ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ ԵՎ ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2013

ՀՏԴ 519.8 (042.4)
ԳՄԴ 22.1 g7
Ս 160

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը

Խմբագիրներ՝ տեխն. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Ա. Առաքելյան
ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆ. Ֆ. Գասպարյան

ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ Կ.

Ս 160 Օպտիմալացման մեթոդներ և խաղերի տեսություն / Կ. Սաղաթելյան. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2013. – 238 էջ:

Ձեռնարկը կազմվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում կարդացած դասախոսությունների հիման վրա: Ներառում է «Վարիացիոն հաշիվ և օպտիմալացման մեթոդներ», «Գործույթների հետազոտում», «Խաղերի տեսություն» դասընթացների ծրագրային նյութը:

Ձեռնարկը կարող է օգտակար լինել ինչպես ԵՊՀ, այնպես էլ այլ բուհերի ուսանողներին, ասպիրանտներին և համապատասխան մասնագետներին:

ՀՏԴ 519.8 (042.4)
ԳՄԴ 22.1 g7

ISBN 978-5-8084-1701-4

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐ ԸՆԴՈՒՆԵԼՈՒ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Որոշումներ ընդունելու պրոցեսները ընկած են յուրաքանչյուր նպատակային գործունեության հիմքում: Լավագույն որոշումներ ընդունելու մաթեմատիկական մոդելները բազմազան են և կարող են էապես տարբերվել միմյանցից: Այդ պատճառով այդպիսի մոդելներ հետազոտող մաթեմատիկական տեսությունները նույնպես տարբեր են ինչպես խնդիրների դրվածքով, այնպես էլ կիրառվող մաթեմատիկական ապարատով: Հաճախ այդ բոլոր տեսությունները միավորվում են <<գործույթների հետազոտում>>, <<օպտիմալացման մեթոդներ>>, <<որոշումներ ընդունելու տեսություն>> անվանումներով:

Որոշումներ ընդունելու ընդհանուր մոդելը կարելի է ներկայացնել որպես $\left\langle X,\{\succ_\alpha\}_{\alpha\in A}\right\rangle$ համակարգ, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, որը կոչվում է *բոլոր հնարավոր որոշումների բազմություն*, իսկ $\succ_\alpha$-ները կամայական բինար հարաբերություններ են, որոնք կոչվում են *նախընտրելիության*, կամ *գերադասելիության հարաբերություններ*: Եթե X բազմության որևէ x և y կետերի համար $x\succ_\alpha y$, ապա ասում են, որ x-ը գերադասելի է կամ նախընտրելի է y-ից ըստ α հայտանիշի:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր խնդրի մասնավոր դեպքերը:

ա) Դիցուք X բազմությունը վերջավոր է, և այդ բազմության վրա տրված են վերջավոր թվով նախընտրելիության հարաբերություններ: Այս դեպքում խնդիրը կոչվում է խմբային ընտրության խնդիր:

բ) Եթե X բազմության վրա տրված հարաբերությունը միակն է, այսինքն՝ խնդիրն ունի $\langle X,\succ\rangle$ տեսքը, ապա կարևոր նշանակություն ունի այն հարցը, թե գոյություն ունի արդյո՞ք իրականարժեք $u(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ ցանկացած $x,y\in X$ համար՝

$$u(x)>u(y)\ \Leftrightarrow\ x\succ y$$

Այս ֆունկցիան անվանում են օգտավետության ֆունկցիա, իսկ տեսությունը, որը զբաղվում է այդ հարցերով՝ օգտավետության տեսություն:

գ) Այն դեպքում, երբ օգտավետության ֆունկցիան գոյություն ունի, ստանում ենք, այսպես կոչված, էքստրեմալ խնդիր՝ X բազմության մեջ լավագույն կետ գտնելու խնդիրը բերվում է

$$\max_{x\in X} u(x) \tag{*}$$

գտնելու խնդրի: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի են այս խնդրի մասնավոր դեպքերը և լուծման մեթոդները: Դա մեկ կամ մի քանի փոփոխականի ածանցելի ֆունկցիաների էքստրեմալ արժեքներ գտնելու խնդիրներն են, որտեղ X-ը իրական առանցքի հատված է, կամ R^n-ի որևէ ուղղանկյուն բազմություն:

դ) Այն դեպքերում, երբ $u(x)$-ը n փոփոխականի ֆունկցիա է, իսկ X բազմությունը տրված է ոչ բացահայտ տեսքով, ապա (*) խնդիրը անվանում են մաթեմատիկական ծրագրման խնդիր:

ե) (*) խնդիրը կոչվում է վարիացիոն հաշվի խնդիր, եթե $u(x)$-ը ֆունկցիոնալ է, որոշված $X \subseteq C^k\left(t_0,t_1\right)$ բազմության վրա: Եթե դրան ավելացնում են նաև դիֆերենցիալ հավասարումների տեսքի պայմաններ և սահմանափակումներ, ապա այն անվանում են օպտիմալ կառավարման խնդիր:

զ) Երբ X բազմությունը կամայական բազմություն է և տրված հարաբերությունների թիվը վերջավոր է, ապա խնդիրը կոչվում է բազմանպատակային օպտիմալացման խնդիր: Եթե յուրաքանչյուր հարաբերության համար գոյություն ունի օգտավետության ֆունկցիա, ապա այն անվանում են վեկտորական օպտիմալացման խնդիր:

է) Եվ վերջապես, այն դեպքերում, երբ X բազմությունը կամայական է և կամայական թվով հարաբերություններ են տրված, իսկ որոշումները ընդունվում են անորոշության կամ կոնֆլիկտի պայմաններում, այդ մոդելն անվանում են խաղ, իսկ տեսությունը՝ խաղերի տեսություն:

Սույն դասընթացում հակիրճ անդրադարձել ենք վերը նշված բոլոր տեսություններին:

ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԴԱՍԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1.1: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Դիցուք X-ը նորմավորված տարածության ենթաբազմություն է և $f(x)$-ը այդ բազմության վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: $f(x)$ ֆունկցիայի սուպրեմում կանվանենք այն M, թիվը, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1. $f(x) \le M, x \in X$
2. Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $x_\varepsilon \in X$,որ՝ $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$:

$f(x)$ Ֆունկցիայի սուպրեմումը X բազմության վրա նշանակվում է՝ $\sup\limits_{x \in X} f(x)$: Այն դեպքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in X$ կետ, որ $f(x^0) = M$, ապա M թիվը անվանում են $f(x)$ *ֆունկցիայի մաքսիմում* կամ մեծագույն արժեք, նշանակում են $\max\limits_{x \in X} f(x)$ և ասում են, որ սուպրեմումը հասանելի է, կամ մաքսիմումը գոյություն ունի: Այն կետերը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին, անվանում են մաքսիմումի կետեր, և այդ կետերի բազմությունը նշանակում $Arg \max\limits_{x \in X} f(x)$-ով՝

$$Arg \max_{x \in X} f(x) = \left\{ x' \in X : f(x') = \max_{x \in X} f(x) \right\}:$$

Նմանապես $f(x)$ ֆունկցիայի *ինֆիմում* կանվանենք այն m թիվը, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1. $f(x) \ge m, x \in X$
2. Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $x_\varepsilon \in X$, որ՝ $f(x_\varepsilon) > m - \varepsilon$:

$f(x)$ ֆունկցիայի ինֆիմումը X բազմության վրա նշանակվում է՝ $\inf\limits_{x\in X} f(x)$: Այն դեպքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in X$ կետ, որ $f(x^0)=m$, ապա m թիվը անվանում են $f(x)$ *ֆունկցիայի մինիմում* կամ *փոքրագույն արժեք*, նշանակում են $\min\limits_{x\in X} f(x)$ և ասում են, որ ինֆիմումը հասանելի է, կամ մինիմումը գոյություն ունի: Այն կետերը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է իր նվազագույն արժեքին, անվանում են մինիմումի կետերը, և այդ կետերի բազմությունը նշանակում $Arg\min\limits_{x\in X} f(x)$-ով՝

$$Arg\min_{x\in X} f(x)=\left\{x'\in X : f(x')=\min_{x\in X} f(x)\right\}:$$

Հաճախ օգտագործվում է նաև ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի ընդհանուր՝ *ֆունկցիայի էքստրեմում* անվանումը:

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում սահմանվում է նաև *լոկալ էքստրեմումի* գաղափարը:

Ասում են, որ $x^0 \in X$ կետը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե գոյություն ունի x^0 կետի I շրջակայք այնպես, որ բոլոր $x\in I$ համար

$$f(x)\le f(x^0) \quad \left(f(x)\ge f(x^0)\right):$$

Բերենք ֆունկցիայի էքստրեմումների վերաբերյալ մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից հայտնի մի քանի արդյունքներ: Էքստրեմումների հասանելիության խնդիրը լուծվում է Վայերշտրասի հայտնի թեորեմով:

Թեորեմ 1.1.1: R^n տարածության փակ սահմանափակ (կոմպակտ) բազմության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին:

Հետևյալ թեորեմը օգնում է գտնելու ֆունկցիայի էքստրեմումները:

Թեորեմ 1.1.2: Դիցուք $f(x)$-ը $D \subseteq R^n$ տիրույթում որոշված ածանցելի ֆունկցիա է: Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետը ֆունկցիայի D տիրույթի ներքին կետ է, ապա այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները պետք է հավասար լինեն 0-ի, այսինքն բավարարվեն հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n:$$

Այլ կերպ ասած, էքստրեմումի կետում (եթե այն ներքին կետ է) ֆունկցիայի գրադիենտը հավասար է 0-ի:

1.2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Կիրառական բազմաթիվ խնդիրներում այն տիրույթը, որտեղ փնտրում ենք ֆունկցիայի էքստրեմումը, տրվում է ոչ բացահայտ տեսքով: Դիտարկենք դասական պայմանական էքստրեմումի խնդիրը. գտնել n –փոփոխականի $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ ֆունկցիայի մաքսիմումը կամ մինիմումը $D\subseteq R^n$ տիրույթում, որը տրված է հետևյալ հավասարումների համակարգի տեսքով՝

$$g_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=b_1,$$
$$g_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=b_2,$$

$$g_m\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=b_m:$$

Այս հավասարումներն անվանում են *կապի հավասարումներ*: Դիցուք $m<n$ և գոյություն ունի այնպիսի $x^0\in D$ կետ, որ՝

$$f\left(x^0\right)=\max_{x\in D}f\left(x\right):$$

Ենթադրենք նաև, որ $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ և $g_i\left(x_1,x_2,...,x_n\right),i=1,2,...,m$ ֆունկցիաները ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների, և x^0 կետում $g_i,i=1,2,...,m$ ֆունկցիաների՝

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\\ & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

յակոբիանի ռանգը հավասար է m-ի: Դիցուք $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ թվերը կամայական հաստատուններ են: Կազմենք այս խնդրի $L(x,\lambda)$ Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x):$$

$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ հաստատունները անվանում են անորոշ փոփոխականներ, կամ Լագրանժի գործակիցներ: Բերենք պայմանական էքստրեմումի խնդրի լուծման Լագրանժի եղանակը:

Լագրանժի (Lagrange) անորոշ գործակիցների եղանակ: *Դիցուք տրված է պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝ գտնել*

$$\max_{x\in D} f(x),\ D=\left\{x\in R^n : g_i(x)=b_i, i=1,2,...,m\right\},$$

որտեղ բոլոր ֆունկցիաները բավարարում են վերը նշված պայմաններին և $f(x)$ ֆունկցիան իր էքստրեմալ արժեքին հասնում է D տիրույթի ներքին x^0 կետում: Այս դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ հաստատուններ, որ էքստրեմումի x^0 կետում բավարարվում են հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i}=0,\ \ i=1,2,...,n:$$

Այսպիսով, Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակը թույլ է տալիս պայմանական էքստրեմումի խնդիրը բերել ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդրին, սակայն $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի նկատմամբ:

Բերենք այս եղանակի հիմնավորումը երկու փոփոխականի և մեկ կապի հավասարման դեպքում: Ենթադրենք հարկավոր է գտնել $f(x,y)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումը $g(x,y)=0$ կապի դեպքում: Դիցուք լոկալ էքստրեմումի կետը (x^0,y^0)-ն է: Յակոբիանի ռանգի վերաբերյալ պայմանը կվերածվի $g'_x\neq 0$ կամ $g'_y\neq 0$ պայմանների:

Դիցուք (x^0, y^0) կետում $g'_y \neq 0$: Հետևաբար, ոչ բացահայտ ֆունկցիաների վերաբերյալ հայտնի թեորեմի համաձայն, կարելի է $g(x,y)=0$ հավասարումից (x^0, y^0) կետի որևէ շրջակայքում y-ը արտահայտել որպես ֆունկցիա x-ից՝ $y=\varphi(x)$, ընդորում՝ $y^0=\varphi(x^0)$: Տեղադրելով նույն հավասարման մեջ, կստանանք նույնություն՝ $g(x,\varphi(x))\equiv 0$: Այստեղից,՝

$$\frac{dg}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\varphi'_x=0,\ \ \varphi'_x=-\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}:$$

Տեղադրելով $f(x,y)$ ֆուկցիայի մեջ $y=\varphi(x)$, կստանանք՝ $f(x,\varphi(x))$:

Քանի որ $y^0=\varphi(x^0)$, և (x^0, y^0)-ն $f(x,y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, ուստի այդ կետում՝

$$\frac{df}{dx}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'_x=0:$$

Այստեղից՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0:$$

Եթե այժմ նշանակենք՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial y}=-\lambda,$$

ապա վերջնականապես, (x^0, y^0) կետում, կստանանք՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0:$$

Կամ՝ $L'_x(x^0, y^0)=0,\ L'_y(x^0, y^0)=0:$

1.3: ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

Դիտարկենք մի քանի օրինակ, որոնք կարող են պատկերացում տալ վարիացիոն հաշվում ուսումնասիրվող խնդիրների մասին: Ինչպես գիտենք, հարթության երկու՝ $A(x_0, y_0)$ և $B(x_1, y_1)$ կետերը միացնող $y(x)$ կորի երկարությունը (եթե ունի անընդհատ ածանցյալ) տրվում է $l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx$ բանաձևով: Փոփոխելով $y(x)$ կորը մենք կստանանք կորի երկարության տարբեր արժեքներ, այսինքն կորի երկարությունը ֆունկցիա է կորից՝ $l = l(y(x))$: Հայտնի խնդիր է՝ գտնել տրված $A(x_0, y_0)$ և $B(x_1, y_1)$ կետերը միացնող այն կորը, որի երկարությունը ամենակարճն է: Այս խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. Գտնել

$$\min_{y \in C^1[x_0, x_1]} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx:$$

Դիտարկենք մեկ այլ խնդիր: Դիցուք փոփոխական խտությամբ թափանցիկ միջավայրում տրված են $A(x_0, y_0, z_0)$ և $B(x_1, y_1, z_1)$ կետերը: Հարկավոր է որոշել A կետից B կետ անցնող լույսի ճառագայթի հետագիծը: Ըստ Ֆերմայի հայտնի սկզբունքի, լույսի ճառագայթը միշտ շարժվում է ամենաարագ հետագծով: Դիցուք (x, y, z) կետում լույսի արագությունը $v(x, y, z)$ է: Ճանապարհի ds հատվածը լույսը կանցնի $t = \dfrac{ds}{v}$ ժամանակում: Եթե x փոփոխականը ընդունենք որպես պարամետր, լույսի որոնելի հետագծի հավասարումը կարելի է դիտարկել $(y(x), z(x))$-տեսքով, և ժամանակի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}dx:$$

Խնդիրը բերվում է հետևյալին: Հարկավոր է գտնել այնպիսի $y(x), z(x)$ ֆունկցիաներ, որ T-ն ունենա փոքրագույն արժեք, ընդ որում $y(x)$ և $z(x)$ ֆունկցիաները պետք է բավարարեն հետևյալ եզրային պայմաններին՝

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0, y(x_1) = y_1, z(x_1) = z_1:$$

