ $G = E$: Քանի որ

$$m(G) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k),$$

ապա տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար N-ը վերցնենք այնպես, որ տեղի ունենա

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} (b_k - a_k) < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Դիտարկենք հետևյալ բազմությունը՝

$$G_N = \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k) :$$

Այն բաց է և բաղկացած է վերջավոր թվով բաղադրիչներից: Ըստ նախորդ դեպքի՝ $F \subset G_N$ փակ բազմությունը կարելի է վերցնել այնպես, որ տեղի ունենա

$$m(F) > \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) - \frac{\varepsilon}{2} :$$

Արդյունքում ստանում ենք $F \subset E \subseteq G$, և

$$m(G)-m(F)<\varepsilon,$$

հետևաբար E-ն չափելի բազմություն է: □

Օրինակ 2: Եթե F-ը փակ բազմություն է, ապա այն չափելի է, քանի որ նրա լրացումը բաց բազմություն է:

Օրինակ 3: Հաշվելի բազմությունը չափելի է, և չափը հավասար է զրոյի:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ $E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\ldots\}$: Յուրաքանչյուր x_n ծածկենք մի միջակայքով, որի չափը փոքր լինի $\frac{\varepsilon}{2^n}$-ից: Այդ միջակայքերի գումարը նշանակենք G-ով: Ստանում ենք՝

$$m(G)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon:$$

E-ի կամայական վերջավոր ենթաբազմություն դիտարկենք որպես F փակ ենթաբազմություն, որի չափը հավասար է զրոյի: Կստանանք $F\subset E\subset G$, $m(G)-m(F)<\varepsilon$, որտեղից հետևում է, որ E-ն չափելի է, և $m(E)=0$:

Օրինակ 4: Ցանկացած (a,b) միջակայքի ռացիոնալ կետերի բազմությունը չափելի է, և չափը հավասար է զրոյի: Իռացիոնալ կետերի բազմությունը նույնպես չափելի է, քանի որ այն հանդիսանում է ռացիոնալ կետերի բազմության լրացում, և չափը հավասար է $b-a$-ի:

Օրինակ 5: Գոյություն ունի կոնտինուում հզորության բազմություն, որի չափը հավասար է զրոյի: Այդ բազմության կառուցման համար $[0,1]$ հատվածից հեռացնենք $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ միջակայքը, որը երկարության $\frac{1}{3}$-ն է: Կստանանք երկու հատվածներ, որոնցից հեռացնում ենք $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ և $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ միջակայքերը՝ յուրաքանչյուրը $\frac{1}{9}$ երկարությամբ: Հաջորդ քայլում ստացված չորս հատվածներից նման ձևով հեռացնում ենք չորս միջակայքեր՝ յուրաքանչյուրը $\frac{1}{27}$ երկարության և այլն: Բոլոր հեռացված միջակայքերի գումարը նշանակենք G_0-ով: Պարզ է, որ

$$m(G_0)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots,$$

և

$$m(G_0)=1:$$

Նշանակենք $P_0=[0,1]\setminus G_0$: P_0-ն փակ բազմություն է, և $m(P_0)=0$: Ցույց տանք, որ P_0 բազմությունն ունի կոնտինուում հզորություն: Օգտվենք $[0,1]$ բազմության կետերի երեքական անվերջ վերլուծությունից: Յուրաքանչյուր $x\in[0,1]$ կարելի է ներկայացնել հետևյալ անվերջ երեքական կոտորակով՝

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots,$$

որտեղ $\alpha_n=(0,1,2)$, այսինքն՝ յուրաքանչյուր α_n նիշը ընդունում է $0,1,2$ արժեքներից մեկը: Եթե $x\in P_0$, ապա նրա վերլուծության մեջ չի կարող մասնակցել 1 նիշը: Իրոք, $\alpha_1=1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right):$$

Քանի որ հենց առաջին քայլում հեռացվել է այդ միջակայքը, ուրեմն $\alpha_1\neq 1$: $\alpha_2=1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),$$

և քանի որ այդ միջակայքերը հեռացվել են, ուրեմն $\alpha_2\neq 1$ և այլն:

Այսպիսով՝ եթե $x\in P_0$, ապա նրա երեքական անվերջ վերլուծության մեջ կարող են մասնակցել միայն 0 և 2 նիշերը: Այժմ կամայական $x\in P_0$-ին՝ $x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ երեքական վերլուծությամբ, … համապատասխանեցնենք $\varphi(x)=0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ թիվը, որտեղ $\beta_n=0$, եթե $\alpha_n=0$, և $\beta_n=1$, եթե $\alpha_n=2$: Պարզ է, որ φ-ն փոխմիարժեք արտապատկերում է P_0 բազմությունը $[0,1]$ հատվածի վրա, հետևաբար $\left|P_0\right| = c$: P_0 և G_0 բազմությունները կոչվում են Կանտորի բազմություններ:

Հատկություն 1: Եթե E_1-ը և E_2-ը չափելի են, ապա $E_1 \cup E_2$ բազմությունը նույնպես չափելի է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$ որևէ դրական թիվ է: Գոյություն ունեն F_1, F_2 փակ և G_1, G_2 բաց բազմություններ, այնպես, որ $F_2 \subset E_2 \subset G_2$ $F_1 \subset E_1 \subset G_1$, և

$$m(G_1) - m(F_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , m(G_2) - m(F_2) < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Նշանակենք $F = F_2 \cup F_2$, $G = G_2 \cup G_2$: Պարզ է, որ $F \subset E_1 \cup E_2 \subset G$: Բավական է ցույց տալ, որ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $m(G) - m(F) < \varepsilon$:

Իրոք, ըստ բաց և փակ բազմությունների գումարի չափի բանաձևերի՝ ստանում ենք՝

$$m(G) = m(G_1) + m(G_2) - m(G_1 \cdot G_2),$$
$$m(F) = m(F_1) + m(F_2) - m(F_1 \cdot F_2):$$

Այնպես որ,

$$m(G) - m(F) = \left(m(G_1) - m(F_1)\right) + \left(m(G_2) - m(F_2)\right) -$$
$$-\left(m(G_1G_2) - m(F_1F_2)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon : \square$$

Հատկություն 2: Եթե E_1 և E_2 բազմությունները չափելի են, ապա չափելի են նաև $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \Delta E_2$ բազմությունները: Վերջավոր թվով չափելի բազմությունների գումարը և արտադրյալը նույնպես չափելի են:

Ապացույց: Քանի որ $C(E_1 \cap E_2) = C(E_1) \cup C(E_2)$, և $C(E_1)$, $C(E_2)$ բազմությունները չափելի են, ապա ըստ 1 հատկության՝ չափելի է $C(E_1 \cap E_2)$ բազմությունը, հետևաբար չափելի է $E_1 \cap E_2$ բազմությունը: Նման ձևով ապացուցվում է, որ $E_1 \setminus E_2$ և $E_1 \Delta E_2$ բազմությունները չափելի են: Վերջավոր թվով չափելի բազմությունների գումարի և արտադրյալի չափելիությունը ապացուցվում է ըստ ինդուկցիայի: □

Հատկություն 3: Եթե E_1 և E_2 բազմությունները չափելի են և չեն հատվում՝ $E_1 \cdot E_2 = \varnothing$, ապա

$$m\left(E_1 + E_2\right) = m\left(E_1\right) + m\left(E_2\right),$$

այսինքն՝ չափը ադիտիվ է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$ որևէ դրական թիվ է: Գոյություն ունեն F_1, F_2 փակ և G_1, G_2 բաց բազմություններ այնպես, որ $F_1 \subset E_1 \subset G_1$, $F_2 \subset E_2 \subset G_2$, և

$$m(G_1) - m(F_1) < \frac{\varepsilon}{2},\ m(G_2) - m(F_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

հետևաբար՝

$$m(F_1) < m(E_1) < m(G_1) < m(F_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$m(F_2) < m(E_2) < m(G_2) < m(F_2) + \frac{\varepsilon}{2}\ :$$

Քանի որ $F_1 \cup F_2 \subset E_1 \cup E_2 \subset G_1 \cup G_2$ և F_1, F_2 բազմությունները չեն հատվում, ապա

$$m(F_1) + m(F_2) = m(F_1 \cup F_2) < m(E_1 \cup E_2) < m(G_1 \cup G_2) < m(G_1) + m(G_2):$$

Այս երկու անհավասարություններից և նախորդ անհավասարություններից ստանում ենք՝

$$-\varepsilon < m(E_1 \cup E_2) - m(E_1) - m(E_2) < \varepsilon:$$

կամ

$$\left| m\left(E_1 \cup E_2\right) - m\left(E_1\right) - m\left(E_2\right) \right| < \varepsilon,$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ $\varepsilon > 0$ կամայական է, հետևում է, որ

$$m\left(E_1 \cup E_2\right) = m\left(E_1\right) + m\left(E_2\right): \square$$

Հատկություն 4: Դիցուք՝ $E_1, E_2, \dots, E_n \dots \subset (A, B)$ բազմությունները չափելի են և զույգ առ զույգ չեն հատվում՝ $E_k \cdot E_j = \varnothing$, $k \neq j$: Այդ դեպքում՝

ա) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ բազմությունը չափելի է,

բ) $m(E)=\sum_{k=1!}^{\infty}m(E_k)$,

այսինքն՝ չափը հաշվելի ադիտիվ է կամ լրիվ ադիտիվ:

Ապացույց: Դիցուք՝ $\varepsilon>0$ որևէ դրական թիվ է: Գոյություն ունեն F_k փակ և G_k բաց բազմություններ, այնպես, որ $F_k\subset E_k\subset G_k$, և

$$m(G_k)-m(F_k)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}:$$

F_k բազմությունները չեն հատվում, և

$$\sum_{k=1}^{N}m(E_k)=m\left(\bigcup_{k=1}^{N}F_k\right)<B-A$$

ցանկացած N -ի համար, հետևաբար՝

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(F_k)$$

շարքը զուգամետ է:

$m(G_k)<m(F_k)+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ անհավասարություններից հետևում է, որ զուգամետ է նաև $\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k)$ շարքը:

Դիցուք՝ N բնական թիվը ընտրված է այնպես, որ

$$\sum_{k>N}m(G_k)<\frac{\varepsilon}{2}:$$

Եթե նշանակենք $F=\bigcup_{k=1}^{N}F_k$, կստանանք՝

$$m(F)=m\left(\bigcup_{k=1}^{N}F_k\right)=\sum_{k=1}^{N}m(F_k)>\sum_{k=1}^{N}\left(m(G_k)-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)>\sum_{k=1}^{N}m(G_k)-\frac{\varepsilon}{2}:$$

Այժմ, դիցուք, $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$: Ստանում ենք՝

$$m(G)-m(F)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k)-\sum_{k=1}^{\infty}m(F_k)<\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}m\left(G_k\right)+\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k>N_\varepsilon}m\left(G_k\right)<\varepsilon,$$

և թեորեմն ապացուցվեց: □

Հատկություն 5: Եթե $E_1\subset E_2$ -ն չափելի բազմություններ են, ապա

$$m\left(E_2\setminus E_1\right)=m\left(E_2\right)-m\left(E_1\right):$$

Ապացույց: Քանի որ $E_1\subset E_2$, $E_2=E_1+\left(E_2\setminus E_1\right)$, և $E_1\bigcap\left(E_2\setminus E_1\right)=\varnothing$: Ըստ նախորդ հատկության՝ $m(E_2)=m(E_1)+m(E_2\setminus E_1)$, $m(E_2\setminus E_1)=m(E_2)-m(E_1)$: □

Հատկություն 6: Հաշվելի թվով չափելի բազմությունների գումարը չափելի է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $E_1,E_2,\ldots,E_n\ldots\subset\left(A,B\right)$, և

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k :$$

Մենք պետք է ապացուցենք, որ E բազմությունը չափելի է: Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ $A_1=E_1$, $A_2=E_2\setminus E_1$, $A_3=E_3\setminus\left(E_2\bigcup E_2\right)\ldots$ $A_n=E_n\setminus\left(E_2\bigcup E_2\bigcup\ldots\bigcup E_{n-1}\right)\ldots$:

A_k բազմությունները կունենան հետևյալ հատկությունները՝

ա) զույգ առ զույգ չեն հատվում՝ $A_k\bigcap A_j=\varnothing,\ k\neq j$,

բ) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$,

հետևաբար ըստ հատկություն 5-ի՝ E բազմությունը չափելի է: □

Հատկություն 7: Հաշվելի թվով չափելի բազմությունների արտադրյալը չափելի է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots \subset (A,B)$ չափելի բազմություններ են, և $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$:

Ըստ բազմությունների լրացման հատկության՝

$$C(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C(E_k):$$

Քանի որ $C(E_k)$ բազմությունները չափելի են, ապա ըստ նախորդ հատկության՝ չափելի են $C(E)$ բազմությունները: Հետևաբար չափելի է նաև E բազմությունը: □

Այսպիսով՝ չափելի բազմությունների ընտանիքը կազմում է σ հանրահաշիվ: Այսինքն՝ ցանկացած հաշվելի գումար և արտադրյալ նույնպես պատկանում են այդ ընտանիքին: Այդ ընտանիքը ընդունված է նշանակել $M(m)$:

Ցույց տանք, որ $|M(m)| = 2^c$ կամ, որ նույնն է, $M(m)$ բազմության հզորությունը հավասար է $[0,1]$ հատվածի կամ իրական առանցքի բոլոր ենթաբազմությունների բազմության հզորությանը:

Ապացույց: Քանի որ $M(m)$-ը հանդիսանում է բոլոր բազմությունների բազմության ենթաբազմություն, ապա $|M(m)| \le 2^c$: Ցույց տանք, որ $M(m) \ge 2^c$: Դիտարկենք Կանտորի բազմությունը, որն ունի c հզորություն, և $m(K) = 0$:

K -ի ցանկացած ենթաբազմությունը նույնպես չափելի է, և չափը հավասար է զրոյի: Իսկ նրա ենթաբազմությունների բազմության հզորությունը հավասար է 2^c -ի: Այսպիսով՝

$$|M(m)| \ge 2^c \Rightarrow |M(m)| = 2^c : \square$$

Թեորեմ 2.8.1: Դիցուք՝ տրված են $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ չափելի բազմությունները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

ա) $E_k \subset (A,B)$, **բ)** $E_n \subset E_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots :$

Այդ դեպքում

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_k):$$

Ապացույց: Նշանակենք $E_0 = \varnothing$: Ստանում ենք՝

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_{k+1} \setminus E_k):$$

Քանի որ $E_{k+1} \setminus E_k$, $k = 1,2,\ldots$ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում, ըստ չափի հաշվելի ադիտիվության՝

$$m(E) = \sum_{k=0}^{\infty} m(E_{k+1} \setminus E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (m(E_{k+1}) - m(E_k)):$$

Նշանակելով շարքի մասնական գումարը S_n-ով՝ ստանում ենք՝

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(m\left(E_{k+1}\right) - m\left(E_k\right)\right) = m(E_n),$$

հետևաբար՝

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n): \square$$

Թեորեմ 2.8.2: Դիցուք՝ տրված են $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ չափելի բազմությունները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

ա) $E_1 \subset (A, B)$, **բ)** $E_n \supset E_{n+1,}$ $n = 1,2,\ldots$:

Այդ դեպքում

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_k):$$

Ապացույց: Քանի որ $C(E_1) \subset C(E_2) \subset \ldots \subset C(E_n) \subset \ldots$, ըստ նախորդ հատկության՝

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C(E_k)\right) = \lim_{n\to\infty} m(C(E_n)):$$

Ապացույցը ավարտելու համար մնում է օգտվել հետևյալ հավասարություններից՝

$$C\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty} C(E_k),\ m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)=B-A-m\left(C\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right),$$

$$m(C(E_n))=B-A-m(E_n):\square$$

Ոչ չափելի բազմության օրինակ:

Դիցուք՝ $E=[0,1]$, և $x\in[0,1]$ կամայական կետ է այդ հատվածից: Նշանակենք I_x այն $y\in[0,1]$ կետերի բազմությունը, որոնց համար ռացիոնալ է հետևյալ մեծությունը՝ $x-y$, այսինքն՝ $x-y\in Q$: Այսպիսով՝ ցանկացած $x\in[0,1]$-ի համար $I_x\subset[0,1]$, մասնավորաբար I_0-ն $[0,1]$ հատվածի ռացիոնալ թվերի բազմությունն է: Ինչպես նաև՝

ա) I_x-ը հաշվելի բազմություն է ցանկացած x-ի համար,

բ) I_x բազմությունները կամ չեն հատվում կամ համընկնում են, այսինքն՝ եթե ունեն մեկ ընդհանուր էլեմենտ, ապա համընկնում են: Իրոք, դիցուք՝ $z\in I_x$, և $z\in I_y$: Ըստ I_x բազմությունների սահմանման՝ $z-x=q_1$, $z-y=q_2$, որտեղ q_1-ը և q_2-ը ռացիոնալ թվեր են: Վերցնենք կամայական $x_1\in I_x$: Ստանում ենք $x_1-x=q_3$, որտեղ q_3 -ը ռացիոնալ թիվ է: Այս հավասարություններից հետևում է, որ $x_1-y=q_2+q_3-q_1$ և $x_1\in I_y$, այսպիսով՝ $I_x\subset I_y$: Նման ձևով ապացուցվում է, որ $I_y\subset I_x$, այսպիսով՝ $I_x=I_y$: Առանձնացնենք այն I_x բազմությունները, որոնք զույգ առ զույգ չեն հատվում: Յուրաքանչյուր I_x-ից վերցնենք մեկական կետ: Ստացված բազմությունը նշանակենք E-ով: Ցույց տանք, որ E-ն չափելի չէ: Համարակալենք $[0,1]$ հատվածի ռացիոնալ թվերը բազմությունը՝ $r_0=0, r_1, r_2, ..., r_k, ...$, նշանակենք $E_k=r_k+E$: Պարզ է, որ $E_k\subset[0,2]$: Քանի որ E բազմության ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը իռացիոնալ թիվ է, ուստի այդ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում, այսինքն՝ $E_k\cdot E_m=\varnothing,\ k\neq m$: Կատարենք հակառող ենթադրություն, այն է՝ E-ն չափելի բազմություն է: Այդ դեպքում չափելի են նաև E_k բազմությունները, և եթե $m(E)=\delta$, ապա $m(E_k)=\delta,\ k=0,1,2,...$: Նկատենք նաև, որ

$$[0,1]\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k: \tag{2.8.2}$$

Իրոք, դիցուք՝ $x_0\in[0,1]$ կամայական կետ է: Պարզ է, որ $x_0\in I_{x_0}$, և եթե E բազմության մեջ վերցրել ենք I_{x_0} բազմությունից x_2 կետը, ապա x_0-x_2-ը ռացիոնալ թիվ է՝ $x_0-x_2=r_k$, հետևաբար $x_0\in E_k$, և տեղի ունի (2.8.2) հավասարությունը: Ըստ չափելի բազմությունների հատկության՝

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

բազմությունը նույնպես չափելի է, և չափի հաշվելի ադիտիվության հատկությունից ստանում ենք՝

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta: \tag{2.8.3}$$

Քանի որ

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subset[0,2],$$

և $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)<2$, ապա (2.8.3) հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $\delta=0$: Սակայն (2.8.2)-ից ստանում ենք՝

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\geq 1,$$

որը հակասում է (2.8.3) հավասարությանը: Այսպիսով՝ E-ն ոչ չափելի բազմություն է:

§2.9. Չափելի ֆունկցիայի սահմանումը և որոշ հատկություններ

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է E չափելի բազմության վրա:

Սահմանում 2.9.1: $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է չափելի, եթե ցանկացած $c \in R$ իրական թվի համար չափելի է $\{x, f(x) > c\}$ բազմությունը: Այդ բազմությունը ընդունված է կարճ նշանակել $(f > c)$:

Օրինակ 1: Ենթադրենք՝ $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան որոշված է (a,b) միջակայքի վրա: Այդ դեպքում ցանկացած c-ի համար $(f > c)$ բազմությունը բաց է և հետևաբար չափելի է: Այսպիսով՝ (a,b) միջակայքի վրա որոշված ցանկացած անընդհատ ֆունկցիա չափելի է:

Օրինակ 2: Դիտարկենք Դիրիխլեի ֆունկցիան $[0,1]$ հատվածում՝

$$D(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q_0 \\ 0 : x \in I_0 \end{cases},$$

որտեղ Q_0-ն և I_0-ն $[0,1]$ հատվածի համապատասխանաբար ռացիոնալ և իռացիոնալ կետերի բազմություններն են: Հեշտ է տեսնել, որ

$$(D > c) = \begin{cases} [0,1], & c < 0, \\ I_0, & c \in [0,1), \\ \varnothing, & c \geq 1: \end{cases}$$

այնպես, որ $\{D > c\}$ բազմությունը չափելի է ցանկացած $c \in R$ իրական թվի համար, հետևաբար Դիրիխլեի ֆունկցիան չափելի է:

Սահմանում 2.9.2: E բազմության վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է պարզ, եթե

1. այն ընդունում է վերջավոր թվով արժեքներ՝ $y_1, y_2, \ldots, y_N$,
2. $E_k = \{x, f(x) = y_k\}$ բազմությունները չափելի են ցանկացած k-ի համար՝ $k = 1, 2, \ldots, N$:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ պարզ ֆունկցիաները չափելի են: Դրա համար նկատենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը չափելի է, քանի որ $E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$:

Ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե ենթադրենք, որ $y_1 < y_2 < \ldots < y_N$: Դիցուք՝ $c \in R$, և $y_n \le c < y_{n+1}$: Այդ դեպքում $(f > c) = E_{n+1} + E_{n+2} + \ldots + E_N$, և $(f > c)$ բազմությունը չափելի է: Եթե $c \ge y_N$, $(f > c) = \varnothing$: Եվ վերջապես, եթե $c \le y_1$, $(f > c) = E$: Բոլոր այս բազմությունները չափելի են, և հետևաբար $f(x)$ ֆունկցիան չափելի է:

Չափելի ֆունկցիաների համար ճիշտ են հետևյալ հատկությունները:

Թեորեմ 2.9.1: Եթե E բազմությունը չափելի է, և չափը հավասար է զրոյի՝ $m(E) = 0$, ապա նրա վրա որոշված ցանկացած ֆունկցիա չափելի է:

Ապացույց: Քանի որ $m(E) = 0$, և $(f > c) \subset E$, $c \in R$ ապա $(f > c)$ բազմությունը չափելի է, և չափը հավասար է 0-ի:

Եթե $f(x)$-ը E բազմության վրա որոշված ֆունկցիա է, և $A \subset E$, ապա $f_A(x) \equiv f(x),\ x \in A$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նեղացում A բազմության վրա: □

Թեորեմ 2.9.2: Դիցուք՝ $f(x)$-ը E բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիա է ,և $A \subset E$-ն չափելի ենթաբազմություն է: Այդ դեպքում $f_A(x)$-ը A բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիա է:

Ապացույցն ակնհայտ է, քանի որ $(f_A > c) = A \cap (f > c)$: □

Թեորեմ 2.9.3: Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է E չափելի բազմության վրա, և E-ն ներկայացված է վերջավոր կամ հաշվելի բազմությամբ չափելի բազմությունների գումարի տեսքով՝

$$E = \bigcup_k E_k :$$

Եթե $f(x)$-ի նեղացումները այդ բազմությունների վրա $f_{E_k}(x)$ չափելի են, ապա $f(x)$-ը չափելի է E բազմության վրա:

Ապացույցն ակնհայտ է, քանի որ

$$\left(f > c\right) = \sum_k \left(f_{E_k} > c\right): \square$$

Սահմանում 2.9.3: E բազմության վրա որոշված $f\left(x\right)$ և $g\left(x\right)$ ֆունկցիաները կոչվում են համարյա ամենուրեք հավասար, եթե

$$m\left(\{x, f(x) \neq g(x)\}\right) = 0:$$

Ընդունված է հետևյալ նշանակումը՝

$$f\left(x\right) \approx g(x):$$

Համարյա ամենուրեք հասկացողությունը մենք օգտագործելու ենք տարբեր առիթներով: Դիցուք՝ որևէ դրույթ տեղի ունի E բազմության ցանկացած կետի համար, բացառությամբ $E_0 \subset E$ բազմության կետերի: Եթե $m(E_0) = 0$, ապա ասում ենք, որ դրույթը տեղի ունի համարյա ամենուրեք:

Թեորեմ 2.9.4: Եթե $f\left(x\right)$-ը E բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիա է, և $g(x) \approx f\left(x\right)$, ապա $g\left(x\right)$-ը նույնպես չափելի ֆունկցիա է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $A = \{x, f(x) \neq g(x)\}$, $B = E - A$: Պարզ է, որ B բազմությունը չափելի է, և այդ բազմության վրա $f\left(x\right)$ և $g\left(x\right)$ ֆունկցիաները համընկնում են: Այսպիսով՝ $g\left(x\right)$ ֆունկցիան չափելի է A և B բազմությունների վրա, ընդ որում՝ $E = A + B$: Ըստ **թեորեմ 3.1.3**-ի՝ $g\left(x\right)$ ֆունկցիան չափելի է: $\square$

Թեորեմ 3.1.5: Եթե $f\left(x\right)$-ը E բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիա է, ապա ցանկացած $c \in R_1$-ի համար չափելի են հետևյալ բազմությունները՝

$$(f \geq c),\ (f = c),\ (f \leq c),\ (f < c):$$

Ապացույց: Տեղի ունի հավասարությունը՝

$$(f \geq c) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(f > c - \frac{1}{n}\right),$$

որտեղից հետևում է, որ $(f \geq c)$ բազմությունը չափելի է: Մյուս բազմությունների չափելիությունը հետևում է հավասարություններից՝

$$(f = c) = (f \geq c) - (f > c),\ (f \leq c) = E - (f > c),$$

$$(f < c), E - (f \geq c): \square$$

Դիտողություն 2.9.1: Հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ եթե $(f \geq c)$, $(f \leq c)$, $(f < c)$ բազմություններից մեկը չափելի է ցանկացած $c \in R_1$-ի համար, ապա $f(x)$-ը չափելի ֆունկցիա է E բազմության վրա: Իրոք,

$$(f > c) = \sum_{n=1}^{\infty} (f \geq c + \frac{1}{n})$$

հավասարությունից հետևում է $f(x)$ ֆունկցիայի չափելիությունը, եթե ցանկացած $c \in R_1$-ի համար չափելի է $(f \geq c)$ բազմությունը: Նման ձևով ապացուցվում են մնացած պնդումները: Այսպիսով՝ չափելի ֆունկցիայի սահմանման դեպքում $(f > c)$ բազմության փոխարեն կարելի է վերցնել $(f \geq c)$, $(f \leq c)$, $(f < c)$ բազմություններից ցանկացածը:

Թեորեմ 2.9.6: Եթե $f(x)$-ը E բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիա է, իսկ a-ն վերջավոր թիվ է, ապա չափելի են հետևյալ ֆունկցիաները՝ 1) $f(x)+a$, 2) $af(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$, և 5) $\frac{1}{f(x)}$, **եթե** $f(x) \neq 0$:

Ապացույց: $f(x)+a$ ֆունկցիայի չափելիությունը հետևում է $(f+a > c) = (f > c-a)$ հավասարությունից: $af(x)$ ֆունկցիայի չափելիությունը, երբ $a = 0$, հետևում է պարզ ֆունկցիաների չափելիությունից: Մնացած a-երի դեպքում

$$(af > c) = \begin{cases} \left(f > \dfrac{c}{a}\right), & a > 0, \\ \left(f < \dfrac{c}{a}\right), & a < 0: \end{cases}$$

$|f(x)|$ ֆունկցիան չափելի է, քանի որ

$$(|f| > c) = \begin{cases} E, & c < 0, \\ (f < -c) + (f > c), & c > 0: \end{cases}$$

Նման ձևով

$$(f^2 > c) = \begin{cases} E, & c < 0, \\ (|f| > \sqrt{c}, & c > 0: \end{cases}$$

Հավասարությունից հետևում է, որ $f^2(x)$ ֆունկցիան չափելի է: $\frac{1}{f(x)}$ ֆունկցիայի չափելիության ապացույցը հետևում է հետևյալ հավասարությունից`

$$(\frac{1}{f} > c) = \begin{cases} (f > 0), & c = 0, \\ (f > 0) \cap (f < \frac{1}{c}), & c > 0, \\ (f > 0) + (f < 0) \cap (f < \frac{1}{c}) & c < 0: \end{cases}$$ □

§2.10. Չափելի ֆունկցիաների հիմնական հատկությունները

Լեմմ 2.10.1: Եթե E բազմության վրա տրված են երկու չափելի $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաներ, ապա $(f > g) = \{x, f(x) > g(x)\}$ բազմությունը չափելի է:

Ապացույց: Եթե համարակալենք բոլոր ռացիոնալ թվերը`

$$r_1, r_2, r_3, \ldots,$$

ապա հեշտ է ստուգել հետևյալ հավասարությունը`

$$(f > g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f > r_k) \cap (g < r_k):$$

Այդ հավասարությունից հետևում է լեմմի ապացույցը: □

Թեորեմ 2.10.1: Դիցուք` $f(x)$-ը և $g(x)$-ը $E$ բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիաներ են: Չափելի են նաև հետևյալ ֆունկցիաները` 1) $f(x) - g(x)$, 2) $f(x) + g(x)$, 3) $f(x)g(x)$, և 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$, եթե $g(x) \neq 0$:

Ապացույց: Դիցուք՝ $c \in R$: Քանի որ
$\{x, f(x)-g(x)>c\}=\{x, f(x)>c+g(x)\}$, և $c+g(x)$ ֆունկցիան չափելի է, ըստ լեմմի՝ չափելի է $\{x, f(x)-g(x)>c\}$ բազմությունը, հետևաբար չափելի է $f(x)-g(x)$ ֆունկցիան: $f(x)+g(x)$ ֆունկցիայի չափելիությունը հետևում է

$$f(x)+g(x)=f(x)-(-g(x))$$

հավասարությունից: $f(x)g(x)$ ֆունկցիայի չափելիությունը հետևում է

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}\left[(f(x))^2+(g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\right]$$

հավասարությունից, իսկ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$-ի չափելիությունը՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\frac{1}{g(x)}$$

հավասարությունից: □

Թեորեմ 2.10.2: **Դիցուք՝ E բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամետ է յուրաքանչյուր $x \in E$ կետում, և**

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F(x):$$

Այդ դեպքում $F(x)$ ֆունկցիան չափելի է:

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $c \in R$ և կազմենք հետևյալ բազմությունները՝

$$A_m^{(k)}=\left(f_k>c+\frac{1}{m}\right),\ B_m^{(n)}=\bigcap_{k=n}^{\infty} A_m^{(k)},$$

և ցույց տանք, որ

$$(F>c)=\bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^{(n)}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} B_m^{(n)}: \qquad (2.10.1)$$

Դիցուք՝ $x_0 \in (F > c)$, կամ, որ նույնն է, $F(x_0) > c$: Գոյություն ունի m բնական թիվ, այնպես, որ $F(x_0) > c + \frac{1}{m}$: Քանի որ $f_n(x_0) \to F(x_0)$, գոյություն ունի n բնական թիվ, այնպես, որ $f_k(x_0) > c + \frac{1}{m}$, երբ $k > n$: Այլ կերպ՝ $x_0 \in A_m^{(k)}$ ցանկացած $k > n$ բնական թվի համար, հետևաբար $x_0 \in B_m^{(n)}$, և $x_0 \in \bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^{(n)}$: Այսպիսով՝ ապացուցվեց, որ $(F > c) \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^{(n)}$: Այժմ ենթադրենք, որ $x_0 \in \bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^{(n)}$, հետևաբար n-ի և m-ի որոշակի արժեքների դեպքում $x_0 \in B_m^{(n)}$, կամ $x_0 \in A_m^{(k)}$ ցանկացած $k > n$ արժեքի դեպքում: Այսպիսով՝ ցանկացած $k > n$ արժեքի դեպքում $f_k(x_0) > c + \frac{1}{m}$: Անցնելով սահմանի՝ ստանում ենք $F(x_0) > c + \frac{1}{m}$, այնպես, որ $F(x_0) > c$, և $x_0 \in (F > c)$: Ստանում ենք (**2.10.2**) հավասարության ապացույցը, քանի որ $\bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^{(n)} \subset (F > c)$: $\bigcup_{n,m=1}^{\infty} B_m^{(n)}$ բազմությունը չափելի է որպես հաշվելի թվով չափելի բազմությունների գումար, հետևաբար $(F > c)$ բազմությունը չափելի է, այսինքն՝ $F(x)$-ը չափելի ֆունկցիա է: □

Դիցուք՝ E չափելի բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների ($\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$), հաջորդականությունը համարյա ամենուրեք (կամ հ. ա.) զուգամիտում է $F(x)$ ֆունկցիային, այսինքն՝ $\{x, f_n(x) \to F(x)\}$ բազմության չափը հավասար է $m(E)$, կամ այն կետերի բազմությունը, որտեղ հաջորդականությունը չի զուգամիտում, կամ զուգամիտում է ոչ $F(x)$ ֆունկցիային, ունի զրո չափ: □

Նախորդ թեորեմից ստանում ենք հետևյալը:

Թեորեմ 2.10.3: Դիցուք՝ E բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է $F(x)$ ֆունկցիային: Այդ դեպքում $F(x)$ ֆունկցիան նույնպես չափելի է:

Ապացույց: Այն $x \in E$ կետերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$ առնչությունը, նշանակենք A-ով: Համապատասխանաբար B-ով նշանակենք E-ի այն ենթաբազմությունը, որոնց համար այդ առնչությունը տեղի չունի($B = E - A$): Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $m(A) = m(E)$, $m(B) = 0$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $F(x)$ ֆունկցիան չափելի է A բազմության վրա: Այդ ֆունկցիան չափելի է նաև B բազմության վրա, քանի որ $m(B) = 0$: Հետևաբար $F(x)$-ը չափելի է $E = A + B$ բազմության վրա: □

§2.11. Ըստ չափի զուգամիտություն

Սահմանում 2.11.1: Կասենք, որ E բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է $F(x)$ չափելի ֆունկցիային, եթե ցանկացած $\sigma > 0$ թվի համար

$$\lim_{n\to\infty} m\big(\{x, | f_n(x) - F(x) | > \sigma\}\big) = 0 :$$

Ընդունված է հետևյալ նշանակումը՝

$$f_n(x) \Rightarrow F(x) :$$

Օրինակ: Եթե $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը E բազմության վրա հավասարաչափ ձգտում է $F(x)$ չափելի ֆունկցիային, ապա այն զուգամիտում է $F(x)$-ին նաև ըստ չափի՝ $f_n(x) \Rightarrow F(x)$: Իրոք, դիցուք՝ $\sigma > 0$: Քանի որ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է, գոյություն ունի բնական n_0 թիվ, այնպես, որ եթե $n > n_0$, ապա $|f_n(x) - F(x)| \leq \sigma$ ցանկացած $x \in E$ կետի համար: Այսպիսով՝ $\{x, |f_n(x) - F(x)| > \sigma\} = \varnothing$ ցանկացած $n > n_0$ բնական թվի համար, հետևաբար $\lim_{n\to\infty} m(\{x, |f_n(x) - F(x)| > \sigma\}) = 0$, և $f_n(x) \Rightarrow F(x)$:

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի է, որ եթե թվային հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա նրա սահմանը միակն է, այսինքն՝ հաջորդականությունը չի կարող ձգտել իրարից տարբեր երկու թվերի: Նույնը կարելի է ասել նաև ֆունկցիաների հաջորդականության մասին. եթե $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամետ է E բազմության յուրաքանչյուր կետում, ապա սահմանային ֆունկցիան որոշվում է միակ ձևով, այսինքն՝ եթե $f_n(x) \to f(x)$, և $f_n(x) \to g(x)$, ապա $f(x) = g(x),\ x \in E$:

Ըստ չափի զուգամիտության՝ սահմանային ֆունկցիան որոշ վերապահումներով նույնպես որոշվում է միակ ձևով: Հեշտ է նկատել, որ եթե $f_n(x) \Rightarrow F(x)$, և $G(x) = F(x)$ համարյա ամենուրեք, ապա $f_n(x) \Rightarrow G(x)$: Հետևյալ պնդումը հուշում է, որ եթե նույնացնենք իրար համարժեք ֆունկցիաները (կամ, որ նույնն է, համարյա ամենուրեք հավասար ֆունկցիաները), ապա ըստ չափի զուգամիտության՝ սահմանային ֆունկցիան որոշվում է միակ ձևով:

Թեորեմ 2.11.1: Եթե $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է $F(x)$ և $G(x)$ ֆունկցիաներին, ապա այդ ֆունկցիաները համարժեք են:

Ապացույց: Ցանկացած $\sigma > 0$ և բնական n թվերի համար

$$(|f - G| \geq \sigma) \subset \left(|f_n - F| \geq \frac{\sigma}{2}\right) + \left(|f_n - G| \geq \frac{\sigma}{2}\right),$$

որտեղից

$$m(|f-G|\geq\sigma)\leq m\left(|f_n-F|\geq\frac{\sigma}{2}\right)+m\left(|f_n-G|\geq\frac{\sigma}{2}\right):$$

Այս անհավասարությունից ստանում ենք՝

$$m(|f-G|\geq\sigma)=0:$$

Քանի որ

$$(f\neq G)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(|F-G|\geq\frac{1}{n}\right),$$

ապա $m(f\neq G)=0$: □

Թեորեմ 2.11.2: **Դիցուք՝** E **չափելի բազմության վրա որոշված** $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը յուրաքանչյուր** x **կետում զուգամիտում է** $F(x)$ **չափելի ֆունկցիային՝** $f_n(x)\to F(x)$: **Այդ դեպքում** $f_n(x)\Rightarrow F(x)$:

Ապացույց: Ցանկացած $\sigma>0$-ի համար կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$E_k(\sigma)=\{x,|f_k(x)-F(x)|>\sigma\},\ R_n(\sigma)=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k(\sigma):$$

$R_n(\sigma)$ բազմությունները ունեն հետևյալ հատկությունները՝

ա) $R_n(\sigma)$-ները չափելի են, բ) $R_1(\sigma)\supset R_2(\sigma)\supset\ldots\supset R_k(\sigma)\supset\ldots$,

գ) $E_n(\sigma)\subseteq R_n(\sigma)$: Վերջապես նշանակենք

$$R=\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n(\sigma):$$

Նկատենք, որ բազմության չափի անընդհատության հետևանքով՝

$$R=\lim_{n\to\infty}m(R_n(\sigma)):$$

Ցույց տանք, որ $R=\varnothing$: Ենթադրենք հակառակը՝ $R\neq\varnothing$, և գոյություն ունի $x_0\in E$, այնպես, որ $x_0\in R$: Ստանում ենք $x_0\in R_n(\sigma)$ ցանկացած n բնական թվի համար: Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունի k_n հաջորդականություն, այնպես, որ $x_0\in E_{k_n}(\sigma)$, կամ

$$|f_{k_n}(x_0)-F(x_0)|>\sigma:$$

Այսպիսով՝ $x_0\in E$ կետում ֆունկցիաների հաջորդականությունը չի զուգամիտում: Ստանում ենք հակասություն, որից հետևում է, որ $R=\varnothing$, և $m(R)=0$: Ուրեմն

$$\lim_{n\to\infty} m(R_n(\sigma))=0:$$

Ըստ $R_n(\sigma)$-ի գ) հատկության՝ ստանում ենք, որ $m(R_n(\sigma))\to 0$, և $f_n(x)\Rightarrow F(x)$: Նկատենք, որ ստացվել է ավելին, քան թեորեմն էր պահանջում, և նշենք, որ հետևյալ փաստը՝ $m(R_n(\sigma))\to 0$, կիրառվելու է թեորեմ 2.11.5-ի ապացույցի մեջ: □

Ապացուցված թեորեմից հետևում է հետևյալը:

Թեորեմ 2.11.3: Դիցուք՝ E չափելի բազմության վրա որոշված, համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է $F(x)$ ֆունկցիային: Այդ դեպքում $f_n(x)\Rightarrow F(x)$:

Ապացույց: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $F(x)$ ֆունկցիան նույնպես չափելի է: Նշանակենք B-ով E բազմության այն կետերի բազմությունը, որտեղ ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամետ չէ կամ չի զուգամիտում $F(x)$-ին: Նշանակենք նաև

$$A=(|F|=\infty),\quad A_n=(|f_n|=\infty),\quad Q=B+A\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n:$$

Պարզ է, որ $m(Q)=0$: Վերջապես նշանակենք $E_0\subset E$ բոլոր այն կետերի բազմությունը, որտեղ $f_n(x)\to F(x)$: Ըստ պայմանի՝ $m(E_0)=m(E)$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $f_n(x)\Rightarrow F(x)$ E_0 բազմության վրա կամ, որ նույնն է,

$$\lim_{n\to\infty} m\big(\{x:|f_n(x)-F(x)|>\sigma, x\in E_0\}\big)=0:$$

Քանի որ $E=E_0+Q$ և

$$\lim_{n\to\infty} m\big(\{x:|f_n(x)-F(x)|>\sigma, x\in E_0+Q\}\big)=m\big(\{x:|f_n(x)-F(x)|>\sigma, x\in E_0\}\big):$$

Ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Դիտողություն 2.11.1: Այս թեորեմի հակադարձ պնդումը ընդհանրապես տեղի չունի՝ ըստ չափի զուգամիտությունից չի հետևում համարյա ամենուրեք զուգամիտությունը: Կառուցենք $[0,1)$ կիսաբաց միջակայքի վրա չափելի ֆունկցիաների հաջորդականության օրինակ, որը ըստ չափի զուգամիտում է 0-ին և չի զուգամիտում այդ միջակայքի և ոչ մի կետում: Ցանկացած բնական k-ի համար դիտարկենք $[0,1)$-ի վրա որոշված ֆունկցիաների հետևյալ խումբը՝

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}),\\ 0, & x\notin[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}),\end{cases}\qquad i=1,2,...,k:$$

Մասնավորաբար $f_1^{(1)}(x)=1,\ x\in[0,1)$,

$$f_1^{(2)}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2}),\\ 0, & x\in[\frac{1}{2},1),\end{cases}$$

$$f_1^{(2)}(x)=\begin{cases}1, & x\in[\frac{1}{2},1),\\ 0, & x\in[0,\frac{1}{2}),\end{cases}$$

և այլն: Համարակալելով մեկ նշանով այս ֆունկցիաները՝ ստանում ենք հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$g_1(x)=f_1^{(1)}(x),\ g_2(x)=f_1^{(2)}(x),\ g_3(x)=f_2^{(2)}(x),\ g_4(x)=f_1^{(3)}(x),$$
$$g_n(x)=f_i^{(k)}(x),\quad n=2^{k-1}+i-1, i=1,...,2^k, k\in \mathrm{N}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է զրոյի: Իրոք, եթե $g_n(x)=f_i^{(k)}(x)$, ապա ցանկացած $\sigma>0$-ի համար ունենք

$$\left(|\,g_n\,|\geq\sigma\right)=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),$$

և այդ բազմության չափը հավասար է $\frac{1}{k}$-ի, ձգտում է զրոյի, երբ n-ը ձգտում է անվերջի: Մյուս կողմից՝ այդ հաջորդականությունը չի զուգամիտում ոչ մի կետում: Իրոք, ինչպիսին էլ լինի $x_0 \in [0,1)$ կետը, ցանկացած k-ի համար կգտնվի i, այնպես, որ

$$x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right),$$

և $f_i^{(k)}(x) = 1$: Այսպիսով՝ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը պարունակում է անվերջ քանակով անդամներ, որոնք հավասար են 1-ի: Նման ձևով համոզվում ենք, որ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը պարունակում է անվերջ քանակով զրոներ, և ուրեմն այն չի զուգամիտում:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ ըստ չափի զուգամիտությունը ավելի ընդհանուր է, քան կետային կամ համարյա ամենուրեք զուգամիտությունը: Բայց տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.11.4 (Ռիսս): Դիցուք՝ E չափելի բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է $F(x)$ չափելի ֆունկցիային, այսինքն՝ $f_n(x) \Rightarrow F(x)$: Այդ դեպքում գոյություն ունի ենթահաջորդականություն՝ $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots, f_{n_k}(x), \ldots$, որը զուգամիտում է $F(x)$-ին համարյա ամենուրեք:

Ապացույց: Դիցուք՝ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots$-ը զրոյի ձգտող դրական թվերի մոնոտոն նվազող հաջորդականություն է, իսկ $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots$-ը դրական անդամներով զուգամետ շարք է:

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(\{x : |f_n(x) - F(x)| > \sigma_k\}\right) = 0, \forall k \in \mathrm{N},$ գոյություն ունի n_1 բնական թիվ, այնպես, որ

$$m\left(\{x : |f_{n_1}(x) - F(x)| > \sigma_1\}\right) < \eta_1 :$$

n_2-ով նշանակենք այն բնական թիվը, որի համար $n_2 > n_1$, և

$$m\left(\{x:|f_{n_2}(x)-F(x)|>\sigma_2\}\right)<\eta_2:$$

Հաջորդաբար n_k-ով նշանակենք այն բնական թիվը, որի համար $n_k>n_{k-1}$, և

$$m\left(\{x:|f_{n_k}(x)-F(x)|>\sigma_k\}\right)<\eta_k:$$

Այժմ ցույց տանք, որ E բազմության վրա համարյա ամենուրեք

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=F(x): \tag{2.11.1}$$

Իրոք, դիցուք՝

$$R_i=\bigcup_{k=i}^{\infty}\{x:|f_{n_k}(x)-F(x)|>\sigma_k\},\quad Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i:$$

Քանի որ $R_1\supset R_1\supset R_1\supset\ldots$, ըստ բազմության չափի անընդհատության հատկության՝ $m(R_i)\to m(Q)$: Մյուս կողմից՝ քանի որ

$$m(R_i)<\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k,$$

ստանում ենք $m(R_i)\to 0$, և հետևաբար $m(Q)=0$: Մնում է ցույց տալ, որ (2.11.1)-ը տեղի ունի $E-Q$ բազմության ցանկացած կետի համար: Դիցուք՝ $x_0\in E-Q$: Այդ դեպքում $x_0\notin R_{i_0}$, որևէ բնական i_0-ի համար կամ, որ նույնն է,

$$x_0\notin\{x:|f_{n_k}(x)-F(x)|>\sigma_k\},\forall k>i_0,$$

և հետևաբար՝

$$|f_{n_k}(x_0)-F(x_0)|\le\sigma_k,\forall k>i_0:$$

Քանի որ $\sigma_k\to 0$, ստանում ենք՝

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0)=F(x_0),$$

և թեորեմը ապացուցվեց: □

Թեորեմ 2.11.5 (Եգորով): Դիցուք՝ E չափելի բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների հաջորդականությունը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է համարյա ամենուրեք վերջավոր $f(x)$ չափելի ֆունկցիային: Այդ

դեպքում ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար գոյություն ունի $E_\delta \subset E$ չափելի բազմություն, այնպես, որ

ա. $m(E_\delta) = m(E) - \delta$,

բ. E_δ բազմության վրա զուգամիտությունը հավասարաչափ է:

Ապացույց: Թեորեմ 2.11.2-ի ապացույցում ցույց տրվեց, որ ցանկացած $\sigma > 0$-ի համար

$$\lim_{n\to\infty} mR_n(\sigma) = 0, \text{ որտեղ } R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \sigma): \quad (2.11.2)$$

(2.11.2)-ի համաձայն՝ կարելի է կառուցել բնական թվերի $\{n_k\}$ աճող ենթահաջորդականություն, այնպես, որ

$$mR_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1,2,\ldots: \quad (2.11.3)$$

k_0 բնական թիվն ընտրենք այնպես, որ լինի $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < \delta$, և նշանակենք

$$e = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} R_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right):$$

(2.11.3)-ից կհետևի, որ $me < \delta$: Վերցնելով $E_\delta = E \setminus e$՝ կստանանք $mE_\delta > mE - \delta$: Ցույց տանք, որ E_δ բազմության վրա $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon > 0$ թիվ: Դիցուք՝ $x \in E_\delta \Rightarrow x \notin e$, որտեղից

$$x \notin R_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right), k = 1,2,\ldots \Rightarrow x \notin E\left(|f_j - f| \geq \frac{1}{k}\right), k = 1,2,\ldots, j \geq n_k:$$

Այսպիսով՝ E_δ բազմության կետերի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad i \geq n_k, k = 1,2,\ldots: \quad (2.11.4)$$

Վերցնենք $k_0=[1/\varepsilon]+1$: (2.11.4)-ից հետևում է, որ E_δ բազմության կետերի համար

$$|f_j(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad i\ge n_{k_0},$$

որտեղ n_{k_0}-ն կախված չէ x-ից, հետևաբար E_δ բազմության վրա զուգամիտությունը հավասարաչափ է: Թեորեմն ապացուցված է: □

§2.12. Չափելի ֆունկցիաների կառուցվածքը

Ինչ-որ ֆունկցիա հետազոտելիս բնականորեն առաջանում է դրա՝ ավելի պարզ ֆունկցիաներով մոտարկման խնդիրը: Այս խնդրի կարևորության պատճառներից մեկը կիրառական խնդիրներում տարբեր դասերի ֆունկցիաների ուսումնասիրության հարցի բերումն է ավելի պարզ ֆունկցիաների: Օրինակ՝ փորձարարական ֆիզիկայի փորձերի արդյունքում հետազոտվող անընդհատ մեծության ժամանակից ունեցած կախվածության գրաֆիկից ելնելով՝ փորձարարը կարիք ունի հետազոտվող մեծությունը մոտարկելու հայտնի պարզ հատկություններ ունեցող ֆունկցիաների միջոցով (օրինակ՝ հանրահաշվական բազմանդամներով). համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի՝ անընդհատ մեծությունների դեպքում այսպիսի մոտարկումը հնարավոր է ցանկացած նախապես տրված ճշտությամբ, ուստի փորձարարը հետազոտվող մեծության համար կարող է առաջարկել «էմպիրիկ բանաձևեր, որոնք կարող են ներկայացնել այդ մեծության արժեքները՝ ցանկացած ճշտությամբ: Օրինակ՝ փորձարարը կարող է վերջավոր քանակի փորձեր անել (քանակը կախված է պահանջվող ճշտությունից) ու հաշվել հետազոտվող $X(t)$ մեծության $X(0),X(1/n),X(2/n),...,X(n/n)$ արժեքները ժամանակի $t=\frac{0}{n},\frac{1}{n},....,\frac{n}{n}$, պահերին: Այնուհետև նա կարող է վստահ լինել, որ

$$B_n(t,X)=\sum_{k=0}^{n}X\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$$

էմպիրիկ բանաձևը մոտավորապես ներկայացնում է իրական մեծության արժեքները ժամանակի բոլոր պահերի համար:

Պարզ ֆունկցիաներով տարբեր դասերի ֆունկցիաների մոտարկման մյուս կարևորությունը արդարացվում է վերջիններիս կառուցվածքային առանձնահատկությունների ավելի խորը ըմբռնման ու դրանց մեկնաբանման հնարավորությամբ:

Այս գլխում կքննարկվի չափելի ֆունկցիաների՝ անընդհատ ֆունկցիաներով (մասնավորապես հանրահաշվական բազմանդամներով) մոտարկման հարցը: Այստեղ ստիպված ենք հրաժարվել «հավասարաչափ մոտարկման» պահանջից, քանի որ, օրինակ, հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկվել կարող են միայն անընդհատ ֆունկցիաները:

Թեորեմ 2.12.1: Դիցուք՝ f-ը E բազմության վրա տրված չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիա է: Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի, սահմանափակ g ֆունկցիա, այնպիսին, որ $m(f \neq g) < \varepsilon$:

Ապացույց: Պայմանների համաձայն՝ $Q = (x : |f| = +\infty)$ բազմության չափը 0 է: Դժվար չէ համոզվել, որ $A_k = (x : |f(x)| > k)$ բազմությունները նեղացող են՝

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots,$$

և $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$:

Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2.8.2-ի, $\lim_{k\to\infty} mA_k = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$:

k_0 բնական թիվն ընտրենք այնպես, որ $mA_k < \varepsilon$, և վերցնենք

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \setminus A_{k_0}, \\ 0, & x \notin E \setminus A_{k_0} : \end{cases}$$

g-ն E բազմության վրա որոշված չափելի ֆունկցիա է, ընդ որում՝

$$\sup_{x\in E} |g(x)| \le k_0, \ \ m(f \neq g) = mA_{k_0} < \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է: □

Սահմանում 2.12.1: Դիցուք՝ f-ը E բազմության վրա տրված ֆունկցիա է, և $x_0 \in E$, ընդ որում՝ $f(x_0) \neq \pm\infty$: f-ը x_0 կետում անվանում են անընդհատ, եթե տեղի ունի հետևյալ դեպքերից որևէ մեկը՝

ա. x_0-ն E բազմության մեկուսացված կետ է,

բ. x_0-ն E բազմությանը պատկանող սահմանային կետ է, և $x_n \to x_0, x_n \in E$ առնչությունից հետևում է, որ $f(x_n) \to f(x_0)$:

Սահմանում 2.12.2: E բազմության վրա տրված ֆունկցիան անվանում են այդ բազմության վրա անընդհատ, եթե այն անընդհատ է այդ բազմության բոլոր կետերում:

Լեմմ 2.12.1: Դիցուք՝ $F_1, F_2, ..., F_n$-ը զույգ առ զույգ չհատվող փակ բազմություններ են: Այդ դեպքում $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_1$ բազմության վրա որոշված և $F_1, F_2, ..., F_n$ բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա հաստատուն φ ֆունկցիան F-ի վրա անընդհատ է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $x_0 \in F$, և $x_n \to x_0, x_n \in F$: Այդ դեպքում $x_0 \in F_m, x_0 \notin F_j, j \neq m$: Քանի որ $F_j, j \neq m$-ը փակ բազմություն է, հետևաբար x_0-ն չի կարող հանդիսանալ այդ բազմության սահմանային կետ: Այստեղից հետևում է, որ ցանկացած $j \neq m$ բնական թվի համար x_n հաջորդականության միայն վերջավոր թվով անդամներ կարող են պատկանել F_j բազմությանը: Նշանակում է՝ կգտնվի n_0 բնական թիվ, այնպիսին, որ $x_n \in F_m, n > n_0$: Այստեղից կհետևի, որ $\varphi(x_n) = \varphi(x_0), \quad n > n_0$: Լեմմն ապացուցված է: □

Լեմմ 2.12.2: Դիցուք՝ φ-ն $F \subset [a,b]$ փակ բազմության վրա որոշված, անընդհատ ֆունկցիա է: Այդ դեպքում գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված ϕ ֆունկցիա հետևյալ հատկություններով՝

1. $\phi \in C[a,b]$,

2. $\phi(x)=\varphi(x), \quad x\in F,$

3. $\max\limits_{x\in[a,b]}|\phi(x)|=\max\limits_{x\in F}|\varphi(x)|$:

Ապացույց: Դիցուք՝ $d=\sup F$, և $c=\inf F$: Այդ դեպքում $F\subset[c,d]\subset[a,b]$: Թեորեմի պնդումը տրիվիալ է, եթե $F=[c,d]$, քանի որ $[c,d]$-ից դուրս կշարունակենք հաստատուններով:

Դիցուք՝ $[c,d]\setminus F$ բազմությունը դատարկ չէ: $G=[c,d]\setminus F$ բազմությունը բաց է, այսինքն՝ այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեքստով՝

$$G=\bigcup_j(\alpha_j,\beta_j),$$

որտեղ վերջավոր կամ հաշվելի քանակով (α_j,β_j) ինտերվալների ծայրակետերը պատկանում են F բազմությանը: Վերցնենք

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in F,\\ \varphi(\alpha_j)+\dfrac{\varphi(\beta_j)-\varphi(\alpha_j)}{\beta_j-\alpha_j}(x-\alpha_j), & x\in(\alpha_j,\beta_j), j=1,2...:\end{cases}$$

Ցույց տանք, որ $\phi_0\in C[c,d]$: ϕ_0-ի անընդհատությունը G բազմության կետերում ակնհայտ է, քանի որ այս բազմության վրա ϕ_0-ն գծային է բաղկացուցիչ ինտերվալների վրա: Ապացուցենք, որ ϕ_0-ն անընդհատ է F բազմության x_0 կետում: Նախ համոզվենք, որ՝ $\phi_0(x_0+0)=\phi_0(x_0)$ (համարում ենք, որ x_0–ն դիտարկվող հատվածի աջ ծայրակետ չի): Դիցուք՝ $\{x_n\}=\{x_1>x_2>....>x_n>...\}$ հաջորդականությունը ձգտում է x_0-ի: Նշանակենք

$$A=\{n\in\mathrm{N}:x_n\in F\},\quad B=\mathrm{N}\setminus A=\{n\in\mathrm{N}:x_n\in G\}:$$

Նկատենք, որ եթե B բազմությունը վերջավոր է, ապա սկսած ինչ-որ համարից՝ $x_n\in F$, և ϕ_0-ի՝ F-ի վրա անընդհատ լինելու փաստից կհետևի $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_0(x_n)=\phi_0(x_0)$ հավասարությունը: Եթե A բազմությունը վերջավոր է, ապա սկսած ինչ-որ համարից՝ $x_n \in G$, և հետևաբար $\lim_{n\to\infty} \phi_0(x_n) = \phi_0(x_0)$ հավասարությունը կհետևի ϕ_0-ի G-ի վրա գծային լինելուց: Ենթադրենք՝ A և B բազմությունները վերջավոր չեն: Համարակալենք աջից ձախ G բազմության բոլոր այն բաղկացուցիչ ինտերվալները, որոնք իրենց մեջ ընդգրկում են $\{x_n\}$ հաջորդականության գոնե մեկ անդամ: x_{n_1}-ով նշանակենք G բազմության մեջ հայտնված ամենափոքր ինդեքսով էլեմենտը: Դիցուք՝ $(\alpha_{j_1}, \beta_{j_1})$-ը x_{n_1}-ը ընդգրկող բաղկացուցիչ ինտերվալն է, և

$$\beta_{j_1} > x_{n_1} > x_{n_1+1} > .... > x_{n_2-1} > \alpha_{j_1} \geq x_{n_2}:$$

x_{n_3}-ով նշանակենք G բազմության մեջ հայտնված n_2-ից մեծ ինդեքս ունեցող առաջին պատահած էլեմենտը և $(\alpha_{j_2}, \beta_{j_2})$-ով նշանակենք x_{n_3}-ը ընդգրկող բաղկացուցիչ ինտերվալը: Ունենք

$$\beta_{j_2} > x_{n_3} > x_{n_3+1} > .... > x_{n_4-1} > \alpha_{j_2} \geq x_{n_4}:$$

Շարունակելով այս պրոցեսը՝ կառուցվում են $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ կետերի ենթահաջորդականություն և աջից ձախ համարակալված $\{(\alpha_{j_k}, \beta_{j_k})\}_{k=1}^{\infty}$ ինտերվալների հաջորդականություն, այնպիսիք, որ

$$(\alpha_{j_k}, \beta_{j_k}) \subset G, \quad k = 1,2,...,$$

$$x_{n_{2k}} \leq \alpha_{j_k} < x_{n_{2k}-1} < x_{n_{2k}-2} < ... < x_{n_{2k-1}} < \beta_{j_k}, \quad k = 1,2,...:$$

Այս հավասարություններից պարզ է, որ $\alpha_{j_k} \to x_0, \beta_{j_k} \to x_0$, երբ $k \to 0$: Հետևաբար, օգտագործելով ϕ_0-ի՝ G-ի վրա գծային լինելը, կարող ենք ասել, որ

$$\lim_{\substack{l\to\infty \\ n_{2k-1} \leq l < n_{2k}}} \phi_0(x_l) = \phi_0(x_0),$$

Մյուս կողմից՝ ϕ_0-ի՝ F-ի վրա անընդհատ լինելու փաստից կհետևի, որ

$$\lim_{\substack{l\to\infty \\ n_{2k} \leq l < n_{2k+1}}} \phi_0(x_l) = \phi_0(x_0),$$

Միավորելով վերջին երկու առնչությունները՝ համոզվում ենք, որ

$$\lim_{k\to\infty}\phi_0(x_k)=\phi_0(x_0+0)=\phi_0(x_0):$$

Նույն դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ $\phi_0(x_0-0)=\phi_0(x_0)$, այնպես, որ $\phi_0(x_0-0)=\phi_0(x_0)=\phi_0(x_0+0)$: Այսպիսով՝ ապացուցվեց, որ $\phi_0\in C[c,d]$: Վերցնենք

$$\phi(x)=\begin{cases}\phi_0(x), & x\in[c,d],\\ \phi_0(c), & x\in[a,c],\\ \phi_0(d), & x\in[d,b]:\end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $\phi\in C[c,d]$, և կառուցումից հետևում է նաև լեմմի պնդման 3-րդ կետի ճիշտ լինելը: □

Թեորեմ 2.12.2: Դիցուք՝ f -$[a,b]$ հատվածի վրա որոշված չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիա է: Ցանկացած σ և ε դրական թվերի համար գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ ϕ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$m(|f-\phi|\geq\sigma)<\varepsilon:$$

Ընդ որում՝ եթե $|f(x)|\leq K$, ապա ϕ-ն կարելի է այնպես ընտրել, որ լինի $|\phi(x)|\leq K$:

Ապացույց: Նախ ենթադրենք, որ f-ը սահմանափակ է՝ $|f(x)|\leq K$: m բնական թիվն ընտրենք այնպես, որ $K/m<\sigma$: Դիտարկենք հետևյալ բազմությունները՝

$$E_j=\left(x:\frac{j-1}{m}K\leq f(x)<\frac{j}{m}K\right), j=-m+1,-m+2,...,m,$$

$$E_m=\left(x:\frac{m-1}{m}K\leq f(x)<K\right):$$

Պարզ է, որ $E_i\cap E_j=0, i\neq j,$ և $\bigcup_{j=-m+1}^{m}E_j=[a,b]$: Յուրաքանչյուր j բնական թվի համար կառուցենք $F_j\subset E_j$ փակ բազմություն, այնպիսին, որ

$$mF_j > mE_j - \frac{\varepsilon}{2m}, \quad j = -m+1,....,m,$$

և նշանակենք $F = \bigcup_{j=-m+1}^{m} F_j$ ։ Պարզ է, որ $mF > b - a - \varepsilon$ ։ Դիտարկենք

հետևյալ ֆունկցիան՝ $\varphi(x) = \frac{j}{m} K, \quad x \in F_j, \quad j = -m+1,...,m$ ։

Լեմմ 2.12.1-ի համաձայն՝ φ ֆունկցիան F -ի վրա անընդհատ է։ Օգտվելով Լեմմ 2.12.2-ից՝ φ ֆունկցիան անընդհատ շարունակենք ամբողջ $[a,b]$ հատվածի վրա, այսինքն՝ կառուցենք $\phi \in C[a,b]$ ֆունկցիա հետևյալ հատկություններով՝ $\phi(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in F$, և $|\phi(x)| \le K$ ։ Ունենք՝

$$m(|f - \phi| \ge \sigma) = b - a - m(|f - \phi| < \sigma) \le b - a - m(|f - \varphi| < \sigma) < \delta \text{ ։}$$

Այսինքն՝ $\phi \in C[a,b]$ ֆունկցիան պահանջվողն է։

Եթե f -ը սահմանափակ չէ, ապա նախ, օգտվելով թեորեմ 2.12.1-ից, կկառուցենք g չափելի սահմանափակ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$m(f \ne g) < \varepsilon / 2, \tag{2.12.1}$$

այնուհետև կիրառելով թեորեմի արդեն ապացուցված մասը g ֆունկցիայի համար՝ կարող ենք գտնել $\phi_0 \in C[a,b]$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$m(|g - \phi_0| \ge \sigma) < \varepsilon / 2 \text{ ։} \tag{2.12.2}$$

Մնում է նկատել, որ

$$E(|f - \phi_0| \ge \sigma) \subset E(|g - \phi_0| \ge \sigma) \cup E(g \ne f)$$

և օգտվել (2.12.1), (2.12.2) անհավասարություններից։

Թեորեմն ապացուցված է։ □

Թեորեմ 2.12.3: $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր ցանկացած f ֆունկցիայի համար կարելի է կառուցել $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը այդ հատվածի վրա ըստ չափի զուգամիտում է f ֆունկցիային։

Ապացույց: Օգտվելով **թեորեմ 2.12.2**-ից՝ յուրաքանչյուր n բնական թվի համար կառուցենք $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$m\left(|\varphi_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}: \qquad (2.12.3)$$

Դիցուք՝ $\sigma>0$ ցանկացած թիվ է, և $n_0=[1/\sigma]+1$:

Հաշվի առնելով, որ

$$(|\varphi_n(x)-f(x)|\geq\sigma)\subset\left(|\varphi_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{n}\right),\quad n\geq n_0,$$

(2.12.3)- ից ստանում ենք՝ $m\left(|\varphi_n(x)-f(x)|\geq\sigma\right)<\dfrac{1}{n}$,

որտեղից $\lim\limits_{n\to\infty}m(|\varphi_n(x)-f(x)|\geq\sigma)=0$: Թեորեմն ապացուցված է: □

Վերջին թեորեմից Ռիսսի թեորեմի կիրառումով կհետևի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.12.4 (Ֆրեշե): $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր ցանկացած f ֆունկցիայի համար կարելի է կառուցել $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը այդ հատվածի վրա համարյա ամենուրեք զուգամիտում է f ֆունկցիային:

Ապացուցված թեորեմները հնարավորություն են տալիս ի հայտ բերելու չափելի ֆունկցիաների կառուցվածքային առանձնահատկությունները մեկնաբանող հետևյալ կարևոր արդյունքը:

Թեորեմ 2.12.5 (Լուզին): Դիցուք՝ f-ը $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիա է: Ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ φ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$m(f\neq\varphi)<\varepsilon,$$

ընդ որում՝ եթե $|f(x)|\le K$, ապա φ–ն կարելի է այնպես ընտրել, որ լինի $|\varphi(x)|\le K$:

Ապացույց: Օգտվելով **թեորեմ 4.1.4**-ից՝ կարող ենք կառուցել $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ $\{\varphi_n(x)\}$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը այդ հատվածի վրա համարյա ամենուրեք զուգամիտում է f ֆունկցիային: Այնուհետև, օգտվելով Եգորովի թեորեմից, կարող ենք գտնել $[a,b]$ հատվածի այնպիսի e փակ ենթաբազմություն, որ

ա. $me > b-a-\varepsilon$,

բ. e բազմության վրա զուգամիտությունը հավասարաչափ է:

Դժվար չէ համոզվել, որ e բազմության վրա f ֆունկցիան անընդհատ է, և $Ce<\varepsilon$: Թեորեմն ապացուցված է: □

Լուզինի թեորեմին կարելի է տալ նաև այսպիսի ձևակերպում:

Թեորեմ 2.12.6 (Լուզին): $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր f ֆունկցիայի արժեքները կարելի է փոխել ինչքան ասես փոքր չափ ունեցող բազմության վրա, այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածի վրա լինի անընդհատ:

§2.13. Չափելի, սահմանափակ ֆունկցիայի Լեբեգի ինտեգրալը

Ռիմանի իմաստով ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ կերպ: Դիտարկվում է $[a,b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան: Դիցուք՝ $\{x_n\}=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ այդ հատվածի որևէ տրոհում է: Վերցնելով յուրաքանչյուր $[x_k,x_{k+1}]$ միջակայքից մեկական $\overline{x}_k$ կետ՝ կազմըվում է հետևյալ գումարը՝

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x}_k)(x_{k+1}-x_k),$$

որը կոչվում է ինտեգրալային գումար: Եթե σ գումարները ունեն սահման, երբ $\lambda=\max(x_{k+1}-x_k)$ թվերը ձգտում են զրոյի անկախ տրոհման ձևից և $\overline{x}_k$ կետերի ընտրությունից, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի, և ինտեգրալը հավասար է այդ սահմանին: Երբեմն, ընդգծելու համար, որ այն Ռիմանի ինտեգրալ է, նշանակվում է հետևյալ ձևով՝

$$(R)\int_a^b f(x)dx:$$

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում, ապա այն Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի են նաև այն ֆունկցիաները, որոնք անընդհատ են $[a,b]$ միջակայքում, բացառությամբ այդ հատվածի վերջավոր թվով կետերի:

Պարզվում է, որ որպեսզի սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի Ռիմանի իմաստով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա խզման կետերի բազմությունը ունենա զրո չափ: Մասնավորաբար մոնոտոն սահմանափակ ֆունկցիաները ինտեգրելի են Ռիմանի իմաստով:

Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիաների բազմությունը կազմում է չափելի ֆունկցիաների բազմության բավականին նեղ դաս: Շատ պարզագույն չափելի ֆունկցիաներ, օրինակ Դիրիխլեի ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի չէ: Ինտեգրելի ֆունկցիաների բազմությունը ընդլայնելու համար Լեբեգի կողմից առաջարկվել է մի նոր մոտեցում, որի դեպքում բոլոր չափելի սահմանափակ ֆունկցիաները ինտեգրելի են: Կարևոր է նաև այն, որ եթե ֆունկցիան ինտեգրելի է Լեբեգի և Ռիմանի իմաստով, ապա այդ ինտեգրալները հավասար են:

Սահմանենք Լեբեգի ինտեգրալը սահմանափակ, չափելի ֆունկցիաների համար: Դիցուք՝ E չափելի բազմության վրա տրված է սահմանափակ $f(x)$ ֆունկցիան, և

$$A < f(x) < B: \tag{2.13.1}$$

$[A,B]$ հատվածը տրոհենք մասերի հետևյալ կերպ՝

$$A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B:$$

Յուրաքանչյուր կիսաբաց $[y_k, y_{k+1})$ միջակայքին համապատասխանեցնենք հետևյալ բազմությունը՝

$$e_k = \{x, y_k \le f(x) < y_{k+1}\}, k = 0,1,...,n-1:$$

Այդ բազմությունները ունեն հետևյալ հատկությունները՝

1. զույգ առ զույգ չեն հատվում,
2. չափելի են,

3. $E = \bigcup_{k=0}^{n-1} e_k$ ։

4. $m(E) = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$ ։

Ներմուծենք Լեբեգի ստորին և վերին գումարները՝

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k), \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} m(e_k) ։$$

Եթե $\lambda = \max(y_{k+1} - y_k)$, ստանում ենք՝

$$0 \le S - s \le \lambda m(E) ։ \qquad (2.13.2)$$

Լեմմ 2.13.1: Տրոհմանը նոր կետ ավելացնելիս ստորին գումարները չեն նվազում, վերին գումարները չեն աճում:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ $A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B$ տրված տրոհումն է, և s_0-ն նրա ստորին գումարն է: Դիցուք՝ ավելացրել ենք $\overline{y}$ կետը, և $\overline{y} \in (y_i, y_{i+1})$ ։ Այս տրոհման ստորին գումարը նշանակենք s_1 ։ Նոր տրոհման ստորին գումարը կազմված կլինի նախորդ ստորին գումարի նույն գումարելիներից, բացառությամբ $y_i m(e_i)$ գումարելին, որը կփոխարինվի $y_i m(e_i^{(1)}) + \overline{y} m(e_i^{(2)})$ գումարով, որտեղ

$$e_i^{(1)} = \{x, y_i \le f(x) < \overline{y}\}, \; e_i^{(2)} = \{x, \overline{y} \le f(x) < y_{i+1}\}, ։$$