Մեզ հասած պատմական տվյալների համաձայն, վարիացիոն հաշվի առաջին խնդիրը լուծվել է մոտավորապես 850-ական մ.թ.ա. թվականներին Դիդո (Դիդոնա, Էլիսսա) թագուհու կողմից: Երբ Տյուրոսի թագավորը մահանում է, թագավորությունը անցնում է իր զավակներին՝ որդի Պիգմալիոնին և դուստր Դիդոին: Սակայն ցանկանալով միանձնյա կառավարել երկիրը, Պիգմալիոնը սպանում է Դիդոյի ամուսնուն: Դիդոն, հավաքելով իր ունեցվածքը, հավատարիմ ազնվականների հետ դիմում է փախուստի և մի առ ժամանակ հետո հասնում Աֆրիկայի հյուսիսային ափերը (այժմյան Թունիս): Այստեղ տեղի բերբերների թագավորից նա մի կտոր հողատարածք է խնդրում բնակվելու համար, սակայն թագավորը համաձայնվում է տալ այնքան հող, որքան կտեղավորվի ցուլի մորթու մեջ: Դիդոն համաձայնվում է, ընտրում ցուլին, ապա ցուլի կաշուց կտրում նեղ ժապավեններ և, միացնելով միմիանց, ստանում 2,5 մղոն երկարությամբ պարան, որով և անջատում է օվկյանոսի ափից իր հողատարածքը: Հետագայում այդ տարածքում հիմնվեց Կարթագեն պետությունը, որի առաջին թագուհին Դիդոն էր: Դիդոն ոչ միայն հնարամիտ էր, այլ նաև շատ գեղեցիկ և բազմաթիվ պոետներ, երաժիշտներ և նկարիչներ, սկսած Վերգիլիուսից և Պուշկինից անդրադարձել են Դիդոյի կյանքի պատմությանը: Ֆորմալ տեսանկյունից Դիդոյի խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. գտնել իրական առանցքի a և b կետերը միացնող հաստատուն l երկարություն ունեցող այնպիսի $y(x)$ կոր, որ իրական առանցքով և կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը լինի մեծագույն: Այսպիսով, կգանք հետևյալ խնդրին՝ գտնել

$$J[y] = \int_a^b y(x)dx$$

ֆունկցիոնալի մաքսիմումը, եթե $y(x)$-ն բավարարում է

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l, \quad y(a)=y(b)=0$$

պայմանին:

Ընդհանուր դեպքում, դիցուք X-ը ֆունկցիոնալ տարածություն է և $J(x)$-ը ինտեգրալային ֆունկցիոնալ է, որոշված այդ տարածության վրա: Այստեղ կդիտարկվեն միայն $C[t_0,t_1]$ և $C^k[t_0,t_1]$ տեսքի ֆունկցիոնալ տարածություններ, որտեղ $[t_0,t_1]$-ը իրական առանցքի որևէ հատված է:

Ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումի կետը սահմանվում է այնպես, ինչպես և ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի դեպքում՝ $x^0(t)$-ն $J(x)$ ֆունկցիոնալի լոկալ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե գոյություն ունի $x^0(t)$-ի I շրջակայք (համապատասխան տարածության նորմով), որ բոլոր $x(t)\in I$ համար տեղի ունի

$$J(x^0)\geq J(x), \ \left(J(x^0)\leq J(x)\right)$$

անհավասարությունը:

Լեմ 1.3.1: (Լագրանժ(Lagrange)): Եթե $f(t)\in C[t_0,t_1]$ ***և*** $\eta(t)\in C^1[t_0,t_1]$, $\eta(t_0)=0, \eta(t_1)=0$ ***պայմանին բավարարող բոլոր ֆունկցիաների համար***

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)\,dt = 0,$$

ապա $f(t)\equiv 0, t\in[t_0,t_1]$:

Ապացույց: Ենթադրենք, որ լեմի պնդումը սխալ է և գոյություն ունի $\tau\in[t_0,t_1]$, որ $f(\tau)\neq 0$, մասնավորապես $f(\tau)>0$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ τ-ն $[t_0,t_1]$ բազմության ներքին կետ է: Քանի որ $f(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի գոյություն ունի (τ_1,τ_2) միջակայք, որտեղ $f(t)>0$: (Եթե այն գտնվի ծայրակետում, օրինակ $\tau=t_1$, ապա $f(t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից կհետևի, որ գոյություն ունի $(t',t_1]$ միջակայք, որտեղ $f(t)>0$: Այս դեպքում որպես τ կետ կվերցնենք այդ միջակայքի կամայական ներքին կետ): Կառուցենք $\eta(t)$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$\eta(t)=\begin{cases}(t-\tau_1)^2(t-\tau_2)^2, & t\in(\tau_1,\tau_2),\\ 0, & t\notin(\tau_1,\tau_2):\end{cases}$$

Այսպես կառուցված ֆունկցիան բավարարում է լեմի պայմաններին՝ $\eta(t)\in C^1[t_0,t_1]$, $\eta(t_0)=0,\eta(t_1)=0$: Հաշվի առնելով, որ $\eta(t)$-ն նույնաբար զրո է (τ_1,τ_2) միջակայքից դուրս,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)\,dt=\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)(t-\tau_1)^2(t-\tau_2)^2\,dt:$$

Սակայն այս ինտեգրալը խիստ դրական է, քանի որ (τ_1,τ_2) միջակայքում խիստ դրական է $f(t)$-ն: Ստացված հակասությունը ապացուցում է լեմի պնդումը:

Նկատենք, որ այս լեմի պնդումը մնում է ուժի մեջ, եթե $\eta(t)$ ֆունկցիայի վրա դրվեն ավելի խիստ պայմաններ, օրինակ պահանջենք մինչև որևէ n կարգի անընդհատ ածանցյալների գոյությունը:

Դիցուք տրված է ինտեգրալային ֆունկցիոնալ՝

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt,$$

որտեղ $L(t,x,\dot{x})$ ֆունկցիան անընդհատ է որպես երեք փոփոխականի ֆունկցիա, և ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Այստեղ $\dot{x}(t)$-ով նշանակված է $x(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալը: $J[x]$ ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումը փնտրում ենք $C^1[t_0,t_1]$ ֆունկցիաների դասում:

Կասենք, որ $x^0(t)$ ֆունկցիան $J[x]$ ֆունկցիոնալի էքստրեմումի կետ է, եթե գոյություն ունի $\varepsilon>0$, այնպես, որ՝

$$J[x^0]\geq J[x],\ \left\|x^o-x\right\|_{C^1}<\varepsilon,$$

կամ՝

$$J[x^0]\leq J[x],\quad \left\|x^o-x\right\|_{C^1}<\varepsilon:$$

Տարբեր խնդիրներում կարող են պահանջվել նաև ավելի բարձր կարգի ածանցյալների, կամ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների գոյության կամ անընդհատության պայմաններ: Քանի որ այս դասընթացում մեր նպատակը վարիացիոն հաշվի ամբողջական և խիստ մաթեմատիկական տեսություն շարադրելը չէ (դրանց հետ կարելի է ծանոթանալ, օրինակ մասնագիտական [1] և [26] գրականությունից), այլ միայն ծանոթացնել այս տեսության սկզբունքների և մոտեցումների հետ, ուստի հետագայում կենթադրենք, որ բոլոր հանդիպող ֆունկցիաները ունեն այնքան անընդհատ ածանցյալներ, որքան պահանջվի:

Վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդիրը: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Գտնել

$$\underset{x\in K}{extr}\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt,$$

որտեղ $K=\left\{x\in C^1\left[t_0,t_1\right],\ x\left(t_0\right)=x_0,\ x\left(t_1\right)=x_1\right\}$:

Դիցուք այս խնդրի լուծումը՝ $x(t)$-ն գոյություն ունի: Վերցնենք կամայական $\eta(t)\in C^1\left[t_0,t_1\right]$ ֆունկցիա, որը ծայրակետերում հավասար է զրոյի՝ $\eta\left(t_0\right)=\eta\left(t_1\right)=0$, և կազմենք նոր ֆունկցիա՝ $x(t)+\alpha\eta(t)$, որտեղ α-ն բավականաչափ փոքր իրական թիվ է: Այս նոր ֆունկցիան բավարարում է նույն եզրային պայմաններին, ինչ և $x(t)$ ֆունկցիան, այսինքն $x(t)+\alpha\eta(t)\in K$ Տեղադրելով J ֆունկցիոնալի մեջ, կստանանք α-ից կախված ֆունկցիա ($x(t)$ և $\eta(t)$ ֆունկցիաները ֆիքսված են)՝

$$J(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x+\alpha\eta,\dot{x}+\alpha\dot{\eta})\,dt:$$

Ցանկացած տրված $\varepsilon>0$ թվի համար $x(t)+\alpha\eta(t)$ ֆունկցիան կգտնվի $x(t)$ ֆունկցիայի ε շրջակայքում 0-ին մոտ բավականաչափ փոքր α-ի համար: Քանի որ $x(t)$-ն ենթադրվել է $J[x]$ ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումի կետ, ուստի $J(\alpha)$ ֆունկցիան պետք է ունենա լոկալ էքստրեմում $\alpha=0$ դեպքում, հետևաբար $\alpha=0$ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է 0-ի: Ածանցելով ըստ α-ի, կստանանք՝

$$J'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})\eta(t)+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\dot{\eta}(t)\right]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} L_x(t,x,\dot{x})\eta(t)+\int_{t_0}^{t_1} L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\dot{\eta}(t)\,dt:$$

Մասերով ինտեգրելով երկրորդ գումարելին, կստանանք՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt+$$

$$+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}: \qquad (1.3.1)$$

Ոչ ինտեգրալային գումարելիները հավասար են 0-ի, քանի որ $\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$, հետևաբար՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt: \qquad (1.3.2)$$

Կիրառելով Լագրանժի լեմը, ստանում ենք, որ եթե գոյություն ունի $J[x]$ ֆունկցիոնալի լոկալ էքստրեմումի $x(t)$ ֆունկցիա, ապա այն պետք է բավարարի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})=0: \qquad (1.3.3)$$

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալի նմանությամբ, $\delta J=J'(0)\alpha$ արտահայտությունն ($J(\alpha)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը $\alpha=0$ կետում) անվանում են $J[x]$ ֆունկցիոնալի վարիացիա: Այս (1.3.3) հավասարումն անվանում են *Էյլերի (Euler) հավասարում,* իսկ հավասարմանը բավարարող $x(t)$ ֆունկցիաները՝ *էքստրեմալներ*։

Այժմ ենթադրենք, որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան կախված է երկու՝ $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաներից, այսինքն J ֆունկցիոնալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt:$$

Դիտարկենք վարիացիոն հաշվի հետևյալ խնդիրը՝

$$\underset{(x,y)\in K}{extr}\; J[x,y]$$

$$K=\left\{(x,y)\in C^1[t_0,t_1]\times C^1[t_0,t_1],x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1;y(t_0)=y_0,y(t_1)=y_1\right\}$$

Նորից կենթադրենք, որ $J[x,y]$-ի էքստրեմումը գոյություն ունի, ($x(t)$, $y(t)$)-ն դրա էքստրեմումի կետն է, և $L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ ֆունկցիան բավարարում է ածանցելիության բոլոր անհրաժեշտ պայմաններին: Ինչպես և նախորդ խնդրում, դիցուք

$$\eta_1(t)\in C^1[t_0,t_1],\eta_2(t)\in C^1[t_0,t_1],$$
$$\eta_1(t_0)=\eta_1(t_1)=0,\ \eta_2(t_0)=\eta_2(t_1)=0$$

կամայական ֆունկցիաներ են, α_1,α_2-ը բավականաչափ փոքր իրական թվեր: Ֆունկցիաներին տանք աճ՝ $x(t)+\alpha_1\eta_1(t),y(t)+\alpha_2\eta_2(t)$, և դիտարկենք՝

$$J(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x+\alpha_1\eta_1,y+\alpha_2\eta_2,\dot{x}+\alpha_1\dot{\eta}_1,\dot{y}+\alpha_2\dot{\eta}_2)dt:$$

Այս դեպքում նույնպես $J(\alpha_1,\alpha_2)$ ֆունկցիայի էքստրեմումը պետք է բավարարի էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանին՝

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_1}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_2}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=0:$$

Գտնենք $J(\alpha_1,\alpha_2)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները ըստ α_1 և α_2-ի: Արդյունքում կստանանք՝

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_1}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\right]\eta_1(t)dt=0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_2}\Big|_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_y(t,x,y,\dot{x},\dot{y})-\frac{d}{dt}L_{\dot{y}}(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\right]\eta_2(t)dt=0:$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի լեմը, կստանանք՝

$$L_x\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right)-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right)=0,$$

$$L_y\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right)-\frac{d}{dt}L_{\dot{y}}\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right)=0:$$

Եթե ենթաինտեգրալային L ֆունկցիան կախված է n հատ $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ ֆունկցիաներից, ստանում ենք հետևյալ անհրաժեշտ պայմանները՝

$$L_{x_i}-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i}=0,i=1,2,...,n:$$

Ենթաինտեգրալային L ֆունկցիան կարող է կախված լինել նաև բարձր կարգի ածանցյալներից: Պարզության համար դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝ գտնել

$$\underset{x\in K}{extr}\,J[x]=\underset{x\in K}{extr}\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,\dot{x},\ddot{x})\,dt,$$

եթե $K=\left\{x\in C^2[t_0,t_1],x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1;\dot{x}(t_0)=x_2,\dot{x}(t_1)=x_3\right\}$:
Նորից, ենթադրելով, որ $x(t)$ ֆունկցիան $J[x]$ ֆունկցիոնալի էքստրեմումի կետն է, տանք աճ՝ $x(t)+\alpha\eta(t)$, որտեղ $\eta(t)\in C^2[t_0,t_1]$ նորից կամայական է և բավարարում է եզրային $\eta(t_0)=\eta(t_1)=\dot{\eta}(t_0)=\dot{\eta}(t_1)=0$ պայմաններին, α -ն 0-ին մոտ թիվ է: Տեղադրելով ֆունկցիոնալի մեջ, կստանանք՝

$$J(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x+\alpha\eta,\dot{x}+\alpha\dot{\eta},\dot{x}+\alpha_1\dot{\eta}_1,\ddot{x}+\alpha\ddot{\eta})\,dt:$$

Այս ֆունկցիայի ածանցյալը 0 կետում ըստ α -ի հավասար է՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})\eta(t)+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\dot{\eta}(t)+L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\ddot{\eta}(t)\right]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})\eta(t)+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\dot{\eta}(t)\right]dt+\int_{t_0}^{t_1}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\ddot{\eta}(t)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\right]\eta(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\ddot{\eta}(t)dt:$$

Երկու անգամ մասերով ինտեգրելով երկրորդ գումարելին, ստանում ենք՝

$$\int_{t_0}^{t_1}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\ddot{\eta}(t)dt=\frac{d}{dt}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\dot{\eta}(t)\Big|_{t_0}^{t_1}-$$

$$-L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\eta(t)dt:$$

Այսպիսով, քանի որ $\eta(t_0)=\eta(t_1)=\dot{\eta}(t_0)=\dot{\eta}(t_1)=0$, ուստի՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})+\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})\right]\eta(t)dt$$

Այստեղից, օգտվելով Լագրանժի լեմից, ստանում ենք Էյլերի հավասարումը երկրորդ կարգի ածանցյալով խնդրի համար՝

$$L_x(t,x,\dot{x},\ddot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})+\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}}(t,x,\dot{x},\ddot{x})=0:$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե L ֆունկցիան կախված է մինչև n -րդ կարգի ածանցյալներից, Էյլերի բանաձևը կընդունի

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-1^k\right)\frac{d^k}{dt^k}L_{x^{(k)}}=0$$

տեսքը:

Իզոպերիմետրիկ խնդիր: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Բոլոր $x(t)\in C^1[t_0,t_1]$ կորերի բազմության մեջ, որոնք միացնում են (t_0,x_0) և (t_1,x_1) կետերը և որոնց համար տրված է

$$\tilde{J}[x]=\int_{t_0}^{t_1}\tilde{L}(t,x,\dot{x})\,dt$$

Ֆունկցիոնալի արժեքը, գտնել այն $x(t)$ ֆունկցիան, որի դեպքում

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x,\dot{x})\,dt$$

ֆունկցիոնալը կստանա էքստրեմալ արժեք: Այսպիսի խնդիրները անվանում են *իզոպերիմետրիկ* "ի պատիվ" Դիդո թագուհու: Ֆունկցիաների անընդհատության և ածանցելիության վերաբերյալ անհրաժեշտ պայմանների դեպքում այս խնդիրը բերվում է վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդրին հետևյալ թեորեմի օգնությամբ:

Թեորեմ 1.3.1: *Եթե գոյություն ունի իզոպերիմետրիկ խնդրի* $x(t)$ *լուծում և եթե* $x(t)$ *-ն* $\tilde{J}[x]$ *ֆունկցիոնալի էքստրեմալը չէ, ապա գոյություն ունի այնպիսի* λ *հաստատուն, որ* $x(t)$ *-ն*

$$J^0[x]=\int_{t_0}^{t_1}H(t,x,\dot{x})\,dt$$

ֆունկցիոնալի էքստրեմալն է, որտեղ $H=L+\lambda\tilde{L}$ *:*

Բոլցի խնդիր: Նախորդ բոլոր խնդիրներում ենթադրվում էր, որ $x(t)$ ֆունկցիան ամրացված է ծայրակետերում՝ $x(t)$ ֆունկցիայի արժեքները $[t_0,t_1]$ հատվածի ծայրակետերում նախապես տրված են: Այժմ դիտարկենք պարզագույն խնդիրը, հանելով այդ պայմանը, այսինքն՝ գտնել

$$extr J[x] = extr\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt$$

բոլոր $x(t)\in C^1[t_0,t_1]$ ֆունկցիաների բազմության վրա: Այս խնդիրը կանվանենք *ազատ եզրերով խնդիր*: Նորից աճ տալով $x(t)$-ին՝ $x(t)+\alpha\eta(t)$, որտեղ $\eta\in C^1[t_0,t_1]$ կամայական է, և ածանցելով $J(\alpha)$-ն, կստանանք (1.3.1) արտահայտությունը՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt +$$
$$+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1} - L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}:$$