Քանի որ

$$y_i m(e_i) = y_i m(e_i^{(1)} \cup e_i^{(2)}) = y_i m(e_i^{(1)}) + y_i m(e_i^{(2)}) \le y_i m(e_i^{(1)}) + \overline{y} m(e_i^{(2)}),$$

ստանում ենք $s_0 \le s_1$ ։ Նման ձևով ապացուցվում է, որ վերին գումարները չեն աճում: □

Հետևանք: Եթե տրոհմանը ավելացնենք վերջավոր թվով կետեր, ապա ստորին գումարները չեն նվազի, վերին գումարները չեն աճի:

Լեմմ 2.13.2: Դիցուք՝ R_1-ը և R_2-ը $[A,B]$ միջակայքի երկու տարբեր տրոհումներ են: s_1-ով, S_1-ով նշանակենք R_1-ի և s_2-ով, S_2-ով՝ R_2-ի ստորին և վերին գումարները: Այդ դեպքում $s_1 \le S_2$:

Այսինքն՝ ցանկացած տրոհման ստորին գումար մեծ չէ մեկ այլ տրոհման վերին գումարից:

Ապացույց: Վերցնենք $R = R_1 + R_2$ տրոհումը և նշանակենք s-ով, S-ով R տրոհման ստորին և վերին գումարները: Օգտվելով լեմմի հետևանքից՝ կստանանք՝

$$s_1 \le s \le S \le S_2 :$$

Լեմմն ապացուցվեց: □

Վերցնենք որևէ տրոհման վերին S_0 գումար: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ ցանկացած ստորին գումար փոքր է կամ հավասար S_0-ին: Այսինքն՝ $\{s\}$-ը՝ ստորին գումարների բազմությունը, սահմանափակ է վերևից: Դիցուք՝ U-ն $\{s\}$ բազմության ճշգրիտ վերին եզրն է՝ $U = \sup\{s\}$: Պարզ է, որ

$$U \le S_0 :$$

Քանի որ S_0-ն կամայական վերին գումար է, վերջին անհավասարությունից հետևում է, որ վերին գումարների բազմությունը սահմանափակ է ներքևից: Դիցուք՝

$$V = \inf\{S\} :$$

Ցանկացած տրոհման դեպքում ստանում ենք $s \le U \le V \le S$: Ըստ (2.13.2)-ի՝ ստանում ենք $0 \le S - s \le \lambda m(E)$, որտեղից $0 \le V - U \le \lambda m(E)$: Քանի որ λ-ն ցանկացած դրական թիվ է, ապա

$$U = V :$$

Սահմանում 2.13.1: U-ի և V-ի ընդհանուր արժեքը կոչվում է E բազմության վրա $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ Լեբեգի իմաստով և նշանակվում է հետևյալ կերպ՝

$$(L)\int_E f(x)dx :$$

Հաճախ օգտագործվում է ավելի պարզ նշանակում՝ $\int_E f(x)dx$, եթե բացառվում է այլ տեսքի ինտեգրալների հետ շփոթելու պահը:

Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ ցանկացած սահմանափակ չափելի ֆունկցիա ինտեգրելի է Լեբեգի իմաստով:

Թեորեմ 2.13.1: Եթե $\lambda \to 0$, ապա ստորին և վերին գումարները ձգտում են $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալին՝

$$\int_E f(x)dx :$$

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է հետևյալ անհավասարություններից՝

$$s \le \int_E f(x)dx \le S, \quad S - s \le \lambda m(E) : \square$$

Լեբեգի ինտեգրալի սահմանման մեջ մասնակցում էին նաև A և B թվերը: Այս թեորեմից հետևում է, որ ինտեգրալի արժեքը կախված չէ A-ի և B-ի ընտրությունից: Իրոք, դիցուք՝

$$A < f(x) < B, \quad A < f(x) < B_1,$$

ընդ որում՝ $B_1 < B$: Դիտարկենք $[A, B]$-ի որևէ տրոհում՝

$$A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B,$$

համարելով, որ B_1-ը այդ տրոհման կետ է, և $B_1 = y_m$: Ստանում ենք $e_k = \varnothing, k \ge m$, և $m(e_k) = 0, k \ge m$: Այսպիսով՝

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k m(e_k) = s^*,$$

որտեղ s^*-ը ստորին գումար է՝ տարածված $[A, B_1]$ հատվածով: Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, ստանում ենք

$I = I^*$, որտեղ I-ն և I^*-ն Լեբեգի ինտեգրալներն են՝ տարածված համապատասխանաբար $[A, B]$ և $[A, B_1]$ միջակայքերով: Նման ձևով ապացուցվում է, որ A-ի փոփոխման դեպքում ինտեգրալի արժեքը չի փոխվում: $\square$

§2.14. Լեբեգի ինտեգրալի հիմնական հատկությունները

Թեորեմ 2.14.1: Դիցուք՝ $f(x)$-ը չափելի սահմանափակ ֆունկցիա է՝ որոշված E բազմության վրա, և $a < f(x) < b$: Այդ դեպքում

$$am(E) \le \int_E f(x)dx \le bm(E): \qquad (2.14.1)$$

Այս թեորեմը կոչվում է միջին արժեքի թեորեմ:

Ապացույց: Դիցուք՝ $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$-ն որևէ տրոհում է: Ստանում ենք՝

$$a\sum_{k=0}^{n-1} m(e_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k) \le b\sum_{k=0}^{n-1} m(e_k),$$

կամ

$$a\,m(E) \le s \le b\,m(E):$$

Անցնելով սահմանի՝ կստանանք (2.14.1)-ը: □

Հետևանք 1: Դիցուք՝ $f(x)$-ը չափելի սահմանափակ ֆունկցիա է՝ որոշված E բազմության վրա, և $a \le f(x) \le b$: Այդ դեպքում տեղի ունի (2.14.1)-ը:

Իրոք, ցանկացած բնական m-ի համար ունենք

$$a - \frac{1}{m} < f(x) < b + \frac{1}{m}:$$

Ըստ թեորեմի՝

$$\left(a - \frac{1}{n}\right) m(E) \le \int_E f(x)dx \le \left(b - \frac{1}{n}\right) m(E):$$

Քանի որ n-ը կամայական բնական թիվ է, ստանում ենք (2.14.1)-ը:

Հետևանք 2: Եթե $f(x)$-ը հաստատուն է E բազմության վրա, և $f(x) = c$, ապա

$$\int_E f(x)dx = c\,m(E):$$

Հետևանք 3: Եթե $f(x)$-ը ոչ բացասական (ոչ դրական) է, ապա այդպիսին է նաև նրա ինտեգրալը՝

$$\int_E f(x)dx \geq 0 \quad \left(\int_E f(x)dx \leq 0\right) \int_E f(x)dx \geq 0 \ :$$

Հետևանք 4: Եթե $m(E) = 0$ և $f(x)$ -ը կամայական սահմանափակ ֆունկցիա է՝ որոշված այդ բազմության վրա, ապա

$$\int_E f(x)dx :$$

Թեորեմ 2.14.2: Դիցուք՝ $f(x)$ սահմանափակ չափելի ֆունկցիան որոշված է E բազմության վրա, և E բազմությունը ներկայացված է վերջավոր թվով կամ հաշվելի բազմությամբ իրար հետ չհատվող չափելի բազմությունների գումարի տեսքով՝

$$E = \bigcup_k E_k \ :$$

Այդ դեպքում

$$\int_E f(x)dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)dx :$$

Ինտեգրալի այս հատկությունը կոչվում է ադիտիվության կամ հաշվելի ադիտիվության հատկություն:

Ապացույց: Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, և ցույց տանք, որ

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx : \qquad (2.14.2)$$

Դիցուք՝ $A < f(x) < B$ և $A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$ -ն որևէ տրոհում է: Կազմենք

$$e_k = \{x : y_k \leq f(x) < y_{k+1}, x \in E\},$$

$$e_k^{(1)} = \{x : y_k \leq f(x) < y_{k+1}, x \in E_1\},$$

$$e_k^{(2)} = \{x : y_k \leq f(x) < y_{k+1}, x \in E_2\},$$

բազմությունները: Պարզ է, որ

$$e_k = e_k^{(1)} \cup e_k^{(2)}, e_k^{(1)} \cap e_k^{(2)} = \varnothing, m(e_k) = m(e_k^{(1)}) + m(e_k^{(2)}),$$

և

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k^{(1)}) + \sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k^{(2)}) :$$

Այս հավասարության ձախ կողմը ինտեգրալային գումար է՝ տարածված E բազմությունով, իսկ աջ կողմում ինտեգրալային գումարներ են՝ տարածված E_1-ով և E_2-ով: Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, ստանում ենք (2.14.2) հավասարությունը:

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից՝ (2.14.2) հավասարությունը կարելի է տարածել ցանկացած վերջավոր բազմությունների դեպքում:

Այժմ ապացուցենք հաշվելի ադիտիվությունը: Նախ նկատենք, որ ըստ չափի հաշվելի ադիտիվության (թեորեմ 2.8.1)՝

$$m(E) = \sum_{k=0}^{\infty} m(E_k) :$$

E բազմությունը ներկայացնենք հետևյալ ձևով՝

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N \cup R_N ,$$

որտեղ $R_N = E_{N+1} \cup E_{N+2} \cup \ldots$: Կիրառելով (2.14.2) հավասարությունը վերջավոր թվով $E, E_1, E_2, \ldots, E_N, R_N$ բազմությունների նկատմամբ (վերջավոր ադիտիվություն)՝ կստանանք՝

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} f(x)dx + \int_{R_N} f(x)dx :$$

Ըստ միջին արժեքի թեորեմի (թեորեմ 2.14.1)՝

$$Am(R_N) \le \int_{R_N} f(x)dx \le Bm(R_N) :$$

Քանի որ $m(R_N) \to 0$, երբ $N \to \infty$, ստանում ենք՝

$$\int_{R_N} f(x)dx \to 0 :$$

Այստեղից հետևում է հավասարությունը՝

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx :$$

Թեորեմն ապացուցվեց:

Հետևանք 1: Եթե $f(x)=0$ համարյա ամենուրեք, ապա

$$\int_E f(x)dx=0:$$

Ապացույց: Դիցուք՝ $E_1=\{x: f(x)=0\}, E_2=E\setminus E_1, m(E_2)=0$, և $E=E_1\cup E_2$, օգտվելով ինտեգրալի ադիտիվությունից (թեորեմ 2.14.2)՝ ստանում ենք՝

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx:$$

Թեորեմ (2.14.1)-ի 2-րդ և 4-րդ հետևանքներից ստանում ենք՝

$$\int_{E_1} f(x)dx=\int_{E_2} f(x)dx=0:$$

Հետևաբար՝

$$\int_E f(x)dx=0: \square$$

Հետևանք 2: Եթե E բազմության վրա որոշված $f_1(x)$ և $f_2(x)$ չափելի սահմանափակ ֆունկցիաները համարժեք են, ապա

$$\int_E f_1(x)dx=\int_E f_2(x)dx:$$

Օրինակ 1: Դիրիխլեի ֆունկցիան ցանկացած $[a,b]$ միջակայքում համարյա ամենուրեք հավասար է զրոյի և հետևաբար

$$\int_a^b D(x)dx=0:$$

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $f(x)$-ը պարզ չափելի ֆունկցիա է և ընդունում է $y_1,y_2,\ldots,y_N$ արժեքները: Եթե $E_k=\{x: f(x)=y_k\}$, ապա

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{N} y_k m(E_k):$$

Իրոք, $E=E_1+E_2+\ldots+E_N$, և ըստ ինտեգրալի վերջավոր ադիտիվության՝

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} y_k m(E_k):$$

Օրինակ 3: Դիցուք՝ $f(x)$ -ը սահմանափակ, չափելի ֆունկցիա է և ընդունում է հաշվելի թվով արժեքներ՝ $y_1, y_2, ..., y_N, ...,$ և $E_k = \{x : f(x) = y_k\}$, ապա

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} y_k m(E_k):$$

Ապացույցը հետևում է ինտեգրալի հաշվելի ադիտիվությունից:

Թեորեմ 2.14.3: Դիցուք՝ $f(x)$ և $F(x)$ ֆունկցիաները որոշված են E բազմության վրա, չափելի են ու սահմանափակ: Այդ դեպքում

$$\int_E (f(x) + F(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E F(x)dx: \quad (2.14.3)$$

Ապացույց: Դիցուք՝ $a < f(x) < b$, $A < F(x) < B$: Կատարենք համապատասխան տրոհումներ և նշանակումներ՝

$$a = y_0 < y_1 < ... < y_n = b, \;\; e_k = \{x : y_k \le f(x) < y_{k+1}\},$$

$$A = Y_0 < Y_1 < ... < Y_N = B, \;\; E_k = \{x : Y_k \le F(x) < Y_{k+1}\},$$

$$T_{i,k} = E_i \cap e_k, \quad (i = 0,1,..., N-1; k = 0,1,..., n-1):$$

Պարզ է, որ $e_k \cap e_j = \varnothing, E_k \cap E_j = \varnothing, k \ne j, E = \bigcup_{i,k} T_{i,k}$ և $T_{i,k}$ բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում: Օգտվելով ինտեգրալի վերջավոր ադիտիվությունից՝ ստանում ենք՝

$$\int_E (f(x) + F(x))dx = \sum_{i,k} \int_{T_{i,k}} (f(x) + F(x))dx:$$

Նկատենք, որ եթե $x \in T_{i,k}$, ապա

$$Y_i + y_k \le F(x) + f(x) \le Y_{i+1} + y_{k+1},$$

և ըստ միջին արժեքի թեորեմի (թեորեմ 2.14.1)՝

$$(Y_i + y_k)m(T_{i,k}) \le \int_{T_{i,k}} (F(x) + f(x))dx \le (Y_{i+1} + y_{k+1})m(T_{i,k}): \quad (2.14.4)$$

Քանի որ

$$e_k = \bigcup_{i=0}^{n-1} T_{i,k}\ ,\ E_i = \bigcup_{k=0}^{N-1} T_{i,k}\ ,$$

գումարելով ըստ i-ի՝

$$y_k m(e_k) + \sum_{i=0}^{N-1} Y_i m(T_{i,k}) \le \sum_{i=0}^{N-1} \int_{T_{i,k}} (F(x)+f(x))dx \le y_{k+1} m(e_k) + \sum_{i=0}^{N-1} Y_{i+1} m(T_{i,k}),$$

հետո ըստ k-ի (2.14.4) անհավասարությունները՝ կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m(e_k) + \sum_{i=0}^{N-1} Y_i m(T_{i,k}) \le \int_E (F(x)+f(x))dx \le \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} m(e_k) + \sum_{i=0}^{N-1} Y_{i+1} m(T_{i,k}):$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, ստանում ենք (2.14.3) հավասարությունը: □

Թեորեմ 2.14.4: Դիցուք՝ $f(x)$ **սահմանափակ, չափելի ֆունկցիան որոշված է** E **բազմության վրա, և** c**-ն որևէ իրական թիվ է: Այդ դեպքում**

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx: \qquad (2.14.5)$$

Ապացույց: Եթե $c=0$, (2.14.5)-ը ակնհայտ է: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $c>0$: Վերցնենք ցանկացած տրոհում՝

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B\,,$$

և նշանակենք $e_k = \{x : y_k \le f(x) < y_{k+1}\}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$: Ըստ ինտեգրալի ադիտիվության՝

$$\int_E cf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{e_k} f(x)dx:$$

Սակայն e_k բազմության վրա $cy_k \le cf(x) < cy_{k+1}$, և ըստ միջին արժեքի թեորեմի՝

$$cy_k m(e_k) \le \int_{e_k} cf(x)dx \le cy_{k+1} m(e_k), \quad k = 0,1,\ldots,n-1:$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք՝

$$cs \le \int_E cf(x)dx \le cS,$$

որտեղ s-ը և S-ը Լեբեգի համապատասխանաբար ստորին և վերին գումարներն են: Անցնելով սահմանի վերջին անհավասարության մեջ, երբ $\lambda \to 0$, ստանում ենք թեորեմի ապացույցը, երբ $c > 0$:

Դիցուք՝ $c < 0$: Այդ դեպքում օգտվելով հետևյալ հավասարությունից՝

$$0 = \int_E [cf(x) + (-c)f(x)]dx = \int_E cf(x)dx + (-c)\int_E f(x)dx,$$

ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Հետևանք 1: Եթե $f(x)$ և $F(x)$ ֆունկցիաները որոշված են E բազմության վրա, չափելի են ու սահմանափակ, ապա

$$\int_E (f(x) - F(x))dx = \int_E f(x)dx - \int_E F(x)dx:$$

Հետևանք 2: Դիցուք՝ $f(x)$ և $F(x)$ ֆունկցիաները որոշված են E բազմության վրա, չափելի են ու սահմանափակ: Եթե $f(x) \le F(x)$, ապա

$$\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx:$$

Իրոք, ըստ նախորդ հետևանքի՝

$$\int_E F(x)dx - \int_E f(x)dx = \int_E (F(x) - f(x))dx \ge 0,$$

քանի որ $F(x) - f(x) \ge 0$:

Թեորեմ 2.14.5: Դիցուք՝ $f(x)$ չափելի և սահմանափակ ֆունկցիան որոշված է E բազմության վրա: Այդ դեպքում

$$|\int_E f(x)dx| \le \int_E |f(x)|dx:$$

Ապացույց: Դիցուք՝

$$E_1 = \{x, f(x) \ge 0\}, \quad E_2 = \{x, f(x) < 0\}:$$

Հետևաբար՝

$$|\int_E f(x)dx| \le \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx = \int_{E_1} |f(x)|dx - \int_{E_2} |f(x)|dx,$$

և

$$\int_E |f(x)|dx \int_{E_1} |f(x)|dx + \int_{E_2} |f(x)|dx:$$

Թեորեմի ապացույցը հետևում է $|a-b|\le a+b, \quad \forall a\ge 0, \forall b\ge 0,$ անհավասարությունից: □

§2.15. Սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի է, որ եթե $f_n(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականությունը $[a,b]$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx: \qquad (2.15.1)$$

Այսինքն՝ սահմանային անցումը կարելի է տանել ինտեգրալի նշանի տակ: Եթե $f_n(x)$ ը ձգտում է $f(x)$ -ին ոչ հավասարաչափ, ապա (2.15.1) հավասարությունը հնարավոր է, որ տեղի չունենա: Օրինակ՝

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, & x\in\{0\}\cup[\frac{1}{n},1],\\ 2n, & x=\frac{1}{2n},\\ L(x), & x\in[0,\frac{1}{2n}]\cup[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}],\end{cases}$$

որտեղ $L(x)$ -ը այնպիսի գծային ֆունկցիա է $[0,\frac{1}{2n}]$ և $[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]$ հատվածների վրա, որ $f_n(x)$ ֆունկցիաները լինեն անընդհատ $[0;1]$ հատվածում: Հեշտ է ստուգել, որ $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)\to 0$: Սակայն

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\ne\int_0^1\lim_{n\to\infty} f(x)dx:$$

Իրոք, ցանկացած n -ի դեպքում

$$\int_0^1 f_n(x)dx=2n\frac{1}{2n}=1:$$

Թեորեմ (2.15.1) (Լեբեգ): Դիցուք՝ E **բազմության վրա որոշված չափելի սահմանափակ ֆունկցիաների** $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է** $F(x)$ **չափելի ֆունկցիային՝** $(f_n(x) \Rightarrow F(x), x \in E)$**: Եթե գոյություն ունի** C **դրական թիվ, այնպես, որ** $|f_n(x)| < C, \forall x \in E$**, ապա**

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx: \qquad (2.15.2)$$

Այսինքն՝ սահմանային անցումը կարելի է. սահմանը կարելի է տանել ինտեգրալի նշանի տակ:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ ըստ Ռիսի թեորեմի (թեորեմ 2.11.4)՝ համարյա բոլոր $x \in E$ կետերի համար տեղի ունի $|F(x)| \le C$ անհավասարությունը: Դիցուք՝ $\sigma > 0$, և դիտարկենք հետևյալ բազմությունները՝

$$A_n(\sigma) = \{x, |f_n(x) - F(x)| > \sigma\},\ B_n(\sigma) = \{x, |f_n(x) - F(x)| < \sigma\}:$$

Քանի որ $f_n(x) \Rightarrow F(x)$, ապա

$$m(A_n(\sigma)) \underset{n\to\infty}{\to} 0: \qquad (2.15.3)$$

Բավական է ցույց տալ, որ

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0:$$

Նկատենք, որ

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| \le \int_E |f_n(x) - F(x)|\, dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\, dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\, dx:$$

Քանի որ h.ա. $|f_n(x) - F(x)| \le 2C$, ապա

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\, dx \le 2C \int_{A_n(\sigma)} dx = 2Cm(A_n(\sigma)):$$

Ըստ միջին արժեքի թեորեմի՝

$$\int\limits_{B_n(\sigma)} | f_n(x) - F(x) | \, dx \le \sigma \int\limits_{B_n(\sigma)} dx \le \sigma m(E):$$

Արդյունքում ստանում ենք՝

$$\left| \int\limits_E f_n(x) dx - \int\limits_E F(x) dx \right| \le 2Cm(A_n(\sigma)) + \sigma m(E): \quad (2.15.4)$$

Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$ կամայական դրական թիվ է: $\sigma > 0$ վերցնենք այնպես, որ տեղի ունենա $\sigma m(E) < \frac{\varepsilon}{2}$: Ամրագրելով այդ σ-ն և օգտվելով (2.15.3)-ից՝ կարող ենք ասել, որ գոյություն ունի բնական N, այնպես, որ կամայական $n > N$ թվի համար

$$2Cm(A_n(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{2}:$$

$\forall n > N$ դեպքում (2.15.4)-ից ստանում ենք՝

$$\left| \int\limits_E f_n(x) dx - \int\limits_E F(x) dx \right| \le \varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է թեորեմը: □

Հետևանք: Դիցուք՝ $[a,b]$ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ցանկացած $x \in [a,b]$ կետում զուգամիտում է $F(x)$ ֆունկցիային և հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x) dx = \int\limits_E F(x) dx$:

Ապացույցը հետևում է նախորդ թեորեմից, քանի որ կետային զուգամիտությունից հետևում է ըստ չափի զուգամիտությունը ($f_n(x) \Rightarrow F(x)$):

§2.16. Ոչ բացասական չափելի ֆունկցիայի ինտեգրալ

Դիցուք՝ $f(x)$-ը որևէ չափելի ֆունկցիա է՝ որոշված E բազմության վրա, և $f(x)\geq 0$: Ցանկացած բնական N-ի համար նշանակենք

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\leq N, \\ N, & f(x)>N: \end{cases}$$

Պարզ է, որ $f_N(x)$-ը սահմանափակ, չափելի ֆունկցիա է: Իրոք, սահմանափակությունը անմիջապես հետևում է սահմանումից, իսկ չափելիությունը՝ հետևյալ հավասարությունից՝

$$(f_N>a)=\begin{cases} (f>a), & a\leq N, \\ \varnothing, & a>N: \end{cases}$$

$f_N(x)$ ֆունկցիաները կազմում են մոնոտոն հաջորդականություն՝

$$f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_3(x)\leq\ldots,$$

և ուրեմն

$$\int_E f_1(x)dx\leq\int_E f_2(x)dx\leq\int_E f_3(x)dx\leq\ldots,$$

հետևաբար գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ սահմանը՝

$$\lim_{N\to\infty}\int_E f_N(x)dx: \qquad (2.16.1)$$

Սահմանում 2.16.1: (2.16.1) սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ ըստ E բազմության և նշանակվում է հետևյալ կերպ՝

$$\int_E f(x)dx:$$

Եթե այդ ինտեգրալը վերջավոր է, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է L-ինտեգրելի կամ հանրագումարելի:

Օրինակ: Դիցուք՝ $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, $x\in(0,1]$: Ստանում ենք՝

$$f_N(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha}, & x\geq N^{-1/\alpha}, \\ N, & x<N^{-1/\alpha}, \end{cases}$$

և եթե $\alpha\neq 1$,

$$\int_0^1 f_N(x)dx = \int_{N^{-1/\alpha}}^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_0^{N^{-1/\alpha}} Ndx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Bigg|_{N^{-1/\alpha}}^{1} + NN^{-\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - N^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) + N^{1-\frac{1}{\alpha}}:$$

Այժմ, եթե $\alpha < 1$, ստացված արտահայտությունը ունի վերջավոր սահման, երբ $N \to \infty$: Ստացվեց՝ $\alpha < 1$ դեպքում $f(x)$-ը հանրագումարելի է: Եթե $\alpha > 1$, համոզվում ենք, որ $f(x)$-ը հանրագումարելի չէ: Երբ $\alpha = 1$, ստանում ենք՝

$$f_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \geq N^{-1}, \\ N, & x < N^{-1}, \end{cases}$$

$$\int_0^1 f_N(x)dx = \int_{1/N}^1 \frac{dx}{x} + \int_0^{1/N} Ndx = -\ln\frac{1}{N} + N\frac{1}{N} = 1 + \ln N \underset{N\to\infty}{\to} \infty:$$

$\alpha = 1$ դեպքում $f(x)$-ը հանրագումարելի չէ:

Նկատենք, որ եթե $f(x)$-ը սահմանափակ է, ապա այսպես սահմանված ինտեգրալը համընկնում է սահմանափակ ֆունկցիայի մեզ հայտնի ինտեգրալին: Իրոք, բավականաչափ մեծ N-ի դեպքում $f_N(x) = f(x)$:

Սահմանումից անմիջապես հետևում են հանրագումարելի ֆունկցիաների հետևյալ հատկությունները:

Հատկություն 1: Եթե $m(A) = 0$, ապա այդ բազմության վրա որոշված ցանկացած ֆունկցիա հանրագումարելի է, և

$$\int_E f(x)dx = 0:$$

Հատկություն 2: Եթե E բազմության վրա որոշված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները համարժեք են, ապա

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx:$$

Հատկություն 3: Եթե $f(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիան որոշված է E բազմության վրա, և E_0-ն E-ի որևէ չափելի ենթաբազմություն է, ապա

$$\int_{E_0} f(x)dx \le \int_E f(x)dx:$$

Հատկություն 4: Եթե $f(x)$ և $F(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիաները որոշված են E բազմության վրա, և $f(x) \le F(x)$, ապա

$$\int_E f(x)dx \le \int_E F(x)dx:$$

Հատկություն 5: Եթե $f(x)$ ոչ բացասական ֆունկցիան որոշված է E բազմության վրա, և $\int_E f(x)dx = 0$, ապա $f(x)$-ը համարժեք է զրոյի:

Թեորեմ 2.16.1: Եթե $f(x)$ ոչ բացասական չափելի ֆունկցիան հանրագումարելի է, ապա այն համարյա ամենուրեք վերջավոր է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $A = \{x, f(x) = +\infty\}$: Ցանկացած N-ի դեպքում $f_N(x) = N, x \in A,$ այնպես, որ

$$\int_E f_N(x)dx \ge \int_A f_N(x)dx = Nm(A):$$

Եթե $m(A) > 0$, ապա $\int_E f_N(x)dx$ ինտեգրալը N-ի անվերջ աճելու դեպքում կձգտի անվերջի, ինչը հակասում է $f(x)$ ֆունկցիայի հանրագումարելիությանը: □

Թեորեմ 2.16.2: Եթե E բազմության վրա որոշված $f(x)$-ը և $g(x)$-ը ոչ բացասական չափելի ֆունկցիաներ են, ապա

$$\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx:$$

Մասնավորաբար եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները հանրագումարելի են, ապա հանրագումարելի է նաև $f(x) + g(x)$ ֆունկցիան:

Ապացույց: Քանի որ ցանկացած N -ի դեպքում

$$f_N(x)+g_N(x)\le f(x)+g(x),$$

ապա

$$\int_E f_N(x)dx+\int_E g_N(x)dx\le\int_E (f(x)+g(x))dx:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $N\to\infty$, կստանանք՝

$$\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx\le\int_E (f(x)+g(x))dx: \qquad (2.16.2)$$

Հակառակը ապացուցելու համար նկատենք, որ

$$(f+g)_N(x)\le f_N(x)+g_N(x): \qquad (2.16.3)$$

Ինտեգրելով (2.16.3)-ը՝ ստանում ենք՝

$$\int_E (f+g)_N(x)dx\le\int_E f_N(x)dx+\int_E g_N(x)dx:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $N\to\infty$, կստանանք՝

$$\int_E (f(x)+g(x))dx\le\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx: \qquad (2.16.4)$$

Համեմատելով (2.16.2)-ը և (2.16.4)-ը՝ ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Թեորեմ 2.16.3: Եթե $f(x)$ -ը ոչ բացասական չափելի ֆունկցիա է E բազմության վրա, ապա ցանկացած իրական $a\ge 0$ թվի համար

$$\int_E af(x)dx=a\int_E f(x)dx:$$

Մասնավորաբար եթե $f(x)$ -ը հանրագումարելի է, ապա հանրագումարելի է նաև $af(x)$ -ը:

Ապացույց: Թեորեմը ակնհայտ է, եթե $a=0$: Եթե a-ն բնական թիվ է, այն հետևում է նախորդ թեորեմից: Քանի որ ցանկացած բնական m -ի դեպքում ըստ նույն թեորեմի

$$\int_E f(x)dx=m\int_E \frac{1}{m}f(x)dx,$$

ստանում ենք՝

$$\frac{1}{m}\int_E f(x)dx=\int_E \frac{1}{m} f(x)dx:$$

Այստեղից հետևում է, որ թեորեմը ճիշտ է ցանկացած ռացիոնալ a թվի դեպքում: Այժմ ենթադրենք՝ a-ն դրական իռացիոնալ թիվ է: Վերցնենք դրական r և R ռացիոնալ թվերը այնպես, որ տեղի ունեն $r<a<R$: Ըստ 2.16. պարագրաֆի 4-րդ հատկության՝

$$r\int_E f(x)dx\le\int_E af(x)dx\le R\int_E f(x)dx:$$

Անցնելով սահմանի, երբ r-ը և R-ը ձգտում են a-ին, ստանում ենք թեորեմը ցանկացած իռացիոնալ թվի դեպքում: □

Թեորեմ 2.16.4: Դիցուք՝ $f(x)$ սահմանափակ չափելի ֆունկցիան որոշված է E բազմության վրա, և E բազմությունը ներկայացված է վերջավոր թվով կամ հաշվելի բազմությամբ իրար հետ չհատվող չափելի բազմությունների գումարի տեսքով՝

$$E=\bigcup_k E_k\ ,$$

այդ դեպքում

$$\int_E f(x)dx=\sum_k\int_{E_k} f(x)dx:$$

Ինտեգրալի այս հատկությունը կոչվում է ադիտիվության կամ հաշվելի ադիտիվության հատկություն:

Դիցուք՝ $f(x)$-ը հանրագումարելի ֆունկցիա է:

$$E_n^*=\bigcup_{k=n+1}^{\infty}E_k$$

$$F_k(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E_k, \\ 0, & x\notin E_k, \end{cases}\quad R_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E_n^*, \\ 0, & x\notin E_n^*: \end{cases}$$

Ստանում ենք՝

$$f(x)=F_1(x)+F_2(x)+\ldots+F_n(x)+R_n(x),$$

և ըստ թեորեմ **2.16.2**-ի՝

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} F_k(x)dx + \int_{E_n^*} R_n(x)dx :$$

Քանի որ $R_n(x) \le f(x)$, ապա

$$\int_{E_n^*} R_n(x)dx \le \int_E f(x)dx ,$$

և վերջին հավասարությունից հետևում է, որ ցանկացած n -ի համար

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} F_k(x)dx \le \int_E f(x)dx ,$$

հետևաբար $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} F_k(x)dx$ շարքը զուգամետ է, և

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} F_k(x)dx \le \int_E f(x)dx : \qquad (2.16.5)$$

Այժմ ապացուցենք հակառակը: Դիցուք՝ ε-ը որևէ դրական թիվ է: Քանի որ

$$\lim_{N\to\infty} \int_E f_N(x)dx = \int_E f(x)dx ,$$

գոյություն ունի N բնական թիվ այնպես, որ

$$\int_E f_N(x)dx > \int_E f(x)dx - \varepsilon :$$

Ըստ սահմանափակ ֆունկցիայի ինտեգրալի հաշվելի ադիտիվության՝

$$\int_E f_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_N(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx ,$$

և ըստ նախորդ անհավասարության՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx \ge \int_E f(x)dx - \varepsilon :$$

Քանի որ ε-ը կամայական դրական թիվ է,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx \ge \int_E f(x)dx : \qquad (2.16.6)$$

Համեմատելով վերջին անհավասարությունը (2.16.5)-ի հետ՝ ստանում ենք թեորեմը հանրագումարելի ֆունկցիայի դեպքում: Եթե $f(x)$ -ը հանրագումարելի չէ, ապա

$$\int_E f(x)dx = \infty ,$$

ըստ (2.16.6)-ի՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx = \infty :$$

Թեորեմը լրիվ ապացուցված է: □

§2.17. Հանրագումարելի ֆունկցիաներ

Այժմ ենթադրենք՝ $f(x)$ -ը կամայական չափելի ֆունկցիա է՝ որոշված E չափելի բազմության վրա: Նշանակենք

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0, \\ 0, & f(x) > 0 : \end{cases}$$

Այս ֆունկցիաները չափելի և ոչ բացասական են E բազմության վրա, այնպես, որ գոյություն ունեն հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int_E f_+(x)dx , \int_E f_-(x)dx$$

վերջավոր կամ անվերջ:

Սահմանում 2.17.1: Եթե $f_+(x)$ և $f_-(x)$ ֆունկցիաներից գոնե մեկը հանրագումարելի է E բազմության վրա, ապա

$$\int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

տարբերությունը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի Լեբեգի ինտեգրալ ըստ E բազմության և նշանակվում է

$$\int_E f(x)dx : \tag{2.17.1}$$

Հեշտ է նկատել որ Լեբեգի ինտեգրալի սահմանումը կամայական ֆունկցիայի դեպքում չի հակասում սահմանափակ և ոչ բացասական ֆունկցիաներից ինտեգրալների սահմանմանը:

Նկատենք նաև հետևյալը. որպեսզի գոյություն ունենա (2.17.1) ինտեգրալը և լինի վերջավոր, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $f_+(x)$ և $f_-(x)$ ֆունկցիաները լինեն հանրագումարելի:

Սահմանում 2.17.2: $f(x)$-ը կոչվում է հանրագումարելի կամ ինտեգրելի, եթե գոյություն ունի վերջավոր (2.17.1) ինտեգրալը: Ընդ որում՝

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx : \qquad (2.17.2)$$

Հանրագումարելի կամ ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը սովորաբար նշանակվում է $L(E)$ կամ ուղղակի L:

Թեորեմ 2.17.1: Որպեսզի $f(x)$ չափելի ֆունկցիան լինի հանրագումարելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ լինի հանրագումարելի $|f(x)|$ ֆունկցիան: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|\, dx :$$

Ապացույց: Նկատենք, որ $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, և հետևաբար՝

$$\int_E |f(x)|\, dx = \int_E f_+(x)dx + \int_E f_-(x)dx :$$

Այստեղից հետևում է թեորեմի ապացույցը: □

Այս թեորեմից հետևում է.