Սակայն այստեղ, ի տարբերություն պարզագույն խնդրի, չենք պահանջել, որ $\eta(t_0)=0, \eta(t_1)=0$: Ակնհայտ է, որ եթե $x(t)$-ն էքստրեմալ է ազատ եզրերով խնդրում, ապա այն էքստրեմալ է նաև ամրացված ծայրերով խնդրում և, հետևաբար՝

$$L_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x}) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt = 0$$

Եվ, քանի որ $\eta(t_0)$-ն և $\eta(t_1)$-ը միմյանցից անկախ կամայական թվեր են, ուստի ստանում ենք երկու լրացուցիչ եզրային պայման՝

$$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t=t_0} = 0,$$
$$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t=t_1} = 0:$$

Որոշ դեպքերում պահանջվում է դիտարկել նաև հետևյալ տեսքի ֆունկցիոնալներ՝

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt + \varphi(x(t_0)) + \psi(x(t_1)),$$

որտեղ $\varphi(x)$-ն և $\psi(x)$-ն անընդհատ ածանցելի ֆունկցիաներ են և $J[x]$ ֆունկցիոնալի էքստրեմումը փնտրվում է $C^1[t_0,t_1]$ բազմության վրա: Այս տեսքով տրված խնդիրն անվանում են ***Բոլցի խնդիր***: Կրկնելով վերը բերված բոլոր դատողությունները, $J'(\alpha)$- համար կստանանք՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x,\dot{x})-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right]\eta(t)\,dt+L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-$$
$$-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}+\varphi_x(x(t_0))\eta(t_0)+\psi_x(x(t_1))\eta(t_1)=0:$$

Այստեղ նորից, քանի որ $x(t)$-ն էքստրեմալ է, ապա ինտեգրալը հավասար է 0-ի և նախորդ արտահայտությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_1}-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\eta(t)|_{t=t_0}+$$
$$+\varphi_x(x(t_0))\eta(t_0)+\psi_x(x(t_1))\eta(t_1)=0$$

կամ

$$\left(-L_x(t,x,\dot{x})|_{t_0}+\varphi_x(x(t_0))\right)\eta(t_0)+\left(L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_1}+\psi_x(x(t_1))\right)\eta(t_1)=0:$$

Հաշվի առնելով, որ $\eta(t_0),\eta(t_1)$ արժեքները կամայական են, ստանում ենք Բոլցի խնդրի եզրային պայմանները՝

$$L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_0}=\varphi_x(x(t_1)),$$
$$-L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|_{t_1}=\psi_x(x(t_0)):$$

ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

2.1 ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ, ԱՆՋԱՏԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄ

Այս պարագրաֆում բերված են ուռուցիկ անալիզի հիմնական հասկացությունները և արդյունքները, որոնք հետագայում պահանջվելու են օպտիմալացման խնդիրների հետազոտման ընթացքում:

Դիցուք R^n-ը n-չափանի էվկլիդեսյան տարածությունն է: Հիշեցնենք, որ R^n-ում $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ վեկտորի նորմը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ Երկու՝ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ և $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ վեկտորների $\langle x,y\rangle$ սկալյար արտադրյալը սահմանվում է այսպես՝ $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, իսկ $\rho(x,y)$ հեռավորությունը՝

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Սահմանում 2.1.1: $X\subseteq R^n$ բազմությունը անվանում են ***ուռուցիկ բազմություն***, եթե իր ցանկացած երկու՝ x' և x'' կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև

$$x=\alpha x'+(1-\alpha)x'' \qquad (2.1.1)$$

տեսքի բոլոր կետերը, որտեղ $0\le\alpha\le1$:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ իր ցանկացած երկու կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև այդ կետերը միացնող հատվածը: R^n-ում հենց (2.1.1) հավասարմանը բավարարող բոլոր x կետերի բազմությունն են անվանում x' և x'' կետերը միացնող հատված: Ուռուցիկ բազմության օրինակներ են՝ գունդը, ուղղանկյունը, ուղիղը, հարթությունը, R^n տարածության դրական օկտանտը (R^n_+) և այլն:

Թվարկենք ուռուցիկ բազմությունների մի քանի պարզ հատկություններ:

Հ.1: Ուռուցիկ բազմությունների հատումն ուռուցիկ է:

Ապացույց. Դիցուք $X = X_1 \bigcap X_2$, որտեղ X_1-ն ու X_2-ը ուռուցիկ բազմություններ են: Վերցնենք երկու կամայական x_1 և x_2 կետեր X -ից: Քանի որ $X \subseteq X_1, X \subseteq X_2$, ապա ցանկացած $\alpha \in [0,1]$ թվի համար $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X_1$, $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X_2$, հետևաբար, նաև՝ $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X$: Նույն եղանակով այս պնդումը կարելի է տարածել ցանկացած թվով ուռուցիկ բազմությունների հատման համար:

Հ.2: Ուռուցիկ X բազմության կամայական վերջավոր թվով $x^1, x^2, ..., x^k$ կետերի՝

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$$

ուռուցիկ գծային կոմբինացիաները պատկանում են X -ին ցանկացած

$$\alpha_i \geq 0,\ i = 1,...,k,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

գործակիցների համար:

Ապացույց. Ապացուցենք ինդուկցիայի եղանակով ըստ կետերի քանակի՝ k թվի: $k = 2$ դեպքում մեր պնդումը համընկնում է ուռուցիկ բազմության սահմանման հետ: Այժմ ենթադրենք, որ X բազմության $k-1$ թվով ցանկացած կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիան պատկանում է այդ բազմությանը: Դիտարկենք X բազմության k հատ $x^1, x^2, ..., x^{k-1}, x^k$ կետերը և դրանց որևէ ուռուցիկ գծային կոմբինացիա՝

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i,\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, ... \alpha_k \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1:$$

Եթե $\alpha_k = 1$, ապա $\alpha_i = 0$, $1 \le i \le k-1$ և $x = x^k \in X$ Այժմ, դիցուք $\alpha_k < 1$: Այդ դեպքում $1-\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i > 0$: Ներկայացնենք x-ը հետևյալ տեսքով՝

$$x = (1-\alpha_k)\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} x^i + \alpha_k x^k$$

$\alpha_i / 1-\alpha_k$, $i = 1,2,\dots,k-1$ թվերը ոչ բացասական են և դրանց գումարը հավասար է 1-ի՝

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} = \frac{1}{1-\alpha_k}\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_k}(1-\alpha_k) = 1:$$

Հետևաբար, $x' = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k} x^i$ արտահայտությունը X բազմության $x^1, x^2, \dots, x^{k-1}$ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիա է: Ինդուկցիայի ենթադրության համաձայն՝ $x' \in X$, բայց այդ դեպքում՝ $x = (1-\alpha_k)x' + \alpha_k x^k$ կետը X բազմության երկու կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիա է և, հետևաբար, $x \in X$

Հ.3. Դիցուք X_1-ը և X_2-ը կամայական ուռուցիկ բազմություններ են: Այդ դեպքում ուռուցիկ է նաև $X_1 + X_2$ բազմությունը, որտեղ՝

$$X_1 + X_2 = \left\{x : x = x^1 + x^2, x^1 \in X_1, x^2 \in X_2\right\}:$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $x, \overline{x} \in X = X_1 + X_2$: Ըստ սահմանման, գոյություն ունեն այնպիսի $x^1, \overline{x}^1 \in X_1$ և $x^2, \overline{x}^2 \in X_2$ կետեր, որ $x = x^1 + x^2$, $\overline{x} = \overline{x}^1 + \overline{x}^2$: Վերցնենք կամայական $\alpha \in [0,1]$ և կազմենք $\alpha x + (1-\alpha)\overline{x}$: Ունենք՝

$$\alpha x+(1-\alpha)\overline{x}=\alpha(x^1+x^2)+(1-\alpha)(\overline{x}^1+\overline{x}^2)=$$
$$=\alpha x^1+(1-\alpha)\overline{x}^1+\alpha x^2+(1-\alpha)\overline{x}^2:$$

Քանի որ X_1 և X_2 բազմությունները ենթադրվել են ուռուցիկ, ապա՝ $\alpha x^1+(1-\alpha)\overline{x}^1\in X_1$, $\alpha x^2+(1-\alpha)\overline{x}^2\in X_2$, հետևաբար և

$$\alpha x+(1-\alpha)\overline{x}\in X=X_1+X_2:$$

Հ.4. ՈՒռուցիկ X բազմության $\overline{X}$ փակումը ուռուցիկ է:

Ապացույց. Դիցուք $x,y\in\overline{X}$. Այդ դեպքում գոյություն ունեն X բազմության կետերի երկու $\{x^m\},\{y^m\}$ հաջորդականություններ, որոնք զուգամիտում են համապատասխանաբար x և y կետերին: Գծային ֆունկցիայի անընդհատությունից հետևում է $\alpha x^m+(1-\alpha)y^m$ կետերի հաջորդականությունը կզուգամիտի $\alpha x+(1-\alpha)y$ կետին ցանկացած $\alpha\in[0,1]$ դեպքում: Քանի որ յուրաքանչյուր $m=1,2,\dots$ համար $\alpha x^m+(1-\alpha)y^m$ կետը պատկանում է X-ին, ապա $\alpha x+(1-\alpha)y$ կետը նույնպես կպատկանի $\overline{X}$-ին:

Հաջորդ երկու հատկությունների ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին:

Հ.5. Ուռուցիկ X բազմության ներքին կետերի X^0 բազմությունը ուռուցիկ է:

Հ.6. Ուռուցիկ X բազմության x^0 ներքին կետից դուրս եկող ցանկացած ճառագայթի վրա կա ամենաշատը մեկ եզրային կետ:

Սահմանում 2.1.2: X բազմության *ուռուցիկ թաղանթ* են անվանում այդ բազմությունը պարունակող $C(X)$ մինիմալ ուռուցիկ բազմությունը, այսինքն ուռուցիկ բազմություն, որն ընկած է X բազմությանը պարունակող ցանկացած այլ ուռուցիկ բազմության մեջ:

Ակնհայտ է, որ ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է X բազմությունը պարունակող բոլոր ուռուցիկ բազմությունների հատման հետ: Սակայն բազմության ուռուցիկ թաղանթը կարելի է ստանալ նաև այլ կերպ:

Հ.7. Ոչ դատարկ X բազմության ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է այդ բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների բազմության հետ:

Ապացույց. Քանի որ $C(X)$-ը ուռուցիկ է և պարունակում է X բազմության բոլոր կետերը, ապա պարունակում է նաև այդ բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաները: Մյուս կողմից, X բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների բազմությունը ուռուցիկ է (քանի որ, ինչպես հեշտ է անմիջականորեն ստուգել, X բազմության կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների ուռուցիկ գծային կոմբինացիան նույնպես այդ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիա է) և պարունակում է X -ը, հետևաբար և $C(X)$-ը:

Հաջորդ թեորեմը թույլ է տալիս ճշգրտել այս արդյունքը:

Թեորեմ 2.1.1: Ոչ դատարկ $X \subset R^n$ բազմության $C(X)$ ուռուցիկ թաղանթի յուրաքանչյուր կետ կարելի է ներկայացնել X բազմության ոչ ավել, քան $n+1$ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով:

Ապացույց. Դիցուք $x \in C(X)$, $x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i$, $k \geq n+1$, $x_i \in X, \alpha_i > 0$, $i = 1,\dots,k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$: Դիտարկենք $x_1 - x_{k+1}, x_2 - x_{k+1}, \dots, x_k - x_{k+1}$ վեկտորները: Քանի որ $k > n$, ապա այս վեկտորները գծայնորեն կախյալ են R^n–ում, այսինքն գոյություն ունեն $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, $\sum_{i=1}^{k} \beta_i^2 > 0$ այնպիսի իրական թվեր, որ

$$\beta_1(x_1 - x_{k+1}) + \beta_2(x_2 - x_{k+1}) + \dots + \beta_k(x_k - x_{k+1}) = 0:$$

Եթե նշանակենք $\beta_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i$, ապա՝

$$\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = 0:$$

Դիտարկենք $\gamma_i = \alpha_i - \mu\beta_i$ թվերը, որտեղ μ-ն որոշվում է հետևյալ հավասարությունից՝

$$\frac{1}{\mu} = \max_{1 \le i \le k+1} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}}$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս դեպքում բոլոր $i = 1, 2, \ldots, k+1$ համար $\gamma_i \ge 0$ և $\gamma_{i_0} = 0$: Բացի այդ՝

$$\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i - \mu\beta_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i - \mu \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i - \mu \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = x:$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ x-ը ներկայացվում է ոչ ավելի, քան k տարրերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով $(\gamma_{i_0} = 0)$: Շարունակելով այս գործընթացը, ի վերջո x կետի ներկայացման մեջ կմնա $n+1$ տարր:

Սահմանում 2.1.3: $K \subseteq R^n$ բազմությունը, որը ցանկացած $x', x'' \in K$ կետերի հետ մեկտեղ պարունակում է նաև $x = \alpha x' + \beta x''$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ բոլոր կետերը, կոչվում է *ուռուցիկ կոն*:

Ուռուցիկ կոնը ուռուցիկ բազմություն է, ցանկացած $x \in K, \alpha \ge 0$ համար $\alpha x \in K$, հետևաբար ցանկացած ուռուցիկ կոն պարունակում է սկզբնակետը:

Սահմանում 2.1.4: Ցանկացած $X \subseteq R^n$ բազմության համար այդ բազմությունը պարունակող մինիմալ $K(X)$ ուռուցիկ կոնը կոչվում է X բազմության *կոնական թաղանթ:*

Ինչպես և ուռուցիկ թաղանթի դեպքում, կարելի է ցույց տալ, որ կոնական թաղանթը համընկնում է X բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ոչ բացասական գծային $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\dots,k$ կոմբինացիաների բազմության հետ:

Սահմանում 2.1.5: Ուռուցիկ K կոնի համար K^* *համալուծ կոն* են անվանում հետևյալ բազմությունը՝

$$K^* = \{\alpha \in R^n :< \alpha, x > \leq 0 \text{ բոլոր } x \in K \text{ համար }\}:$$

Հ.8. K^* բազմությունը փակ ուռուցիկ կոն է:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք K^*-ի ուռուցիկությունը: Դիցուք՝ $\alpha', \alpha'' \in K^*$, $\alpha \in (0,1)$, $x \in K$ Այդ դեպքում՝ $\left\langle \left(\alpha\alpha' + (1-\alpha)\alpha''\right), x \right\rangle = \alpha\langle \alpha', x\rangle + (1-\alpha)\langle \alpha'', x\rangle \leq 0$, հետևաբար՝ $\alpha\alpha' + \beta\alpha'' \in K^*$ Այժմ վերցնենք K^* կոնի $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k, \dots$ վեկտորների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է α-ի՝ $\lim_{k\to\infty} \alpha^k = \alpha$: Ցույց տանք, որ $a \in K^*$ Իրոք, քանի որ $\alpha^k \in K^*$, ապա $\left\langle \alpha^k, x \right\rangle \leq 0$, $k = 1, 2, \dots$: Անցնելով այս անհավասարության մեջ սահմանի և օգտվելով սկալյար արտադրյալի անընդհատությունից, ստանում ենք՝ $\langle \alpha, x\rangle \leq 0$:

Սահմանում 2.1.6: $v \in R^n$ *կետի պրոեկցիա* $X \subset R^n$ բազմության վրա անվանում են այն $p \in X$ կետը, որի համար

$$\|p - v\| = \inf_{x \in X} \|x - v\| = \rho(v, X):$$

$\rho(v, X)$-ը անվանում են v կետի հեռավորություն X բազմությունից:

Հ.9. Ցանկացած X ուռուցիկ փակ բազմության և $v \in R^n$, $v \notin X$ համար գոյություն ունի v կետի միակ p պրոեկցիա X բազմության վրա:

Ապացույց. Դիցուք x^0-ն X բազմության որևէ կետ է: Նշանակենք B-ով $\|v-x^0\|$ շառավիղով և v կենտրոնով փակ գունդը: Այդ դեպքում $B \cap X$ բազմությունը փակ և սահմանափակ բազմություն է և $\inf_{x \in X} \|v-x\| = \inf_{x \in B \cap X} \|v-x\|$: Քանի որ $\|v-x\|$ ֆունկցիան անընդհատ է (ըստ x-ի), ապա այն կհասնի իր ստորին ճշգրիտեզրին, այսինքն, պրոեկցիա գոյություն ունի:

Ցույց տանք, որ եթե X-ը ուռուցիկ է, ապա պրոեկցիան միակն է: Իրոք, դիցուք գոյություն ունեն այնպիսի երկու $p', p'' \in X$ կետեր, որ $\|p'-v\| = \|p''-v\| = \rho(v, X)$: Նշանակենք՝ $p''' = \dfrac{p'+p''}{2}$: Քանի որ X-ը ուռուցիկ է, ապա $p''' \in X$: Դիտարկենք

$$\rho(p''', v) = \|p''' - v\| = \|v - \tfrac{1}{2}p' - \tfrac{1}{2}p''\| = \|(\tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}p') + \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}p''\| =$$

$$= \frac{1}{2}\|(v-p') + (v-p'')\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i' + v_i - p_i'')^2} = \tag{2.1.2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i')^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i')(v_i - p_i'') + \sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i'')^2}$$

Կոշի-Բունյակովսկու հայտնի անհավասարության համաձայն (տես, օրինակ [20])՝

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i')(v_i - p_i'') \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i')^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - p_i'')^2}, \tag{2.1.3}$$

ընդ որում հավասարություն կարող է լինել այն, և միայն այն դեպքում, երբ $(v-p')$ և $(v-p'')$ վեկտորները համեմատական են, այսինքն գոյություն ունեն այնպիսի α և β թվեր, $\alpha^2+\beta^2>0$, որ

$\alpha(\nu-p')+\beta(\nu-p'')=0$: Եթե $\alpha+\beta=0$, ապա այստեղից կստանանք, որ $\nu_i-p_i'=\nu_i-p_i''$, $i=1,2,...,n$, այսինքն՝ $p'=p''$ ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Մյուս կողմից, եթե $\alpha+\beta\neq 0$, ապա բաժանելով այս հավասարումը $\alpha+\beta$ -ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\nu-p')+\frac{\beta}{\alpha+\beta}(\nu-p'')=0,$$

$$\nu-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}p'+\frac{\beta}{\alpha+\beta}p''\right)=0,$$

այսինքն $\nu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}p'+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}p''$ որն անհնար է, քանզի X -ը ենթադրվել է ուռուցիկ, $p',p''\in X$ և $\nu\notin X$

Այսպիսով, (2.1.3) անհավասարությունը խիստ անհավասարություն է: Տեղադրելով այն (2.1.2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\rho(p''',\nu)<\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i')^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i')^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i'')^2}+\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i'')^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i')^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i'')^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i')^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-p_i'')^2}\right)=\frac{1}{2}\rho(p',\nu)+\frac{1}{2}\rho(p'',\nu):$$

Այսինքն ստացանք, որ $p'''\in X$ կետը ավելի մոտ է ν -ին, քան p' և p'' պրոեկցիաները: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը:

Թեորեմ 2.1.2 (*Անջատելիության թեորեմ*): Դիցուք X -ը փակ ուռուցիկ բազմություն է, $\nu\in R^n,\nu\notin X$ Այդ դեպքում գոյություն ունի $<a,x>=c$ հիպերհարթություն այնպիսին, որ $<a,\nu>\ >c$ և $<a,x>\ \leq\ c$ բոլոր $x\in X$ կետերի համար:

Ապացույց. v կետի պրոեկցիան X բազմության վրա նշանակենք p -ով և դիտարկենք

$$\varphi(x)=\|x-v\|^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-v_i)^2$$

ֆունկցիան: Այդ դեպքում $\inf\varphi(x)=\varphi(p)$: Ֆիքսենք որևէ $x\in X$ և դիտարկենք $x(\alpha)=\alpha x+(1-\alpha)p, 0\le\alpha\le 1$ կետերը:

Քանի որ X -ը ուռուցիկ է, ապա $x(\alpha)$ -ն պատկանում է X -ին բոլոր $0\le\alpha\le1$ համար և, քանի որ p -ն v -ի պրոեկցիան է, ապա

$$\varphi(x(\alpha))\ge\varphi(p)=\varphi(x(0)):$$

Հետևաբար,

$$\varphi'_\alpha(x(0))=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(x(\alpha))-\varphi(x(0))}{\alpha}\ge 0:$$

Ածանցենք φ – ն՝

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha))=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i(\alpha)-v_i)^2\right)'=2\sum_{i=1}^{n}(x_i(\alpha)-v_i)x_i'(\alpha):$$

Քանի որ $x_i'(\alpha)=(x_i-p_i), x_i(0)=p_i$, ապա

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha))=2\sum_{i=1}^{n}(x_i(\alpha)-v_i)(x_i-p_i),$$

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha))\ \Big|_{\alpha=0}=2\sum_{i=1}^{n}(p_i-v_i)(x_i-p_i):$$

Այսինքն՝

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i-v_i)(x_i-p_i)\ge 0,$$

կամ՝

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i-v_i)x_i-\sum_{i=1}^{n}p_i(p_i-v_i)\ge 0: \qquad (2.1.4)$$

Քանի որ p և v կետերը ֆիքսած են և կախված չեն x-ից, կարող ենք նշանակել՝

$$a_i = v_i - p_i, i = 1,2,...,n, \; c = \sum_{i=1}^{n} p_i(v_i - p_i),$$

և (2.1.4) անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le c, \text{ կամ } < a, x > \le c:$$

Քանի որ $v \notin X$, ուստի

$$a = v - p \neq 0:$$

Մյուս կողմից

$$< a, v > - c = \sum_{i=1}^{n} (v_i - p_i) v_i - \sum_{i=1}^{n} p_i (v_i - p_i) = \sum_{i=1}^{n} (v_i - p_i)^2 > 0:$$

Այսինքն՝ $< a, v > \; > \; c$: Ասպիսով, թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 2.1.7: $< a, x >= c$ հիպերհարթությունը կոչվում է *հենքային հիպերհարթություն* X բազմության համար $b \in X$ եզրային կետում, եթե ցանկացած $x \in X$ համար $< a, x > \le c$ և $< a, b >= c$:

Հեշտ է տեսնել, որ թեորեմ 2.1.2-ի ապացուցման ընթացքում կառուցած հիպերհարթությունը հենքային է p կետում:

Դժվար չէ ապացուցել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.1.3: X ուռուցիկ բազմության ցանկացած եզրային կետում գոյություն ունի X-ի հենքային հիպերհարթություն:

Առանց ապացուցման ներկայացնենք անջատելիության թեորեմի մի քանի այլ ձևակերպումներ, որոնք բավականին հաճախ են օգտագործվում:

Թեորեմ 2.1.4: Դիցուք X-ը ուռուցիկ փակ բազմություն է և v կետը չի պատկանում X-ին: Այդ դեպքում գոյություն ունի $< a, x >= c$ հիպերհարթություն, այնպես, որ $< a, v >= c$ և $< a, x > \; > c$ բոլոր $x \in X$ համար:

Թեորեմ 2.1.5: Դիցուք X -ը և Y -ը ուռուցիկ բազմություններ են և X -ը չի հատվում Y-ի ներքին կետերի բազմության հետ: Այդ դեպքում գոյություն ունի $< a, x >= c$ հիպերհարթություն, այնպես, որ $< a, x > \le c$ բոլոր $x \in X$ և $< a, y > \ge c$ բոլոր $y \in Y$ համար:

Թեորեմ 2.1.6: Ուռուցիկ կոնի ցանկացած հենքային հիպերհարթություն անցնում է սկզբնակետով:

__*Ապացույց.*__ Դիցուք $< a, x >= c$ հիպերհարթությունը K կոնի հենքային հիպերհարթություն է $b \in K$ կետում, այսինքն ցանկացած $x \in K$ համար՝ $\langle a, x \rangle \le c, \langle a, b \rangle = c$: Դիտարկենք λb կետը, որտեղ $\lambda \ge 0$: Ուռուցիկ կոնի սահմանման համաձայն՝ $\lambda b \in K$, հետևաբար, $\langle a, \lambda b \rangle \le c$: Քանի որ $\langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle = \lambda c$, ապա $\lambda c \le c$ անհավասարությունը բավարարվում է ցանկացած $\lambda \ge 0$ համար: Այստեղից՝ $(\lambda - 1)c \le 0$: $\lambda = 0$ դեպքում ստանում ենք $c \ge 0$, իսկ $\lambda = 2$ դեպքում՝ $c \le 0$: Այսպիսով, $c = 0$ և հենքային հիպեր հարթության հավասարումը ստանում է հետևյալ տեսքը՝ $\langle a, x \rangle = 0$, այսինքն 0 կետը պատկանում է այդ հարթությանը:

Թեորեմ 2.1.7: Դիցուք X –ը ուռուցիկ բազմություն է R^n -ում, որը չի պարունակում R^n_+ բազմության ներքին կետերը, այսինքն չի պարունակում վեկտորներ, որոնց բոլոր բաղադրիչները դրական են: Այդ դեպքում գոյություն ունի սկզբնակետով անցնող $< a, x >= 0$ հիպերհարթություն, որն անջատում է X բազմությունը R^n_+ –ից:

2.2. ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Սահմանում 2.2.1: X ուռուցիկ բազմության x կետը անվանում են *ծայրակետ*, եթե գոյություն չունեն այնպիսի տարբեր $x', x'' \in X$ կետեր, որ $x = \dfrac{x' + x''}{2}$:

Սահմանում 2.2.2: X բազմությունն անվանում են *ուռուցիկ բազմանիստ*, եթե այն վերջավոր թվով կետերի ուռուցիկ թաղանթ է:

Թեորեմ 2.2.1: Ուռուցիկ բազմանիստը կոմպակտ է:

Ապացույց. Դիցուք X բազմությունը $x^1, x^2, \dots, x^k$ կետերի ուռուցիկ թաղանթն է: Վերցնենք կամայական $\{x_m\}$ հաջորդականություն X-ից և ցույց տանք, որ այս հաջորդականությունից կարելի է ընտրել ենթահաջորդականություն, որը զուգամիտում է որևէ $\overline{x} \in X$ կետի: Քանի որ $x_m \in X$ ցանկացած m-ի համար $(m = 1, 2, \dots,)$, ապա

$$x_m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m) x^i \ , \ \alpha_i(m) \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m) = 1:$$

$\alpha_1(m), m = 1, 2, \dots$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, հետևաբար դրանից կարելի է ընտրել զուգամետ $\alpha_1(m_{1j})$ ենթահաջորդականություն: $\alpha_2(m_{1j})$ հաջորդականությունը նույնպես սահմանափակ է, հետևաբար դրանից ևս կարելի է ընտրել զուգամետ $\alpha_2(m_{2j})$ ենթահաջորդականություն: Շարունակելով այս գործընթացը k անգամ կստանանք զուգամետ $\alpha_i(m_{kj}), i = 1, 2, \dots, k$ հաջորդականություններ: Նշանակենք $\lim_{j \to \infty} \alpha_i(m_{kj}) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$

Ակնհայտ է, որ $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$: Այսպիսով, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_{kj}) x^i$ հաջորդականությունը զուգամետ է և

$$\overline{x} = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_{kj}) x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in X:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Առանց ապացուցման բերենք հետևյալ արդյունքը (տես, օրինակ, [5]):

Թեորեմ 2.2.2 (Կրեյն, Միլման): *Ցանկացած ոչ դատարկ կոմպակտ ուռուցիկ բազմություն R^n-ում ունի ծայրակետեր և իր բոլոր ծայրակետերի ուռուցիկ թաղանթն է:*

Սահմանում 2.2.3: Ուռուցիկ K կոնը կոչվում է *բազմանիստ կոն*, եթե այն համընկնում է իր վերջավոր թվով կետերի կոնական թաղանթի հետ:

Առանց ապացուցման բերենք նաև հետևյալ ինտուիտիվ ակներև փաստը:

Թեորեմ 2.2.3: Բազմանիստ կոնը փակ է:

Սահմանում 2.2.4: $x \in R^n, x \neq 0$ վեկտորը կոչվում է *ծայրային*, եթե այն փաստից, որ $x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$ $x', x'' \in K$ հետևում է, որ $x' = \lambda x, x'' = \mu x$ որևէ $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ համար:

Սահմանում 2.2.5: K կոնը անվանում են *սուր կոն*, եթե $x \in K$ և $-x \in K$ պայմաններից հետևում է, որ $x = 0$:

Սուր կոների համար կարելի է ապացուցել հետևյալ թեորեմը (տես, օրինակ, [5]):

Թեորեմ 2.2.4: Սուր բազմանիստ կոնը իր ծայրային վեկտորների վերջավոր բազմության կոնական թաղանթն է:

Այժմ դիտարկենք գծային անհավասարությունների համակարգեր՝

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.2.1) \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m :
\end{aligned}
$$

Եթե գործակիցների մատրիցը նշանակենք A-ով, b-ով՝ $(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ սյունը, ապա այս համակարգը համառոտ կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$Ax\le b, \tag{2.2.2}$$

որտեղ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: Եթե A մատրիցի i-երրորդ տողը նշանակենք a_i-ով, ապա (2.2.1) համակարգը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\langle a_i,x\rangle\le b_i, i=1,2,\ldots,m: \tag{2.2.3}$$

(2.2.1) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը նշանակենք X-ով, այսինքն՝ $X=\{x\in R^n : Ax\le b\}$:

Թեորեմ 2.2.5. *$X=\{x\in R^n : Ax\le b\}$ բազմությունը (եթե դատարկ չէ) ուռուցիկ փակ բազմություն է:*

__Ապացույց:__ Դիցուք $x',x''\in X$ Կազմենք $\alpha x'+(1-\alpha)x''=x$, որտեղ $\alpha\in(0,1)$: Կստանանք՝ $Ax=\alpha Ax'+(1-\alpha)Ax''\le\alpha b+(1-\alpha)b=b$: Այսպիսով, X-ը ուռուցիկ է: Փակությունը ցույց տալու համար վերցնենք X բազմության կետերի կամայական զուգամետ $x^k, k=1,2,\ldots$ հաջորդականություն՝ $\lim\limits_{k\to\infty}x^k=\overline{x}$: Քանի որ Ax ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $Ax^k\le b$, $k=1,2,\ldots$ անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, կստանանք $A\overline{x}\le b$:

Հեշտ է տեսնել, որ եթե $x^0\in X$ կետի համար (2.2.3) համակարգի բոլոր անհավասարությունները խիստ են՝ $\langle a_i,x^0\rangle<b_i, i=1,2,\ldots,m$, ապա այդ կետը X բազմության ներքին կետ է: Իրոք, քանի որ անհավասարությունների թիվը վերջավոր է, ապա կարելի է նշել այնպիսի $\varepsilon>0$, որ եթե $\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ վեկտորի երկարությունը փոքր է ε-ից՝ $\|\delta\|<\varepsilon$, ապա բավարարվում են

$\left\langle a_i, x^0+\delta \right\rangle \le b_i, i=1,2,...,m$ անհավասարությունները, այսինքն $x^0+\delta$ կետը նույնպես պատկանում է X -ին:

Առանձնակի հետաքրքրություն են ներկայացնում X բազմության ծայրակետերը: Ակներև է, որ ծայրակետը չի կարող լինել ներքին կետ: Իրոք, ցանկացած x^0 ներքին կետ կարելի է ներկայացնել $x^0 = 1/2(x^0+\delta)+1/2(x^0-\delta)$ տեսքով, որտեղ $x^0+\delta, x^0-\delta \in X$, որը հակասում է ծայրակետի սահմանմանը: Այսպիսով, ծայրակետը կարող է լինել X բազմության միայն եզրային կետ և, հետևաբար, ծայրակետերը հարկավոր է փնտրել (2.2.3) համակարգի այնպիսի լուծումների մեջ, որոնց համար այդ համակարգի անհավասարություններից առնվազն մեկը հավասարություն է: Այդ հանգամանքը հանգեցնում է հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 2.2.6: $x^0 \in X$ եզրային կետի *կրիչ* կանվանենք (2.2.3) համակարգի այն բոլոր հավասարությունների բազմությունը, որոնց բավարարում է այդ կետը, այսինքն այն բոլոր $\left\langle a_i, x^0 \right\rangle = b_i$ հիպերհարթությունների բազմությունը, որոնց հատմանը այն պատկանում է: Նշանակենք՝ $I\left(x^0\right)=\left\{i:\left\langle a_i, x^0\right\rangle = b_i\right\}$:

Այս դեպքում $x^0 \in X$ եզրային կետի համար (2.2.3) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\left\langle a_i, x \right\rangle = b_i,\ i\in I(x^0);\ \ \left\langle a_i, x \right\rangle < b_i,\ i\notin I(x^0):$$

A_+-ով նշանակենք A մատրիցի $i\in I(x^0)$ տողերից բաղկացած մատրիցը: Հետևյալ թեորեմն ամբողջությամբ բնութագրում է X բազմության ծայրակետերը: Թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ, [5]-ում:

Թեորեմ 2.2.6: *$x^0 \in X$ կետը հանդիսանում է X բազմության ծայրակետ այն, և միայն այն դեպքում, եթե A_+ մատրիցի ռանգը հավասար է n -ի:*

Քանի որ, ըստ այս թեորեմի, X բազմության յուրաքանչյուր ծայրակետ ամբողջությամբ բնորոշվում է A մատրիցի քառակուսային չվերասերված ենթամատրիցով, իսկ այդպիսի ենթամատրիցների թիվը վերջավոր է, ապա որպես հետևանք ստանում ենք հետևյալ կարևոր պնդումը:

Թեորեմ 2.2.7: *X բազմության ծայրակետերի թիվը վերջավոր է:*

Թեորեմ 2.2.8: *Եթե ոչ դատարկ $X=\{x\in R^n : Ax\le b\}$ բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ուռուցիկ բազմանիստ է:*

Թեորեմի պնդումը հետևում է ուռուցիկ բազմանիստի 2.2.2 սահմանումից և 2.2.2 թեորեմից:

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը.