1. Հանրագումարելի ֆունկցիան համարյա ամենուրեք վերջավոր է:

2. Եթե $m(E) = 0$, ապա E բազմության վրա որոշված ցանկացած ֆունկցիա հանրագումարելի է, և

$$\int_E f(x)dx = 0 :$$

3. Եթե $f(x)$-ը հանրագումարելի է E բազմության վրա, ապա այն հանրագումարելի է նրա ցանկացած չափելի ենթաբազմության վրա:

4. Դիցուք՝ $f(x)$-ը և $F(x)$-ը չափելի ֆունկցիաներ են E բազմության վրա, և $|f(x)| \leq F(x)$: Այդ դեպքում, եթե հանրագումարելի է $F(x)$ ֆունկցիան, ապա հանրագումարելի է նաև $f(x)$-ը:

5. Դիցուք՝ $f(x)$-ը և $F(x)$-ը համարժեք են: Այդ դեպքում հետևյալ երկու՝

$$\int_E f(x)dx, \int_E F(x)dx$$

ինտեգրալներից մեկը եթե գոյություն ունի, ապա գոյություն ունի նաև մյուսը, և դրանք իրար հավասար են: □

Թեորեմ 2.17.2: Դիցուք՝ E-ն զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող չափելի բազմությունների գումար է՝

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k :$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան հանրագումարելի է յուրաքանչյուր E_k բազմության վրա, ապա այն հանրագումարելի է E բազմության վրա, և

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)dx,$$

այսինքն՝ ինտեգրալը վերջավոր ադիտիվ է:

Ապացույց: Ըստ ոչ բացասական ֆունկցիաների ինտեգրալի հատկության՝

$$\int_E f_+(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_+(x)dx, \quad \int_E f_-(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_-(x)dx :$$

Հանելով առաջին հավասարությունից երկրորդը՝ ստանում ենք թեորեմի ապացույցը: □

Ճիշտ է նաև հաշվելի ադիտիվության թեորեմը հետևյալ ձևակերպումներով:

Թեորեմ 2.17.3: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան հանրագումարելի է E բազմության վրա, և E բազմությունը ներկայացված է հաշվելի բազմությամբ զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող չափելի բազմությունների գումարի տեսքով՝

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\ ,$$

ապա

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)dx:$$

Թեորեմ 2.17.4: Դիցուք՝ E չափելի բազմությունը ներկայացված է հաշվելի բազմությամբ զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող չափելի բազմությունների գումարի տեսքով՝

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\ :$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան հանրագումարելի է յուրաքանչյուր E_k բազմության վրա, և

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx<\infty\,,$$

ապա այն հանրագումարելի է նաև E բազմության վրա, և

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}f(x)dx:$$

Ապացույց: Այս թեորեմները ապացուցվում են ոչ բացասական ֆունկցիաների ինտեգրալի հաշվելի ադիտիվության հատկության անմիջական կիրառմամբ: □

Թեորեմ 2.17.5: Եթե $f(x)$-ը հանրագումարելի ֆունկցիա է E բազմության վրա, իսկ a-ն ցանկացած իրական թիվ է, ապա $af(x)$-ը նույնպես հանրագումարելի է, և

$$\int_E af(x)dx=a\int_E f(x)dx:$$

Ապացույց: Թեորեմն ակնհայտ է $a=0$ դեպքում: Եթե $a>0$, թեորեմը հանգում է ոչ դրական ֆունկցիաների ինտեգրալի համանման պնդմանը: Բացասական a-ի դեպքը քննարկելու համար սկզբում դիտարկենք $a=-1$ դեպքը: Հեշտ է տեսնել, որ

$$(-f)_+ = f_-, \quad (-f)_- = f_+,$$

որտեղից

$$\int_E -f(x)dx = \int_E f_-(x)dx - \int_E f_+(x)dx = -\int_E f(x)dx:$$

Այսպիսով՝ $a=-1$-ը կարելի է դուրս բերել ինտեգրալի նշանի տակից: Դիցուք՝ a-ն կամայական բացասական թիվ է: Այդ դեպքում

$$\int_E af(x)dx = -\int_E |a| f(x)dx = -|a|\int_E f(x)dx = a\int_E f(x)dx: \square$$

Հետևանք: Եթե $f(x)$-ը հանրագումարելի է E բազմության վրա, իսկ $\varphi(x)$-ը չափելի, սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա $\varphi(x)f(x)$ հանրագումարելի են E բազմության վրա:

Թեորեմ 2.17.6: Եթե $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները հանրագումարելի են E բազմության վրա, ապա հանրագումարելի է նաև $f(x)+\varphi(x)$ ֆունկցիան, և

$$\int_E (f(x)+\varphi(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E \varphi(x)dx: \qquad (2.17.3)$$

Ապացույց: $f(x)+\varphi(x)$ ֆունկցիայի հանրագումարելիությունը հետևում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$|f(x)+\varphi(x)| \le |f(x)| + |\varphi(x)|:$$

Մնում է ապացուցել (2.17.3) հավասարությունը: Կազմենք հետևյալ բազմությունները՝

$E_1 = \{x,\ f(x) \ge 0,\ \varphi(x) \ge 0\}$,

$E_2 = \{x,\ f(x) < 0,\ \varphi(x) < 0\}$,

$E_3 = \{x,\ f(x) \ge 0,\ \varphi(x) < 0, f(x)+\varphi(x) \ge 0\}$,

$E_4 = \{x,\ f(x) \ge 0,\ \varphi(x) < 0, f(x)+\varphi(x) < 0\}$,

$E_5 = \{x,\ f(x) < 0,\ \varphi(x) \ge 0, f(x)+\varphi(x) \ge 0\}$,

$E_6 = \{x,\ f(x) < 0,\ \varphi(x) \ge 0, f(x)+\varphi(x) < 0\}$:

Ակնհայտ է, որ այս բազմությունները զույգ առ զույգ չեն հատվում, և

$$E=\sum_{k=1}^{6}E_k:$$

Ցույց տանք, որ

$$\int_{E_k}(f(x)+\varphi(x))dx=\int_{E_k}f(x)dx+\int_{E_k}\varphi(x)dx,\ \ k=1,2,\ldots,6:$$

Դիտարկենք առավել հետաքրքիր դեպքը, երբ $k=6$: Կարող ենք գրել՝

$$-f(x)=\varphi(x)+(-(f(x)+\varphi(x))):$$

Այս հավասարության աջ կողմի գումարելիները ոչ բացասական են: Օգտվելով ոչ բացասական ֆունկցիաների ինտեգրալի համապատասխան հատկությունից՝ ստանում ենք՝

$$\int_{E_6}(-f(x))dx=\int_{E_6}\varphi(x)dx+\int_{E_6}(-(f(x)+\varphi(x)))dx,$$

որտեղից

$$\int_{E_6}(f(x)+\varphi(x))dx=\int_{E_6}f(x)dx+\int_{E_6}\varphi(x)dx\ \ :$$

Թեորեմը ապացուցվեց: □

Անցնենք հաջորդ թեորեմին, որը կոչվում է ինտեգրալի բացարձակ անընդհատության հատկություն:

Թեորեմ 2.17.7: Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան հանրագումարելի է E բազմության վրա: Ցանկացած $\varepsilon>0$-ին համապատասխանում է $\delta>0$, այնպես, որ ցանկացած չափելի $e\subset E$ բազմության համար, որի չափը $m(e)<\delta$, ճիշտ է հետևյալը՝

$$\left|\int_e f(x)dx\right|<\varepsilon:$$

Ապացույց: Միաժամանակ հանրագումարելի է նաև $|f(x)|$ ֆունկցիան: Համաձայն ոչ բացասական ֆունկցիաների ինտեգրալի սահմանման՝ գոյություն ունի N_0 այնպես, որ

$$\int_E |f(x)|dx - \int_E (|f(x)|)_{N_0}\, dx < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Վերցնենք $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N_0}$: Քանի որ $|f(x)| - (|f(x)|)_{N_0} \geq 0$, ցանկացած $e \subset E$ բազմության համար տեղի ունի

$$\int_e \left(|f(x)| - (|f(x)|)_{N_0}\right) dx \leq \int_E \left(|f(x)| - (|f(x)|)_{N_0}\right) dx,$$

որտեղից

$$\int_e |f(x)|dx - \int_e (|f(x)|)_{N_0}\, dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

և

$$\int_e |f(x)|dx < \int_e (|f(x)|)_{N_0}\, dx + \frac{\varepsilon}{2} :$$

Բայց, քանի որ $(|f(x)|)_{N_0} \leq N_0$, ապա

$$\int_e (|f(x)|)_{N_0}\, dx \leq N_0 . m(e),$$

և

$$\int_e |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 . m(e) :$$

Այժմ պարզ է, որ եթե $m(e) < \dfrac{\varepsilon}{N_0} = \delta$, կստանանք՝

$$\int_e |f(x)|dx < \varepsilon,$$

որտեղից հետևում է թեորեմի ապացույցը: □

§2.18. Սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ

Թեորեմ 2.18.1 (Լեբեգ): Դիցուք՝ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **հանրագումարելի ֆունկցիաների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է** $F(x)$-

ին: Եթե գոյություն ունի հանրագումարելի $\Phi(x)$ ֆունկցիա, այնպես, որ ցանկացած n-ի և x-ի համար

$$|f_n(x)| \le \Phi(x), \tag{2.18.1}$$

ապա

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E F(x)dx:$$

Այսինքն՝ սահմանային անցումը կարելի է կատարել ինտեգրալի նշանի տակ:

Ապացույց: Ըստ (2.18.1)-ի՝ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիաները հանրագումարելի են: Ռիսի թեորեմից հետևում է, որ գոյություն ունի $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականություն, այնպես, որ $f_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\to} F(x)$ համարյա ամենուրեք, հետևաբար $|F(x)| \le \Phi(x)$ համարյա ամենուրեք և $F(x)$-ը նույնպես հանրագումարելի են: Կամայական $\sigma > 0$-ի համար նշանակենք

$$A_n(\sigma) = \{x, |f_n(x) - F(x)| \ge \sigma\},$$

$$B_n(\sigma) = \{x, |f_n(x) - F(x)| < \sigma\}:$$

Պարզ է, որ ցանկացած n-ի և ցանկացած σ-ի համար

$$E = A_n(\sigma) \cup B_n(\sigma):$$

Եվ $m(A_n(\sigma)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$: Մյուս կողմից՝

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E F(x)dx\right| \le \int_E |f_n(x) - F(x)|\,dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx:$$

Քանի որ h.ա. $|f_n(x) - F(x)| \le \sigma$, ապա

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx \le \sigma \int_{B_n(\sigma)} dx \le \sigma m(E):$$

Օգտվելով $|f_n(x)-F(x)|\le 2\Phi(x)$ անհավասարությունից՝ ստանում ենք՝

$$\int_{A_n(\sigma)}|f_n(x)-F(x)|\,dx \le 2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx:$$

Արդյունքում ստանում ենք՝

$$|\int_E f_n(x)dx-\int_E F(x)dx|\le 2\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx+\sigma m(E): \qquad (2.18.2)$$

Դիցուք՝ $\varepsilon>0$-ն կամայական դրական թիվ է: $\sigma>0$ վերցնենք այնպես, որ տեղի ունենա

$$\sigma m(E)<\frac{\varepsilon}{2}: \qquad (2.18.3)$$

$\Phi(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալի բացարձակ անընդհատությունից օգտվելով՝ վերցնենք $\delta>0$ այնպես, որ ցանկացած $e\subset E$ բազմության համար, միայն թե $m(e)<\delta$, տեղի ունենա

$$\int_e \Phi(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}:$$

n_0-ը ընտրենք այնպես, որ կամայական $n>n_0$ համար $m(A_n(\sigma))<\delta$: Հետևաբար կստանանք՝

$$\int_{A_n(\sigma)}\Phi(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}: \qquad (2.18.4)$$

Օգտվելով (2.18.2) և (2.18.3) բանաձևերից՝ կստացվի

$$|\int_E f_n(x)dx-\int_E F(x)dx|\le\varepsilon,$$

Թեորեմը ապացուցված է: □

§2.19. Լեբեգի և Ռիմանի ինտեգրալների համեմատումը

Թեորեմ 2.19.1: Դիցուք՝ $f(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է $[a,b]$-ում: Այդ դեպքում

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx: \qquad (2.19.1)$$

Ապացույց: Վերցնենք $[a,b]$-ի ցանկացած տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$: Ըստ Լեբեգի ինտեգրալի հատկության՝

$$(L)\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}(L)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx:$$

Նշանակենք m_k-ով և M_k-ով $f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[x_k, x_{k+1}]$ միջակայքում: Ըստ միջին արժեքի թեորեմի՝

$$m_k(x_{k+1} - x_k) \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \le M_k(x_{k+1} - x_k),$$

և գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք՝

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \le (L)\int_a^b f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k):$$

Այս անհավասարության աջ և ձախ կողմերում գրված են Դարբուի ստորին և վերին գումարները: Ինչպես գիտենք, երբ $\lambda \to 0$, Դարբուի ստորին և վերին գումարների սահմանը հավասար է Ռիմանի ինտեգրալին: Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք թեորեմի ապացույցը: □

Եթե $f(x)$-ը կամայական՝ Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիա է $[a,b]$ միջակայքում, ապա տեղի ունի (2.19.1) հավասարությունը:

Դիցուք՝ տրված է $[a,b]$-ի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիա, $x_0 \in [a,b]$, $\delta > 0$: $m_\delta(x_0)$-ով և $M_\delta(x_0)$-ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ինտերվալում համապատասխանաբար ճշգրիտ ստորին և վերին սահմանները՝

$$m_\delta(x_0)=\inf_{x_0-\delta<x<x_0+\delta} f(x), \quad M_\delta(x_0)=\sup_{x_0-\delta<x<x_0+\delta} f(x):$$

Ակնհայտ է, որ $m_\delta(x_0)\le f(x_0)\le M_\delta(x_0)$: δ-ի փոքրացման հետ $m_\delta(x_0)$-ն չի նվազում, իսկ $M_\delta(x_0)$-ն չի աճում, հետևաբար գոյություն ունեն հետևյալ սահմանները՝

$$m(x_0)=\lim_{\delta\to+0} m_\delta(x_0), \quad M(x_0)=\lim_{\delta\to+0} M_\delta(x_0),$$

ընդ որում՝

$$m_\delta(x_0)\le m(x_0)\le f(x_0)\le M(x_0)\le M_\delta(x_0): \qquad (2.19.2)$$

Սահմանում 2.19.1: $m(x)$ և $M(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են համապատասխանաբար $f(x)$ ֆունկցիայի Բեռի ստորին և վերին ֆունկցիաներ:

Թեորեմ 2.19.2 (Բեռի թեորեմ): Որպեսզի x_0 կետում վերջավոր $f(x)$ ֆունկցիան լինի անընդհատ x_0 կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $m(x_0)=M(x_0)$:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Կամայական $\varepsilon>0$-ի համար վերցնենք $\delta>0$ թիվն այնպես, որ բոլոր x-երի համար, միայն թե $|x-x_0|<\delta$, տեղի ունենա $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ անհավասարությունը, հետևաբար՝

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

այսինքն՝

$$f(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\le M_\delta(x_0)<f(x_0)+\varepsilon:$$

Օգտվելով (2.19.1) բանաձևից՝ կստանանք, որ կամայական $\varepsilon>0$-ի համար

$$f(x_0)-\varepsilon<m(x_0)\le M(x_0)<f(x_0)+\varepsilon:$$

Հետևաբար թեորեմի անհրաժեշտությունն ապացուցվեց: Այժմ ենթադրենք՝ ունենք $m(x_0)=M(x_0)=f(x_0)\ne\infty$ հավասարությունը:

Քանի որ $m(x_0)=\lim_{\delta\to+0} m_\delta(x_0), \quad M(x_0)=\lim_{\delta\to+0} M_\delta(x_0),$ ապա կամայական $\varepsilon>0$-ի համար գոյություն ունի այնքան փոքր $\delta>0$, որ

$$m(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\le m(x_0), \quad M(x_0)\le M_\delta(x_0)\le M(x_0)+\varepsilon:$$

Ստացվեց՝

$$f(x_0)-\varepsilon < m_\delta(x_0), \quad M_\delta(x_0) \le f(x_0)+\varepsilon:$$

Այլ կերպ ասած՝ եթե $|x-x_0|<\delta$, ապա $m_\delta(x_0) \le f(x) \le M_\delta(x_0)$, և

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon:$$

Թեորեմն ապացուցված է: □

Այժմ ապացուցենք կարևոր լեմմ, որը կօգտագործվի Լեբեգի թեորեմի (թեորեմ 2.19.3) ապացույցի մեջ:

Լեմմ 2.19.1: Դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի տրոհումների որևէ հաջորդականություն՝

$$a=x_0^{(1)}<x_1^{(1)}<\ldots<x_{n_1}^{(1)}=b$$

$$a=x_0^{(2)}<x_1^{(2)}<\ldots<x_{n_2}^{(2)}=b$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}<\ldots<x_{n_i}^{(i)}=b$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

Ընդ որում՝ $\lambda_i=\max_k(x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)}) \underset{i\to\infty}{\to} 0$: $m_k^{(i)}$ -ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին եզրը $[x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}]$ հատվածի վրա: Ներմուծենք $\varphi_i(x)$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} m_k^{(i)}, & x\in(x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}), \\ 0, & x=x_0^{(i)},x_1^{(i)},\ldots,x_{n_i}^{(i)}, \end{cases}$$

եթե x_0 -ն չի համընկնում $\{x_k^{(i)}\}_{i,k,}$ կետերից ոչ մեկի հետ, ապա

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0):$$

Ապացույց: Բոլոր i-երի համար k_0 -ով նշանակենք այն բնական թիվը, որի համար տեղի ունի $x_0\in[x_{k_0}^{(i)},x_{k_0+1}^{(i)}]$ պայմանը: Ֆիքսենք որևէ i: Քանի որ x_0 -ն տարբեր է $\{x_k^{(i)}\}_{i,k,}$ կետերից, ապա $x_{k_0}^{(i)}<x_0<x_{k_0+1}^{(i)}$, հետևաբար բավական փոքր $\delta>0$ թվի համար $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[x_{k_0}^{(i)},x_{k_0+1}^{(i)}]$, որտեղից էլ ստանում ենք, որ

$$m_k^{(i)}\le m_\delta(x_0) \Leftrightarrow \varphi_i(x_0)\le m_\delta(x_0):$$

Վերջին անհավասարության մեջ δ-ն ձգտեցնենք 0-ի, կամայական i-ի դեպքում ստանում ենք՝

$$\varphi_i(x_0) \le m(x_0):$$

Եթե $m(x_0) = -\infty$, ապացույցն ավարտված է: Ենթադրենք՝ $m(x_0) > -\infty$: Վերցնենք կամայական $h < m(x_0)$: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ $m_\delta(x_0) > h$: Ֆիքսելով այդ δ-ն՝ գտնենք այնպիսի i_0, որ կամայական $i > i_0$-ի համար

$$[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(այդպիսի i_0 հնարավոր է ընտրել, քանի որ $\lambda_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$),
հետևաբար բոլոր $i > i_0$-երի համար ստանում ենք՝

$$m_{k_0}^{(i)} \ge m_\delta(x_0) > h \Leftrightarrow \varphi_i(x_0) > h:$$

Այսինքն՝ կամայական $h < m(x_0)$-ի համար

$$h < \varphi_i(x_0) \le m(x_0):$$

Լեմմը ապացուցված է: □

Հետևանք 1: Բեռի $m(x)$ և $M(x)$ ֆունկցիաները չափելի են:

Իրոք, $\{x_k^{(i)}\}_{i,k,}$ կետերի բազմությունը հաշվելի է և ունի 0 չափ: Հետևաբար համարյա ամենուրեք $\varphi_i(x) \underset{i\to\infty}{\to} m(x)$: Քանի որ $\varphi_i(x)$-ը չափելի ֆունկցիաներ են, ապա $m(x)$-ը ևս չափելի է: $M(x)$-ի համար ապացույցը նույն կերպ է:

Հետևանք 2: Եթե լեմմի պայմանների հետ մեկտեղ պահանջենք, որ $f(x)$-ը լինի սահմանափակ, ապա ճիշտ է նաև հետևյալը՝

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)dx \underset{i\to\infty}{\to} (L)\int_a^b m(x)dx:$$

Իրոք, եթե $|f(x)| \le K$, ապա

$$|\varphi_i(x)| \le K, \quad |m(x)| \le K:$$

Այստեղից ստացվում է, որ այս ֆունկցիաներն ինտեգրելի են, և Լեբեգի թեորեմից (թեորեմ 2.15.1) հետևում է, որ սահմանի ու ինտեգրալի տեղերը կարելի է փոխել:

Ռիմանի ինտեգրալի համար ճիշտ է հետևյալ փաստը:

Թեորեմ 2.19.3 (Լեբեգ): Որպեսզի $[a,b]$ միջակայքում որոշված սահմանափակ ֆունկցիան լինի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա խզման կետերի բազմության չափը հավասար լինի զրոյի (լինի անընդհատ համարյա ամենուրեք):

Ապացույց: Նկատենք, որ

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} \int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \varphi_i(x)dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}(x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}) = s_i,$$

որտեղ $\varphi_i(x)$-ը լեմմի մեջ սահմանված ֆունկցիան է, իսկ s_i-ը մաթ. անալիզի կուրսից հայտնի Դարբուի ստորին գումարն է:

Վերաձևակերպենք հետևանք 2-ը հետևյալ կերպ՝

$$s_i \underset{i\to\infty}{\to} (L)\int_a^b m(x)dx:$$

Միևնույն դատողություններով կստացվի, որ

$$S_i \underset{i\to\infty}{\to} (L)\int_a^b M(x)dx:$$

Համադրելով կստանանք՝ $S_i - s_i \underset{i\to\infty}{\to} (L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx:$

Քանի որ ըստ Ռիմանի ինտեգրելիությունը համարժեք է $S_i - s_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$ պայմանին, ստանում ենք՝

$$(L)\int_a^b [M(x)-m(x)]dx = 0:$$

Ըստ §2.16-ի հատկություն 5-ի՝ $M(x)-m(x)$-ը **համարժեք է 0-ին,** կամ, որ նույնն է,

$$M(x) \sim m(x):$$

Հաշվի առնելով վերջինս և Բեռի թեորեմը՝ ստանում ենք, որ h.ա. $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: Թեորեմն ապացուցված է: □

Լեբեգի թեորեմից անմիջապես հետևում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.19.4: Ցանկացած ֆունկցիա, որը ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով, ինտեգրելի է նաև Լեբեգի իմաստով, և այդ ինտեգրալները հավասար են:

§2.20. Մոնոտոն ֆունկցիաներ

Ինչպես հայտնի է, $f(x)$ ֆունկցիան տրված $[a,b]$ հատվածում համարվում է աճող, եթե $x<y$-ից հետևում է, որ

$$f(x)\le f(y):$$

Եթե $x<y$-ից հետևում է, որ $f(x)<f(y)$, ապա ասում են, որ $f(x)$-ը *խիստ աճող* ֆունկցիա է: Նմանապես կարող են ասել, որ $f(x)$ ֆունկցիան համարվում է *նվազող* (*խիստ նվազող*), եթե $x<y$-ից հետևում է, որ $f(x)\ge f(y)$ ($f(x)>f(y)$):

Նվազող և աճող ֆունկցիաներն անվանում են *մոնոտոն* (*խիստ մոնոտոն*): Եթե $f(x)$ ֆունկցիան նվազող է, ապա $-f(x)$ ֆունկցիան աճող է: Այս ակնհայտ փաստը հնարավորություն է տալիս քննարկելու միայն աճող ֆունկցիաները: Նշենք նաև, որ հետագայում մոնոտոն ֆունկցիա ասելիս մենք կհամարենք, որ ֆունկցիան նաև *վերջավոր* է:

Ենթադրենք՝ $f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է տրված $[a,b]$ հատվածում և $a\le x_0<b$: Մաթեմատիկական անալիզի շրջանակում ապացուցված է, որ ինչպիսի $x_1,x_2,x_3,...$, կետերի հաջորդականություն էլ վերցնենք, որը ձգտում է x_0-ին՝ գտնվելով նրանից աջ ($x_n\to x_0, x_n>x_0$), ապա գոյություն ունի վերջավոր $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ սահմանը, որը ոչ այլ ինչ է, քան $\inf\limits_{x_0<x\le b}\{f(x)\}$, այդ պատճառով այն կախված չէ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ընտրությունից: Այդ արժեքը նշանակենք $f(x_0+0)$: Նմանապես կամայական $a<x_0\le b$-ի համար կսահմանենք նաև $f(x_0-0)$:

Հեշտ է նկատել, որ

$$f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0),\quad (a<x_0<b),$$

$$f(a)\le f(a+0),\, f(b-0)\le f(b):$$

Այստեղից հետևում է, որ որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան լինի անընդհատ x_0 կետում, անհրաժեշտ և բավարար է, որ

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0),$$

եթե x_0-ն համընկնում է a-ի կամ b-ի հետ, ապա պետք է խոսել միայն միակողմանի սահմանի մասին՝ $f(a+0)$ կամ $f(b-0)$:

$f(x_0)-f(x_0-0)$, $f(x_0+0)-f(x_0)$ թվերը անվանվում են $f(x)$ ֆունկցիայի x_0 կետում համապատասխանաբար ձախակողմյան և աջակողմյան թռիչքներ, իսկ $f(x_0+0)-f(x_0-0)$-ն՝ ուղղակի թռիչք այդ կետում (a և b կետերում դիտարկվում են միայն միակողմանի թռիչքները):

Լեմմ 2.20.1: Ենթադրենք՝ $f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է՝ տրված $[a,b]$ հատվածի վրա: Եթե $x_1, x_2, ..., x_n$-ը կամայական կետեր են $[a,b]$ հատվածից, ապա

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+\ [f(b)-f(b-0)]\le$$
$$\le\ f(b)-f(a): (2.20.1)$$

Ապացույց: Կարելի է համարել, որ $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$: Նշանակենք $a=x_0, b=x_{n+1}$ և դիտարկենք $y_0, y_1, \dots, y_n$ կետերը, որտեղ $x_k<y_k<x_{k+1}$ $(k=0,1,\dots,n)$: Այդ դեպքում

$$f(x_k+0)-f(x_k-0)\le f(y_k)-f(y_{k-1})(k=1,2,\dots,n),$$
$$f(a+0)-f(a)\le f(y_1)-f(a),$$
$$f(b)-f(b-0)\le f(b)-f(y_n):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կստանանք (2.20.1)-ը: □

Հետևանք: Աճող $f(x)$ ֆունկցիան՝ տրված $[a,b]$ հատվածում, կարող է ունենալ միայն վերջավոր թվով խզման կետեր, որտեղ նրա թռիչքը մեծ է տրված դրական σ թվից: Իրոք, եթե $x_1, \dots, x_n$-ը խզման կետեր են $[a,b]$-ից, և այդ կետերում թռիչքը մեծ է քան σ-ն, ապա (2.20.1)-ից հետևում է, որ $n\sigma\le f(b)-f(a)$, և հետևաբար n-ը չի կարող անվերջ մեծ լինել:

Թեորեմ 2.20.1: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **հատվածում տրված** $\boldsymbol{f(x)}$ **աճող ֆունկցիայի խզման կետերը հաշվելի են: Եթե** $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots}$ **կետերը ներքին խզման կետեր են, ապա**

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] + [f(b)-f(b-0)] \le f(b)-f(a):$$

Ապացույց: H-ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը, իսկ H_k-ով՝ այն խզման կետերի բազմությունը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիայի թռիչքը մեծ է, քան $1/k$-ն: Ակնհայտ է, որ $H = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$, և H-ի հաշվելիությունը հետևում է ցանկացած առանձին վերցրած H_k-ի վերջավորությունից, որը բխում է վերը ապացուցված հետևանքից: □

Ենթադրենք՝ $f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է $[a,b]$ հատվածում, ներմուծենք $s(x)$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$s(a) = 0,$$
$$s(x) = [f(a+0)-f(a)] + \sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] +$$
$$+[f(x)-f(x-0)] \ (a < x \le b):$$

Այս ֆունկցիան կանվանենք $f(x)$ ֆունկցիայի թռիչքների ֆունկցիա: Պարզ է, որ այն նույնպես աճող ֆունկցիա է:

Թեորեմ 2.20.2: $\boldsymbol{\varphi(x) = f(x) - s(x)}$ **տարբերությունը աճող և անընդհատ ֆունկցիա է:**

Ապացույց: Ենթադրենք՝ $a \le x < y \le b$: Եթե (2.20.1) անհավասարությունը կիրառենք $[x,y]$ հատվածի համար $[a,b]$-ի փոխարեն, ապա կստանանք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$s(y) - s(x) \le f(y) - f(x), \tag{2.20.2}$$

որտեղից ստացվում է, որ $\varphi(x) \le \varphi(y)$, ուրեմն $\varphi(x)$ ֆունկցիան աճող է: Այնուհետ, եթե (2.20.2)-ում y-ը ձգտում է x-ին, ապա ստանում ենք, որ

$$s(x+0) - s(x) <= f(x+0) - f(x): \tag{2.20.3}$$

Մյուս կողմից՝ $s(x)$ ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ $x < y$ պայմանի դեպքում $f(x+0) - f(x) \le s(y) - s(x)$, որտեղից սահմանային անցում կատարելով $y \to x$՝ կունենանք՝

$$f(x+0) - f(x) \le s(x+0) - s(x):$$

Հաշվի առնելով այս արդյունքը և (2.20.3)-ը՝ պարզ է, որ $f(x+0)-f(x)=s(x+0)-s(x)$, ուրեմն նաև $\varphi(x+0)=\varphi(x)$: Համանման կերպով կստացվի, որ $\varphi(x-0)=\varphi(x)$, և վերջապես կբխի $\varphi(x)$-ի անընդհատությունը: □

§2.21. Բազմությունների արտապատկերում: Մոնոտոն ֆունկցիայի դիֆերենցելիություն

Ենթադրենք՝ ինչ-որ A բազմության վրա տրված է $f(x)$ ֆունկցիան: Այդ ֆունկցիան կամայական $E\subset A$-ն համապատասխանեցնում է $f(E)$ բազմությանը, որը բաղկացած է $f(x)$-ի բոլոր կետերից, որտեղ $x\in E$: Այլ կերպ ասած՝ $f(E)$-ն բաղկացած է միայն և միայն այն y կետերից, որոնց համար E բազմության մեջ կգտնվի $f(x)=y$ հավասարման x արմատ:

$f(E)$ բազմությունը կոչվում է E բազմության պատկեր, իսկ վերջինս կոչվում է $f(E)$ բազմության նախապատկեր: E բազմությունից $f(E)$ բազմության անցման գործողությունը կոչվում է E-ի արտապատկերում $f(E)$-ի վրա:

Թեորեմ 2.21.1: Եթե 1) $\boldsymbol{E_1\subset E_2}$, 2) $\boldsymbol{E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n}$, ապա համապատասխանաբար

1) $f(E_1)\subset f(E_2)$,

2) $f(E)=\sum_{n=1}^{\infty}f(E_n)$:

Ապացույցն ակնհայտ է: □

Առանձնապես պարզ է արտապատկերումների այն տեսությունը, երբ արտապատկերող ֆունկցիան փոխմիարժեք կապ է հաստատում A և $f(A)$ բազմությունների մեջ: Այդ դեպքում գոյություն ունի նաև հակադարձ $x=g(y)$ ֆունկցիան՝ տրված $f(A)$ բազմության վրա և A-ի մեջ ընկած արժեքներ ընդունող: Հեշտ է նկատել, որ այս դեպքում տեղի ունի

$$f\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\prod_{n=1}^{\infty}f(E_n),$$

և, մասնավորապես, եթե E_1 և E_2 բազմությունները չեն հատվում, ապա չեն հատվում նաև նրանց $f(E_1)$ և $f(E_2)$ պատկերները:

Այդպիսի պարզ արտապատկերման օրինակ է հանդիսանում $A=[a,b]$ հատվածում տրված, անընդհատ և խիստ աճող $f(x)$ ֆունկցիան, որի դեպքում $f(A)=[f(a),f(b)]$:

Արտապատկերումների գաղափարը շատ օգտակար է ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը ուսումնասիրելիս:

Սահմանում: λ թիվը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ թիվ x_0 կետում, եթե գոյություն ունի զրոյին ձգտող այնպիսի $h_1, h_2, h_3, \dots$ $(h_n \neq 0)$ հաջորդականություն, որ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda:$$

Այն փաստը, որ λ-ն հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ թիվը x_0 կետում, մենք կնշենք հետևյալ կերպ՝ $\lambda = Df(x_0)$: Եթե x_0 կետում գոյություն ունի (վերջավոր կամ անվերջ) $f'(x_0)$ ածանցյալը, ապա $Df(x_0)$-ն կպարունակի միայն այդ թիվը. այլ ածանցյալ թիվ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան չունի: Որպես օրինակ դիտարկենք Դիրիխլեի $\psi(x)$ ֆունկցիան, որը 0 է իռացիոնալ x-երի դեպքում և 1՝ ռացիոնալ x-երի դեպքում: Ենթադրենք՝ x_0-ն ռացիոնալ է, ապա

$$\frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h}$$

արտահայտությունը զրո է ռացիոնալ h-երի համար և $-1/h$՝ իռացիոնալ h-երի դեպքում: Այստեղից հետևում է, որ x_0 կետում $\psi(x)$ ֆունկցիան ունի 3 ածանցյալ թիվ՝ $-\infty, 0, +\infty$: Հեշտ է ցույց տալ, որ ուրիշ ածանցյալ թվեր այս ֆունկցիան չունի: Նույն արդյունքը կստանանք նաև իռացիոնալ x_0-ի դեպքում:

Թեորեմ 2.21.2: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան տրված է $[a,b]$ հատվածի վրա, ապա նրա ցանկացած կետում գոյություն ունեն ածանցյալ թվեր:

Ապացույց: Դիցուք՝ $x_0 \in [a,b]$ և $\{h_n\}(h_n \neq 0)$-ը 0-ի ձգտող այնպիսի հաջորդականություն է, որ $x_0+h_n \in [a,b]$: Նշանակենք $\sigma_n = \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$: Եթե $\{\sigma_n\}$-ը վերջավոր է, ապա ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմի՝ նրանից կարելի է առանձնացնել $\{\sigma_{n_k}\}$ ենթահաջորդականություն, որը ձգտում է ինչ-որ λ թվի, և դա էլ կլինի $f(x)$-ի ածանցյալ թիվը x_0 կետում՝ $(\lambda = Df(x_0))$: Եթե $\{\sigma_n\}$-ը վերջավոր չէ, օրինակ, վերևից, ապա նրանից կարելի է առանձնացնել $\{\sigma_{n_k}\}$ ենթահաջորդականություն, որը կձգտի $+\infty$, և այդ դեպքում $+\infty \in Df(x_0)$: □

Թեորեմ 2.21.3: Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան, որը տրված է [a, b] հատվածի վրա, $x_0 \in [a,b]$ կետում ունենա $f'(x_0)$ ածանցյալ, անհրաժեշտ և բավարար է, որ բոլոր ածանցյալ թվերը այդ կետում լինեն միմյանց հավասար:

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը ակնհայտ է: Ենթադրենք, որ բոլոր ածանցյալ թվերը x_0 կետում հավասար են միմյանց, և նրանց արժեքն է λ: $f'(x_0)$-ի գոյության հարցը կապացուցվի, եթե ցույց տանք, որ ցանկացած զրոյի ձգտող $\{h_n\}(h_n \neq 0)$ հաջորդականության համար տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