Թեորեմ 2.2.9: *R^n -ում ցանկացած փակ ուռուցիկ բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես գծային անհավասարությունների որևէ (վերջավոր կամ անվերջ) համակարգի լուծումների բազմություն:*

Համանմանորեն կարելի է ապացուցել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.2.10: *$K=\{x\in R^n : Ax\le 0\}$ բազմությունը ուռուցիկ բազմանիստ կոն է:*

Գծային անհավասարությունների համակարգեր ուսումնասիրելիս մեծ դեր է խաղում *Ֆարկաշի լեմը*: Գրականության մեջ օգտագործվում են այդ լեմի տարբեր ձևակերպումներ:

Թեորեմ 2.2.11: *Որպեսզի $Ax\le 0, \langle c,x\rangle >0$ անհավասարությունների համակարգը ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $A^T y=c$ համակարգը չունենա ոչ բացասական լուծում:*

<u>Ապացույց</u>. *Անհրաժեշտությունը:* Դիցուք գոյություն ունի այնպիսի $y\in R^m$, որ $A^T y=c$, $y\ge 0$: Այդ դեպքում,

$$\langle c,x\rangle=\langle A^T y,x\rangle=\langle Ax,y\rangle :$$

Հետևաբար, եթե $Ax\le 0$, ապա $\langle c,x\rangle\le 0$:

Ապացույցը: Ենթադրենք, որ $A^T y = c$ համակարգը չունի ոչ բացասական լուծում: Դիտարկենք A մատրիցի a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ վեկտոր-տողերի K կոնական թաղանթը:

Կոնական թաղանթը պարունակում է a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ կետերի բոլոր ոչ բացասական գծային կոմբինացիաները, այսպիսով c վեկտորը չի պատկանում K կոնին (այլ կերպ կոմբինացիայի գործակիցները կհանդիսանային $A^T y = c$ համակարգի ոչ բացասական լուծումը): Անջատելիության 2.1.2 թեորեմի համաձայն գոյություն ունի հենքային հիպերհարթություն, որն անջատում է c կետը K կոնից: Քանի որ ուռուցիկ կոնի բոլոր հենքային հիպերհարթությունները անցնում են սկզբնակետով (տես, թեորեմ 2.1.6), ապա այդ հարթության հավասարումը կունենա $\langle x, a \rangle = 0$ տեսքը: Այսինքն, գոյություն ունի $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտոր, որի բոլոր բաղադրիչները միաժամանակ 0 չեն և, քանի որ K կոնը փակ է (տես, թեորեմ 2.2.3)

$$\langle x^0, c \rangle > 0, \ \langle x^0, a \rangle \leq 0, a \in K:$$

Քանի որ a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ կետերը պատկանում են K կոնին, կստանանք՝

$$\langle x^0, a_? \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m; \quad \langle x^0, c \rangle > 0,$$

Այսինքն՝ x^0 -ն $Ax \leq 0$, $\langle c, x \rangle > 0$ համակարգի լուծում է:

Որպես հետևանք բերենք Ֆարկաշի լեմի ևս երկու ձևակերպումներ:

Թեորեմ 2.2.12: Տեղի ունի հետևյալ այլընտրանքը՝ կամ $A^T y \geq c$ համակարգը ունի ոչ բացասական լուծում, կամ ոչ բացասական լուծում ունի $Ax \leq 0$, $\langle c, x \rangle > 0$ համակարգը:

Թեորեմ 2.2.13: Տեղի ունի հետևյալ այլընտրանքը՝ կամ $Ax \leq b$ համակարգը ունի ոչ բացասական լուծում, կամ ոչ բացասական լուծում ունի $A^T y \geq 0$, $\langle b, y \rangle < 0$ համակարգը:

2.3. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԵՎ ԳՈԳԱՎՈՐ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Սահմանում 2.3.1: Ուռուցիկ X բազմության վրա որոշված $f(x)$ իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են *ուռուցիկ*, եթե ցանկացած երկու՝ $x, y \in X$ կետերի և $\alpha \in (0,1)$ համար տեղի ունի

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha) f(y):$$

$f(x)$ ֆունկցիան անվանում են *գոգավոր*, եթե $-f(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է, այսինքն՝

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \geq \alpha f(x)+(1-\alpha) f(y)$$

ցանկացած $x, y \in X$ և $\alpha \in [0,1]$ համար: Եթե այս անհավասարությունները խիստ անհավասարություններ են, ապա ֆունկցիաներն անվանում են համապատասխանաբար խիստ ուռուցիկ և խիստ գոգավոր:

Նշենք, որ գծային ֆունկցիան միաժամանակ և ուռուցիկ է և գոգավոր:

Բերենք ուռուցիկ և գոգավոր ֆունկցիաների մի քանի հատկություններ:

Հ.2.3.1. X ուռուցիկ բազմության վրա որոշված ցանկացած $f(x)$ ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիայի և c իրական թվի համար

$$Y=\{x\in X:\ f(x)\leq c\},\ \left(Y=\{x\in X:\ f(x)\geq c\}\right)$$

բազմությունը ուռուցիկ բազմություն է:

Այս պնդումը անմիջականորեն հետևում է ուռուցիկ ֆունկցիայի սահմանումից:

Հ.2.3.2. (*Յենսընի անհավասարությունը*) Եթե $f(x)$-ը ուռուցիկ է (գոգավոր է) X ուռուցիկ բազմության վրա, ապա ցանկացած $x_i \in X$ կետերի և $\alpha_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,k;\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$ թվերի համար

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i)\quad\left(f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\ge\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i)\right)$$

Այս անհավասարությունները հեշտությամբ ապացուցվում են մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով:

Հետևյալ թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել մաթեմատիկական անալիզի դասագրքերում:

Թեորեմ 2.3.1. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ (գոգավոր) է $X\subset R$ ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում $f(x)$-ը անընդհատ է X բազմության բոլոր ներքին կետերում և այդ կետերում ունի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալներ, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարությանը՝ $f'_-(x)\le f'_+(x)$ ($f'_-(x)\ge f'_+(x)$):

Թեորեմ 2.3.2. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ (գոգավոր) է X ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումը նաև գլոբալ մինիմում է (լոկալ մաքսիմումը նաև գլոբալ մաքսիմում է): Խիստ ուռուցիկության կամ գոգավորության դեպքում այն միակն է:

Ապացույց. Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $f(x)$-ը գոգավոր է: Դիցուք $x^*\in X$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետ է, այսինքն գոյություն ունի $I\subseteq X$, $x^*\in I$ շրջակայք, որ ցանկացած $x\in I$ համար

$$f(x^*)\ge f(x):$$

Ենթադրենք, որ $x^*\in X$ կետը գլոբալ մաքսիմումի կետ չէ: Այդ դեպքում պետք է գոյություն ունենա այնպիսի $x'\in X$, որի համար

$$f(x')>f(x^*):$$

Վերցնենք $\alpha\in(0,1)$ և կազմենք $x=\alpha x^*+(1-\alpha)x'$ կոմբինացիան: Քանի որ X-ը ուռուցիկ է, ապա $x\in X$ և

$$f(x)\ge\alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x')>\alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x^*)=f(x^*):$$

Այս անհավասարությունը հակասում է նրան, որ x^*-ը լոկալ մաքսիմումի կետ է, քանի որ բավականաչափ 1-ին մոտիկ α-ների համար x-ը կպատկանի I շրջակայքին:

Թեորեմ 2.3.3. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ է (գոգավոր է) իրական առանցքի որևէ I միջակայքում և ածանցելի է այդ միջակայքի որևէ u կետում: Այդ դեպքում, ցանկացած $v \in I$ համար

$$f'(u)(v-u) \le f(v)-f(u), \quad (f'(u)(v-u) \ge f(v)-f(u)):$$

Ապացույց. Քանի որ $f(x)$-ը ենթադրել ենք ուռուցիկ, ապա ցանկացած $\alpha \in [0,1]$ համար՝

$$f(u+\alpha(v-u)) \le f(u)+\alpha[f(v)-f(u)],$$

$$f(u+\alpha(v-u))-f(u) \le \alpha[f(v)-f(u)],$$

$$\frac{(v-u)[f(u+\alpha(v-u))-f(u)]}{\alpha(v-u)} \le f(v)-f(u):$$

Ձգտեցնելով α-ն 0-ի և հաշվի առնելով, որ $f(x)$-ը ածանցելի է u կետում, կստանանք թեորեմի պնդումը:

Թեորեմ 2.3.4. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ է իրական առանցքի որևէ I միջակայքում, $r,s,t \in I$ և $r<s<t$: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s}:$$

Ապացույց. Օգտվելով

$$1=\frac{t-s}{t-r}+\frac{s-r}{t-r} \qquad s=\frac{t-s}{t-r}r+\frac{s-r}{t-r}t$$

նույնություններից, կստանանք՝

$$f(s) \le \frac{t-s}{t-r} f(r) + \frac{s-r}{t-r} f(t):$$

Պահանջվող անհավասարությունները ստացվում են այստեղից ոչ բարդ ձևափոխությունների միջոցով:

Մեզ հարկավոր կլինի նաև թեորեմ 2.3.3-ի ընդհանրացումը R^n-ի վրա: Բերենք այդ թեորեմն առանց ապացուցման:

Թեորեմ 2.3.5. Դիցուք $f(x)$-ը ուռուցիկ է (գոգավոր է) R^n-ի վրա և ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Այդ դեպքում բոլոր $u, v \in R^n$ համար՝

$$\langle \nabla f(u), v-u \rangle \le f(v) - f(u), \quad \left(\langle \nabla f(u), v-u \rangle \ge f(v) - f(u) \right),$$

որտեղ՝ $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right):$

ՕԳՏԱՎԵՏՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Որոշումներ ընդունելու խնդիրները հիմնականում գործ ունեն թույլատրելի որոշումների բազմությունների և այդ բազմությունների վրա տրված նախընտրելիության հարաբերությունների հետ: Նախընտրելիության հարաբերությունների դիտարկումը կապված է այն հանգամանքի հետ, որ շատ կիրառություններում որոշում ընդունողն ի վիճակի չէ քանակապես հաշվել կամ գնահատել այն ելքը, որին կհանգեցնի այս կամ այն որոշումը: Սակայն նա համարյա միշտ կարող է որոշ (պարտադիր չէ բոլոր) ելքերի զույգերի համար նշել, թե այդ երկու ելքերից ինքը որն է նախընտրում: Օգտավետության տեսությունը փորձում է պատասխանել այն հարցին, թե հնարավոր է արդյոք, հիմնվելով միայն անցկացրած համեմատությունների վրա, համեմատվող որոշումներին վերագրել այնպիսի քանակական գնահատականներ, որ նախընտրելի որոշմանը համապատասխանի ավելի մեծ գնահատական:

Օգտավետության տեսության ընդհանուր խնդիրը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ: Դիցուք տրված է որոշումներ ընդունելու խնդիր՝ $\langle X, \succsim \rangle$, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, որն անվանում են *պատահույթների բազմություն*, $\succsim$-ը որևէ բինար հարաբերություն է X-ի վրա: Ընդունված է ենթադրել, որ այդ հարաբերությունը բավարարում է թույլ գծային կարգավորվածության հարաբերության պայմաններին: Հաճախ ավելի հարմար է լինում դիտարկել երկու հարաբերություններ՝ $\succ$-խիստ նախընտրելիություն և $\sim$-համարժեքություն: Ավելի ստույգ. դիցուք տրված է $\langle X, \succ, \sim \rangle$ համակարգ, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, իսկ հարաբերությունները բավարարում են հետևյալ աքսիոմներին՝

- Ցանկացած երկու՝ $x \in X$, $y \in X$ պատահույթների համար տեղի ունի հետևյալ երեք պնդումներից մեկը՝ $x \succ y$, $y \succ x$, $x \sim y$,
- $x \sim x$ ցանկացած $x \in X$ համար,
- Եթե $x \sim y$, ապա $y \sim x$,
- Եթե $x \sim y$ և $y \sim z$, ապա $x \sim z$,

➢ Եթե $x \succ y$ և $y \succ z$, ապա $x \succ z$,

➢ Եթե $x \succ y$ և $y \sim z$, ապա $x \succ z$,

Այժմ անցնենք օգտավետության տեսության հիմնական խնդրին՝ կառուցել այնպիսի $u : X \rightarrow R$ ֆունկցիա, որպեսզի ցանկացած $x \in X$, $y \in X$ պատահույթների համար՝

$$u(x) > u(y), \tag{3.1.1}$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ $x \succ y$: Այսպիսի ֆունկցիաներն անվանում են *օգտավետության ֆունկցիաներ*: Կան օգտավետության ֆունկցիաների կառուցման տարբեր մոտեցումներ: Այստեղ կդիտարկվի միայն հավանականային մոտեցումը: Ընդհանուր դեպքում որոշումները կարող են ընդունվել անորոշության պայմաններում, այսինքն՝ որոշումը կարող է հանգեցնել մի քանի ելքերի, ընդ որում, որոշում ընդունելիս հայտնի չէ, թե ելքերից որը կիրականանա: Այս հանգամանքը հարկադրում է դիտարկել այսպես կոչված "*վիճակախաղեր*": Անցնենք ֆորմալ սահմանումներին:

Դիցուք որևէ որոշում կարող է հանգեցնել երկու՝ x և y ելքերի, համապատասխանաբար, p և $(1 - p)$ հավանականություններով: Այս դեպքում որոշման ելքը կոչվում է *վիճակախաղ* և նշանակվում է $px + (1 - p)y$: Սա հանրահաշվական արտահայտություն չէ, այլ միայն պայմանական նշանակումն է այն բանի, որ p հավանականությամբ կարող է հանդես գալ x պատահույթը, իսկ $(1 - p)$ հավանականությամբ՝ y պատահույթը: Նմանապես կարելի է սահմանել վիճակախաղեր երեք և ավելի ելքերով: Ենթադրվում է, որ վիճակախաղերը նույնպես պատահույթներ են, հետևաբար կարող են լինել վիճակախաղեր, ռոնց ելքերը վիճակախաղեր են: Բացի այդ պահանջենք, որ ցանկացած $x, y, z \in X$ և $p, q \in [0,1]$ համար վիճակախաղերը բավարարեն հետևյալ աքսիոմներին՝

Ա.1. $px + (1 - p)x = x$,

Ա.2. $px+(1-p)y=(1-p)y+px,$

Ա.3. $px+(1-p)\left[qy+(1-q)z\right]=px+(1-p)qy+(1-p)(1-q)z:$

Դժվար չէ տեսնել, որ այս աքսիոմները թույլ են տալիս վարվել վիճակախաղերի հետ այնպես, ինչպես սովորական հանրահաշվական արտահայտության հետ:

Քանի որ ենթադրվում է, որ վիճակախաղերը նույնպես պատահույթներ են, ապա նախընտրելիության հարաբերությունները կարելի է տարածել նաև վիճակախաղերի վրա՝

Ա.4. Եթե $x\sim z$, ապա ցանկացած $y\in X, p\in[0,1]$ համար՝

$$px+(1-p)y\sim pz+(1-p)y$$

Ա.5. Եթե $x\succ z$, ապա ցանկացած $y\in X, p\in[0,1]$ համար՝

$$px+(1-p)y\succ pz+(1-p)y:$$

Բացի այս աքսիոմներից, կենթադրենք, որ վիճակախաղերի բազմությունը բավարարում է նաև, այսպես կոչված, "լրիվության" աքսիոմին:

Ա.6. Դիցուք $x\succ y\succ z$: Այս դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $p\in[0,1]$, որ

$$y\sim px+(1-p)z:$$

X բազմության տարրերից կազմված բոլոր հնարավոր վիճակախաղերի բազմությունը նշանակենք $\tilde{X}$ -ով: Ակնհայտ է, որ $\tilde{X}\supseteq X$: Սովորաբար կիրառություններում ենթադրվում է, որ X -ը n -չափանի էվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմություն է՝ $X\subseteq R^n$ և այդ դեպքում $\tilde{X}$ բազմությունը կարելի է պատկերացնել որպես X -ի ուռուցիկ թաղանթ:

Լեմ 3.1.1. Եթե $p_1 > p_2$ և $x \succ y$, ապա

$$p_1 x + (1 - p_1) y \succ p_2 x + (1 - p_2) y:$$

Ապացույց: Քանի որ $p_1 > p_2$, ապա $0 < p_1 - p_2 < 1 - p_2$: Օգտվելով Ա.1 աքսիոմից և

$$\frac{p_1 - p_2}{1 - p_2} + \frac{1 - p_1}{1 - p_2} = 1$$

նույնությունից, կստանանք, որ

$$\frac{p_1 - p_2}{1 - p_2} y + \frac{1 - p_1}{1 - p_2} y = y:$$

Ըստ Ա.3 աքսիոմի՝

$$p_1 x + (1 - p_1) y = p_2 x + (1 - p_2)\left(\frac{p_1 - p_2}{1 - p_2} x + \frac{1 - p_1}{1 - p_2} y\right):$$

Հետևաբար, Ա.5 աքսիոմից ՝

$$p_1 x + (1 - p_1) y \succ p_2 x + (1 - p_2) y:$$

Հետևանք. Ա.6 աքսիոմով որոշվող p -ն միակն է և $p \in (0,1)$:

Այժմ անցնենք օգտավետության ֆունկցիաների գոյության խնդրին: Քանի որ ավելացնելով վիճակախաղերը մենք ընդլայնեցինք որոշումների բազմությունը, ապա հարկավոր է որոշել նաև վիճակախաղերի օգտավետությունը: Քանի որ վիճակախաղի ելքը պատահական է, ապա վիճակախաղի օգտավետությունը բնական է սահմանել որպես օգտավետության մաթեմատիկական սպասում, այսինքն՝

$$u\big(px + (1 - p) y\big) = pu(x) + (1 - p) u(y): \qquad (3.1.2)$$

Թեորեմ 3.1.1. Դիցուք X բազմությունը լիովին կարգավորյալ է նախընտրելիության հարաբերություններով (բավարարում է 4.1

աքսիոմներին) և վիճակախաղերը բավարարում են Ա.1-Ա.6 աքսիոմներին: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $u:\tilde{X}\to R$ ֆունկցիա, որ ցանկացած $x,y\in\tilde{X}$ և $p\in(0,1)$ համար՝

1. $u(x)>u(y)\Leftrightarrow x\succ y$,

2. $u(px+(1-p)y)=pu(x)+(1-p)u(y)$:

Բացի այդ, $u(x)$ ֆունկցիան միակն է դրական գծային ձևափոխության ճշտությամբ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր այլ $v(x)$ օգտավետության ֆունկցիայի համար կգտնվեն այնպիսի $a>0$ և b իրական թվեր, որ $v(x)=au(x)+b$:

Ապացույց: Վերցնենք երկու կամայական՝ $e_1,e_0\in\tilde{X}$, այնպիսիք, որ $e_1\succ e_0$: Եթե այդպիսիք գոյություն չունեն, այսինքն բոլոր պատահույթները համարժեք են, ապա կվերցնենք $u(x)\equiv 0$:

Այժմ, դիցուք $x\in\tilde{X}$-ը կամայական պատահույթ է: Քանի որ $\tilde{X}$-ը լիովին կարգավորյալ է, ուստի հնարավոր են հետևյալ հինգ դեպքերը՝ 1) $x\succ e_1$, 2) $x\sim e_1$, 3) $e_1\succ x\succ e_0$, 4) $x\sim e_0$, 5) $e_0\succ x$: Այս դեպքերից յուրաքանչյուրի համար կառուցենք օգտավետության ֆունկցիան:

1. $x\succ e_1\succ e_0$: Այս դեպքում, ըստ Ա.6 աքսիոմի, գոյություն ունի $p\in(0,1)$ այնպես, որ $e_1\sim px+(1-p)e_0$: Վերցնենք՝ $u(x)=\dfrac{1}{p}$:

2. $x\sim e_1$: Այս դեպքում վերցնենք $u(x)=1$:

3. $e_1\succ x\succ e_0$: Այս դեպքում, ըստ Ա.6 աքսիոմի, գոյություն ունի $p\in(0,1)$ այնպես, որ $x\sim pe_1+(1-p)e_0$: Վերցնենք՝ $u(x)=p$:

4. $x\sim e_0$: Այս դեպքում վերցնենք $u(x)=0$:

5. $e_1 \succ e_0 \succ x$: Այս դեպքում, ըստ Ա.6 աքսիոմի, գոյություն ունի $p \in (0,1)$ այնպես, որ $e_0 \sim pe_1 + (1-p)x$: Վերցնենք՝ $u(x) = \frac{p}{p-1}$:

Այսպիսով, $u(x)$ ֆունկցիան որոշեցինք բոլոր $x \in \tilde{X}$ համար: Ապացուցենք, որ այն բավարարում է (3.1.1) և (3.1.2) պայմաններին: Դիցուք $x, y \in \tilde{X}$, $x \succ y$: Այս պատահույթներից յուրաքանչյուրի համար կարող է տեղի ունենալ 1-5 դեպքերից մեկը: Հետևաբար, թեորեմն ամբողջությամբ ապացուցելու համար հարկավոր է դիտարկել բոլոր 25 դեպքերը: Մենք թեորեմը կապացուցենք միայն մեկ՝ $e_1 \succ x \succ y \succ e_0$ դեպքի համար:

Դիցուք՝ $x \sim pe_1 + (1-p)e_0$, $y \sim qe_1 + (1-q)e_0$, այսինքն՝ $u(x) = p$, $u(y) = q$: Եթե $p > q$, ապա, ըստ լեմ 3.1.1-ի

$$x \sim pe_1 + (1-p)e_0 \succ qe_1 + (1-q)e_0 \sim y:$$

Եվ հակառակը, եթե $p < q$, ապա՝

$$y \sim qe_1 + (1-q)e_0 \succ pe_1 + (1-p)e_0 \sim x:$$

Այժմ ցույց տանք $u(x)$ ֆունկցիայի գծային լինելը: Վերցնենք որևէ $s \in (0,1)$ և կազմենք $sx + (1-s)y$ վիճակախաղը.

$$sx + (1-s)y \sim s\left[pe_1 + (1-p)e_0\right] + (1-s)\left[qe_1 + (1-q)e_0\right]:$$

Օգտվելով Ա.3 աքսիոմից, կստանանք՝

$$sx + (1-s)y \sim \left[sp + (1-s)q\right]e_1 + \left[s(1-p) + (1-s)(1-q)\right]e_0:$$

Եվ, քանի որ բոլոր պատահույթները համապատասխանում են 3-րդ դեպքին, ապա՝

$$u(sx + (1-s)y) = sp + (1-s)q = su(x) + (1-s)u(y):$$

Այժմ ցույց տանք օգտավետության ֆունկցիայի միակությունը: Դիցուք, բացի կառուցված $u(x)$ ֆունկցիայից, գոյություն ունի նաև մեկ այլ՝ $v(x)$ ֆունկցիա, որը նույնպես բավարարում է (3.1.1) և (3.1.2) պայմաններին: Այդ դեպքում, քանի որ ենթադրվել է, որ $x \sim pe_1 + (1-p)e_0$, ապա՝

$$v(x) = v\left(pe_1 + (1-p)e_0\right) = pv(e_1) + (1-p)v(e_0) =$$
$$p\left(v(e_1) - v(e_0)\right) + v(e_0):$$

Քանի որ $v(e_1), v(e_0)$-երը կախված չեն x-ից, նշանակենք $v(e_1) - v(e_0) = a, v(e_0) = b$ ($a > 0$ քանի որ $v(e_1) > v(e_0)$) և հաշվի առնելով, որ $p = u(x)$, վերջնականապես կստանանք՝

$$v(x) = au(x) + b:$$

Տնտեսագիտությունում օգտավետության ֆունկցիան կիրառվում է ապրանքների հավաքածուների գնահատման համար: Ենթադրվում է, որ շուկայում ներկա են n տեսակի ապրանքներ և եթե x_i-ով նշանակենք i- րդ տեսակի ապրանքի քանակը, ապա հավաքածուն n-չափանի վեկտոր է՝ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$: Այս դեպքում պատահույթների բազմությունը n-չափանի էվկլիդեսյան տարածության ենթաբազմություն է՝ $X \subseteq R^n$, իսկ $\tilde{X}$-ը այդ բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Բնական պահանջներից մեկն այն է, որ օգտավետության $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ֆունկցիան լինի չնվազող ֆունկցիա $\left(x \geq y \rightarrow u(x) \geq u(y)\right)$: Բացի այդ, հաճախ ենթադրվում է, որ այն անընդհատ է, ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Մասնակի $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ածանցյալները անվանում են *ֆիկտիվ* կամ *արդար գներ*:

Ասում են, որ i-րդ ապրանքը ենթակա է *եկամտի նվազման օրենքի,* եթե՝ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0$:

Ասում են, որ i-րդ ապրանքը *փոխարինելի* է j-րդ ապրանքով, եթե՝ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$:

- Ասում են, որ i-րդ և j-րդ ապրանքները *լրացուցիչ* են միմիանց նկատմամբ, եթե՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \geq 0:$$

- Ասում են, որ որևէ, օրինակ, n-րդ ապրանքը *անջատելի է,* եթե գոյություն ունեն այնպիսի $v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ և $\varphi(x_n)$ ֆունկցիաներ, որ՝

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \varphi(x_n)$$

- Այն դեպքերում, երբ $\varphi(x_n)$ ֆունկցիան գծային է, ասում են, որ այդ ապրանքը *գծայնորեն փոխանցելի է:*

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

4.1 ԿՈՒՆ-ԹԱԿԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄ

Առաջին բաժնի 1.2 կետում դիտարկվել է պայմանական էքստրեմումի խնդիրը, որը կարելի է կրճատ ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} \max\limits_{x\in X} f(x), \\ X=\left\{x\in R^n : g_j(x)=0,\ j=1,2,...,m\right\}, \end{cases}$$

Այնտեղ նաև բերվել է այս խնդրի լուծման Լագրանժի եղանակը: Սակայն շատ կիրառություններում, օրինակ ժամանակակից տնտեսագիտության շատ խնդիրներում, սահմանափակումները կարող են տրված լինել ոչ միայն հավասարումների, այլ նաև անհավասարությունների տեսքով: Բացի այդ, ֆունկցիաները կարող են չբավարարել այն պայմաններին, որոնք պահանջվում են Լանգրաժի մեթոդի կիրարկման ժամանակ (օրինակ չլինեն դիֆերենցելի):

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, որն անվանում են մաթեմատիկական ծրագրման ընդհանուր խնդիր.

$$\begin{cases} f(x)\to\max \\ g_i(x)\ge 0,\ \ i=1,2,...,m \\ x\in A\subseteq R^n \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Այս խնդրում $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են նպատակային ֆունկցիա, իսկ $g_i(x)\ge 0,\ i=1,2,...,m$ անհավասարություններն անվանում են խնդրի սահմանափակումներ:

$$G=\left\{x\in A\subseteq R^n : g_i(x)\ge 0, i=1,2,...,m\right\}$$

բազմությունն անվանում են թույլատրելի բազմություն: Խնդիրն անվանում են թույլատրելի, եթե թույլատրելի բազմությունը դատարկ չէ (այսինքն անհավասարությունների համակարգը համատեղելի է A -ում): Խնդիրն անվանում են սահմանափակ, եթե $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից G բազմության վրա:

Իհարկե, (4.1.1) խնդրի լուծման վերաբերյալ կարելի է խոսել միայն այն դեպքում, երբ խնդիրը թույլատրելի է և սահմանափակ: Սակայն իրական խնդիրներ լուծելիս՝ նախորոք անհրաժեշտ պայմանների ստուգումը բերում է բարդությունների, և հնարավոր է միայն խնդրի լուծման ընթացքում:

Մաթեմատիկական ծրագրման (4.1.1) խնդրի համար կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան, որը հաճախ անվանում են Լագրանժի ֆունկցիա՝

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{4.1.2}$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$: $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետ կանվանենք (x^0, λ^0) զույգը, որտեղ $x^0 \in A$, $\lambda^0 \in R_+^m$, եթե բոլոր $x \in A$, $\lambda \in R_+^m$ համար տեղի ունի հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը՝

$$L(x,\lambda^0) \leq L(x^0,\lambda^0) \leq L(x^0,\lambda\ ): \tag{4.1.3}$$

Հետևյալ թեորեմը արտահայտում է (4.1.1) խնդրի լուծման և $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետի գոյության կապը:

Թեորեմ 4.1.1 *(Կուն-Թաքերի (Kuhn-Tucker)): Եթե գոյություն ունի $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի (x^0,λ^0) թամբակետ, ապա գոյություն ունի (4.1.1) խնդրի լուծում, ընդ որում այդ լուծումը x^0 -ն է:*

Դիցուք բոլոր $f(x)$, $g_i(x)$, $(i = 1, 2 \ldots, m)$, ֆունկցիաները գոգավոր են, A բազմությունը ուռուցիկ է և գոյություն ունի $x^* \in A$ կետ, այնպիսին, որ $g_i(x^*) > 0, (i = 1, 2 \ldots, m)$ (Սլեյթըրի պայման): Այդ դեպքում, եթե (4.1.1) խնդիրն ունի լուծում, ապա $L(x,\lambda)$ ֆունկցիան ունի թամբակետ:

Ապացույց: Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք (x^0,λ^0) զույգը $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետն է, այսինքն՝ բոլոր $x \in A$ և $\lambda \in R_+^m$ վեկտորների համար բավարարվում է (4.1.3) անհավասարությունը, այսինքն՝

$$f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) \le f(x^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda^0{}_i g_i(x^0) \le f(x^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^0): \quad (4.1.4)$$

Այս կրկնակի անհավասարության աջ մասից ստանում ենք, որ բոլոր $\lambda \in R_+^m$ համար

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda^0{}_i g_i(x^0) \le \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^0): \quad (4.1.5)$$

Եթե որևէ i_0 համար տեղի ունենար $g_{i_0}(x^0)<0$ անհավասարությունը, ապա, քանի որ (4.1.5) անհավասարությունը բավարարվում է բոլոր $\lambda \in R_+^m$ համար, ընտրելով բավականաչափ մեծ λ_{i_0} կարելի է (4.1.5) անհավասարության աջ մասը դարձնել ցանկացած չափով փոքր: Այս հակասությունից հետևում է, որ բոլոր $i=1,2\ldots,m$ համար $g_i(x^0)\ge 0$, այսինքն x^0-ն (4.1.1) խնդրի թույլատրելի կետ է:

Այժմ դիտարկենք (4.1.4) անհավասարության երկու ծայրերի անդամները՝

$$f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(x) \le f(x^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^0):$$

Այս անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր $x \in A$ և $\lambda \in R_+^m$, այդ թվում $\lambda=0$ համար՝

$$f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(x) \le f(x^0):$$

Բոլոր թույլատրելի x կետերի համար $g_i(x)\ge 0, i=1,2,\ldots,m$, և հաշվի առնելով, որ $\lambda^0 \in R_+^m$, ունենք , որ $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(x)\ge 0$: Հետևաբար, բոլոր թույլատրելի x կետերի համար՝

$$f(x) \le f(x^0), \quad x \in G,$$

այսինքն՝ x^0-ն (4.1.1) խնդրի լուծումն է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք՝

$$f(x^0) = \max_{x \in G} f(x), \quad G = \left\{ x \in A \subseteq R^n : g_i(x) \ge 0, \ i = 1, 2, ..., m \right\}:$$

Նշանակենք $g_0(x) = f(x) - f(x^0)$ և դիտարկենք հետևյալ բազմությունը՝

$$E = \left\{ y = (y_0, y_1, ..., y_m) \in R^{m+1} : \exists x \in A : y_i \le g_i(x), \ i = 0, 1, 2, ..., m; \right\}:$$

Ցույց տանք, որ E բազմությունը ուռուցիկ բազմություն է: Դիցուք՝ $y', y'' \in E, \alpha \in (0,1)$: E բազմության սահմանումից հետևում է, որ գոյություն ունեն $x', x'' \in X$ այնպիսիք, որ $y' \le g(x'), y'' \le g(x'')$: Նշանակենք $y''' = \alpha y' + (1-\alpha) y''$ Այս վեկտորի i-րդ բաղադրիչի համար կստանանք՝

$$y_i''' = \alpha y_i' + (1-\alpha) y_i'' \le \alpha g_i(x') + (1-\alpha) g_i(x''):$$

Քանի որ բոլոր $g_i(x), i = 0, 1, 2, ..., m$ ֆունկցիաները ենթադրվել են գոգավոր ֆունկցիաներ, ապա՝

$$\alpha g_i(x') + (1-\alpha) g_i(x'') \le g_i(\alpha x' + (1-\alpha) x''):$$

A բազմությունը ուռուցիկ է, հետևաբար՝ $\alpha x' + (1-\alpha) x'' \in A$, և այստեղից հետևում է, որ $y''' \in E$:

Քանի որ x^0-ն (4.1.1) խնդրի լուծումն է, ապա բոլոր թույլատրելի $x \in G$ կետերի համար՝ $g_0(x) \le 0$: Այսինքն E բազմությունը չի կարող պարունակել ոչ բացասական վեկտորներ, բացի գուցե միայն 0 կետից, հետևաբար չի հատվում R_+^{m+1} դրական օկտանտի ներքին կետերի բազմության հետ: Ուռուցիկ բազմությունների անջատելիության վերաբերյալ թեորեմից (տես թ.2.1.7) E