հավասարությունը: Ենթադրենք, որ այն տեղի չունի, այդ դեպքում կգտնվի գոնե մեկ $\{h_n\}(h_n \to 0, h_n \neq 0)$ հաջորդականություն, որ

$$\sigma_n = \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

հաջորդականությունը չի ձգտում λ-ի: Բայց դա նշանակում է, որ գոյություն ունի $\varepsilon > 0$, այնպիսի, որ անվերջ քանակով թվեր σ_n-ից կլինեն $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$-ից դուրս (մենք ենթադրում ենք, որ $-\infty < \lambda < +\infty$, հակառակ դեպքում հանգում ենք ավելի պարզ դեպքի): Այդ անվերջ բազմությունը կընդգրկի իր մեջ $\{\sigma_{n_k}\}$, որը կձգտի որոշակի վերջավոր կամ անվերջ μ արժեքի, որը կտարբերվի $f(x)$ ֆունկցիայի x_0 կետում λ ածանցյալ թվից, սակայն λ-ից տարբեր ածանցյալ թվի գոյությունը հակասում է սկզբնական պայմաններին: □

Լեմմ 2.21.1: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան աճող է $[a,b]$ հատվածում, ապա նրա բոլոր ածանցյալ թվերը ոչ բացասական են:

Այս լեմմը ակնհայտ է: □

Լեմմ 2.21.2: Դիցուք՝ $[a,b]$ հատվածում տրված է խիստ աճող $f(x)$ ֆունկցիան: Եթե $E \subset [a,b]$ բազմության բոլոր կետերում գոյություն ունի p -ից փոքր ածանցյալ թիվ($\lambda_0 \in Df(x), \lambda_0 \leq p$ $(0 \leq p < +\infty)$, ապա

$$m^*f(E) \leq p \cdot m^*E,$$

որտեղ m^*E -ն E բազմության վերին չափն է:

Ապացույց: Վերցնենք $\varepsilon > 0$ թիվ և կառուցենք այնպիսի բաց սահմանափակ G բազմություն, որ

$$E \subset G, mG < m^*E + \varepsilon$$

Դիցուք $p_0 > p$, եթե $x_0 \in E$, ապա գոյություն ունի զրոյի ձգտող $\{h_n\}$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda_0 \leq p:$$

Այդ դեպքում բավականին մեծ n-ի դեպքում $[x_0, x_0 + h_n]$-ը ամբողջովին ընկած կլինի G բազմության մեջ: Բացի դրանից՝ բավականին մեծ n-երի համար տեղի կունենա

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} < p_0:$$

Մենք կընդունենք, որ այս 2 անհավասարությունները տեղի ունեն բոլոր n-երի դեպքում: Դիտարկենք հետևյալ հատվածները՝

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n], \Delta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0 + h_n)]:$$

Քանի որ f(x) ֆունկցիան աճող է, ապա պարզ է, որ

$$f[d_n(x_0)] \subset \Delta_\mathrm{n}(\mathrm{x}_0)$$

Այդ հատվածների երկարություններն են՝

$$md_n(x_0) = |h_n|, m\Delta_n(x_0) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|:$$

Այդ պատճառով $m\Delta_n(x_0) < p_0 md_n(x_0)$: Սակայն $h_n \to 0$, որը նշանակում է, որ $\Delta_n(x_0)$ հատվածների մեջ գոյություն ունեն ինչքան հնարավոր է կարճ հատվածներ: Քանի որ E բազմության $f(E)$ պատկերը բաղկացած է $f(x_0)$ կետերից, որոնք ընկած են $\Delta_n(x_0)$ հատվածներում, ապա $f(E)$-ն ծածկված է բոլոր $\Delta_n(x)$ հատվածներով ըստ Վիտալի, որտեղ $x \in E$: Այդ դեպքում կարելի է այդ հատվածների հաջորդականությունից ընտրել հաշվելի հատվածների ենթահաջորդականություններ $\{\Delta_{n_i}(x_i)\}(i = 1,2,3, \dots)$, որոնք զույգ առ զույգ չեն հատվում, և

$$m\left[f(E) - \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{n_i}(x_i)\right] = 0:$$

Պարզ է, որ $m^* f(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i) < p_0 \sum_{i=1}^{\infty} md_{n_i}(x_i)$: Այժմ նկատենք, որ ոչ միայն $\Delta_{n_i}(x_i)$ հատվածները զույգ առ զույգ չեն հատվում, այլ նաև $d_{n_i}(x_i)$ հատվածները: Այդ իսկ պատճառով

$$\sum_{i=1}^{\infty} md_{n_i}(x_i) = m\left[\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i)\right]:$$

Քանի որ $\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i) \subset G$, ապա $m^* f(E) < p_0 mG < p_0[m^* E + \varepsilon]$: ε-ը ձգտեցնելով զրոյի, իսկ p_0-ն՝ p-ի և սահմանային անցում կատարելով՝ կստանանք այն, ինչ-որ պահանջվում էր ապացուցել: □

Լեմմ 2.21.3: Դիցուք՝ $[a,b]$ հատվածում տրված է խիստ աճող $f(x)$ ֆունկցիան: Եթե $E \subset [a,b]$ բազմության ցանկացած կետում գոյություն ունի գոնե մեկ $Df(x)$ ածանցյալ թիվ, այնպիսին, որ $Df(x) \geq q$ $(0 \leq q < +\infty)$, ապա $m^*f(E) \geq qm^*E$:

Ապացույց: Եթե $q = 0$, ապա ապացույցն ակնհայտ է: Ենթադրենք՝ $q > 0$, q_0-ով նշանակենք q-ից փոքր ինչ-որ դրական թիվ: Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$: Գտնենք այնպիսի G բաց սահմանափակ բազմություն, որ

$$G \supset f(E), mG < m^*f(E) + \varepsilon:$$

S-ով նշանակենք E-ին պատկանող x կետերի այն բազմությունը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: $E - S$ բազմությունը հաշվելի է, քանի որ մոնոտոն ֆունկցիաները կարող են ունենալ միայն հաշվելի թվով խզման կետեր: Եթե $x_0 \in E$, ապա կգտնվի $\{h_n\}$ հաջորդականություն, որի համար

$$h_n \to 0, \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \geq q:$$

Ենթադրենք, որ բոլոր n-երի համար տեղի ունի

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} > q_0:$$

Դիտարկենք հետևյալ հատվածները՝

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n], \varDelta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0 + h_n)]:$$

Վերը ասվածից ունենք

$$m\varDelta_n(x_0) > q_0 md_n(x_0):$$

Եթե $x_0 \in S$, ապա բավականին մեծ n-երի դեպքում ամբողջ $[f(x_0), f(x_0 + h_n)]$ հատվածը ամբողջությամբ կգտնվի G բազմության մեջ: Մենք կընդունենք, որ այն տեղի ունի բոլոր n-երի համար: S բազմությունը ծածկված է $d_n(x)$ հատվածներով $(x \in S)$ ըստ Վիտալի: Նշանակում է՝ այդ հատվածների բազմությունից կարելի է ընտրել հաշվելի զույգ առ զույգ չհատվող $\{d_{n_i}(x_i)\}$ հաջորդականություն, որ $m\left[S - \sum_{i=0}^{\infty} d_{n_i}(x_i)\right] = 0$: Բայց այդ դեպքում

$$m^*S \leq \sum_{i=1}^{\infty} md_{n_i}(x_i) < \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i):$$

Սակայն $\Delta_{n_i}(x_i)$ հատվածները, ինչպես և $d_{n_i}(x_i)$-ն զույգ առ զույգ չհատվող են (այստեղ օգտագործում ենք այն փաստը, որ $f(x)$-ը խիստ աճող է): Հետևաբար՝

$$\sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i) = m\left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{n_i}(x_i)\right] \leq mG < m^*f(E) + \varepsilon:$$

Այսպիսով՝ $m^*S < \frac{1}{q_0}[m^*f(E) + \varepsilon]$, որտեղից էլ, ε-ը ձգտեցնելով զրոյի, իսկ q_0-ն q-ի և սահմանի անցնելով ստանում ենք, որ $m^*f(E) \geq qm^*S$: Սակայն $m^*E \leq m^*S + m^*(E - S) = m^*S$, որտեղից և հետևում է լեմմը: □

Հետևանք: Այն կետերի բազմությունը, որտեղ $f(x)$ աճող ֆունկցիայի գոնե մեկ ածանցյալ թիվ անվերջ է, ունի զրո չափ:

Ապացույց: Իրոք, ենթադրենք, որ $f(x)$-ը խիստ աճող է: Եթե տեղի ունենար $m^*E(Df(x) = +\infty) > 0$, ապա այդ բազմության պատկերը պետք է ունենար անվերջ արտաքին չափ, որը, իհարկե, սխալ է, քանի որ պատկերը ընկած է $[f(a), f(b)]$ հատվածում:

Եթե $f(x)$-ը խիստ աճող չէ, ապա $g(x) = f(x) + x$-ը կլինի խիստ աճող, և

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 1:$$

Այսինքն՝ այն կետերը, որտեղ գոնե մեկ $Df(x) = +\infty$, համընկնում է $g(x)$-ի համար նույն բազմության հետ և ուրեմն ունի զրո չափ:

Լեմմ 2.21.4: Դիցուք՝ $f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է տրված $[a, b]$ հատվածի վրա, իսկ p -ն՝ q-ից փոքր թիվ ($p < q$): Եթե $E_{p,q} \subset [a, b]$ բազմության ցանկացած կետում գոյություն ունեն 2 $D_1f(x)$ և $D_2f(x)$ ածանցյալ թվեր, որ $D_1f(x) < p < q < D_2f(x)$, ապա $mE_{p,q} = 0$:

Ապացույց: Իրոք, ենթադրենք, որ $f(x)$-ը խիստ աճող է: Այդ դեպքում կարող ենք կիրառել լեմմ 2.21.2-ը և 2.21.3-ը, համաձայն որոնց՝ ունենք $m^*f(E_{p,q}) \leq pm^*E_{p,q}$, $m^*f(E_{p,q}) \geq qm^*E_{p,q}$, որտեղից $qm^*E_{p,q} \leq pm^*E_{p,q}$ և $m^*E_{p,q} = 0$:

Եթե $f(x)$-ը խիստ աճող չէ, ապա $g(x) = f(x) + x$-ը կլինի խիստ աճող, և կիրառելով վերը ապացուցված մասը $g(x)$-ի համար (p-ն և q-ն փոխարինելով $p + 1$ և $q + 1$)՝ կստանանք այն, ինչը պահանջվում էր ապացուցել: □

Թեորեմ 2.21.3: Եթե $f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է տրված $[a, b]$ հատվածի վրա, ապա համարյա բոլոր $[a, b]$ կետերում գոյություն ունի վերջավոր $f'(x)$ ածանցյալ:

Ապացույց: E-ով նշանակենք $[a,b]$-ի այն կետերի բազմությունը, որտեղ $f'(x)$ ածանցյալը գոյություն չունի: Եթե $x_0 \in E$, ապա կգտնվեն երկու իրարից տարբեր ածանցյալ թվեր $D_1 f(x_0)$ և $D_2 f(x_0)$, ընդ որում՝ $D_1 f(x_0) < D_2 f(x_0)$: Կարելի է գտնել p և q ռացիոնալ թվեր, որ տեղի ունենա $D_1 f(x_0) < p < q < D_2 f(x_0)$ պայմանը:

Ուրեմն $E = \sum_{(p,q)} E_{p,q}$, որտեղ $E_{p,q}$-ն այն $x \in [a,b]$ բազմությունն է, որտեղ գոյութուն ունի $D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x)$ պայմանին բավարարող երկու ածանցյալ թիվ, իսկ գումարը տարածվում է ըստ բոլոր (p,q) ռացիոնալ թվերի զույգերի, որոնց համար $p < q$: Համաձայն լեմմ 2.21.4-ի ցանկացած այդպիսի $E_{p,q}$ բազմության չափը զրո է, իսկ քանի որ այդ բազմությունների թիվը հաշվելի է, ապա զրո կլինի նաև E բազմության չափը: □

Այսուհետ խոսելով աճող ֆունկցիայի $f'(x)$ ածանցյալի մասին՝ կհամարենք, որ այն որոշված է բոլոր $x \in [a,b]$ կետերի համար: Դրա համար կհամարենք, որ $f'(x) = 0$ այն կետերում, որտեղ ածանցյալը նույնիսկ անվերջ է կամ գոյություն չունի:

Թեորեմ 2.21.4: Եթե $\boldsymbol{f(x)}$-ը աճող ֆունկցիա է տրված $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ հատվածի վրա, ապա նրա $\boldsymbol{f'(x)}$ ածանցյալը չափելի է, և

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a),$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{f'(x)}$-ը ինտեգրելի է:

Ապացույց: $f(x)$-ը ընդլայնենք՝ համարելով $f(x) = f(b)$, երբ $b < x \le b+1$: Այս դեպքում ամենուրեք, որտեղ $f'(x)$-ը $f(x)$-ի ածանցյալն է, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)]$, այսինքն՝ $f'(x)$-ը համարյա ամենուրեք զուգամիտող չափելի ֆունկցիաների սահման է, և ուրեմն այն նույնպես չափելի է: Հաշվի առնելով, որ այն նաև ոչ բացասական է, կարող ենք խոսել նրա՝ $\int_a^b f'(x)dx$ Լեբեգի ինտեգրալի մասին: Ըստ Ֆատուի թեորեմի՝

$$\int_a^b f'(x)dx \le \sup\{n\int_a^b [f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)]dx\},$$

բայց

$$\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx = \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)dx$$

(քանի որ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա ինտեգրալը կարելի է հասկանալ Ռիմանի իմաստով և կատարել փոփոխականի փոխարինում)։ Այսինքն՝ ունենք՝

$$\int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx=\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)dx-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{n}f(b)-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx\le\frac{1}{n}[f(b)-f(a)],$$

որտեղից էլ հետևում է հետևյալ գնահատականը՝

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)\text{։ } \square$$

Թեորեմ 2.21.5։ [a, b] հատվածում ինչպիսի զրո չափանի E բազմություն էլ որ վերցնենք, գոյություն կունենա անընդհատ աճող $\boldsymbol{\sigma(x)}$ ֆունկցիա, որ բոլոր $\boldsymbol{x\in E}$ կետերի համար տեղի ունի $\boldsymbol{\sigma'(x)=+\infty}$։

Ապացույց։ Ամեն մի n բնական թվի համար կառուցենք այնպիսի բաց սահմանափակ G_n բազմություն, որ

$$G_n\supset E, mG_n<\frac{1}{2^n}\text{։}$$

Նշանակենք $\psi_n(x)=m\{G_n[a,x]\}$։ Այս ֆունկցիան աճող, ոչ բացասական, անընդհատ է և բավարարում է $\psi_n(x)<1/2^n$ անհավասարությանը։ Այդ պատճառով $\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ ունի նույն մոնոտոնության, անընդհատության հատկությունները և ոչ բացասական է։ Եթե $x_0\in E$, ապա բավականաչափ փոքր $|h|$-ի դեպքում $[x_0,x_0+h]$ հատվածը ամբողջովին ընկած կլինի G_n-ում։ Պարզության համար ընդունենք, որ $h>0$, այդ դեպքում կունենանք՝

$$\psi_n(x_0+h)=m\{G_n[a,x_0]+G_n(x_0,x_0+h]\}=\psi_n(x_0)+h$$

որտեղից

$$\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=1\text{։}$$

Սակայն այդ դեպքում ինչպիսի N բնական թիվ էլ չվերցնենք, բավականաչափ փոքր $|h|$-ի համար տեղի կունենա

$$\frac{\sigma(x_0+h)-\sigma(x_0)}{h}\ge\sum_{n=1}^{N}\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=N,$$

այնպես որ՝ $\sigma'(x)=+\infty$։ Թեորեմն ապացուցված է։ $\square$

Դիցուք՝ $f(x)$-ը տրված $[a,b]$ հատվածում անընդհատ է, և $m = \min\{f(x)\}, M = \max\{f(x)\}$: Ներմուծենք $N(y)$ ֆունկցիան տրված $[m,M]$ հատվածի վրա հետևյալ կերպ՝ այն հանդիսանում է $f(x) = y$ հավասարման արմատների քանակը, եթե արմատների բազմությունը անվերջ է, ապա $N(y) = +\infty$: $N(y)$-ը մենք կանվանենք *Բանախի ինդիկատրիս:*

Թեորեմ 2.21.6 (Ս. Բանախ): Բանախի ինդիկատրիսը չափելի է, և

$$\int_m^M N(y)dy = \bigvee_a^b (f):$$

Ապացույց: Բաժանենք $[a,b]$ հատվածը 2^n հավասար մասերի և նշանակենք

$$d_1 = \left[a, a - \frac{b-a}{2^n}\right]$$

$$d_k = \left(a + (k-1)\ \frac{b-a}{2^n}, a + k\frac{(b-a)}{2^n}\right]\ (k = 2,3, \dots, 2^n):$$

Ենթադրենք՝ $L_k(y)\,(k = 1,2, \dots, 2^n)$ ֆունկցիան 1 է, երբ $f(x) = y$ հավասարությունը d_k միջակայքում ունի գոնե մեկ արմատ: Եթե m_k-ն և M_k-ն $f(x)$ ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին և վերին սահմաններն են d_k-ում, ապա $L_k(y)$-ը 1 է (m_k, M_k) ինտերվալում և 0 է $[m_k, M_k]$ հատվածից դուրս, այսինքն՝ այդ ֆունկցիան կարող է ունենալ առավելագույնը 2 խզման կետ, և ակնհայտ է, որ այն չափելի է: Նշենք նաև, որ

$$\int_m^M L_k(y)dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

որտեղ ω_k-ն $f(x)$-ի տատանումն է $\overline{d_k}$-ի վրա: Ներմուծենք նաև $N_n(y) = L_1(y) + L_2(y) + \cdots + L_{2^n}(y)$, ակնհայտ է, որ այն չափելի է, և տեղի ունի

$$\int_m^M N_n(y)dy = \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k$$

և ըստ թեորեմ 2.21.2-ի՝

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)dy = \bigvee_a^b (f):$$

Հեշտ է նկատել, որ $N_1(y) \le N_2(y) \le N_3(y) \le \cdots$, և, ուրեմն, գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ սահման՝ $N^*(y) = \lim\limits_{n\to\infty} N_n(y)$, որը հանդիսանում է չափելի ֆունկցիա: Համաձայն Լևիի թեորեմի՝

$$\int_m^M N^*(y)dy = \lim_{n\to\infty}\int_m^M N_n(y)dy = \bigvee_a^b(f):$$

Եթե ապացուցենք, որ $N^*(y) = N(y)$, ապա թեորեմը կլինի ապացուցված: Նախ և առաջ ակնհայտ է, որ $N_n(y) \le N(y)$, որտեղից և $N^*(y) \le N(y)$: Եթե ենթադրենք, որ q-ն բնական թիվ է, ոչ մեծ, քան $N(y)$-ը, ապա կարելի է գտնել q հատ տարբեր $x_1 < x_2 < \cdots < x_q$ $f(x) = y$ հավասարման արմատներ: Եթե n-ը այնքան մեծ է, որ $\frac{b-a}{2^n} < \min(x_{k+1} - x_k)$, ապա այդ բոլոր q x_k արմատները ընկնում են տարբեր d_k ինտերվալների մեջ, այնպես, որ $N_n(y) \ge q$, որտեղից էլ $N^*(y) \ge q$: Եթե $N(y) = +\infty$, ապա q-ն կարելի է ընտրել ինչքան հնարավոր է մեծ, այնպես, որ $N^*(y) = +\infty$, եթե $N(y)$-ը վերջավոր է, ապա կարելի է վերցնել $q = N(y)$, և այդ դեպքում կստանանք $N^*(y) \ge N(y)$, բայց $N^*(y) \le N(y)$, որտեղից էլ կհետևի հավասարությունը: □

Հետևանք 1: Որպեսզի անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր աճ, անհրաժեշտ և բավարար է, որ նրա $N(y)$ Բանախի ինդիկատրիսը լինի ինտեգրելի:

Հետևանք 2: Եթե $f(x)$-ը վերջավոր աճով անընդհատ ֆունկցիա է, ապա նրա արժեքների բազմությունը, որը նա ստանում է անվերջ անգամ, ունի զրո չափ:

Իրոք, այդ դեպքում Բանախի ինդիկատրիսը, լինելով ինտեգրելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր է:

Դիցուք՝ $p > 0$, E-ն չափելի բազմություն է, և $L(E)$-ն Լեբեգի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիաների տարածությունն է:

Դիտողություն: Դժվար չէ համոզվել, որ եթե E բազմության վրա որոշված ֆունկցիան չափելի է, ապա կամայական $p > 0$-ի դեպքում չափելի կլինի նաև $|f(x)|^p$ ֆունկցիան: $L^p(E)$-ով նշանակենք E-ի վրա որոշված, չափելի բոլոր այն $f(x)$ ֆունկցիաների համախումբը, որոնց համար $|f(x)|^p \in L(E)$ կամ, որ նույնն է, $\exists (L)\int_E |f(x)|^p dx < \infty$:

Դիցուք՝ $\forall$ $f(x)$, $g(x) \in L^p(E)$, ապա 2 ֆունկցիաների հեռավորությունը (մետրիկա) $L^p(E)$-ում սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\rho_p(f,g)=\int_E |f(x)-g(x)|^p dx \text{ , եթե } p\in(0,1),$$

$$\text{և } \rho_p(f,g)=\left(\int_E |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p} \text{ , եթե } p\geq 1:$$

Դժվար չէ համոզվել նաև, որ $\rho_p(f,g)$-ն բավարարում է հեռավորության (մետրիկայի) աքսիոմներին, և $L^p(E)$-ն լրիվ մետրիկական տարածություն է. $L^p(E)$-ում ֆունդամենտալ յուրաքանչյուր $\{f_n(x)\}$ հաջորդականության համար $\exists\ f(x)\in L^p(E)$, որին զուգամիտում է այդ հաջորդականությունը՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in \mathrm{N},\ \ \forall\ m,\ n\geq n_0\ \ \rho_p(f_m,f_n)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists\ f(x)\in L^p(E)\ \ \lim_{m\to\infty}\rho_p(f,f_m)=0:$$

$\forall\ f(x)\in L^p(E)$, $p\geq 1$-ի դեպքում $\rho_p(f,0)=\|f\|_p$-ը կոչվում է նորմ, բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1) $\|f\|_p\geq 0$ $\|f\|_p=0\Leftrightarrow f(x)=0$ (հ. ա.),

2) $\forall\,\alpha\in R$, $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$,

3) $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$:

Խնդիրներ

1. Դիցուք՝

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, $\forall f(x)\in L^p[a,b]$, $g(x)\in L^q[a,b]$,

ապացուցել, որ $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$:

2. Ապացուցել, որ անընդհատ ֆունկցիաները ամենուրեք խիտ են $L^p[a,b]$-ում $\forall p\ge 1$-ի դեպքում, այսինքն՝ $\forall f(x)\in L^p[a,b], \forall \varepsilon>0 \;\; \exists g(x)\in C[a,b]$, այնպես, որ $\|g-f\|_p<\varepsilon$:

3. Ենթադրենք՝ ունենք երկու ֆունկցիա՝ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$, որոնք անընդհատ են, ձգտում են 0-ի, բայց ψ -ն ավելի արագ՝ $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\to 0$, երբ $x\to 0$: Գոյություն ունե՞ն արդյոք այնպիսի $x_n\downarrow 0$ կետեր, որ $\sum\psi(x_k)<\infty$, և $\sum\varphi(x_k)=\infty$ (φ -ը և $\psi(x)$-ը տարրական ֆունկցիաներ են):

4. **(Դինիի թեորեմ):** Ենթադրենք՝ ունենք $f_n(x)\in C[a;b]$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որոնք $\forall x\in[a;b]$ կետում մոնոտոն (օրինակ՝ նվազելով) զուգամիտում են $f(x)\in C[a;b]$ ֆունկցիային: Այդ դեպքում զուգամիտությունը հավասարաչափ է:

5. **(Մինկովսկու անհավասարություն):** Դիցուք՝ $p\ge 1$, և $f(x),g(x)\in L^p[a,b]$: Ցույց տվեք, որ $f+g\in L^p[a,b]$

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}:$$

6. Դիցուք՝ $\{a_k\}_{k=1}^n$ $\{b_k\}_{k=1}^n$-ն կամայական դրական թվեր են, իսկ $p>1$: Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{k=1}^n (a_k)^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n (b_k)^p\right]^{1/p}$$

Գլուխ 3.

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈՆՈՐՄԱԼ ԴԱՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

§3.1. Ընդհանուր օրթոնորմալ համակարգեր

Դիցուք՝ $\varphi_n(x) \in L^2[a,b]$, $n = 1,2,\ldots$

Սահմանում 3.1.1: $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը կոչվում է օրթոնորմալ համակարգ, եթե

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}:$$

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ $[-\pi,\pi]$-ում եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հաջորդականությունը՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\cdots\ x \in [-\pi,\pi],$$

օրթոնորմալ համակարգերի դասական օրինակ է:

Դիցուք՝ $f(x) \in L^2[a,b]$: $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգի առաջին n ֆունկցիաների գծային կոմբինացիան՝ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$ -ը կանվանենք պոլինոմ, բազմանդամ՝ ըստ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ համակարգի:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝ գտնել յուրաքանչյուր $f(x) \in L^2[a,b]$ ֆունկցիային միջին քառակուսային իմաստով ամենամոտ պոլինոմը՝

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^{n}} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) \right\|_2 = R_n(f):$$

Ձևափոխենք

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)dx -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + 2\sum_{k \neq k'} a_k a_{k'} \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_{k'}(x)dx:$$

Նշանակենք $c_k(f) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx,\ 1 \le k \le n$ և օգտվենք $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ համակարգի օրթոնորմալությունից, կունենանք՝

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2 \ge$$

$$\ge \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(f) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) \right]^2 dx:$$

Պարզ է, որ հավասարություն կստացվի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_k \equiv c_k(f) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\ \ \forall k \in [1,n]$, և հետևաբար էքստրեմալ խնդրի լուծումը կլինի

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^{n}} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) \right]^2 dx:$$

Դիտարկված էքստրեմալ խնդրի լուծման մեջ $a_k \equiv c_k(f) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\ \ \forall k \ge 1$-ը կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներ՝ ըստ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգի, և $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(x)$ շարքը՝ $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարք՝ ըստ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգի: Ստացվածը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Թեորեմ: n-րդ կարգի պոլինոմների դասում $f(x)\in L^2[a,b]$-ֆունկցիային միջին (L^2-ի նորմի) իմաստով ամենամոտը $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարքի n-րդ մասնակի գումարն է՝ $S_n(x,f)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k(f)\varphi_k(x)$-ը:

Համոզվենք, որ $\forall f(x)\in L^2[a,b]$-ի Ֆուրիեի գործակիցների հաջորդականությունը (ըստ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգի)՝ $\{c_k(f)\}\in l_2$:

Իրոք, $\int\limits_a^b f^2(x)dx-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k^2(f)=\int\limits_a^b\left[f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k(f)\varphi_k(x)\right]^2dx\geq 0$,

այստեղից կստացվի՝

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2(f)\leq\int_a^b f^2(x)dx,$$

և կատարելով սահմանային անցում, երբ $n\to\infty$, կունենանք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2(f)\leq\int_a^b f^2(x)dx:$$

Ստացված անհավասարումը կոչվում է Բեսսելի անհավասարում, որից անմիջապես հետևում է, որ $L^2[a,b]$ դասի կամայական ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները ձգտում են 0-ի: Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.1.1: Ինտեգրելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները, ըստ հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմալ համակարգի, ձգտում են 0-ի:

Ապացույցում: Դիցուք՝ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$-ը հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմալ համակարգ է, այսինքն՝ $\exists B>0$, այնպիսին, որ $|\varphi_k(x)|\leq B\ \ \forall x\in[a,b],\ \forall k\in\mathrm{N}$: Դիցուք՝ ε-ը ցանկացած դրական թիվ է, և $f(x)$-ը ցանկացած ինտեգրելի ֆունկցիա է: Քանի որ $[a,b]$-ում անընդհատ ֆունկցիաները ամենուրեք խիտ են $L[a,b]$-ում (տե՛ս խնդիր 2), ընտրենք $g(x)\in C[a,b]$, այնպիսին, որ

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2B} \ : \tag{3.1.1}$$

Հաշվի առնելով այն փաստը, որ $L^2[a,b]$ դասի ցանկացած ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի, ապա $\exists \ n_0(\varepsilon)\in \mathrm{N}$, այնպիսին, որ $\forall \, n \geq n_0$՝

$$\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx < \frac{\varepsilon}{4B} :$$

Հաշվի առնելով (3.1.1) առնչությունները՝ $\forall \, n \geq n_0$-ի համար կստանանք՝

$$|c_k(f)| = \left|\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)-g(x)||\varphi_k(x)|dx +$$

$$+\left|\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2B}\cdot B + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Դիտողություն 3.1.1: $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգի հավասարաչափ սահմանափակ լինելը էական պայման է այդ համակարգով, ինտեգրելի ֆունկցիաների ($L^1[a,b]$-դասի) Ֆուրիեի գործակիցների հաջորդականության անվերջ փոքր լինելու համար: Իրոք, դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(h_k^{(j_k)}(x)\right)\cdot 2^{\frac{2}{3}k}, \ \ x \in \left[\frac{j_k-1}{2^k}, \frac{j_k}{2^k}\right) = \Delta_k^{(j_k)} :$$

Օրթոնորմալ համակարգի մեկ այլ օրինակ է $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Հաարի համակարգը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\{h_n(x)\} = \left\{\{h_k^{(j)}(x)\}_{j=1}^{2^k} \ k=1,2,...\right\} \ h_0(x)\equiv 1$$

$$n = 2^k + j, \ \ h_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & x \in \left(\dfrac{j-1}{2^k}, \dfrac{2j-1}{2^{k+1}}\right) \\ -2^{\frac{k}{2}}, & x \in \left(\dfrac{2j-1}{2^{k+1}}, \dfrac{j}{2^k}\right) \end{cases}$$

որտեղ $\{j_k\}$ հաջորդականությունը $j_k \uparrow \infty$ ընտրված է այնպես, որ

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{j_k-1}{2^k},\frac{j_k}{2^k}\right)\equiv[0,1):$$

Նախ համոզվենք, որ $f(x)\in L^1[a,b]$,

$$\int_0^1|f(x)|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Delta_k^{(j_k)}}|f(x)|dx=\sum_{k=1}^{\infty}2^{\frac{2}{3}k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)^k<\infty:$$

Այժմ համոզվենք, որ $f(x)$-ի՝ Հաարի համակարգով Ֆուրիեի գործակիցների՝ $\{c_n(f)\}$-երի $\{c_{n_k}(f)\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականությունը, որտեղ $n_k=2^k+j_k$, տարամիտում է անվերջության: Իրոք,

$$c_{n_k}(f)=\int_0^1 f(x)h_{n_k}(x)dx=\int_0^1 f(x)h_k^{(j_k)}(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Delta_k^{(j_k)}}f(x)h_k^{(j_k)}(x)dx=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{2k}{3}}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{\frac{k}{6}}=+\infty:$$

Սահմանում 3.1.2: $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է փակ $L^2[a,b]$-ում, եթե ցանկացած $f(x)\in L^2[a,b]$, և ցանկացած $\varepsilon>0$-ի համար գոյություն ունի պոլինոմ ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ համակարգի՝ $P(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\,\varphi_k(x)$, այնպիսին, որ $\int_{[a,b]}\big(f(x)-P(x)\big)^2dx<\varepsilon$:

Սահմանում: $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է լրիվ $L^2[a,b]$-ում, եթե որևէ $f(x)\in L^2[a,b]$-ի համար բավարարված են հետևյալ պայմանները $\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)dx=0\,,k=1,2,\ldots$, այստեղից հետևում է, որ $f(x)=0$:

Թեորեմ 3.1.2: Դիցուք՝ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը օրթոգոնալ համակարգ է $[a,b]$-ում: Այդ դեպքում հետևյալ պնդումների յուրաքանչյուր զույգ համարժեք է:

1) Ցանկացած $f(x)\in L^2[a,b]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք ըստ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգի նորմով զուգամիտում է:
2) Տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} {c_k}^2 \equiv \int_a^b f^2(x)dx:$$

3) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը փակ է $L^2[a,b]$-ում:

4) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը լրիվ է $L^2[a,b]$-ում:

Ապացույց: Դիցուք՝ $f(x) \in L^2[a,b]$:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} {c_k}^2(f)$$

հավասարումից անմիջապես ստացվում է 1) և 2) պահանջների համարժեքությունը:

Ակնհայտ է, որ $\forall f(x) \in L^2[a,b]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը նորմով զուգամիտում է իրեն, այսինքն՝

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx = 0,$$

0:

հետևաբար $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists\, n_0(\varepsilon) \in N$, այնպիսի, որ $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ $\int_a^b \left(S_{n_0}(f,x) - f(x)\right)^2 dx < \varepsilon$, որտեղ $S_{n_0}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x)$:

Ստացվեց, որ համակարգը փակ է:

Ապացուցեցինք, որ 1) $\Rightarrow$ 3): Այժմ ապացուցենք, որ 3) $\Rightarrow$ 1):

Դիցուք՝ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը փակ է $L^2[a,b]$-ում: Համաձայն սահմանման՝ $\forall f(x) \in L^2[a,b]$, և $\varepsilon > 0$-ի համար $\exists P(x)$=$\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k\varphi_k(x)$, այնպիսի, որ

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx < \varepsilon:$$

Այժմ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ համակարգի համար կիրառելով Բեսսելի անհավասարությունը՝ կստանանք՝

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx \leq \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx < \varepsilon:$$

Հաշվի առնելով, որ $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(f) \leq$$

$$\leq \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} c_k^2(f) = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx < \varepsilon:$$

Ապացուցվեց, որ $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների $\{S_n(x,f)\}$ հաջորդականությունը միջին իմաստով զուգամիտում է իրեն:

Խնդիր 1: Պարզել միջին իմաստով զուգամիտության կապը համարյա ամենուրեք և ըստ չափի զուգամիտության հետ:

Խնդիր 2: Դիցուք՝ $\{h_n(x)\}$-ը Հաարի համակարգն է՝ նորմավորված L_2-ում:

Ապացուցել, որ հետևյալ համակարգը՝ $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_n(x) = \int_0^x h_n(t)\,dt, n = 1, 2, \ldots.,$ $x \in [0;1]$ (Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգ), հանդիսանում է բազիս $C[0;1]$ անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում, այսինքն՝ $\forall$ $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի միակ շարք ըստ այդ համակարգի՝ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(x)$, որը $[0;1]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է իրեն:

Թեորեմ 3.1.3: Դիցուք՝ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$-ը օրթոնորմալ համակարգ է, և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ շարքը միջին իմաստով $L^2[a,b]$ նորմով զուգամիտում է $f(x) \in L^2[a,b]$ ֆունկցիային:

Այդ դեպքում $\forall m \in N$-ը և $a_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx$-ը $f(x)$-ի Ֆուրիեի գործակիցներն են ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ համակարգի:

Ապացույց: Ըստ թեորեմի պայմանի՝

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx = 0,$$

հետևաբար, $\forall\varepsilon > 0$ համար $\exists$ $n_0(\varepsilon) \in N$, այնպիսի, որ $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ $\int_a^b (\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x))^2 dx < \varepsilon, \forall n \geq n_0(\varepsilon)$:

Կիրառելով Կոշիի անհավասարությունը $\forall m \in N$-ի համար՝ կստանանք, որ

$$\left|\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right)\varphi_m(x)dx - \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx\right| =$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right)\varphi_m(x)dx \le$$

$$\le \left(\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\|\varphi_m(x)\right\|_2 < \varepsilon,$$

հետևաբար՝

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right)\varphi_m(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx:$$

Հաշվի առնելով, որ $\{\varphi_n(x)\}$-ը օրթոնորմալ համակարգ է, կստանանք՝ $\forall n > m$՝

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right)\varphi_m(x)dx = a_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx:$$

§3.2. Եռանկյունաչափական համակարգով Ֆուրիեի շարքեր

Եռանկյունաչափական Ֆուրիեի շարքեր: Բնության մեջ և տեխնիկայում մենք հաճախ հանդիպում ենք ժամանակից կախված պարբերական մեծությունների: Ցանկացած մեքենայի կամ մեխանիզմի աշխատանքի հետ կապված պրոցեսները, ֆիզիկայում ուսումնասիրվող պրոցեսներն ու երևույթները այդպիսի մեծությունների օրինակներ են:

Կիրառական շատ խնդիրներում կարիք է լինում տրված պարբերական ֆունկցիան ներկայացնել

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

պարզագույն հարմոնիկների գումարի տեսքով (այստեղ $|A|$-ն անվանում են ամպլիտուդ, ω-ն՝ հաճախություն, φ-ն՝ սկզբնական ֆազա), որտեղ

$$A=\sqrt{a^2+b^2}, \sin\varphi=\frac{a}{A}, \cos\varphi=\frac{b}{A}:$$

2π պարբերական ֆունկցիան այսպիսի հարմոնիկների գումարի տեսքով ներկայացնելու համար պետք է պահանջենք, որ վերջիններս ևս լինեն 2π պարբերական, այսինքն՝ $n\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$, որտեղից $\omega=n$:

Այսպիսով՝ մենք գալիս ենք 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան

$$f(x)=A_0+A_1\sin(t+\varphi)+A_2\sin(2t+\varphi)+A_3\sin(3t+\varphi)+...=$$
$$=A_0+(a_1\cos t+b_1\sin t)+(a_2\cos 2t+b_2\sin 2t)+...+(a_n\cos nt+b_n\sin nt)+...$$

տեսքով ներկայացնելու խնդրին:

Սահմանում 3.2.1: Ֆունկցիաների

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, ..., \cos nt, \sin nt, ...\}$$

համակարգը անվանում են եռանկյունաչափական համակարգ:

Սահմանում 3.2.2: Եռանկյունաչափական շարք անվանում են

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos kt+d_k\sin kt, \qquad c_k, d_k\in R$$

տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը:

Եռանկյունաչափական շարքերի մեջ առանձնահատուկ կարևորություն ու կիրառական նշանակություն ունեն այսպես կոչված «Ֆուրիեի շարքերը»: Դրանք յուրաքանչյուր հանրագումարելի ֆունկցիային համապատասխանեցրած որոշակի գործակիցներով (այդ ֆունկցիայից կախված) եռանկյունաչափական շարքեր են: Ֆուրիեի շարքերի սահմանմանը կարելի է գալ հետևյալ պարզ դատողություններով: Ենթադրենք 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա «ներկայացվում է» իրեն հավասարաչափ զուգամիտող ինչ-որ եռանկյունաչափական շարքով՝

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx, \qquad x\in[-\pi,\pi]:$$

Այս հավասարության երկու մասը բազմապատկելով նախ $\cos mx$-ով, այնուհետև՝ $\sin mx$-ով, ինտեգրելով $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա և հաշվի առնելով, որ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx = 0, \qquad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi,$$

ստանում ենք՝

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \qquad k = 0,1,2,\ldots :$$

Սահմանում 3.2.3: $[-\pi, \pi]$ հատվածի վրա հանրագումարելի $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք անվանում են

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{3.2.1}$$

ֆունկցիոնալ շարքը, որտեղ

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{3.2.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \qquad k = 1,2,\ldots : \tag{3.2.3}$$

Վերևում ներկայացված դատողությունների հիման վրա կարող ենք ասել, որ **եթե ունենք ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված ֆունկցիա, որը վերլուծված է հավասարաչափ զուգամետ եռանկյունաչափական շարքի, ապա այդ շարքն իր Ֆուրիեի շարքն է, այլ կերպ ասած՝ առանցքի վրա հավասարաչափ զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքը իր գումարի Ֆուրիեի շարքն է:** Ճիշտ է նաև այս փաստի հետևյալ ընդհանրացումը:

Թեորեմ 3.2.1: Եթե

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

եռանկյունաչափական շարքն ունի $f(x)$ ֆունկցիային $[-\pi, \pi]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտող մասնակի գումարների ենթահաջորդականություն, ապա այդ շարքը $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

Ապացույց: Ենթադրենք՝ դիտարկվող շարքի $S_{n_k}(x), k=1,2,\ldots$ մասնակի գումարների հաջորդականությունը $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: Այդ դեպքում

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_{n_k}(t)-f(t)\right|dt=0,$$

որտեղից ցանկացած m բնական թվի դեպքում

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[S_{n_k}(t)-f(t)\right]\cos mtdt=0,\qquad \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[S_{n_k}(t)-f(t)\right]\sin mtdt=0,$$

կամ, որ նույնն է,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}S_{n_k}(t)\cos mtdt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mtdt,$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}S_{n_k}(t)\sin mtdt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mtdt:$$

Մյուս կողմից՝ $n_k\ge m$ դեպքում ունենք՝

$$\int_{-\pi}^{\pi}S_{n_k}(t)\cos mtdt=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mtdt=\pi a_m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}S_{n_k}(t)\sin mtdt=b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mtdt=\pi b_m,$$

հետևաբար՝

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mtdt,\qquad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mtdt:$$

Այսպիսով՝ թեորեմի պայմանների ներքո a_m և b_m թվերը հանդիսանում են $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներ, հետևաբար դիտարկվող շարքը այդ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

Թեորեմ 3.2.1-ն ապացուցված է:

Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների ինտեգրալ ներկայացումը: Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան հանրագումարելի է $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա: Նրա Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարները ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx: \tag{3.2.4}$$

Օգտվելով (3.2.2) և (3.2.3) բանաձևերից՝ (3.2.4) արտահայտությունը կարելի է բերել ինտեգրալ տեսքի: Ունենք՝

$$S_n(x,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt\right)\cos kx+$$

$$+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt\right)\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt, \tag{3.2.5}$$

որտեղ

$$D_n(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku: \tag{3.2.6}$$

Այս ֆունկցիան անվանում են «Դիրիխլեի կորիզ»: Դիրիխլեի կորիզը կարելի է ներկայացնել հարմար բանաձևով: Կիրառելով հայտնի եռանկյունաչափական բանաձևերը՝ կարող ենք գրել՝

$$D_n(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\right]=$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}: \tag{3.2.7}$$

Այսպիսով՝ ինտեգրելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարները, համաձայն (3.2.5) և (3.2.7) բանաձևերի, ունեն այսպիսի տեսք՝

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt: \tag{3.2.8}$$

(3.2.4) և (3.2.8) բանաձևերի օգնությամբ կարելի է համոզվել, որ Դիրիխլեի կորիզի ինտեգրալը $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա հավասար է π-ի: Իրոք, նույնաբար 1 ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները, բացի $a_0=2$-ից, 0 են, հետևաբար՝

$$S_n(x,1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=1: \tag{3.2.9}$$

Հետագայում մեզ պետք կգա նաև մասնակի գումարների

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \tag{3.2.10}$$

ներկայացումը, որն անմիջապես կստացվի (3.2.8) բանաձևից՝ փոփոխականի փոխարինման և Դիրիխլեի կորիզի զույգության օգտագործումով:

§3.3. Եռանկյունաչափական համակարգի լրիվությունը L(−π; π) տարածությունում

Մենք կապացուցենք, որ եռանկյունաչափական համակարգը լրիվ է $L(-\pi,\pi)$ տարածության մեջ, այսինքն՝ կհամոզվենք, որ երկու հանրագումարելի ֆունկցիաներ ունեն միատեսակ Ֆուրիեի շարքեր միայն այն դեպքում, եթե նրանք համընկնում են համարյա ամենուրեք $(-\pi,\pi)$ միջակայքում: Այլ կերպ ասած՝ եթե հանրագումարելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները 0 են, ապա այդ ֆունկցիան $(-\pi,\pi)$-ի վրա էկվիվալենտ է 0-ին:

Նախ ցույց տանք, որ եթե հայտնի է եռանկյունաչափական համակարգի լրիվությունը C-ում, ապա այստեղից կհետևի այդ համակարգի լրիվությունը L-ում: Իրոք, դիցուք՝ f (x) $\in L$, և

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt = 0, \qquad k = 0,1,..., \tag{3.3.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt = 0, \qquad k = 1,2,...: \tag{3.3.2}$$

Այդ դեպքում f(x) ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները նշանակելով a_n -ով և b_n-ով՝ կունենանք՝

$$a_n = 0\ (n = 0,1,...),\ b_n = 0\ (n = 1,2,...):$$

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt\,, -\pi \le x \le \pi,$$
$$F(x + 2\pi) = F(x):$$

Պարզ է, որ F(π) = πa_0= 0, և F(-π) = 0, հետևաբար F(x) ֆունկցիան անընդհատ է ոչ միայն $[-\pi,\pi]$ հատվածում, այլ նաև ամբողջ $-\infty < x < +\infty$ թվային առանցքի վրա: Օգտագործելով (3.3.1) և (3.3.2) հավասարությունները և կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը՝ $F(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի A_n և B_n գործակիցների համար կստանանք՝

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nxdx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0\,,$$

նույն կերպ՝

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nxdx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = 0\ (n = 1,2,...):$$

Այսպիսով՝ F(x) ֆունկցիայի բոլոր Ֆուրիեի գործակիցները, բացի A_0-ից, հավասար են զրոյի: Վերցնենք ϕ(x) = F(x) $-\frac{A_0}{2}$: Քանի որ F(x) ֆունկցիան անընդհատ է, $\phi(x)$-ը ևս կլինի անընդհատ: Մյուս կողմից՝ պարզ է, որ $\phi(x)$-ի Ֆուրիեի բոլոր գործակիցները 0 են: Ենթադրենք՝ եռանկյունաչափական համակարգը լրիվ է C-ում: Նշանակում է, որ $\phi(x) \equiv 0$, և հետևաբար $F(x) = \frac{A_0}{2} = const$: Բայց քանի որ համարյա ամենուրեք տեղի ունի $F'(x) = f(x)$ հավասարությունը, ապա համարյա ամենուրեք ևս տեղի ունի $f(x) = 0$ հավասարությունը: Այսպիսով՝

եռանկյունաչափական համակարգի C-ում լրիվությունից հետևում է այդ համակարգի լրիվությունը L-ում:

Ապացուցենք, որ եռանկյունաչափական համակարգը լրիվ է C-ում: Ենթադրենք, որ f (x) ∈ C ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները հավասար են 0-ի: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան օրթոգոնալ է եռանկյունաչափական համակարգի բոլոր ֆունկցիաներին, ապա այն օրթոգոնալ է նաև ցանկացած եռանկյունաչափական բազմանդամի: Այսինքն՝ ցանկացած $T_n(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամի համար տեղի ունի

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T(x) dx = 0: \tag{3.3.3}$$

Ենթադրենք՝ $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան նույնաբար 0 չէ: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում $T_n(x)$ բազմանդամը կարելի է ընտրել այնպես, որ (3.3.3) հավասարության ձախ մասի ինտեգրալը լինի դրական: Ստացված հակասությունից կհետևի այն, ինչ ուզում ենք ապացուցել:

Դիցուք՝ $f(x) \neq 0$, այս դեպքում կգտնվի այնպիսի ζ կետ, որտեղ $f(\zeta) = c \neq 0$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ կարելի է ենթադրել, որ $c > 0$: Կարելի է նաև համարել, որ $\zeta = 0$: Իրոք, եթե մենք կարող ենք $\varphi(0) > 0$ պայմանին բավարարող φ(x) ֆունկցիայի համար ընտրել այնպիսի $T_n(x)$ բազմանդամը, որ տեղի ունենա $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, T_n(x) dx > 0$ անհավասարությունը, ապա վերցնելով $\varphi(x) = f(\zeta + x)$ և $T_n(x) = T_n^*(x - \zeta)$՝ կտեսնենք, որ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, T_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x)\, T_n(\zeta + x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) T_n^*(x)\, dx > 0:$$

Այսպիսով՝ մնում է ապացուցել, որ եթե $f(0) = c > 0$, և $f(x)$-ը անընդհատ է, ապա կարելի է գտնել $T_n(x)$ բազմանդամ, որի համար

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x) dx > 0: \tag{3.3.4}$$

Բայց եթե $f(0) = c > 0$, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից բխում է, որ $f(x) \geq \frac{c}{2}$ 0-ի ինչ-որ $(-\delta, +\delta)$ շրջակայքում: Ունենք՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\, T_n(x) dx + \int_{-\pi}^{-\delta} f(x)\, T_n(x) dx +$$
$$+ \int_{\delta}^{\pi} f(x)\, T_n(x) dx:$$

f(x) ֆունկցիան անընդհատ է և հետևաբար նաև սահմանափակ, այսինքն՝ $|f(x)| \leq M, -\pi \leq x \leq \pi$, որտեղ M-ը հաստատուն է: Դիցուք՝ տրված է $A > 0$ թիվը: Ենթադրենք՝ մեզ հաջողվել է գտնել $T_n(x)$ բազմանդամ՝ բավարարող հետևյալ պայմաններին՝

$$T_n(x) \geq 1, (x \in -\delta, \delta), \tag{3.3.5}$$
$$\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)dx > A, \tag{3.3.6}$$
$$|T_n(x)| \leq 1, x \in (-\pi, \delta) \cup (\delta, \pi): \tag{3.3.7}$$

Վերցնենք $A > \frac{4M\pi}{C}$: (3.3.5)-(3.3.7) առնչություններից կհետևի
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x)dx > \frac{CA}{2} - 2\pi M > 0,$$
այսինքն՝ (3.3.4)-ը կլինի ճիշտ: Այսպիսով՝ մեզ մնում է ընտրել այնպիսի $T_n(x)$ բազմանդամ, որը կբավարարի (3.3.5)-(3.3.7) պայմաններին: Այդպիսի $T_n(x)$ բազմանդամ գտնելու համար նկատենք, որ եթե $T(x) = 1 + \cos x - \cos\delta$, ապա $T(x) \geq 1$ $(-\delta, \delta)$ միջակայքում, և $T(x) \leq 1$ $(-\delta, \delta)$ միջակայքից դուրս, և հետևաբար $T_n(x) = [T(x)]^n$ ֆունկցիայի համար կունենանք $|T_n(x)| \leq 1(-\delta, \delta)$ միջակայքից դուրս, $T_n(x) \geq 1$ $\left(-\delta, \delta\right)$ միջակայքում: Բացի դրանից՝ $\left(\frac{-\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ միջակայքում $T(x) > 1 + \cos\frac{\delta}{2} - \cos\delta = q > 1$, և հետևաբար $\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)\, dx > \int_{\frac{-\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} T_n(x)\, dx > q^n\delta \to \infty$, երբ n$\to \infty$: Նշանակում է, որ ցանկացած A թվի համար բավականաչափ մեծ n ընտրելու դեպքում (3.3.6) անհավասարությունը այսպես ընտրված $T_n(x)$-ի համար տեղի ունի: Մնում է նկատել, որ $T_n(x)$-ը եռանկյունաչափական բազմանդամ է:

Այսպիսով՝ եռանկյունաչափական համակարգի լրիվությունը $L(-\pi, \pi)$ տարածությունում ապացուցված է: □

Դիտողություն 3.3.1: L^p տարածությունում եռանկյունաչափական համակարգի լրիվության սահմանումից հետևում է, որ եթե $p' > p$, ապա L^p տարածությունում լրիվությունը հանգեցնում է $L^{p'}$ տարածության մեջ լրիվությանը: Մասնավորապես եռանկյունաչափական համակարգը, որը լրիվ է L-ում, կլինի լրիվ L^p-ում ցանկացած $p > 1$-ի դեպքում:

§3.4. Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության լոկալիզացիայի սկզբունքը: Դինի հայտանիշը

Համաձայն (3.2.8) բանաձևի՝ $f(x)$ հանրագումարելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարները կարելի է ներկայացնել

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \qquad (3.4.1)$$

տեսքով: Վերցնենք կամայական $\delta>0$ թիվ և դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$g(u)=\begin{cases} 0, & u\in[-\delta,\delta] \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}, & u\in[-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi), \end{cases}$$

$$g(u+2\pi)=g(u), \qquad u\in R:$$

Ակնհայտ է, որ ֆիքսած $\delta>0$ թվի դեպքում $g(u)$-ն թվային առանցքի վրա որոշված 2π պարբերական, սահմանափակ ֆունկցիա է: Օգտվելով (3.4.1)-ից՝ կարող ենք գրել՝

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt: \qquad (3.4.2)$$

Ցանկացած x իրական թվի դեպքում $f(x+t)g(t)$ ֆունկցիան հանրագումարելի է, հետևաբար Ռիմանի լեմմի օգնությամբ կարող ենք ասել, որ (3.4.2)-ի երկրորդ ինտեգրալը յուրաքանչյուր ֆիքսած x թվի դեպքում 0-ի է ձգտում: Այսպիսով՝

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+o(1), \qquad (3.3.3)$$

որտեղ $o(1)$-ը ձգտում է 0-ի, երբ $n\to\infty$: (3.4.3) բանաձևը թույլ է տալիս կատարել հետևյալ կարևոր եզրակացությունը, որը կոչվում է Ռիմանի լոկալիզացիայի սկզբունք:

Թեորեմ 3.4.1 (Ռիման): Ֆուրիեի շարքի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը տրված x կետում կախված է f ֆունկցիայի՝ միայն այդ կետի շրջակայքում ունեցած վարքից:

Իրոք, (3.4.3) բանաձևում f ֆունկցիայի արժեքները $(x-\delta, x+\delta)$ միջակայքից դուրս ընդհանրապես չեն մասնակցում, հետևաբար $S_n(x, f)$ հաջորդականության համար սահման ունենալը $n \to \infty$ ձգտելիս կախված է f-ի՝ միայն այդ ինտերվալի վրա ունեցած վարքից:

Վերջին արդյունքը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ համարժեք ձևով. **եթե f_1 և f_2 ֆունկցիաները համընկնում են x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում, ապա դրանց Ֆուրիեի շարքերը x_0 կետում միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ:** Իրոք, այդ դեպքում $f_1 - f_2$ ֆունկցիան x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում նույնաբար 0 է, հետևաբար, (3.4.3) բանաձևի համաձայն, նրա Ֆուրիեի շարքի $S_n(x, f_1 - f_2)$ մասնակի գումարները $x = x_0$ կետում 0-ի են ձգտում, երբ $n \to \infty$, մյուս կողմից՝

$$S_n(x, f_1 - f_2) = S_n(x, f_1) - S_n(x, f_2):$$

Դինի հայտանիշը: Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության տեսության կարևորագույն հարցերից մեկը ֆունկցիայի վրա դրվող այնպիսի պահանջների հետազոտությունն է, որոնք ապահովում են տրված կետում նրանց Ֆուրիեի շարքի զուգամիտությունը: Այդպիսի բավարար պայմաններից մի քանիսը կներկայացնենք ստորև:

Սահմանում 3.4.1: x_0 կետն անվանում են f ֆունկցիայի ռեգուլյարության կետ, եթե $f(x_0 \pm 0)$ թվերը գոյություն ունեն, և

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}:$$

Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիայի անընդհատության կետերը հանդիսանում են այդ ֆունկցիայի ռեգուլյարության կետեր: Ռեգուլյարության կետ է նաև ֆունկցիայի առաջին սեռի խզման այնպիսի կետը, որում ֆունկցիայի արժեքը հավասար է այդ կետում նրա աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանների կիսագումարին: Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.4.2 (Դինի հայտանիշ): Դիցուք՝ f -ը ինտեգրելի ֆունկցիա է, և x_0 -ն նրա համար ռեգուլյարության կետ է: Եթե ինչ-որ $\delta > 0$ թվի դեպքում

$$\int_0^{\delta} \frac{\left|f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)\right|}{u}\,du \qquad (3.4.4)$$

ինտեգրալը վերջավոր է, ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը x_0 կետում զուգամիտում է $f(x_0)$ -ին:

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: (3.4.4) ինտեգրալի վերջավոր լինելուց հետևում է, որ կգտնվի $\eta_\varepsilon > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_0^{\eta_\varepsilon} \frac{\left|f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)\right|}{u}\,du < \varepsilon : \qquad (3.4.5)$$

Օգտվելով (3.2.9) և (3.2.10) բանաձևերից՝ կարող ենք գրել ՝

$$S_n(x_0,f)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\right]\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta_\varepsilon}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\right]\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\eta_\varepsilon}^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\right]\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=I_1+I_2 : \qquad (3.4.6)$$

Հաշվի առնելով $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \pi/2$ անհավասարությունը և (3.4.5)-ը՝ բոլոր n բնական թվերի դեպքում ունենք՝

$$|I_1| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta_\varepsilon}\frac{\left|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\right|}{t}\,dt\right| < \varepsilon/2 : \qquad (3.4.7)$$

Քանի որ ֆիքսած $\eta_\varepsilon > 0$ թվի դեպքում $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ արտահայտությունը $[\eta_\varepsilon, \pi]$ հատվածի վրա սահմանափակ է (օրինակ՝ n-ից անկախ $\sin^{-1}\frac{\eta_\varepsilon}{2}$ թվով), ապա Ռիմանի լեմմի կիրառմամբ կարող ենք պնդել, որ բավականաչափ մեծ n բնական թվերի դեպքում

$$\left|\int_{\eta_\varepsilon}^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)\right]\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}: \quad (3.3.8)$$

(3.4.7) և (3.4.8) անհավասարություններից բավականաչափ մեծ n բնական թվերի դեպքում ստանում ենք (տե՛ս (3.3.6))՝

$$\left|S_n(x_0, f)-f(x_0)\right|<\varepsilon:$$

Թեորեմ 3.4.2-ն ապացուցված է: □

Վերջին թեորեմի օգնությամբ կարող ենք դուրս բերել գործնական կարևորություն ունեցող մի քանի փաստեր:

Սահմանում 3.4.2: Ասում են, որ f ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի x_0 ներքին կետի ինչ-որ շրջակայքում բավարարում է Հելդերի $\alpha > 0$ կարգի դասին կամ H^α դասին, եթե գոյություն ունի $K > 0$ թիվ, որի դեպքում

$$\left|f(x_0+u)-f(x_0)\right|\le K|u|^\alpha$$

անհավասարությունը ճիշտ է $|u|\le\delta$ ($\delta>0$) պայմանին բավարարող բոլոր u–երի համար:

Դժվար չէ համոզվել, որ x_0 կետում վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիան այդ կետի ինչ-որ շրջակայքում պատկանում է H^α դասին ցանկացած $\alpha\in(0,1]$ թվի դեպքում:

Հաշվի առնելով վերջին դիտողությունը՝ եզրակացնում ենք հետևյալը:

Հետևանք 3.4.1: x_0 **կետի ինչ-որ շրջակայքում Հելդերի** H^{α} **դասին պատկանող** f **ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է** $f(x_0)$ **-ին:**

Իրոք, այս դեպքում f ֆունկցիան x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում անընդհատ է և բավականաչափ փոքր $\delta > 0$ թվի դեպքում՝

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)|}{u} du \le 2K \int_0^{\delta} \frac{1}{u^{1-\alpha}} du < +\infty ,$$

այսինքն՝ Դինի պայմանը տեղի ունի:

Հետևանք 3.4.2: Եթե x_0 **կետում** f **ֆունկցիան վերջավոր ածանցյալ ունի, ապա նրա Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է** $f(x_0)$ **-ին: Մասնավորապես** $(-\pi,\pi)$ **միջակայքում դիֆերենցելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը նշված ինտերվալում զուգամիտում է այդ ֆունկցիային:**

§3.5. Անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի զուգամիտությունը

Այս պարագրաֆում մասնավորապես կապացուցենք, որ եթե ֆունկցիայի վրա բացի անընդհատությունից այլ պայմաններ դրված չեն, ապա նրա Ֆուրիեի շարքը կարող է ինչ-որ կետում տարամիտել: Նախ ապացուցենք մի քանի օժանդակ պնդումներ:

Լեմմ 3.5.1: Ցանկացած k բնական և $x \in (0,\pi)$ իրական թվերի դեպքում

$$\left|\sum_{m=1}^{k} \sin mx\right| \le \frac{\pi}{x} :$$

Ապացույց: Նկատենք, որ

$$\sum_{m=1}^{k} \sin mx = \sum_{m=1}^{k} \frac{\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

որտեղից, օգտագործելով $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ անհավասարությունը, կարող ենք գրել՝

$$\left|\sum_{m=1}^{k}\sin mx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{\pi}{x}:$$

Լեմմ 3.5.1-ն ապացուցված է: □

Լեմմ 3.5.2: Ցանկացած n բնական և x իրական թվերի դեպքում

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le 2\pi: \tag{3.5.1}$$

Ապացույց: Քանի որ (3.5.1)-ի մեջ մասնակցող գումարները 2π պարբերական են ու կենտ, ապա բավական է լեմմն ապացուցել $[0,\pi]$ միջակայքին պատկանող x իրական թվերի համար: Մյուս կողմից՝ լեմմի պնդումը ակնհայտ է, երբ $x=0$ կամ $x=\pi$: Այսպիսով՝ կարող ենք համարել, որ $x \in (0,\pi)$: Նշանակենք $n(x) = \left[\frac{\pi}{x}\right]$: Եթե $n \le n(x)$, ապա օգտագործելով $\sin x \le x; x \in (0,\pi)$ անհավասարությունը՝ կարող ենք գրել՝

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{k} = nx \le n(x)x < \pi: \tag{3.5.2}$$

Այսինքն՝ լեմմի պնդումը $n \le n(x)$ դեպքում ճիշտ է: Դիցուք՝ $n > n(x)$: Ունենք՝

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n(x)}\frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=n(x)+1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = S_n(x) + \widetilde{S}_n(x): \tag{3.5.3}$$

(3.4.2)-ի դատողություններով $S_n(x)$-ի համար կստանանք հետևյալ գնահատականը՝

$$\left|S_n(x)\right| \le \pi: \tag{3.5.4}$$

$\widetilde{S}_n(x)$ գումարը գնահատելու համար կիրառենք Աբելի ձևափոխությունը՝

$$\widetilde{S}_n(x) = \sum_{k=n(x)+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} =$$

$$= \sum_{k=n(x)+1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} \sin mx + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sin mx - \frac{1}{n(x)+1} \sum_{m=1}^{n(x)} \sin mx : \quad (3.5.5)$$

Օգտագործելով լեմմ 3.4.1-ը՝ (3.4.5)-ից կստանանք՝

$$\left|\widetilde{S}_n(x)\right| \le \frac{\pi}{x} \sum_{k=n(x)+1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{\pi}{nx} + \frac{1}{n(x)+1}\frac{\pi}{x} \le \frac{3\pi}{x\left(n(x)+1\right)} \le 3 : \quad (3.5.6)$$

Հաշվի առնելով (3.4.4) և (3.4.6) գնահատականները՝ $n > n(x)$ դեպքի համար (3.4.3)-ից կստանանք՝

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| < 2\pi : \quad (3.5.7)$$

Լեմմ 3.5.2-ն ապացուցված է: □

Հայտնի են կետում տարամիտող Ֆուրիեի շարք ունեցող անընդհատ ֆունկցիաների բազմաթիվ օրինակներ: Այստեղ կներկայացնենք Ֆեյերի կողմից բերված օրինակը: Կառուցման հիմքում ընկած են ստորև ներկայացված եռանկյունաչափական բազմանդամները:

Սահմանում 3.5.1: Ֆեյերի բազմանդամներ անվանում են

$$F_n(x) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} -$$

$$-\left[\frac{\cos(2n+1)x}{1} + \frac{\cos(2n+2)x}{2} + \ldots + \frac{\cos 3nx}{n}\right] \quad (3.5.8)$$

տեսքի եռանկյունաչափական բազմանդամները:

Ապացուցենք այս բազմանդամների մի քանի հատկություններ:

Հատկություն 1: Ցանկացած n բնական և x իրական թվերի դեպքում

$$\left|F_n(x)\right| < 4\pi :$$

Այս անհավասարությունը անմիջապես կհետևի

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2n-k)x-\cos(2n+k)x}{k}=2\sin 2nx\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$$

նույնությունից և լեմմ 3.4.2-ից:

Հատկություն 2: Ֆեյերի (3.5.8) բազմանդամների Ֆուրիեի $S_m(x,F_n)$ մասնակի գումարները բոլոր n և $n\le m\le 3n$ բնական թվերի դեպքում բավարարում են

$$\left|S_m(x,F_n)\right|<2(1+\ln n)$$

անհավասարությանը:

Իրոք,

$$\left|S_m(x,F_n)\right|<2\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)<2(1+\ln n):$$

Հատկություն 3: Դիցուք՝

$$f_n(x)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+...+\frac{\cos(2n-1)x}{1}:$$

Ցանկացած n բնական թվի դեպքում $f_n(0)>\ln n$:

Թեորեմ 3.5.1 (Ֆեյեր): Ցանկացած $x_0\in[0,2\pi]$ կետի դեպքում գոյություն ունի թվային առանցքի վրա անընդհատ, 2π -պարբերական ֆունկցիա, որի Ֆուրիեի շարքը տարամիտում է այդ կետում:

Ապացույց: Բավական է թեորեմի ապացույցն իրականացնել 0 կետի դեպքում: Իրոք, 0 կետում տարամիտող, Ֆուրիեի շարք ունեցող, անընդհատ x_0-ով դեպի աջ տեղաշարժած ֆունկցիան դարձյալ անընդհատ է, իսկ դրա Ֆուրիեի շարքը տարամետ է արդեն x_0 կետում:

Դիցուք՝ $n_k=2^{k^2}$, նշանակենք (տե՛ս (3.4.8))

$$\varphi_k(x)=F_{n_k}(x),\qquad k=1,2,...: \tag{3.5.9}$$

Դիտարկենք

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{k^2} \tag{3.5.10}$$

ֆունկցիան ու ցույց տանք, որ այն բավարարում է թեորեմի պայմաններին $x_0=0$ դեպքում: **Հատկություն** 1-ի համաձայն՝ (3.5.10) շարքի ընդհանուր անդամը չի գերազանցում $\frac{4\pi}{k^2}$ -ն, ուստի այդ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, մյուս կողմից՝ (3.5.9) ֆունկցիաներն անընդհատ են ու 2π -պարբերական: Այստեղից հետևում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան 2π -պարբերական և թվային առանցքի վրա անընդհատ ֆունկցիա է: Նկատենք, որ (3.5.10) շարքի k-րդ գումարելին իրենից ներկայացնում է եռանկյունաչափական կոսինուսբազմանդամ, որի մեջ հանդես են գալիս բոլոր այն $\cos mx$ տեսքի գումարելիները, որոնց համար $n_k \le m \le 3n_k$: Մյուս կողմից՝

$$n_{k+1} = 2^{(k+1)^2} = 2^{2k+1} n_k > 3n_k$$

անհավասարությունից հետևում է, որ տարբեր k-երի դեպքում (3.5.10) շարքի գումարելիները չեն պարունակում նման անդամներ, ընդ որում՝ k-ի մեծացմանը զուգընթաց (3.5.10) շարքի մեջ $\cos mx$-երը դասավորված են ըստ m -ի աճման կարգի: Դիտարկենք

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx \qquad (3.5.11)$$

եռանկյունաչափական շարքը, որտեղ

$$a_m = \begin{cases} \dfrac{1}{2n_k - m}, & n_k \le m < 2n_k \\ \dfrac{1}{m - 2n_k}, & 2n_k < m \le 3n_k\,, \quad k = 1,2,\ldots : \\ 0, & m < n_k, m > 3n_k \end{cases} \qquad (3.5.12)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ (3.5.10)-ը իրենից ներկայացնում է (3.5.11) շարքի խմբավորված շարք: Ցույց տանք, որ (3.5.11) շարքը հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք: Իրոք, եթե $S_m(x)$-ով նշանակենք այդ շարքի m -րդ մասնակի գումարը, ապա (3.4.8), (3.4.10)-(3.5.12) հավասարություններից ունենք՝

$$S_{3n_m}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(x)}{k^2}\,,$$

և քանի որ (3.5.10) շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկ-ցիային, ապա (3.4.11) շարքի $3n_m$ համարներով մասնակի գումարները ևս կզուգամիտեն այդ ֆունկցիային: Այդ դեպքում, օգտվելով թեորեմ (3.2.1)-ից, կարող ենք պնդել, որ (3.5.11) շարքը հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

Թեորեմի ապացուցումը կավարտվի, եթե ցույց տանք, որ $S_m(x) \equiv S_m(x, f)$ հաջորդականությունը 0 կետում տարամիտում է: Օգտվելով հատկություն 3-ից՝ կարող ենք գրել՝

$$S_{2n_m-1}(0) - S_{n_{m-1}}(0) = \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{n_m} + \frac{1}{n_m - 1} + \ldots + \frac{1}{1}\right) = \frac{f_{n_m}(0)}{m^2} > \frac{\ln n_m}{m^2} = \ln 2,$$

այսինքն՝ $S_m(x)$ հաջորդականությունը 0 կետում տարամետ է (0 կե-տում զուգամիտության ֆունդամենտալության պայմանը խախտված է):

Թեորեմ 3.5.1-ն ապացուցված է: □

Դիտողություն 3.5.1: Կարելի է ցույց տալ, որ նախորդ թեորեմում բերված օրինակում (3.5.11) շարքի մասնակի գումարները հավասարա-չափ սահմանափակ են: Իրոք, այդ շարքի մասնակի գումարների համար օգտվելով (3.5.8), (3.5.10)-(3.5.12) հավասարություններից՝ կա-րող ենք գրել՝

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi_k(x)}{k^2}, \text{ երբ } 3n_{m-1} \le N < n_m,$$

և

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi_k(x)}{k^2} + \frac{1}{m^2} S_N(x, F_{n_m}), \text{ երբ } n_m \le N < 3n_m,$$

որտեղ $S_N(x, F_{n_m})$-ը Ֆեյերի F_{n_m} բազմանդամի Ֆուրիեի շարքի m-րդ մասնակի գումարն է: Օգտվելով հատկություն 2-ից՝ երկու դեպքում էլ կարող ենք գրել՝

$$|S_N(x)| < \sum_{k=1}^{m-1} \frac{4\pi}{k^2} + \frac{2(1 + \ln n_m)}{m^2} < 8\pi + \frac{2(1 + m^2 \ln 2)}{m^2} < 36:$$

Քանի որ ցանկացած N բնական թիվ ինչ-որ m բնական թվի դեպքում ընկած է $[3n_{m-1}, 3n_m)$ միջակայքում, ապա բոլոր դեպքերում $\left|S_N(x)\right| < 36$:

§3.6. Ֆուրիեի շարքերի թվաբանական միջինների զուգամիտությունը

Տրված $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ հաջորդականության միջին թվաբանականների հաջորդականություն անվանում են

$$x_1, \quad \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ldots \quad , \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \ldots$$

թվերը: Եթե $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահման ունի, ապա այդ հաջորդականության միջին թվաբանականների հաջորդականությունը ևս կունենա սահման, ավելին՝ այդ սահմանները համընկնում են: Իրոք, ենթադրենք՝

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a:$$

Այդ դեպքում, մասնավորապես, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը սահմանափակ է՝ $|x_n| < M$: Տրված ε դրական թվի դեպքում ընտրենք n_0 բնական թիվ այնպիսին, որ տեղի ունենան $|x_n - a| < \varepsilon, \quad n > n_0$ անհավասարությունները: Ունենք՝

$$\left|\frac{x \ + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right| \le \left|\frac{x_1 + x_2 + x_{n_0}}{n}\right| + \frac{|x_{n_0+1} - a| + \ldots + |x_n - a|}{n} + \frac{n_0}{n}|a| \le$$

$$\le \frac{n_0}{n}\max\{M, |a|\} + \varepsilon:$$

Վերջինիս աջ մասի առաջին գումարելին ձգտում է 0-ի, երբ $n \to \infty$, ինչն էլ հաստատում է վերը նշված դիտողությունը: Մյուս կողմից՝ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության օրինակով համոզվում ենք, որ թվաբանական միջինների հաջորդականությունը կարող է զուգամիտել նաև այն դեպքում, երբ սկզբնական հաջորդականությունը տարամետ է:

Բոլոր այս դատողությունները վկայում են այն մասին, որ ցանկացած հաջորդականության թվաբանական միջինների հաջորդականությունը ցուցաբերում է ավելի լավ վարք, քան ունի այդ հաջորդականությունը: Ահա սա է պատճառը, որ միջինները լայնորեն կիրառվում են մասնավորապես Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության տեսությունում:

Նախորդ պարագրաֆում համոզվեցինք, որ անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը առանձին կետերում կարող է տարամիտել, հետևաբար Ֆուրիեի շարքերը, որպես ֆունկցիայի հավասարաչափ մոտարկման միջոց, հարմար չեն: Պարզվում է սակայն, որ անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների թվաբանական միջինների հաջորդականությունը այս խնդիրը լիարժեքորեն կարող է լուծել: Այլ կերպ ասած՝ Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների միջին թվաբանականների հաջորդականությունը մոտարկման ավելի լավ հատկություններ է ցուցաբերում, քան մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

Դիցուք՝ $f(x)$-ը $[0,2\pi)$ ինտերվալի վրա հանրագումարելի, 2π-պարբերական ֆունկցիա է: Նրա Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարները, ինչպես գիտենք (տե՛ս (3.2.5)-(3.2.8)), թույլ են տալիս ինտեգրալ ներկայացում՝

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t-x)dt,\qquad n=0,1,..., \tag{3.6.1}$$

որտեղ

$$D_n(u)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}=\frac{\cos nu-\cos(n+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}\text{-ը} \tag{3.6.2}$$

Դիրիխլեի կորիզն է:

Սահմանում 3.6.1: $f(x)$ հանրագումարելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների թվաբանական միջիններ անվանում են հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x,f)\qquad n=0,1,\dots: \tag{3.6.3}$$

Օգտվելով (3.6.1) և (3.6.2) հավասարություններից՝ կարող ենք (3.6.3)-ը արտագրել այսպես՝

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(t-x)dt, \tag{3.6.4}$$

որտեղ

$$K_n(u)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(u)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos ku-\cos(k+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}=$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)u}{4(n+1)\sin^2\frac{u}{2}}=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2: \tag{3.6.5}$$

Առանձնացնենք $K_n(u)$ ֆունկցիաների որոշ հատկություններ, որոնց իրավացիությունը միանգամից հետևում է (3.6.3)-ից:

$$K_n(u)\geq 0, \tag{3.6.6}$$

$$K_n(u)\leq\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{u}{2}}<\frac{\pi^2}{2nu^2},\qquad 0<|u|\leq\pi, \tag{3.6.7}$$

$$K_n(u)\leq\frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2},\qquad \delta<|u|\leq\pi, \tag{3.6.8}$$

որտեղից ցանկացած $\delta>0$ թվի համար՝

$$\lim_{n\to\infty}M_n(\delta)=0,\qquad M_n(\delta)=\max_{\delta\leq u\leq\pi}K_n(u), \tag{3.6.9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(u)du=1, \tag{3.6.10}$$

ցանկացած $\delta>0$ թվի համար՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u)du=0: \qquad (3.6.11)$$

Լեմմ 3.6.1: Դիցուք՝

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Psi_n(t)dt, \qquad (3.6.12)$$

որտեղ $\Psi_n(t)$ ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

1) $\Psi_n(t)$ -ն զույգ ֆունկցիա է,

2) $\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(u)|du\le C, \quad n=1,2,...,$ C -ն հաստատուն է,

3) ցանկացած $\delta>0$ թվի համար՝

$$\lim_{n\to\infty}M_n(\delta)=0, \qquad M_n(\delta)=\sup_{\delta\le|t|\le\pi}|\Psi_n(t)|,$$

4) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(u)du=1:$

Այդ դեպքում, եթե x-ը $f(x)$ ֆունկցիայի առաջին սեռի խզման կետ է, ապա

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կետերում:

Եթե $f(x)$ -ը անընդհատ է (a,b) ինտերվալի վրա, ապա ցանկացած $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ հատվածի վրա $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$՝ հավասարաչափ ըստ x-ի:

Ապացույց: Օգտագործելով $\Psi_n(t)$ ֆունկցիաների զույգությունը և լեմմի 4-րդ պայմանը՝ կարող ենք գրել՝

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]\Psi_n(t)dt: \quad (3.6.13)$$

Այնուհետև $\Psi_n(t)$ -ի զույգությունից եզրակացնում ենք՝

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\Psi_n(t)dt: \quad (3.6.14)$$

(3.6.13) և (3.6.14) հավասարություններից կհետևի՝

$$f_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\Psi_n(t)dt: \quad (3.6.15)$$

Ցույց տանք, որ (3.6.15)-ի աջ մասի ինտեգրալը ձգտում է 0-ի: Ընտրենք $\delta>0$ թիվն այնպես, որ տեղի ունենան

$$|f(x+t)-f(x+0)|<\varepsilon,\ |f(x-t)-f(x-0)|<\varepsilon \quad (3.6.16)$$

անհավասարությունները բոլոր $t\in[0,\delta]$ -երի համար: Սա հնարավոր է անել ցանկացած x կետում: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան լինի անընդհատ $[\alpha,\beta]$ հատվածի վրա, ապա կարելի է δ -ն ընտրել x-ից անկախ: Ընտրելով δ -ն՝ (3.5.15) ինտեգրալը բաժանենք երկու ինտեգրալների՝ I_1 ինտեգրալը, որ տարածված է $(0,\delta)$ միջակայքի վրա, և I_2 -ը, որը տարածված է (δ,π) -ի վրա: Օգտվելով (3.6.16)-ից և լեմմի 2-րդ պայմանից՝ ունենք

$$|I_1|<2\varepsilon\int_0^{\pi}|\Psi_n(t)|\,dt: \quad (3.6.17)$$

I_2 -ի համար ունենք՝

$$|I_2|\le M_n(\delta)\int_{\delta}^{\pi}|f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)|\,dt: \quad (3.6.18)$$

Ֆիքսած x-ի համար (3.6.18)-ի ինտեգրալը վերջավոր թիվ է, իսկ դրա դիմացի արտադրիչը, համաձայն լեմմի 3-րդ պայմանի, ձգտում է 0-ի, հետևաբար I_2 -ը $n\to\infty$ ձգտելիս ձգտում է 0-ի: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան լինի անընդհատ $[\alpha,\beta]$ հատվածի վրա, ապա ցանկացած $x\in[\alpha,\beta]$-ի համար (3.6.18) ինտեգրալը չի գերազանցում

$$2\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt+2|f(x)|$$

արտահայտությանը, որը այդպիսի x-երի համար սահմանափակ է: Այս դեպքում I_2-ը $n\to\infty$ ձգտելիս ձգտում է 0-ի՝ հավասարաչափ ըստ $x\in[\alpha,\beta]$-ի:

Լեմմ 3.6.1-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 3.6.1 (Ֆեյեր): Եթե x-ը $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կամ առաջին սեռի խզման կետ է, ապա այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի թվաբանական միջինները զուգամիտում են համապատասխանաբար $f(x)$ և $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ թվերին: Եթե $f(x)$-ը անընդհատ է (a,b) ինտերվալի վրա, ապա ցանկացած $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ հատվածի ներսում զուգամիտությունը հավասարաչափ է: Վերջապես, եթե $f(x)$-ը անընդհատ է $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա, ապա թվաբանական միջինները հավասարաչափ զուգամիտում են այդ հատվածի ներսում:

Ֆեյերի թեորեմի ապացույցն անմիջապես հետևում է լեմմ 3.6.1-ից, քանի որ վերցնելով նրա մեջ $\Psi_n(t)=K_n(t)$՝ համոզվում ենք, որ լեմմի պայմանները (3.6.6)-(3.6.11) հատկությունների շնորհիվ տեղի ունեն:

Կոլմոգորովի հայտնի թեորեմի համաձայն՝ գոյություն ունի ինտեգրելի ֆունկցիա, որի Ֆուրիեի շարքը հ.ա. տարամետ է: Պարզվում է, որ Ֆուրիեի շարքերի թվաբանական միջինների հաջորդականությունը դարձյալ լավ մոտարկման հատկություններ է ցուցաբերում նույնիսկ ուղղակի ինտեգրելի ֆունկցիաների դեպքում:

Թեորեմ 3.6.2 (Ֆեյեր-Լեբեգ): Ցանկացած հանրագումարելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի թվաբանական միջինները հ.ա. զուգամիտում են այդ ֆունկցիային:

Ապացույց: Նշանակենք

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),\qquad(3.6.19)$$

$$\Phi_x(t)=\int_0^t|\varphi_x(u)|\,du: \tag{3.6.20}$$

Հայտնի է, որ եթե x-ը Լեբեգի կետ է, ապա

$$\Phi_x(t)=o(t),\qquad t\to 0 \tag{3.6.21}$$

և այս առնչությունը տեղի ունի h.ա.: Ցույց տանք, որ (3.6.21) պայմանին բավարարող կետերում թվաբանական միջինները զուգամիտում են: Ունենք՝

$$\sigma_n(x,f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]K_n(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi_x(t)K_n(t)dt: \tag{3.6.22}$$

Օգտվելով հեշտ ստուգվող $|K_n(t)|\le 2n$ անհավասարությունից՝ կարող ենք գրել՝

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi_x(t)K_n(t)dt\right|\le\frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}|\varphi_x(t)|\,dt=\frac{2n}{\pi}\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)=o(1),\qquad n\to\infty: \tag{3.6.23}$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով (3.6.7) գնահատականը և (3.6.21)-ը, ունենք՝

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\varphi_x(t)K_n(t)dt\right|\le\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|\varphi_x(t)|}{t^2}dt=\frac{\pi}{2n}\left[\frac{\Phi_x(\pi)}{\pi^2}-\frac{\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right]+$$

$$+\frac{2\pi}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{|\Phi_x(t)|}{t^3}dt=o(1)+\frac{1}{n}o\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right)=o(1),\qquad n\to\infty:$$

Վերջին առնչությունից, (3.6.22)-ից և (3.6.23)-ից հետևում է թեորեմի պնդումը:

Թեորեմ 3.6.2-ն ապացուցված է: □

§3.7. Սահմանափակ փոփոխության անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի զուգամիտությունը

§3.5-ում համոզվեցինք, որ անընդհատությունը չի կարող բավարար պայման լինել Ֆուրիեի շարքի հավասարաչափ զուգամիտության համար (այն ընդամենը անհրաժեշտ պայման է): Ստորև կհամոզվենք, որ այս պնդումը տեղի կունենա, եթե ֆունկցիան, բացի անընդհատ լինելուց, ունենա նաև սահմանափակ փոփոխություն:

Լեմմ 3.7.1: Եթե 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան $[0,2\pi]$ հատվածի վրա ունի սահմանափակ փոփոխություն, ապա նրա Ֆուրիեի a_n և b_n գործակիցները ցանկացած n բնական թվի դեպքում բավարարում են

$$|a_n| \le \frac{V}{2n}, \qquad |b_n| \le \frac{V}{2n}$$

անհավասարություններին, որտեղ V-ն $f(x)$ ֆունկցիայի լրիվ փոփոխությունն է $[0,2\pi]$ հատվածի վրա:

Ապացույց: Փոփոխականի փոխարինումով և լեմմ 1.3.3-ի կիրառումով

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt$$

ինտեգրալը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt dt :$$

Օգտագործելով վերջին երկու հավասարությունները՝ կարող ենք գրել՝

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt :$$

$f(x)$ ֆունկցիայի պարբերականության հետևանքով ցանկացած k բնական թվի դեպքում ունենք (տե՛ս լեմմ 1.3.3-ը)՝

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt=\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|dt,$$

հետևաբար՝

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|dt,\qquad k=1,2,...:$$

Վերջին անհավասարության մեջ k-ի փոխարեն հաջորդաբար վերցնելով $k=1,2,..,2n$ արժեքները, գումարելով ստացված անհավասարությունները ու հաշվի առնելով, որ

$$\sum_{k=1}^{2n}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|\le V,$$

կստանանք՝

$$2n|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2n}\left|f\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(t+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right|dt\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Vdt=V,$$

որտեղից էլ կհետևի լեմմի պնդման՝ a_n-ին վերաբերող անհավասարությունը: b_n-ին վերաբերող անհավասարությունը ապացուցվում է նույն դատողություններով:

Լեմմ 3.7.1-ն ապացուցված է: □

Լեմմ 3.7.2: Դիցուք՝ $f(x)$-ը $[0,2\pi]$ հատվածի վրա սահմանափակ փոփոխություն ունեցող 2π պարբերական ֆունկցիա է, և a_n, b_n-ը նրա Ֆուրիեի գործակիցներն են: Այդ դեպքում

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\rho_k=0 \text{ և } \lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{\,2}\sin^2\frac{\pi k}{2n}=0$$

պայմանները համարժեք են, որտեղ $\rho_k=a_k^{\,2}+b_k^{\,2}$:

Ապացույց: Լեմմ 3.6.1-ից հետևում է, որ

$$\rho_k<\frac{V}{k}: \tag{3.7.1}$$

Նշանակենք

$$P_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\rho_k,\;\; T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2\rho_k^{\,2}\;\; Q_n=n\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{\,2}\sin^2\frac{\pi k}{2n}:$$

Ենթադրենք՝ $Q_n \to 0$, երբ $n \to \infty$: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում $P_n \to 0$: Եթե $Q_n \to 0$, ապա առավել ևս

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{\,2} \sin^2 \frac{\pi k}{2n} = 0: \qquad (3.7.2)$$

Կիրառելով Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը՝ ստանում ենք՝

$$P_n^{\,2} \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k\rho_k)^2 \sum_{k=1}^{n} 1^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \rho_k^{\,2} = T_n: \qquad (3.7.3)$$

Մյուս կողմից՝ օգտագործելով $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ անհավասարությունը՝ կարող ենք գրել՝

$$n\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{\,2} \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \ge n\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{\,2} \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi k}{2n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \rho_k^{\,2} = T_n: \quad (3.7.4)$$

(3.7.3) և (3.7.4) անհավասարություններից կհետևի, որ

$$P_n^{\,2} \le T_n \le n\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{\,2} \sin^2 \frac{\pi k}{2n}:$$

Վերջինից և (3.7.2)-ից ստանում ենք, որ $P_n \to 0$, երբ $n \to \infty$:

Դիցուք՝ $P_n \to 0$, երբ $n \to \infty$: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում $Q_n \to 0$: Օգտվելով (3.7.1)-ից՝ կարող ենք գրել՝

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k\rho_k)\cdot(k\rho_k) < \frac{V}{n}\sum_{k=1}^{n} k\rho_k = V \cdot P_n,$$

որտեղից $T_n \to 0$, երբ $n \to \infty$: Դիցուք՝ $\theta > 1$-ն ամբողջ թիվ է: Q_n գումարը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$Q_n = n\sum_{k=1}^{\theta n} \rho_k^{\,2} \sin^2 \frac{\pi k}{2n} + n\sum_{k=\theta n+1}^{\infty} \rho_k^{\,2} \sin^2 \frac{\pi k}{2n}:$$

Վերջինիս մեջ կիրառելով $|\sin x| \le x, x > 0$ անհավասարությունը և (3.6.1)-ը՝ կստանանք՝

$$Q_n < \frac{\pi^2}{4n}\sum_{k=1}^{\theta n} k^2 \rho_k{}^2 + n\sum_{k=\theta n+1}^{\infty}\rho_k{}^2 < \frac{\pi^2\theta}{4}\cdot T_{\theta n} + Vn\sum_{k=\theta n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < 4T_{\theta n} + \frac{V}{\theta}: \quad (3.7.5)$$

Դիցուք՝ $\varepsilon > 0$ -ն տրված թիվ է: Նախ $\theta > 1$ ամբողջ թիվն ընտրենք այնքան մեծ, որ լինի

$$\frac{V}{\theta} < \frac{\varepsilon}{2}: \qquad (3.7.6)$$

Ֆիքսելով θ-ն՝ n-ը ընտրենք այնքան մեծ, որ լինի

$$T_{\theta n} < \frac{\varepsilon}{8}, \qquad (3.7.7)$$

դա հնարավոր է, քանի որ արդեն ցույց ենք տվել, որ $T_n \to 0,$ երբ $n \to \infty$: (3.7.5)-(3.7.7) առնչություններից հետևում է, որ բավականաչափ մեծ n բնական թվերի դեպքում

$$Q_n < \varepsilon:$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ թիվը կամայական էր, ապացուցվեց, որ $Q_n \to 0$:

Լեմմ 3.7.2-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 3.7.1 (Վիներ): Որպեսզի սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիան լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ լինի՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\rho_1 + 2\cdot\rho_2 + ... + n\cdot\rho_n}{n} = 0,$$

որտեղ $\rho_n = a_n{}^2 + b_n{}^2$, a_n, b_n-ը դիտարկվող ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են:

Ապացույց: Դիցուք՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \text{ -ը} \qquad (3.7.8)$$

$[0,2\pi]$ հատվածի վրա սահմանափակ փոփոխություն ունեցող, 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է ($\sim$ նշանով ընդգծվում է այն փաստը, որ գրված շարքը f-ին համապատասխանող Ֆուրիեի շարքն է. այն կարող է նաև որոշ կետերում հավասար չլինել այդ ֆունկցիային, այդ պատճառով հավասարության նշանից պետք է խուսափել): Ֆիքսած t իրական թվի դեպքում $f(x+t)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$f(x+t) \sim \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\cos kx + B_k(t)\sin kx, \qquad (3.7.9)$$

որտեղ (տե՛ս լեմմ 1.3.3-ը) $A_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u+t)du = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)du = a_0$, և

$$A_k(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u+t)\cos kudu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos k(u-t)du = a_k\cos kt + b_k\sin kt, \qquad (3.7.10)$$

$$B_k(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u+t)\sin kudu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sin k(u-t)du = b_k\cos kt - a_k\sin kt : \qquad (3.7.11)$$

$f(x+t) - f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը, համաձայն (3.7.8)-ի և (3.7.9) -ի, կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x+t) - f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\cos kx + \beta_k(t)\sin kx, \qquad (3.7.12)$$

որտեղ (տե՛ս (3.7.10), (3.7.11) բանաձևերը)

$$\alpha_k(t) = A_k(t) - a_k = b_k\sin kt - a_k(1-\cos kt) = 2b_k\sin\frac{kt}{2}\cos\frac{kt}{2} -$$
$$-2a_k\sin^2\frac{kt}{2} = 2\sin\frac{kt}{2}\left(b_k\cos\frac{kt}{2} - a_k\sin\frac{kt}{2}\right) = 2B_k\left(\frac{t}{2}\right)\sin\frac{kt}{2}, \qquad (3.7.13)$$

և

$$\beta_k(t) = B_k(t) - b_k = -a_k\sin kt - b_k(1-\cos kt) = -2a_k\sin\frac{kt}{2}\cos\frac{kt}{2} -$$
$$-2b_k\sin^2\frac{kt}{2} = -2\sin\frac{kt}{2}\left(a_k\cos\frac{kt}{2} + b_k\sin\frac{kt}{2}\right) = -2A_k\left(\frac{t}{2}\right)\sin\frac{kt}{2} : \qquad (3.7.14)$$

Հաշվի առնելով (3.7.12)-(3.7.14)-ը՝ ցանկացած n բնական թվի համար ունենք՝

$$f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - f(x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cos kx - A_k\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin kx\right)\sin\frac{\pi k}{2n}, \qquad (3.7.15)$$

Օգտագործելով (3.7.10), (3.7.11) հավասարությունները և Պարսևալի հավասարությունը՝ (3.7.15)-ից կստանանք՝

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-f(x)\right]^2 dx = 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k^{\,2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)+A_k^{\,2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)\sin^2\frac{\pi k}{2n} =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{\,2}\sin^2\frac{\pi k}{2n}:$$

$f(x)$ ֆունկցիայի պարբերականության հետևանքով ցանկացած k բնական թվի դեպքում կունենանք՝

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(x+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]^2 dx = 4\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{\,2}\sin^2\frac{\pi k}{2n}:$$

Վերջին անհավասարության մեջ k-ի փոխարեն հաջորդաբար վերցնելով $k=1,2,..,2n$ արժեքները և գումարելով ստացված հավասարությունները՝ վերջնական ստանում ենք՝

$$\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]^2 dx = 8\pi n\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{\,2}\sin^2\frac{\pi k}{2n}: \quad (3.7.16)$$

Նախ ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: $\omega_f(\delta)$-ով նշանակելով $f(x)$-ի անընդհատության մոդուլը՝ բոլոր n և $k=1,2,...,2n$ բնական թվերի դեպքում կարող ենք գրել

$$\left|f\left(x+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right| \le \omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

հետևաբար

$$\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]^2 \le$$

$$\le \omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{2n}\left|f\left(x+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right| \le V\cdot\omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

որտեղ V-ն $f(x)$-ի լրիվ փոփոխությունն է $[0,2\pi]$ հատվածի վրա: Վերջին անհավասարությունից և (3.7.16)-ից կհետևի՝

$$n\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{\,2}\sin^2\frac{\pi k}{2n} \le \frac{1}{4}V\cdot\omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

հետևաբար $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho_k{}^2\sin^2\frac{\pi k}{2n}=0$, և լեմմ 3.7.2-ի համաձայն՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\rho_1+2\cdot\rho_2+...+n\cdot\rho_n}{n}=0: \qquad (3.7.17)$$

Թեորեմի անհրաժեշտ կողմն ապացուցված է: Այժմ ենթադրենք, որ (3.7.17)-ը տեղի ունի, և ցույց տանք, որ այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի x_0 կետ, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան խզվող է: Ըստ թեորեմի պայմանների՝ $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ փոփոխություն, հետևաբար, առաջին գլխի թեորեմ 1.1.8-ի հետևանքի համաձայն, x_0 -ն 1-ին սեռի խզման կետ է: Այդ կետում f -ի թռիչքը նշանակենք d -ով՝ $d=\left|f(x_0+0)-f(x_0-0)\right|\neq 0$: Տրված x իրական թվի դեպքում $\left[x+(k'-1)\cdot\frac{\pi}{n},x+k'\cdot\frac{\pi}{n}\right]$-ով նշանակենք

$$\left[x+0\cdot\frac{\pi}{n},x+1\cdot\frac{\pi}{n}\right],\left[x+1\cdot\frac{\pi}{n},x+2\cdot\frac{\pi}{n}\right],...,\left[x+(2n-1)\cdot\frac{\pi}{n},x+2n\cdot\frac{\pi}{n}\right]$$

հատվածներից այն մեկը, որը պարունակում է x_0 կետը (k' -ը կախված է x_0 -ից, n-ից և x-ից): Բավականաչափ մեծ n բնական թվերի դեպքում կարող ենք գրել՝

$$\left|f(x+k'\cdot\frac{\pi}{n})-f\left(x+(k'-1)\cdot\frac{\pi}{n}\right)\right|>\frac{d}{3}:$$

Այստեղից հետևում է, որ բավականաչափ մեծ n բնական և կամայական x իրական թվերի դեպքում

$$\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+k\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\right]^2$$

գումարի մեջ կա $\dfrac{d^2}{9}$ -ից մեծ գումարելի: Բայց այդ դեպքում (3.7.16) հավասարության աջ մասը 0-ի չի ձգտում, և լեմմ 3.7.2-ի համաձայն՝ (3.7.17) պայմանը տեղի ունենալ չի կարող: Ստացված հակասությունից էլ հետևում է թեորեմի բավարար կողմի ճիշտ լինելը:

Թեորեմ 3.7.1-ն ապացուցված է: □

Դիտողություն 3.7.1: Լեմմ 3.7.1-ից հետևում է, որ սահմանափակ փոփոխություն ունեցող ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցները ձգտում են 0-ի ոչ ավելի դանդաղ, քան $1/n$ հաջորդականությունը՝

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right):$$

Վիների թեորեմից հետևում է, որ այս գնահատականներն ուժեղացնել խզվող ֆունկցիաների դեպքում (գրել o-փոքր) անհնար է: Իրոք, եթե սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների համար տեղի ունենան

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

պայմանները, ապա ակնհայտորեն (3.7.17)-ը ճիշտ է, և, հետևաբար, Վիների թեորեմի համաձայն, դիտարկվող ֆունկցիան անընդհատ է:

Վիների թեորեմի օգնությամբ կարող ենք ապացուցել պարագրաֆի սկզբում նշած փաստը:

Թեորեմ 3.7.2 (Ժորդան): Եթե թվային առանցքի վրա անընդհատ, 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ հատվածի վրա ունի սահմանափակ փոփոխություն, ապա նրա Ֆուրիեի շարքը հավասարաչափ զուգամետ է:

Ապացույց: Թեորեմի պայմաններից ու Վիների թեորեմից հետևում է, որ (3.7.17)-ը տեղի ունի: $S_n(x,f), \sigma_n(x,f)$-ով նշանակենք համապատասխանաբար $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարները և թվաբանական միջինները: Կիրառելով Աբելի ձևափոխությունը և $|x|+|y| \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$ հեշտ ստուգվող անհավասարությունը՝ կարող ենք գրել (տե՛ս (3.2.4) և (3.6.3))՝

$$|\sigma_n(x,f) - S_n(x,f)| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x,f) - S_n(x,f)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[S_k(x,f) - S_n(x,f)\right]\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)\right| \le$$

$$\leq \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k\left(\left|a_k\right| + \left|b_k\right|\right) \right| < \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{k=1}^{n} k\rho_k :$$

Վերջին անհավասարությունից և (3.7.17)-ից ստանում ենք $\sigma_n(x,f) - S_n(x,f) \to 0$, երբ $n \to \infty$՝ հավասարաչափ ըստ $x \in R$-ի: Մյուս կողմից՝ համաձայն Ֆեյերի 3.6.1 թեորեմի՝ անընդհատ ֆունկցիայի թվաբանական միջինները հավասարաչափ զուգամիտում են այդ ֆունկցիային, հետևաբար $S_n(x,f) \to f(x)$, երբ $n \to \infty$՝ հավասարաչափ ըստ $x \in R$-ի:

Թեորեմ 3.7.2-ն ապացուցված է: □

§3.8. Եռանկյունաչափական շարքերով ներկայացման միակությունը: Եռանկյունաչափական շարքերի հանրագումարումը Ռիմանի մեթոդով

§3.2-ում համոզվեցինք, որ թվային առանցքի վրա հավասարաչափ զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքն իր գումարի Ֆուրիեի շարքն է: Պարզվում է, որ այս պնդումը շարունակում է ուժի մեջ մնալ, երբ հավասարաչափ զուգամիտության պահանջը փոխարինում ենք զուգամիտության ավելի թույլ պահանջով: Այս արդյունքը ներկայացնելու համար մեզ պետք կգան որոշ օժանդակ հասկացություններ և փաստեր:

Սահմանում 3.8.1: Դիցուք՝ $F(x)$ ֆունկցիան որոշված է x կետի ինչ-որ շրջակայքում: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

սահմանը, ապա այն անվանում են Շվարցի առաջին կարգի ածանցյալ x կետում և նշանակում այսպես՝ $F^{(1)}(x)$:

Դժվար չէ համոզվել, որ եթե x կետում գոյություն ունի սովորական $F'(x)$ ածանցյալ, ապա այդ կետում գոյություն ունի նաև Շվարցի ածանցյալը, և դրանք հավասար են: Իրոք,

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} \right]$$

նույնության մեջ h-ը 0-ի ձգտելիս աջ մասի սահմանը հավասար է $F'(x)$ -ի, իսկ ձախ մասի սահմանը, սահմանման համաձայն, $F^{(1)}(x)$ է: Հակառակ պնդումը ճիշտ չէ. տվյալ կետում ֆունկցիայի Շվարցի առաջին կարգի ածանցյալի գոյությունից չի հետևում սովորական ածանցյալի գոյությունը, և այդպիսով Շվարցի առաջին կարգի ածանցյալը սովորական ածանցյալի ընդհանրացումն է:

Սահմանում 3.8.2: Դիցուք՝ $F(x)$ ֆունկցիան որոշված է x կետի ինչ-որ շրջակայքում: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}$$

սահմանը, ապա այն անվանում են Շվարցի երկրորդ կարգի ածանցյալ x կետում և նշանակում այսպես՝ $F^{(2)}(x)$:

Ցույց տանք, որ եթե x կետում գոյություն ունի սովորական երկրորդ կարգի $F''(x)$ ածանցյալ, ապա այդ կետում գոյություն ունի նաև Շվարցի երկրորդ կարգի ածանցյալը, և դրանք հավասար են: Իրոք, եթե երկրորդ կարգի ածանցյալը x կետում գոյություն ունի, ապա առաջին կարգի ածանցյալը գոյություն ունի x կետի ինչ-որ շրջակայքում: Նշանակենք

$$F(x+t)+F(x-t)=\varphi(t):$$

Կիրառելով Կոշիի «վերջավոր աճերի» բանաձևը՝ կարող ենք գրել՝

$$\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}=\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h^2}=\frac{\varphi'(\theta h)}{2\theta h},$$

որտեղ $\theta\in(0,1)$: Այսպիսով՝

$$\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}=\frac{\varphi'(\theta h)}{2\theta h}=\frac{F'(x+\theta h)-F'(x+\theta h)}{2\theta h}:$$

Քանի որ երկրորդ կարգի ածանցյալը x կետում ենթադրության համաձայն գոյություն ունի, ապա առաջին կարգի Շվարցի ածանցյալը այդ կետում նույնպես գոյություն ունի, հետևաբար վերջին հավասարության աջ մասը, 3.8.1 սահմանման համաձայն, h-ը 0-ի ձգտելիս ձգտում է $F^{(2)}(x)$ -ի :

Լեմմ 3.8.1 (Շվարց): Դիցուք՝ $F(x)$-ը որոշված է և անընդհատ $[a,b]-$ի վրա: Եթե $(a,b)-$ի բոլոր կետերում $F^{(2)}(x)$, ապա $F(x)$-ը գծային ֆունկցիա է:

Ապացույց: Տրված ε դրական թվի համար դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\varphi(x)=F(x)-\left[F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right]+\varepsilon(x-a)(x-b):$$

Պարզ է, որ $\varphi(x)\in C(a,b),\quad \varphi(a)=\varphi(b)=0$, բացի դրանից՝

$$\varphi^{(2)}(x)=2\varepsilon: \tag{3.8.1}$$

Ցույց տանք, որ ամբողջ $[a,b]-$ի վրա

$$\varphi(x)\le 0: \tag{3.8.2}$$

Իսկապես, եթե այդպես չլիներ, ապա $\varphi(x)$ ֆունկցիան $(a,b)-$ի որևէ x_0 ներքին կետում կընդունի իր մեծագույն $\varphi(x_0)$ արժեքը, այդ դեպքում

$$\frac{\varphi(x_0+h)-2\varphi(x_0)+\varphi(x_0+h)}{h^2}\le 0\Rightarrow \varphi^{(2)}(x_0)\le 0,$$

որը հակասում է (3.7.1)-ին: Համանման ձևով կարող ենք համոզվել, որ

$$\psi(x)=-\left(F(x)-\left[F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right]\right)+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

ֆունկցիան ամենուրեք բավարարում է $\psi(x)\le 0$ պայմանին: Համեմատելով սա և (3.4.2)-ը՝ կստանանք՝

$$\left|F(x)-\left[F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\le \varepsilon\,|(x-a)(x-b)|$$

$\varepsilon-$ի կամայական լինելուց կհետևի, որ

$$\left|F(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right|:$$

Լեմմ 3.8.1-ն ապացուցված է: □

Հաջորդ պնդումը հնարավորություն է տալիս ֆունկցիայի Շվարցի երկրորդ կարգի ածանցյալի միջոցով վերականգնելու այդ ֆունկցիան:

Լեմմ 3.8.2 (Վալե-Պուսեն): Դիցուք՝ $F(x)-$ը որոշված է և անընդհատ$[a,b]-$ի վրա: Եթե $(a,b)-$ի բոլոր կետերում $F^{(2)}(x)=f(x)$, որտեղ $f(x)$-ը ամենուրեք վերջավոր է և հանրագումարելի, ապա

$$F(x)=\int_a^x dt\int_a^t f(u)du + Ax + B:$$

Լեմմ 3.8.3: Դիտարկենք հետևյալ զուգամետ շարքը՝

$$a_0+a_1+a_2+\ldots=S \tag{3.8.3}$$

և ելնելով (3.8.3)-ից՝ կառուցենք

$$a_0+a_1\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2+a_2\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2+\ldots \tag{3.8.4}$$

շարքը: Այդ դեպքում (3.7.4) շարքը զուգամետ է ցանկացած $h\neq 0$ դեպքում, և նրա $S(h)$ գումարը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\lim_{h\to 0}S(h)=S: \tag{3.8.5}$$

Ապացույց: (3.8.3)-ի զուգամիտությունից հետևում է, որ նրա բոլոր անդամները սահմանափակ են միևնույն թվով $|a_k|<M\Rightarrow$(3.8.4) շարքը մաժորվում է $\sum\frac{M}{k^2h^2}$-ով, հետևաբար զուգամետ է:

Նշանակենք

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k,\quad r_n(h)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2: \tag{3.8.6}$$

Ունենք, որ $\forall\varepsilon>0, \exists n$, այնպես, որ $\forall k\geq n\Rightarrow|r_k|<\varepsilon$, որտեղ n-ը ֆիքսված է: Քանի որ $a_k=r_k-r_{k+1}\Rightarrow$ կարող ենք գրել՝

$$r_n(h)=\sum_{k=n}^{\infty}(r_k-r_{k+1})\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\Rightarrow$$

$$r_n(h)=r_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}r_k\left(\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-\left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2\right):$$

Գնահատենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$\left|\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-\left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2\right|=\left|\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx\right|\le\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|dx\Rightarrow$$

$$|r_n(h)|\le|r_n|+\sum_{k=n+1}^{\infty}|r_k|\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|dx:$$

Հաշվի առնելով (3.8.6)-ը՝ կստանանք՝

$$|r_n(h)|\le\varepsilon\left[1+\int\limits_{nh}^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|dx\right]: \qquad (3.8.7)$$

Եթե նշանակենք $L=\int\limits_{nh}^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|dx$, ապա (3.8.7)-ի համաձայն՝

$$|r_n(h)|\le\varepsilon(1+L):$$

Դիտարկենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$S(h)-S=\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left(\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-1\right)+r_n(h)-r_n:$$

Ունենք՝

$$|S(h)-S|\le\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|\left|\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-1\right|+(L+2)\varepsilon:$$

Քանի որ ֆիքսած k-ի համար $\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2=1\Rightarrow\exists\delta>0$, այնպես, որ

$$|h|<\delta\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|\left|\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-1\right|<\varepsilon\Rightarrow|S(h)-S|>(L+3)\varepsilon:$$

Ինչը պահանջվում էր ապացուցել:
Լեմմ 3.8.3-ն ապացուցված է: □
Դիտարկենք հետևյալ եռանկյունաչափական շարքը՝

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{3.8.8}$$

որտեղ

$$|a_n|<M, |b_n|<M\ , \tag{3.8.9}$$

և $M-$ը կախված չէ n-ից:

Եթե (3.8.8) շարքը երկու անգամ անդամ առ անդամ ինտեգրենք, ապա կստանանք հետևյալ շարքը՝

$$\frac{a_0x^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}, \tag{3.8.10}$$

որը (3.8.9) պայմանի ներքո հավասարաչափ զուգամետ է և, հետևաբար, իրենից ներկայացնում է թվային առանցքի վրա անընդհատ պարբերական ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիան անվանում են (3.7.8) շարքի Ռիմանի ֆունկցիա:

Սահմանում 3.8.1: (3.8.8) շարքն անվանում են հանրագումարելի Ռիմանի մեթոդով x_0 կետում, եթե այդ կետում նրա (3.8.10) Ռիմանի ֆունկցիայի Շվարցի երկրորդ կարգի ածանցյալը գոյություն ունի:

Թեորեմ 3.8.1 (Ռիման): Եթե (3.8.8) **շարքը բավարարում է** (3.8.9) **պայմաններին և զուգամետ է ինչ-որ x_0 կետում, ապա այդ կետում այն Ռիմանի իմաստով հանրագումարելի է:**

Ապացույց: Նշանակենք

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx):$$

Պարզագույն ձևափոխություններից հետո կունենանք՝

$$\frac{F(x_0+2h)-2F(x_0)+F(x_0-2h)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2: \tag{3.8.11}$$

Համաձայն լեմմ 3.8.3-ի՝

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+2h)-2F(x_0)+F(x_0-2h)}{4h^2}=S\ ,$$

որտեղ S-ը $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ շարքի գումարն է:

Թեորեմ 3.8.1-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 3.8.2 (Կանտոր): Եթե եռանկյունաչափական շարքը զուգամետ է ամբողջ առանցքի վրա, և նրա գումարը ամենուրեք հավասար է զրոյի, ապա նրա բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի:

Ապացույց: Դրական չափի բազմության վրա զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքի գործակիցները 0-ի են ձգտում, ուստի (3.8.9) պայմանները տեղի ունեն, և տրված շարքի Ռիմանի F(x) ֆունկցիան (տե՛ս (3.8.10)) իմաստ ունի: Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ այդ ֆունկցիայի Շվարցի երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է զրոյի՝ $F^{(2)}(x)=0$, հետևաբար, համաձայն լեմմ 3.8.1-ի, Ռիմանի ֆունկցիան պետք է լինի գծային: Այսպիսով՝ բոլոր իրական x-երի համար կստացվի

$$Ax+B=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}: \qquad (3.8.12)$$

(3.8.12)-ի մեջ հաջորդաբար վերցնելով $x=\pi$ և $x=-\pi$ և ստացված արդյունքները հանելով իրարից՝ կստանանք, որ $A=0$: Ճիշտ նույն կերպ (3.8.12)-ի մեջ վերցնելով $x=0$, այնուհետև $x=2\pi$ և հանելով իրարից՝ կստանանք՝ $a_0=0\Rightarrow$(3.8.12)-ը կարող ենք գրել այսպես՝

$$-B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}:$$

Աջ մասում գրված շարքը հավասարաչափ զուգամետ է: Դա նշանակում է, որ այն ձախ մասի Ֆուրիեի շարքն է, որտեղ

$$\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-B)\cos nx\,dx=0\Leftrightarrow a_n=0:$$

Համանման ձևով կապացուցենք, որ $b_n=0$:

Թեորեմ 3.8.2-ն ապացուցված է: □

Թեորեմ 3.8.2-ից անմիջապես հետևում է, որ **եթե երկու ամենուրեք զուգամետ եռանկյունաչափական շարքերը ունեն նույն գումարը, ապա այդ շարքերը համարժեք են, իսկ նրանց համապատասխան գործակիցները հավասար են իրար**:

Թեորեմ 3.8.3 (Վալե-Պուսեն): Եթե ամենուրեք զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքի գումարը ինտեգրելի է, ապա այդ շարքը կլինի նրա Ֆուրիեի շարքը:

Ապացույց: Ենթադրենք ունենք $f(x)$ ֆունկցիա, որի համար $\forall x$-ի դեպքում

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{3.8.13}$$

քանի որ (3.8.13) շարքը բավարարում է (3.8.9) պայմաններին, ապա այն ունի Ռիմանի անընդհատ $F(x)$ Ֆունկցիա: Համաձայն 3.8.1 թեորեմի՝ ամենուրեք $F^{(2)}(x)=f(x)$: Ըստ լեմմ 3.7.2-ի՝ $F(x)=\Phi(x)+Ax+B$,

որտեղ $\Phi(x)=\int\limits_0^x dt\int\limits_0^t f(u)du \Rightarrow$

$$\Phi(x)=\frac{a_0x^2}{4}-Ax-B-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(x+2h)-2\Phi(x)+\Phi(x-2h)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2:$$

Աջ կողմի շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\Rightarrow$ այն հանդիսանում է ձախ կողմի Ֆուրիեի շարքը $\Rightarrow$`

$$a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Phi(x+2h)-2\Phi(x)+\Phi(x-2h)}{4h^2}\cos nx\,dx\Rightarrow$$

$$\frac{4\pi a_n\sin^2 nh}{n^2}=\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$

որտեղ $\varphi(x)=\Phi(x+2h)-2\Phi(x)+\Phi(x-2h)$: Մասերով ինտեգրելուց հետո կստանանք

$$\alpha(h)=\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x+2h)\cos nx dx=\left[\Phi(x+2h)\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x+2h)\frac{\sin nx}{n}dx=$$

$$=-\frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{x+2h}f(u)du\right)\sin nx dx:$$

Եվս մեկ անգամ մասերով ինտեգրելուց հետո կստանանք՝

$$\alpha(h)=\frac{1}{n^2}\int\limits_{2h}^{2\pi+2h}f(u)du-\frac{1}{n^2}\int\limits_0^{2\pi}f(x+2h)\cos nx dx:$$

Հետևաբար կարող ենք գրել՝

$$\alpha(h)=\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f(x)[1-\cos n(x-2h)]dx\ ,$$

որտեղից

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx=\alpha(h)-2\alpha(0)+\alpha(-h)=\frac{4\sin^2 nh}{n^2}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

և

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx:$$

Նույն կերպ համոզվում ենք, որ b_n թվերը հանդիսանում են f-ի Ֆուրիեի սինուս գործակիցները:

Թեորեմ 3.8.3-ն ապացուցված է: □

§3.9. Ֆուրիեի շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության Սալեմի հայտանիշը

Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է: Նշանակենք

$$T_n(x)=\frac{f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)}{1}+\frac{f\left(x+2\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+3\frac{\pi}{n}\right)}{3}+$$

$$+\frac{f\left(x+4\frac{\pi}{n}\right)-f\left(x+5\frac{\pi}{n}\right)}{5}+\cdots+\frac{f\left(x+\pi\frac{n-1}{n}\right)-f(x+\pi)}{n},$$

$$Q_n(x)=\frac{f(x)-f(x-\frac{\pi}{n})}{1}+\frac{f\left(x-2\frac{\pi}{n}\right)-f(x-3\frac{\pi}{n})}{3}+\cdots+$$

$$+\frac{f\left(x-\pi\frac{n-1}{n}\right)-f(x-\pi)}{n}:$$

Թեորեմ 3.9.1 (Սալեմի հայտանիշ): Եթե $\boldsymbol{T_n(x)}$-ը և $\boldsymbol{Q_n(x)}$-ը $\boldsymbol{x\in[0,2\pi]}$ միջակայքում հավասարաչափ ձգտում են 0-ի, ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի $\boldsymbol{S_n(x,f)}$ մասնակի գումարները հավասարաչափ զուգամետ են:

Ապացույց: Ունենք՝

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\cdot f(t)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}f(x+t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}f(x+t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}f(x+t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)dt,$$

հետևաբար

$$S_n(x)-\mathrm{f(x)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}(f(x+t)+f(x-t)-2f)dt=$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}=\frac{\sin nv}{2\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}}+\frac{1}{2}\cos nv=\frac{\sin nv}{v}+g(v)\cdot\sin nv+\frac{1}{2}\cos nv,$$

որտեղ $g(v)=\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}}-\frac{1}{v}$, հետևաբար՝

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin nv}{v}dv+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(v+x)\,g(v)\sin nv\,dv+$$

$$+\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f(v+x)g(v)\cos nv\,dv:$$

□

Լեմմ 3.9.1: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, և g(x)-ը սահմանափակ է և 2π պարբերական, ապա $\int_{-\pi}^{\pi}f(v+x)g(v)\cos nv\,dv\to 0$, և $\int_{-\pi}^{\pi}f(v+x)\,g(v)\sin nv\,dv\to 0$:

Հետևանք:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big((f(x+t)+f(x-t)-2f)\big)\frac{\sin nt}{t}dt\to 0:$$

Բաժանենք ինտեգրալը երկու մասի՝ $\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(t)]\frac{\sin nt}{t}dt$ և $\int_0^{\pi}[f(x-t)-f(t)]\frac{\sin nt}{t}dt$:

Հաշվենք

$$\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\cdot\frac{\sin nt}{t}dt:$$

$\omega_f(\delta)$-ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլը, հետևաբար՝ $|\varphi_x(t)|\leq\omega_f(\delta)$, եթե $0\leq t\leq\delta$, հետևաբար՝

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}}\varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|\leq\pi\omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right)=0$$

Բավական է հետազոտել

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}}\varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt=$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\int_{\frac{\pi}{n}}^{2\frac{\pi}{n}}\varphi_x\left(t+k\frac{\pi}{n}\right)\frac{(-1)^{\mathrm{k}}\sin nt}{t+k\frac{\pi}{n}}dt=\sum_{k=0}^{n-2}\int_{\pi}^{2\pi}\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)(-1)^k\frac{\sin v}{v+k\pi}dv:$$

Բավական է ցույց տանք, որ

$$\sum_{k=0}^{n-2}\int_{\pi}^{2\pi}\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)(-1)^k\frac{\sin v}{v+k\pi}$$

ձգտում է 0-ի՝ հավասարաչափ $x\in[\pi,2\pi]$-ի: Եթե n -ը կենտ է, զույգ զույգ խմբավորենք: Եթե n-ը զույգ է, ավելացնենք $k=n-1$-ին համապատասխանող գումարելին և հանենք, նկատենք, որ ավելացրած գումարելին ձգտում է 0-ի՝

$$\varphi_x\left(\frac{v+(n-1)\pi}{n}\right)(-1)^{n-1}\frac{1}{v+(n-1)\pi}<2M\cdot\frac{1}{n}\to 0:$$

Կարող ենք խմբավորել՝

$$I=\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\left[\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)\frac{1}{v+k\pi}-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\frac{1}{v+(k+1)\pi}\right],$$

որտեղ $\sum*$ միայն զույգերի գումարն է՝

$$\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)\frac{1}{v+k\pi}-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\frac{1}{v+(k+1)\pi}=$$
$$=\left[\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{v+k\pi}+$$
$$+\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\left[\frac{1}{v+k\pi}-\frac{1}{v+(k+1)\pi}\right],$$

հետևաբար՝

$$I=\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\left[\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{v+k\pi}+$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\left[\frac{1}{v+k\pi}-\frac{1}{v+(k+1)\pi}\right]=I_1+I_2,$$

քանի որ $\left|\frac{1}{v+k\pi}-\frac{1}{v+(k+1)\pi}\right|<\frac{1}{(k+1)^2}$:

Քանի որ $\varphi_x(t)\leq 2M$ և եթե $v\leq 2\pi, k+3\leq\sqrt{n}$ =>

$$\left|\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right|\leq\omega_f\left(\frac{(k+3)\pi}{n}\right)\leq\omega_f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right),$$

ապա

$$|I_2|\leq\ \omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]-3}{}^{*}\frac{1}{(k+1)^2}+2M\sum_{[\sqrt{n}]-3}^{n-2}{}^{*}\frac{1}{(k+1)^2}<$$

$$<\ \omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)+\frac{2M}{\sqrt{n}-3}=0:$$

Գնահատենք I_1-ը՝

$$I_1=\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\left[\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{v+k\pi}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\left[\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\frac{1}{v+k\pi}$$
$$+\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\left[\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right]\left[\frac{1}{v+k\pi}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{v+(k+1)\pi}\right]=I_4+I_3:$$

Բայց քանի որ

$$\left|\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)\right|=$$
$$=\left|f\left(x+\frac{v+k\pi}{n}\right)-f(x+\frac{v+(k+1)\pi}{n})\right|\leq\omega_f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

և

$$\left|\frac{1}{v+k\pi}-\frac{1}{v+(k+1)\pi}\right|<\frac{1}{(k+1)^2},$$

ապա

$$|I_3|<\omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum\frac{1}{(k+1)^2}=0$$

Ձևափոխենք

$$I_4=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-2}{}^{*}\frac{\varphi_x\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)-\varphi_x\left(\frac{v+(k+1)\pi}{n}\right)}{k+1}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{f\left(x+\frac{v}{n}\right)-f\left(x+\frac{v+\pi}{n}\right)}{1}+\frac{f\left(x+\frac{v+2\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{v+2\pi}{n}\right)}{2}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{f\left(x+\frac{v+(n-3)\pi}{n}\right)-f(x+\frac{v+(n-2)\pi}{n}}{n-2}\right]=$$
$$=\frac{f\left(x+\frac{v+(n-1)\pi}{n}\right)-f(x+\pi)}{\pi n}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{f\left(x+\frac{v}{n}\right)-f\left(x+\frac{v}{n}+\frac{\pi}{n}\right)}{1}+\right.$$
$$+\frac{f\left(x+\frac{v}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{v}{n}+\frac{3\pi}{n}\right)-}{2}+\cdots+$$
$$\left.+\frac{f\left(x+\frac{v+(n-1)\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{v}{n}+\pi\right)}{n}\right]=I_5+T_n\left(x+\frac{V}{n}\right):$$

Քանի որ $|I_5|\leq\frac{2M}{n}$, ապա մնում է ուսումնասիրել $\frac{1}{\pi}T_n(x+\frac{V}{n})$-ը: Սա ևս հավասարաչափ զուգամիտում է 0-ի, քանի որ $T_n(x)$-ը հավասարաչափ զուգամիտում է 0-ի: Թեորեմն ապացուցված է: □

§3.10. Մոնոտոն գործակիցներով եռանկյունաչափական շարքեր

Աբելի-Դիրիխլեի թեորեմի համաձայն՝ եթե $\{a_v\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն ձգտում է զրոյի, ապա

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos vx \text{ –ը,} \tag{3.10.1}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v \sin vx \text{ -ը} \tag{3.10.2}$$

ամենուրեք զուգամիտում են՝ բացառությամբ $x = 0$ ցանկացած փոքր շրջակայքի: Եթե $a_v \geq 0$ բոլոր v-երի համար, ապա ակնհայտ է, որ (3.10.1) շարքի ամենուրեք հավասարաչափ զուգամիտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը հանդիսանում է $\sum a_v$ շարքի զուգամիտությունը: (3.10.2) շարքի համար զուգամիտությունը այնքան էլ տրիվիալ չէ:

Թեորեմ 3.10.1: Դիցուք՝ $\boldsymbol{a_v \geq a_{v+1}}$ և $\boldsymbol{a_v \to 0}$ Այդ դեպքում, որպեսզի (3.10.1) շարքը հավասարաչափ զուգամիտի, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\boldsymbol{va_v \to 0}$:

Ապացույց: Եթե (3.10.1) հավասարաչափ զուգամիտում է, և եթե $x = {\pi}/{2n}$, ապա

$$\sum_{\left[\frac{1}{2}n\right]+1}^{n} a_v \sin vx \geq \sin\frac{1}{4}\pi a_n \sum_{\left[\frac{1}{2}n\right]+1}^{n} 1 \geq \sin\frac{1}{4}\pi a_n \frac{1}{2}n\ , \tag{3.10.3}$$

այսինքն՝ $na_n \to 0$, երբ $n \to \infty$: Այսպիսով ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Ենթադրենք $va_v \to 0$, այդ դեպքում $\varepsilon_k = sup_{v\geq k}\, va_v \to 0$: Դիցուք՝ $0 < x \leq \pi$ և դիցուք՝ $N = N_x$-ը ամբողջ թիվ է, որը բավարարում է $\frac{\pi}{N+1} < x \leq \frac{\pi}{N}$ անհավասարությանը: (3.10.2) շարքի $R_m(x) = a_m \sin mx + \cdots +$ մնացորդը ներկայացնենք երկու գումարելիների տեսքով՝ $R_m(x) = R'_m + R''_m$, որտեղ R'_m-ը բաղկացած է $v < m + N$ համարներով անդամներից, իսկ R''_m-ը՝ $v \geq m + N$ համարներին համապատասխան անդամներից: Այդ դեպքում

$$|R'_m(x)| = \left|\sum_{m}^{m+N-1} a_v \sin vx\right| \leq x \sum_{m}^{m+N-1} a_v v < xN\, \varepsilon_m \leq \pi\varepsilon_m: \tag{3.10.4}$$

Կիրառելով Աբելի ձևափոխությունը և օգտագործելով $\widetilde{D_m}(x) \leq \frac{\pi}{x}$ անհավասարությունը՝ կունենանք՝

$$|R''_m| = \left|\sum_{m+N}^{\infty} (a_v + a_{v+1})\widetilde{D_v}(x) - a_{m+N}\, \widetilde{D_{m+N-1}}(x)\right| \leq$$

$$2a_{m+N}\frac{\pi}{x} \leq 2(N+1)a_{m+N} \leq 2\varepsilon_m, \qquad (3.10.5)$$

հետևաբար $|R_m| < 6\varepsilon_m$, և (3.10.2) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունն ապացուցված է:

Դիտողություն 3.10.1: Այն դեպքում, երբ $\{va_v\}$-ն մոնոտոն նվազելով ձգտում է զրոյի, վերը բերված բավարարության ապացույցը կարող է պարզեցվել: Իրոք, այս դեպքում (3.10.2) շարքը կարող ենք գրել $\sum va_v(v^{-1}\sin vx)$ տեսքով, և օգտվել այս փաստից, որ $\sum v^{-1}\sin vx$ շարքի մասնակի գումարները հավասարաչափ սահմանափակ են:

Դիտողություն 3.10.2: Եթե $a_v \geq a_{v+1} \to 0$, ապա $va_v = 0(1)$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որ (3.10.2) շարքի մասնակի գումարները հավասարաչափ սահմանափակ լինեն: Այս փաստը ապացուցվում է ինչպես նախորդը: $\sum v^{-1}\sin vx$ շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ այս պայմանը չի հանգեցնում շարքի զուգամիտության:

Դիտողություն 3.10.3: $a_v \geq a_{v+1}$ և $a_v \to 0$ ենթադրությունների ներքո, $va_v \to 0$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\sum a_v \sin vx$ շարքը լինի անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք: Բավական է ապացուցել այս պայմանի անհրաժեշտությունը:

Դիցուք՝ $\sum a_v \sin vx$ շարքի $\sigma_n(x)$ (C,1) միջինները հավասարաչափ զուգամիտում են: Այդ դեպքում մասնավորապես $\sigma_n(\frac{\pi}{2n}) \to 0$, և քանի որ $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u$ $(0,\frac{1}{2}\pi)$-ում, ապա

$$\sum_{v=1}^{n} a_v\left(1-\frac{v}{n+1}\right)\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi v}{2n}\right) \to 0:$$

Պահպանելով միայն ձախ մասի $m = \left[\frac{1}{2}n\right]$ քանակով անդամ՝ կստանանք՝

$$\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{m} va_v \to 0, \ \ \frac{1}{n}a_m\sum_{v=1}^{m} v \to 0, \ ma_m \to 0: \qquad (3.10.6)$$

Դիտողություն 3.10.4: Հայտնի է, որ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ մոնոտոն նվազող անդամներով թվային շարքի զուգամիտության համար $\lim ka_k = 0$ պայմանն անհրաժեշտ է: $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$ օրինակի վրա համոզվում ենք, որ այդ պայմանը բավարար լինել չի կարող: Բայցևայնպես, $\lim ka_k = 0$ պայմանը, համաձայն թեորեմ 3.10.1-ի, դառնում է անհրաժեշտ և բավարար

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ շարքի զուգամիտության դեպքում: Պատճառն այն է, որ $\sin kx$ հարմոնիկների առկայությամբ, վերջին շարքի գումարելիները զույգ առ զույգ «մարում են». այդ շարքի զուգամիտության պատճառը միայն այն չէ, որ գործակիցներն արագ են 0-ի ձգտում (դա քիչ է), մյուս կարևոր պատճառը շարքի գումարելիների յուրահատուկ ինտերֆե-րենցն է:

Թեորեմ 3.10.2: Եթե $a_v \to 0$, և $a_0, a_1, \ldots$ հաջորդականությունը ուռուցիկ է, ապա (3.10.1) շարքը ամենուրեք, հնարավոր է բացառությամբ $x = 0$ կետի, զուգամիտում է, որոշակի ոչբացասական ինտեգրելի $f(x)$ ֆունկցիայի և հանդիսանում է այդ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

Ապացույց: Երկու անգամ կիրառելով Աբելի ձևափոխությունը՝ կունենանք՝

$$S_n(x) = \sum_{v=0}^{n-2} (v+1)\Delta^2 a_v K_v(x) + nK_{n-1}(x)\Delta a_{n-1} + D_n(x)a_n, \qquad (3.10.7)$$

որտեղ S_n-երը (3.10.1) շարքի մասնակի գումարներն են, իսկ D_v-երը և K_v-երը՝ համապատասխանաբար Դիրիխլեի և Ֆեյերի կորիզները: Եթե $x \neq 0$, ապա վերջին երկու անդամները ձգտում են զրոյի, երբ $n \to \infty$: Այդ պատճառով

$$S_n(x) \to f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)\Delta^2 a_v K_v(x): \qquad (3.10.8)$$

Այս արտահայտությունը ոչ բացասական է, քանի որ $\{a_v\}$-ն ուռուցիկ է: Այնուհետև՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)\Delta^2 a_v \int_{-\pi}^{\pi} K_v(x)dx = \pi \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)\Delta^2 a_v < +\infty,$$

որտեղից հետևում է, որ $f(x)$ -ը ինտեգրելի է:

Ցույց տալու համար, որ (3.10.1)-ը հանդիսանում է f-ի Ֆուրիեի շարք, կարելի է ենթադրել, որ $a_0 = 0$: Քանի որ $a_1, a_2, \ldots$-ը, մոնոտոն նվազելով ձգտում են զրոյի, ապա կիրառելով (3.10.1) թեորեմը (տե՛ս Դիտողություն 3.10.1-ը)՝ համոզվում ենք, որ $\sum v^{-1} a_v \sin vx$ շարքը, որը ստացվում է (3.10.1) շարքը մաս առ մաս ինտեգրումով, հավասարաչափ զուգամիտում է F(x) անընդհատ ֆունկցիայի և, հետևաբար, հանդիսանում է F-ի Ֆուրիեի շարք: Քանի որ F'(x)-ը գոյություն ունի $x \neq 0$ դեպքում հանդիսանում է անընդհատ ֆունկցիա, և քանի որ F(x)-ն ամենուրեք անընդհատ է, ապա F-ը հանդիսանում է $F' = f$-ի նախնական: Եթե սկզբում ինտեգրենք (ε, π) ինտերվալում, իսկ հետո ε-ը ձգտեցնենք 0-ի, ապա, հաշվի առնելով $F(0) = F(\pi) = 0$ ենթադրությունը, կստանանք՝

$$\frac{a_v}{v} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\sin vxdx = \frac{2}{\pi v}\int_0^\pi f(x)\cos vxdx,$$
$$a_v = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos vxdx \ \ (v > 0):$$

Սա ճիշտ է նաև $v = 0$ դեպքում, քանի որ F-ը պարբերական է, և $\int_{-\pi}^{\pi} fdt = 0 = \pi a_0$: Այսպիսով՝ (3.10.1) շարքը կլինի Ֆուրիեի շարք:

Երբ ապացուցեցինք, որ (3.10.1) շարքը հանդիսանում է Ֆուրիեի շարք, մենք փաստացի օգտագործեցինք միայն այն ենթադրությունը, որ $\{a_v\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն ձգտում է զրոյի: Այստեղից հետևում է հաջորդ թեորեմը:

Թեորեմ 3.10.3: Եթե $a_v \to 0$, $\Delta a_v \geq 0$, ապա (3.10.1) շարքի f(x) գումարը անընդհատ է $x \neq 0$ դեպքում, ինտեգրելի է ըստ Ռիմանի (ընդհանրապես ասած՝ անիսկական իմաստով) և այդ շարքը հանդիսանում է f ֆունկցիայի Ֆուրիե-Ռիմանի շարք:

Եթե, բացի այս պայմաններից, $\{a_v\}$ հաջորդականությունը նաև ուռուցիկ է, ապա f-ը ոչ բացասական է, և F-ը հանդիսանում է f-ի Լեբեգի ինտեգրալ:

Թեորեմ 3.10.4: Գոյություն ունի մոնոտոն զրոյի ձգտող գործակիցներով (3.10.1) տեսքի շարք, որի $f(x)$ գումարը L-ինտեգրելի չէ:

Դիցուք՝ տրված են $0 = \lambda_1 < \lambda_1 < \cdots$ և $\{a_k\}$; $a_{k+1} \leq a_k \to 0$ հաջորդականությունները, ընդ որում $a_k = a_{\lambda_{n+1}}$, երբ $\lambda_n < k \leq \lambda_{n+1}$, n=1,2,...: Կիրառելով Աբելի ձևափոխությունը, կստանանք՝

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \Delta a_v\, D_v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, D_{\lambda_n}(x), \quad \alpha_n = \Delta a_{\lambda_n}:$$

Քանի որ

$$\int_0^\pi |D_n|\,dx \le c\ln n, \qquad \int_{\frac{1}{n}}^\pi |D_n|\,dx \ge c_1\ln n,$$

ապա վերջին հավասարությունից կստանանք՝

$$\int_{1/\lambda_m}^\pi |f|dx \ge c_1\,\alpha_m ln\lambda_m - c\sum_{n=1}^{m-1}\alpha_n ln\lambda_n - 2\ln(\pi\lambda_m)\sum_{n=m+1}^{\infty}\alpha_n:$$

Վերցնելով $\alpha_n = {}^1/_{n!}$ և $\lambda_n = 2^{(n!)^2}$, կստանանք, որ վերջին ինտեգրալը սահմանափակ չէ $m\to\infty$ դեպքում:

Յանկացած $\varepsilon_n\to 0$ դրական թվերի հաջորդականության համար դժվար չէ կառուցել (օրինակ երկրաչափորեն) այնպիսի ուռուցիկ $\{a_v\}$ հաջորդականություն, որ $a_n\ge\varepsilon_n$, և $a_n\to 0$: Հետևաբար, Ֆուրիեի գործակիցները կարող են ձգտել զրոյի ինչքան ասես դանդաղ: Եթե a_n-ը և b_n-ը ինտեգրելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են, $\sum\frac{b_n}{n}$ շարքը զուգամիտում է:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}:$$

Ֆուրիեի շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ $\sum\frac{a_n}{n}$ շարքը կարող է տարամիտել:

Դիցուք՝ S_n-ը և σ_n-ը համապատասխանաբար (3.10.1) շարքի մասնակի գումարներն ու (C,1) միջիններն են: Այդ դեպքում 3.10.2 թեորեմի պայմանների ներքո $\|f-\sigma_n\|_L\to 0$:

Թեորեմ 3.10.5: (3.10.2) թեորեմի ենթադրությունների ներքո, $\|f-\sigma_n\|_L\to 0$ այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{o}\{(\mathbf{ln}\,\boldsymbol{n})^{-\mathbf{1}}\}$:

Ապացույց: (3.10.7)-ից հանելով (3.10.8)-ը՝ համոզվում ենք, որ $|f(x)-S_n(x)|$-ը գտնվում է

$$a_n|D_n(x)| \pm \left\{\sum_{v=n-1}^{\infty}(v+1)\Delta^2\,a_vK_v(x) + \Delta a_{n-1}K_{n-1}(x)n\right\}$$

մեծությունների միջև: Եթե ինտեգրենք այս անհավասարությունը $(-\pi;\pi)$ միջակայքում, ապա կստանաք $\|f-S_n\|_L = \pi a_nL_n + o(1)$, որտեղ L_n-ները Լեբեգի հաստատուններն են: Քանի որ L_n-երը ունեն $\ln n$-ի հավասար կարգ, ապա (3.10.5) թեորեմը ապացուցված է:

Եթե $a_n\ln n\to\infty$ (մասնավորապես $a_n = (\ln n)^{-\frac{1}{2}}$, երբ n> 1), ապա $\|f-S_n\|_L\to\infty$, և այսպիսով $\|S_n\|_L\to\infty$:

Հիմա դիտարկենք $\sum a_v \sin vx$ շարքը, որտեղ $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \to 0$: Այդ շարքի մասնակի գումարները նշանակենք $t_n(x)$-ով: Կիրառելով Աբելի ձևափոխությունները՝ կստանանք՝

$$t_n(x) = \sum_{v=1}^{n-1} \widetilde{D_v}(x) \Delta\, a_v + a_n \widetilde{D_n}(x) \to \sum_{v=1}^{\infty} \widetilde{D_v}(x) \Delta\, a_v = g(x), \text{ երբ } n \to \infty:$$

Եթե մենք փոխարինենք $\widetilde{D_v}$-ն $\widetilde{D_v}^*$- ընդհանրացված կորիզով, ապա կունենանք այստեղ $g^*(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ ֆունկցիա, որը $g(x)$-ից տարբերվում է $\frac{1}{2}\sum a_v \sin vx$ անընդհատ ֆունկցիայով: g^*-ը ներկայացնող շարքը ունի ոչբացասական անդամներ, և քանի որ $(0,\pi)$ միջակայքի վրա $\widetilde{D_v}^*$(x)-ի ինտեգրալը ունի lnn-ին հավասար կարգ, ապա կարող ենք եզրակացնել, որ g^*-ը, հետևաբար նաև g-ն ինտեգրելի են $(0,\pi)$-ի վրա այն և միայն այն դեպքում երբ $\sum \Delta a_v \ln v$ շարքը զուգամետ է: Ենթադրենք այս շարքը զուգամետ է: Նկատելով, որ

$$a_n \ln n = \ln n \sum_{v=n}^{\infty} \Delta a_v \leq \sum_{v=n}^{\infty} \Delta a_v \ln v \to 0,$$

կստանանք, որ $\|g - t_n\|_L \to 0$: Մասնավորապես $\sum a_v \sin vx$ հանդիսանում է g-ի Ֆուրիեի շարք: Այսպիսով՝ տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.10.6: Դիցուք՝ $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \to 0$: Այդ դեպքում $\sum a_v \sin vx$ շարքի $g(x)$ գումարը ինտեգրելի են այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sum \Delta a_v \ln v < \infty$: Եթե այս պայմանը տեղի ունի, ապա $\sum a_\vartheta \sin \vartheta x$ շարքը հանդիսանում է է g-ի Ֆուրիեի շարք և $\|g - t_n\|_L \to 0$:

(3.10.6) թեորեմի համաձայն՝ g^* ֆունկցիան ոչ բացասական է $(0,\pi)$-ում, հետևաբար $g(x)$-ը սահմանափակ է ներքևից այդ ինտերվալում:

Եթե, բացի այդ, $a_1, a_2,\ldots$, հաջորդականությունը նաև ուռուցիկ է, ապա $g(x)$-ը դրական է $(0,\pi)$-ի վրա՝ բացառությամբ $a_1 = a_2 =,\ldots=0$ դեպքի: Այս պնդման ապացույցի համար կարող ենք կիրառել Աբելի ձևափոխությունը $\sum \widetilde{D_v}(x)\, \Delta a_v$ շարքի նկատմամբ և օգտվել այն փաստից, որ $K_v \geq 0$, $(0,\pi)$-ի վրա:

Թեորեմ 3.10.7: Եթե պահանջենք միայն $a_v \to 0$ և $\Delta a_v \geq 0$ պայմանները ապա $\sum a_v \sin vx$ շարքը կհանդիսանա Ֆուրիեի ընդհանրացված սինուս-շարք:

Իսկապես, պարզ հաշվարկը ցույց է տալիս, որ այս դեպքում

$$2g(x)\sin x = a_1 + a_2\cos x + \sum_{v=2}^{\infty}(a_{v+1} - a_{v-1})\cos vx:$$

Աջ մասի շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է և, հետևաբար, իրենից ներկայացնում է $2g\sin x$-ի Ֆուրիեի շարք: Գրելով Ֆուրիեի բանաձևերը $a_1, a_2, a_3 - a_1\ldots$, գործակիցների համար և գումարելով դրանք, կստանանք՝ $a_v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin vx\,dx$ $(v = 1,2,\ldots)$: Այստեղ ենթինտեգրալ արտահայտությունը անընդհատ է, քանի որ անընդհատ է $g\sin x$-ը:

Դիցուք՝ h_n-ը $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ հարմոնիկ շարքի մասնակի գումարներն են, այնպես որ $h_n \cong \ln n$: Դիցուք՝ $a_v \to 0$, $\Delta a_v \geq 0$:

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{a_v}{v} = \sum_{v=1}^{n-1}\mathrm{h}_v\,\Delta a_v + a_n\mathrm{h}_\mathrm{n},$$

բանաձևից հետևում է, որ եթե $\sum v^{-1}a_v$-ն վերջավոր է, ապա վերջավոր է նաև $\sum \Delta a_v \ln v$-ն: Հակառակը, վերջին գումարի վերջավոր լինելուց հետևում է, որ $a_n\ln n \leq \sum_n^{\infty}\Delta a_v \ln v = o(1)$ և (3.10.16)-ի համաձայն՝ $\sum v^{-1}a_v$ վերջավոր է:

Այսպիսով՝ եթե $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \to 0$, ապա $\sum v^{-1}a_v < \infty$ պայմանը և $\sum \Delta a_v \ln v < \infty$-ը համարժեք են: Այնուհետ (3.10.6) թեորեմում $\sum \Delta a_v \ln v$ շարքի զուգամիտությունը կարելի է փոխարինել $\sum n^{-1}a_n$ շարքի զուգամիտությամբ:

Ինչպես արդեն գիտենք, վերջին շարքը զուգամիտում է, եթե (3.10.2) շարքը հանդիսանում է Ֆուրիեի շարք: Այստեղից էլ մասնավորապես հետևում է, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln x}$ շարքը չի հանդիսանում Ֆուրիեի շարք:

Գրականություն

1. **А. Зигмунд,** Тригонометрические ряды, изд. “Мир”, т. 2, Москва, 1965.
2. **А. Х. Колмогоров, О. В. Фомин,** Элементы теории функций и функционального анализа, четвертое изд., Изд. “Наука”, Москва, 1976.
3. **В. И. Смирнов,** Курс высшей математики, , Гос. изд. технико-теоретической лит., т. 1, 2, 3, 4, 5, Москва, 1947.
4. **Г. М. Фихтенгольц,** Курс дифференциального и интегрального исчисления, ФИЗМАТЛИТ, восьмое изд., т. 1, 2, 3, Москва, 2003.
5. **И. П. Натансон,** Теория функций вещественной переменной, Изд. “Наука”, третье изд., Москва, 1974.
6. **Н. К. Бари,** Тригонометрические ряды, Гос. изд. физико-математической лит., Москва, 1961.
7. **Н. Н. Лузин,** К основной теореме интегрального исчисления, Мат. сборник, т. 28:2, ст. 266-294, 1912.

Բովանդակություն

ԳԼՈՒԽ 1.
ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԸ ԵՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ

ԳԼՈՒԽ 2.
ՉԱՓԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ԼԵԲԵԳԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

ԳԼՈՒԽ 3.
ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈՆՈՐՄԱԼ ԴԱՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Լ. Ն. ԳԱԼՈՅԱՆ,
Ա. Խ. ԿՈԲԵԼՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԸՆՏՐՈՎԻ ԲԱԺԻՆՆԵՐ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Հ. Ասլանյանի

Տպագրված է «Վարդան Մկրտչյան» ԱՁ տպագրատանը:
Երվանդ Քոչար 7-62

Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 13.5:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2015