բազմությունը կարելի է անջատել R_+^{m+1}-ից հիպերհարթությամբ, որն անցնում է սկզբնակետով: Անալիտիկորեն սա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m)=\lambda$ թվեր, որոնք միաժամանակ 0 չեն, որ

$$<\lambda, z>\geq 0, \quad z\in R_+^{m+1}, \tag{4.1.6}$$

$$<\lambda, z>\leq 0, \quad z\in E \tag{4.1.7}$$

(4.1.6) անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր ոչ բացասական վեկտորների, այդ թվում նաև միավոր վեկտորների համար,, այսինքն՝

$$e^1=(1,0,0,...,0),$$
$$e^2=(0,1,0,...,0),$$

$$e^{m+1}=(0,0,0,...,1)$$

վեկտորների համար:

Տեղադրելով (4.1.6) անհավասարության մեջ, կստանանք

$$<\lambda,e^i>=\lambda_{i-1}\geq 0,\ i=1,2,...,m+1:$$

Մյուս կողմից, ցանկացած $x\in A$ համար $(g_0(x),g_1(x),...,g_m(x))$ վեկտորը պատկանում է E բազմությանը: Տեղադրելով (4.1.7) անհավասարության մեջ, ստանում ենք՝

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i g_i(x)\leq 0,$$

այսինքն՝

$$\lambda_0(f(x)-f(x^0))+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)\leq 0,\quad x\in A:$$

Եթե $\lambda_0=0$, ապա այս անհավասարությունը կվերածվի

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \le 0 , \quad x \in A :$$

Սակայն դա հակասում է Սլեյթըրի պայմանին, ըստ որի գոյություն ունի $x^* \in A$, որի համար $g_i(x^*) > 0, i = 1, 2, ..., m$: Այսպիսով, $\lambda_0 > 0$:

Բաժանենք անհավասարությունը λ_0-ի վրա և նշանակենք $\lambda_i^0 = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}$, $i = 1, 2, ..., m$: Կստանանք՝

$$f(x^0) \ge f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x) = L(x, \lambda^0) , \quad x \in A : \tag{4.1.8}$$

Քանի որ $g_i(x^0) \ge 0, \; i = 1, 2, ..., m$, ուստի բոլոր $\lambda \in R_+^m$ համար

$$f(x^0) \le f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0) = L(x^0, \lambda) :$$

Այժմ, եթե (4.1.8) անհավասարության մեջ տեղադրենք $x = x^0$, կստանանք՝

$$f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x^0) \le f(x^0) : \tag{4.1.9}$$

Աստեղից, քանի որ $\lambda_i^0 \ge 0 , g_i(x^0) \ge 0 , \quad i = 1, 2, ..., m$, ոչ բացասական են, հետևում է, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0$$

և

$$L(x^0, \lambda^0) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x^0) = f(x^0) \tag{4.1.10}$$

Միացնելով (4.1.8), (4.1.9) և (4.1.10) անհավասարությունները, ստանում ենք՝

$$L(x,\lambda^0)\le L(x^0,\lambda^0)\le L(x^0,\lambda),$$

բոլոր $\lambda\in R_+^m$, $x\in A$ կետերի համար:

Նշենք, որ մաթեմատիկական ծրագրման մինիմալացման խնդրում, այսինքն

$$\begin{cases} f(x)\to\min \\ g_i(x)\ge 0,\ i=1,2,...,m \\ x\in A\subset R^n \end{cases}$$

տեսք ունեցող խնդրում թեորեմի պայմաններում նպատակային ֆունկցիայի գոգավորության պահանջը փոխարինվում է ուռուցիկության պահանջով, իսկ (4.1.3) անհավասարությունը՝

$$L(x,\lambda^0)\ge L(x^0,\lambda^0)\ge L(x^0,\lambda\ )$$

անհավասարությամբ:

Կուն-Թակերի թեորեմը շատ պարզ տեսք է ստանում գծային խնդիրներում, այսինքն, երբ $f(x)$, $g_i(x), i=1,2,...,m$ ֆունկցիաները գծային են: Բերենք այդ թեորեմն առանց ապացուցման:

Թեորեմ 4.1.2 Որպեսզի մաթեմատիկական ծրագրման գծային խնդրում գոյություն ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $L(x,\lambda)$ ֆունկցիայի թամբակետ:

4.2. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Գծային ծրագրման խնդիրը մաթեմատիկական ծրագրման խնդրի մասնավոր դեպքն է, երբ բոլոր $f(x), g_j(x), j=1,...,n$ ֆունկցիաները գծային ֆունկցիաներ են: Այս խնդիրը պատմականորեն ընդունված է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=1,...,m, \\ x_j \ge 0, j=1,...,n \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Նշանակենք՝

$$c=(c_1,c_2,...,c_n),\ b=(b_1,b_2,...,b_m),\ A=\left\{a_{ij}\right\}_{i=1,m}^{j=1,n}$$

Այս նշանակումներով (4.2.1) խնդիրը կարելի է գրել համառոտ տեսքով՝

$$\begin{cases} \langle c,x\rangle \to \max, \\ Ax \le b, \\ x \ge 0 \end{cases} \tag{4.2.1*}$$

Հարկ է նշել, որ խնդրի այս տեսքը ամենաընդհանուրը չէ, քանի որ կարող է պահանջվել մինիմալացնել նպատակային ֆունկցիան, սահմանափակումները կարող են լինել հավասարությունների տեսքով, իսկ փոփոխականների վրա կարող է դրված չլինել նշանի սահմանափակում: Սակայն $\langle c,x\rangle$ ֆունկցիայի մինիմալացումը համարժեք է բացասական $-\langle c,x\rangle$ ֆունկցիայի մաքսիմալացմանը, հավասարությունը կարելի է փոխարինել երկու անհավասարություններով, իսկ նշանի սահմանափակում չունեցող փոփոխականը կարելի է ներկայացնել երկու դրական փոփոխականների տարբերությամբ: Այդ տեսքով տրված խնդիրը ընդունված է անվանել գծային ծրագրման ընդհանուր կամ ստանդարտ խնդիր:

Գծային ծրագրման խնդիրների կարևորագույն հատկություններից է այսպես կոչված երկակիությունը:

Տրված (4.2.1) կամ (4.1.1)* ստանդարտ խնդրի համար սահմանենք երկակի խնդիր հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=1,2,\dots,n, \\ y_i \ge 0, i=1,2,\dots,m \end{cases} \tag{4.2.2}$$

կամ, համառոտ տեսքով՝

$$\begin{cases} \langle b, y\rangle \to \min, \\ A^T y \ge c, \\ y \ge 0. \end{cases} \tag*{(4.2.2)*}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ իր հերթին (4.2.1)* խնդիրը (4.2.2)* խնդրի համար երկակի խնդիր է: Իրոք, բերելով (4.2.2)* խնդիրը (4.2.1)* խնդրի տեսքի, կստանանք՝

$$\begin{cases} -\langle b, y\rangle \to \max, \\ -A^T y \le -c, \\ y \ge 0: \end{cases}$$

Այս խնդրի համար կազմենք երկակի խնդիրը՝

$$\begin{cases} -\langle c, x\rangle \to \min, \\ -Ax \ge -b, \\ x \ge 0: \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ այս խնդիրը համընկնում է (4.2.1)* խնդրի հետ: Այսպիսով կարելի է խոսել երկակի խնդիրների զույգերի մասին, չնշելով, հիմնական թե երկակի խնդիր է:

Այժմ բերենք մի քանի հատկություններ, որոնք արտահայտում են երկակի խնդիրների փոխկապվածությունը: (4.2.1) և (4.2.2) խնդիրների թույլատրելի բազմությունները նշանակենք համապատասխանաբար X_1-ով և X_2-ով՝

$$X_1 = \left\{ x \in R_+^n : Ax \le b \right\},$$

$$X_2 = \left\{ y \in R_+^m : A^T y \ge c \right\}:$$

Լեմ 4.2.1: Ցանկացած $x \in X_1$, $y \in X_2$ համար

$$\langle c, x \rangle \le \langle b, y \rangle: \tag{4.2.3}$$

Ապացույց: Քանի որ $x \in X_1$, $y \in X_2$, ապա՝

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \langle b, y \rangle:$$

Լեմ 4.2.2: Եթե երկակի խնդիրներից որևէ մեկը թույլատրելի է, ապա մյուս խնդիրը սահմանափակ է:

Ապացույց: Դիցուք (4.2.1) խնդիրը թույլատրելի է, այսինքն գոյություն ունի որևէ $x' \in X_1$: Այդ դեպքում բոլոր $y \in X_2$ համար (4.2.3) անհավասարությունից կհետևի, որ

$$\langle b, y \rangle \ge \langle c, x' \rangle,$$

այսինքն, $\langle b, y \rangle$ ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից: Համանմանորեն, եթե (4.2.2) խնդիրը թույլատրելի է, ապա $\langle c, x \rangle$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից:

Լեմ 4.2.3: Եթե գոյություն ունեն այնպիսի $x^0 \in X_1$, $y^0 \in X_2$, որ $\langle c, x^0 \rangle = \langle b, y^0 \rangle$, ապա x^0-ն (4.2.1) խնդրի, իսկ y^0-ն (4.2.2) խնդրի լուծումներն են:

Ապացույց: (4.2.3) անհավասարությունից հետևում է, որ բոլոր $x \in X_1$ համար

$$\langle c, x \rangle \le \langle b, y^0 \rangle = \langle c, x^0 \rangle,$$

այսինքն x^0-ն (4.2.1) խնդրի լուծումն է: Նույն եղանակով ցույց է տրվում, որ y^0-ն (4.2.2) խնդրի լուծումն է:

Լեմ 6.4: Եթե երկակի խնդիրների զույգից որևէ մեկը թույլատրելի չէ, ապա մյուս խնդիրը անսահմանափակ է:

Ապացույց: Դիցուք (4.2.1) խնդիրը թույլատրելի չէ: Դա նշանակում է, որ $Ax \le b, x \ge 0$ անհավասարությունների համակարգը անհամատեղելի է: Ըստ թեորեմ 2.2.13 (Ֆարկաշի լեմի տարբերակ) այդ դեպքում ոչ բացասական լուծում ունի հետևյալ համակարգը՝

$$A^T y \ge 0, \langle b, y \rangle < 0 \tag{4.2.6}$$

Դիցուք, (4.2.2) խնդիրը թույլատրելի է և $y^0 \in X_2$: Կազմենք հետևյալ վեկտորը՝ $y' = y^0 + \alpha \bar{y}$, որտեղ $\bar{y}$-ը (4.2.6) համակարգի ոչ բացասական լուծում է, իսկ α-ն դրական թիվ է: Պարզ է, որ

$$A^T y' = A^T y^0 + \alpha A^T \bar{y} \ge c$$

ցանկացած α դրական թվի համար, այսինքն, $y' \in X_2$: Մյուս կողմից

$$\langle b, y' \rangle = \langle b, y^0 \rangle + \alpha \langle b, \bar{y} \rangle:$$

Այսպիսով, α-ի աճմանը զուգընթաց, նպատակային ֆունկցիայի արժեքը կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր: Հետևաբար, (4.2.2) խնդիրը անսահմանափակ է: Ուստի, եթե (4.2.1) խնդիրը թույլատրելի չէ, ապա կամ (4.2.2) խնդիրը թույլատրելի չէ, կամ, եթե թույլատրելի է, ապա անսահմանափակ է:

4.2.2 և 4.2.4 լեմերից հետևում է, որ գծային ծրագրման երկակի խնդիրներից մեկը թույլատրելի է և սահմանափակ այն, և միայն այն դեպքում, երբ թույլատրելի է և սահմանափակ իր երկակի խնդիրը: Հաջորդ հատկությունը նույնպես ցույց է տալիս երկակի խնդիրների սերտ կապվածությունը:

Թեորեմ 4.2.1: Եթե գծային ծրագրման երկակի խնդիրներից մեկն ունի լուծում, ապա մյուս խնդիրը նույնպես ունի լուծում:

Ապացույց: Գծային ծրագրման երկակի խնդիրների համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիաները ըստ (4.1.2) բանաձևի՝

$$L_1(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j),$$

$$L_2(y,\mu)=-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j):$$

Քանի որ $x=(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0$ և $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\geq 0$, ինչպես նաև $y=(y_1,y_2,...,y_m)\geq 0$ և $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\geq 0$ փոփոխականները միևնույն չափողականության են և բավարարում են նույն ոչ բացասական լինելու պայմանին, ապա, μ-ի փոխարեն վերցնելով x-ը իսկ λ-ի փոխարեն՝ y-ը, կստանանք՝

$$L_1(x,y)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}y_i(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j), =$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}b_iy_i-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j,$$

$$L_2(y,x)=-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{j=1}^{n}x_j(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i-c_j)=$$

$$-\sum_{i=1}^{m}b_iy_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j-\sum_{j=1}^{n}x_jc_j:$$

Այսինքն՝

$$L_1(x,y) = -L_2(y,x):$$

Հետևաբար, եթե մի խնդրի Լագրանժի ֆունկցիան ունի թամբակետ, ապա մյուսը նույնպես ունի թամբակետ: Մնում է կիրառել թեորեմ 4.1.1-ը:

Լեմ 4.2.5: Եթե (x^0, y^0) – ն

$$Ax \le b, A^T \ge c, x \ge 0, y \ge 0, \tag{4.2.7}$$

$$\langle c,x \rangle \ge \langle b,y \rangle \tag{4.2.8}$$

համակարգի լուծումն է, ապա x^0 -ն (4.2.1) իսկ y^0 -ն՝ (4.2.2) խնդիրների լուծումներն են:

<u>Ապացույց</u>: Քանի որ x^0 -ն և y^0 -ն բավարարում են (4.2.7) անհավասարություններին, ապա $x^0 \in X_1$, $y^0 \in X_2$: Հետևաբար, ըստ (4.2.3) անհավասարության `

$$\langle c,x^0 \rangle \le \langle b,y^0 \rangle:$$

(4.2.8) անհավասարության հետ մեկտեղ ստանում ենք, որ

$$\langle c,x^0 \rangle = \langle b,y^0 \rangle:$$

Կիրառելով լեմ 4.2.3 –ը, ստանում ենք լեմի պնդումը:

Թեորեմ 4.2.2: Եթե գծային ծրագրման (4.2.1) և (4.2.2) երկակի խնդիրների զույգից յուրաքանչյուրը թույլատրելի է, ապա երկուսն էլ ունեն լուծում, ընդ որում խնդիրների նպատակային ֆունկցիաների էքստրեմալ արժեքները հավասար են:

<u>Ապացույց</u>: Նախորդ լեմից հետևում է, որ թեորեմը ապացուցելու համար բավարար է ապացուցել, որ (4.2.7), (4.2.8) համակարգը ունի լուծում: Այդ անհավասարությունների համակարգը կարելի է գրել մատրիցային տեսքով՝

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x \ge 0, \;\; y \ge 0: \qquad (4.2.9)$$

Դիցուք թեորեմի պնդումը ճիշտ չէ և (4.2.9) համակարգը լուծում չունի: Այդ դեպքում, ըստ թեորեմ 2.2.13 (Ֆարկաշ) լուծում պետք է ունենա հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \ge 0, \qquad (4.2.10)$$

$$\langle v,b\rangle - \langle w,c\rangle < 0, \;\; v \ge 0, w \ge 0, u \ge 0:$$

Այստեղ v-ն m-չափանի վեկտոր է, w - ն n-չափանի է, իսկ u-ն թիվ է: (4.2.10) համակարգը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$A^T v - uc \ge 0, -Aw + ub \ge 0, \langle v,b\rangle - \langle w,c\rangle < 0, \qquad (4.2.11)$$

$$v \ge 0, w \ge 0, u \ge 0:$$

Ցույց տանք, որ այս համակարգը լուծում չունի (անհամատեղելի է):

Դիցուք $x \in X_1$ և $y \in X_2$ թույլատրելի վեկտորներ են: Այդ դեպքում՝

$$\langle b,v\rangle \ge \langle Ax,v\rangle = \langle A^T v,x\rangle \ge u\langle c,x\rangle,$$

$$\langle w,c\rangle \le \langle w,A^T y\rangle = \langle Aw,y\rangle \le u\langle b,y\rangle,$$

այսինքն՝

$$\langle v,b\rangle \ge u\langle c,x\rangle, \langle w,c\rangle \le u\langle y,b\rangle:$$

Առաջին անհավասարությունից հանելով երկրորդը, ստանում ենք՝

$$0 > \langle b,v\rangle - \langle c,w\rangle \ge u(\langle c,x\rangle - \langle b,y\rangle,$$

որտեղից $u>0$:

Նշանակենք՝ $\bar{v}=v/u$ և $\bar{w}=w/u$ (4.2.11) անհավասարություններից ստանում ենք՝

$$A^T\bar{v}\ge c, \bar{v}\ge 0,$$
$$A\bar{w}\le b, \bar{w}\ge 0,$$
$$\langle \bar{w},c\rangle < \langle \bar{v},b\rangle:$$

Ստացանք, որ $\bar{v}$-ն (4.2.2) խնդրի լուծումն է, իսկ $\bar{w}$-ն (4.2.1) խնդրի լուծումն է: Սակայն վերջին անհավասարությունը հակասում է լեմ 1-ի :

Այսպիսով, ստացված հակասությունը ապացուցում է, որ (4.2.7)-ն ու (4.2.8)-ը համատեղելի է և, ըստ լեմ 4.2.4-ի երկու խնդիրն էլ ունեն լուծում:

Գծային ծրագրման խնդրի լուծման գոյության մասին կարելի է խոսել միայն այն դեպքում, երբ խնդիրը սահմանափակ է և թույլատրելի: Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ այդ պայմանները նաև բավարար պայմաններ են:

Թեորեմ 4.2.3 Որպեսզի գծային ծրագրման խնդիրը ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ խնդիրը լինի սահմանափակ և թույլատրելի:

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը ակնհայտ է: Բավարարությունը ցույց տալու համար դիտարկենք գծային ծրագրման ընդհանուր (4.2.1) խնդիրը: Եթե երկակի (4.2.2) խնդիրը լինի ոչ թույլատրելի, ապա (4.2.1) խնդիրը ըստ լեմ 4.2.5-ի կլինի անսահմանափակ: Այսպիսով երկակի խնդիրները երկուսն էլ թույլատրելի են, և, ըստ նախորդ թեորեմի, (4.2.1) խնդիրը ունի լուծում:

4.3 ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օրինակ 4.3.1: Դիցուք որևէ ձեռնարկություն կարող է արտադրել n տեսակի ապրանքներ: Այդ տեսականին արտադրելու համար օգտագործվում են m տեսակի նյութեր կամ միջոցներ: Նշանակենք a_{ij}-ով j-րդ տեսակի արտադրանքի մեկ միավորում i-րդ նյութի պարունակությունը, իսկ b_i-ով այդ նյութի ամբողջ քանակը: c_j-ով $(j=1,2,...,n)$, նշանակենք j-րդ արտադրանքի միավորից ստացվող եկամուտը: Եթե ձեռնարկությունը որոշի j-րդ արտադրանքից արտադրել x_j քանակ, ապա նրա ընդհանուր եկամուտը կկազմի $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ գումար: $(x_1,x_2,...,x_n)$ վեկտորը արտադրելու համար j-րդ նյութի ծախսը կկազմի $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$:

Դրվում է հետևյալ խնդիրը՝ օգտագործելով եղած պաշարները, արտադրել այնպիսի $(x_1,x_2,...,x_n)$ վեկտոր, որ ընդհանուր եկամուտը լինի մաքսիմալ: Այսպիսով, մենք գալիս ենք հետևյալ խնդրի՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i=1,2,...,m \\ x \ge 0: \end{cases}$$

Օրինակ 4.3.2:. Տրանսպորտային խնդիր: Դիցուք որևէ ձեռնարկություն իր արտադրանքը պահեստավորել է m հատ պահեստներում և պետք է այն առաքի n հատ խանութներ: Մեկ միավոր արտադրանքի տեղափոխման ծախսերը i-րդ պահեստից j-րդ խանութ նշանակենք

c_{ij}, $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$: Դիցուք i-րդ պահեստի պարունակությունը A_i-է, իսկ j-րդ խանութի պահանջարկը B_j հարկավոր է որոշել i -րդ պահեստից j -րդ խանութ տեղափոխվող արտադրանքի x_{ij} քանակները: Տեղափոխման ընդհանուր ծախսերը կազմում են $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$, իսկ սահմանափակումները որոշվում են պահեստների պաշարներով և խանութների պահանջարկով: Այսպիսով ստանում են գծային ծրագրման հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge B_j,\ j=1,2,...,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le A_i,\ i=1,2,...,m\\ x\ge 0:\end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ խնդիրը թույլատրելի է միայն $\sum_{i=1}^{m}A_i\ge\sum_{j=1}^{n}B_j$ պայմաններում:

Օրինակ 4.3.3: Շրջիկ վաճառականի խնդիր: Դիցուք շրջիկ վաճառականը պետք է այցելի n հատ քաղաքներ, ընդ որում յուրաքանչյուր քաղաքն այցելում է մեկ անգամ: i-րդ քաղաքից j-րդ քաղաք տեղափոխվելու ծախսերը նշանակենք c_{ij}-ով: Վաճառականի յուրաքանչյուր երթուղի կարելի է ներկայացնել որպես մի տեղափոխություն n թվերից՝

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & & n\\ i_1 & i_2 & & i_n\end{pmatrix}:$$

Այդ երթուղու ծախսերը կկազմեն՝

$$c_p = c_{i_1} + c_{i_2} + \ldots + c_{i_n}$$

Փաստորեն սա կոմբինատորիկ խնդիր է: Եթե նշանակենք P -ով n էլեմենտներից բոլոր տեղափոխությունների բազմությունը (որի հզորությունը $n!$-է), ապա կստանանք հետևյալ խնդիրը՝

$$\max_{p \in \mathrm{P}} c_p$$

Այս խնդրին կարելի է մոտենալ նաև այլ տեսանկյունից: Ներմուծենք x_{ij} փոփոխականներ $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$, որոնք հավասար են 1-ի, եթե վաճառականը i-րդ քաղաքից գնում է j -րդ քաղաք, և 0 այլ դեպքում: Քանի որ վաճառականը յուրաքանչյուր քաղաք մտնում և դուրս է գալիս մեկ անգամ, ապա x_{ij} -երը պետք է բավարարեն հետևյալ պայմաններին՝

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1,2,\ldots,n:$$

Այս պայմաններին բավարարող երթուղու ընդհանուր ծախսը հավասար կլինի

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}:$$

Այսպիսով ստանում ենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1,2,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1,2,\ldots,n, \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

որը տրանսպորտային խնդրի մասնավոր դեպքն է:

4.4. ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ: ՍԻՄՊԼԵՔՍ – ՄԵԹՈԴ

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես կարելի է գտնել գծային ծրագրման խնդրի լուծումը: Դիցուք տրված է գծային ծրագրման ընդհանուր խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1, 2, \dots, m \\ x \ge 0 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Տրված սահմանափակումներից յուրաքանչյուրը որոշում է R^n տարածության մի կիսատարածություն, հետևաբար թույլատրելի բազմությունը կիսատարածությունների հատում է: Քանի որ կիսատարածությունը ուռուցիկ բազմություն է, ապա թույլատրելի բազմությունը իրենից ներկայացնում է ուռուցիկ բազմություն: Այդ բազմությունը նշանակենք X –ով, այսինքն՝

$$X = \left\{ x \in R_+^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

իսկ X բազմության ծայրակետերի բազմությունը՝ X^0 -ով:

Թեորեմ 4.4.1: Եթե (4.4.1) խնդիրը թույլատրելի է և սահմանափակ, ապա նպատակային ֆունկցիան հասնում է իր էքստրեմալ արժեքներին X բազմության ծայրակետերում:

<u>Ապացույց</u>: Քանի որ խնդիրը ենթադրվել է թույլատրելի և սահմանափակ, ապա, ըստ 4.2.3 թեորեմի, գոյություն ունի այդ խնդրի $x^0 \in X$ լուծումը: Դիցուք X -ը սահմանափակ բազմություն է: Այս դեպքում, ըստ 2.2.2, 2.2.7 և 2.2.8 թեորեմների, $x^0 \in X$ կետը կարելի է ներկայացնել X բազմության վերջավոր թվով ծայրակետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով՝

$$x^0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i,\ \ x^i\in X^0,\ \lambda_i>0,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\ \ i=1,2,\ldots,k:$$

Ըստ ենթադրության, $\langle c,x^0\rangle\geq\langle c,x^i\rangle$, $i=1,2,\ldots,k$ Եթե այս անհավասարություններից առնվազն մեկը լինի խիստ, ապա կստանանք հակասություն՝

$$\langle c,x^0\rangle=\left\langle c,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i\right\rangle=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\langle c,x^i\rangle<\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\langle c,x^0\rangle=\langle c,x^0\rangle,$$

Հետևաբար՝ $\langle c,x^0\rangle=\langle c,x^i\rangle$, $i=1,2,\ldots,k$, այսինքն՝

$$\max_{x\in X}\langle c,x\rangle=\max_{x\in X^0}\langle c,x\rangle:$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ X -ը սահմանափակ բազմություն չէ:

Դիցուք $L=\left\{x\in R^n:\sum_{i=1}^{n}x_i=a\right\}$ հիպերհարթությունն այնպիսին է, որ $x^0\notin L$ և $x^0\in X\bigcap P$, որտեղ $P=\left\{x\in R^n:\sum_{i=1}^{n}x_i\leq a\right\}$ (այդպիսի հիպերհարթություն գոյություն ունի, բավական է վերցնել $a>\sum_{i=1}^{n}x_i^0$):

Քանի որ $\overline{X}=X\bigcap P$ բազմությունը սահմանափակ է (այդ բազմության կետերը բավարարում են $0\leq\sum_{i=1}^{n}x_i\leq a$ պայմանին), ապա, ինչպես և նախորդ դեպքում, x^0 -ն կարելի է ներկայացնել $\overline{X}$ բազմության վերջավոր թվով ծայրակետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով՝

$$x^0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i,\ \ x^i\in\overline{X}^0,\ \lambda_i>0,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\ \ i=1,2,\ldots,k$$

Այստեղ բոլոր $x^i, i=1,2,...,k$ ծայրակետերը չեն կարող պատկանել L -ին, այլապես կստանանք՝ $x^0 \in L$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը a թվի վերաբերյալ: Հետևաբար, առնվազն մեկ x^i ծայրակետի համար $x^i \in X^0$ և, ինչպես և վերևում, կստանանք, որ $\langle c, x^0 \rangle = \langle c, x^i \rangle$ և $\max\limits_{x \in X} \langle c, x \rangle = \max\limits_{x \in X^0} \langle c, x \rangle$:

Այսպիսով, խնդիրը լուծելու համար հարկավոր է գտնել թույլատրելի բազմության բոլոր ծայրակետերը, հաշվել նպատակային ֆունկցիայի արժեքը այդ կետերում և գտնել էքստրեմալ արժեքը:

Սիմպլեքս–մեթոդի էությունը կայանում է հետևալում: Նախ գտնում ենք թույլատրելի բազմության որևէ գագաթ և ստուգում այդ գագաթին կից բոլոր գագաթները: Եթե այդ գագաթներից որևէ մեկում ֆունկցիայի արժեքը ավելի մեծ է, ապա տեղափոխվում ենք այդ գագաթ և ստուգում դրա բոլոր կից գագաթները: Այս պրոցեսը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև հասնենք մի գագաթի, որտեղ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը ավելի բարձր է, քան բոլոր կից գագաթներում: Քանի որ գծային ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումը նաև գլոբալ էքստրեմում է, ապա լուծումը կլինի հենց այդ գագաթում: Թույլատրելի բազմության գագաթների թիվը վերջավոր է, հետևաբար այս պրոցեսը կավարտվի վերջավոր թվով քայլերում:

Այժմ անցնենք սիմպլեքս–մեթոդի ֆորմալ նկարագրությանը: Դիտարկենք սահմանափակումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i=1,2,...,m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0: \end{cases}$$

Վերջինս համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i = b_i, \ i=1,2,...,m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0; \ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, ... u_n \ge 0: \end{cases}$$

կամ՝

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = u_i, \ i = 1, 2, ..., m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0; \ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, .. u_m \geq 0: \end{cases}$$

Այս համակարգում x_j և u_i փոփոխականները բավարարում են միևնույն պայմաններին: Այսպիսով, ստանում ենք m հատ գծային հավասարում $n+m$ ոչ բացասական փոփոխականներով: Կազմենք այդպես կոչված սիմպլեքս-աղյուսակը՝

x_1	x_2	.	x_n	1	
a_{11}	a_{12}		a_{1n}	$-b_1$	$=-u_1$
a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	$-b_m$	$=-u_m$
c_1	c_2	. . .	c_n	0	$=w$

:

Այստեղ u_i, $i = 1, 2, ..., m$ փոփոխականները արտահայտված են x_j, $j = 1, 2, ..., n$ փոփոխականներով: Սակայն, եթե մատրիցը չվերասերված է, ապա ցանկացած m փոփոխականները կարելի է արտահայտել մնացած n փոփոխականների միջոցով:
Դիցուք այդ միջոցով ստացել ենք հետևյալ աղյուսակը՝

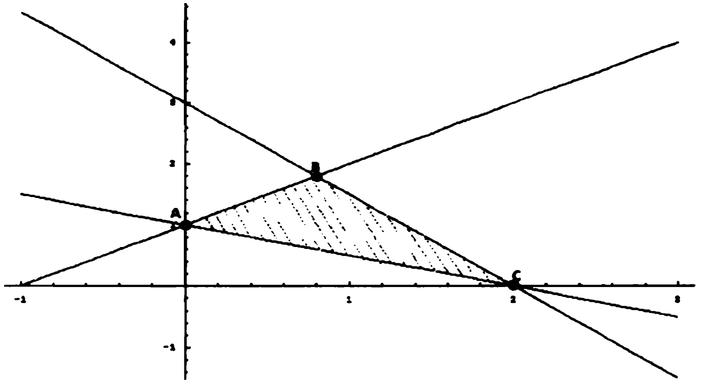
x_1'	x_2'	. .	x_n'	1	
a_{11}'	a_{12}'		a_{1n}'	$-b_1'$	$=-u_1'$
a_{m1}'	a_{m2}'	.	a_{mn}'	$-b_m'$	$=-u_m'$
c_1'	c_2'	. . .	c_n'	δ	$=w$

:

Այստեղ վերջին աջ սյան բոլոր (բացի գուցե վերջինից) և ներքին տողի (բացի գուցե վերջինից) բոլոր թվերը ոչ դրական են: Այդ դեպքում այս աղյուսակը տալիս է խնդրի լուծումը: Իրոք, եթե բոլոր x'_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ փոփոխականները հավասարեցնենք 0-ի, ապա յուրաքանչյուր u'_i-ը հավասար կլինի համապատասխան b'_i-ի, հետևաբար կստանա ոչ բացասական արժեք և այդ կետը կընորոշի թույլատրելի բազմության մի գագաթ: Իրոք, քանի որ x'_j, $j = 1, 2, \ldots, n$; u_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ փոփոխականներից յուրաքանչյուրի 0 արժեքը համապատասխանում է մի հիպերհարթության հավասարմանը R^n-ում, ապա n հատի միաժամանակ 0 լինելը համարժեք է n հիպերհարթությունների հատման, այսինքն տալիս է մի կետ R^n-ում: Եթե մնացած փոփոխականները ոչ բացասական են, ապա այդ կետը թույլատրելի կետ է: Եվ , քանի որ այդ կետը ստացվում է թույլատրելի բազմությունը սահմանափակող հիպերհարթությունների հատումից, ապա այն թույլատրելի բազմության գագաթ է: Բացի դրանից, քանի որ բոլոր c'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ թվերը ոչ դրական են, ապա $x'_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ դեպքում $\sum_{i=1}^{n} c'_j x'_j$ նպատակային ֆունկցիան կստանա մաքսիմալ արժեք:

Բերենք սիմպլեքս-մեթոդի ալգորիթմի հիմնական քայլերը առանց ապացուցման:

1-ին քայլ: Դիցուք $-b_k$-ն աջ սյան ամենափոքր դրական թիվն է: A մատրիցի k-րդ տողում վերցնենք կամայական a_{kj_0} բացասական թիվ (եթե այդպիսի թիվ չկա, ապա խնդիրը թույլատրելի չէ): Ապա բոլոր $i \geq k$ համար, որոնց համար $-\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$-ն բացասական է, վերցնենք այն i_0-ն, որի համար այդ հարաբերությունը ամենամեծն է: $a_{i_0 j_0}$-ն ձևափոխության հենքային տարրն է՝ i_0 տողի հավասարումից x_{j_0}-ն արտահայտվում է մնացած փոփոխականների միջոցով և փոխարինում է u_{i_0} փոփոխականին:



Նկար 4.4.1

2-րդ քայլ: Դիցուք c_{j_0}-ն վերջին տողի ցանկացած դրական տարր է: Բոլոր i-երի համար, որոնց համար $-\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$-ն բացասական է (եթե այդպիսիք չկան, ապա խնդիրը սահմանափակ չէ) վերցնենք այն i_0-ն, որի համար այդ հարաբերությունը ամենամեծն է: Եվ նորից i_0 տողի հավասարումից x_{j_0}-ն արտահայտենք մյուս փոփոխականներով:

Օրինակ 4.4.1: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Քանի որ այս խնդրի փոփոխականները ընդամենը երկուսն են, ապա այն կարելի է լուծել նաև գրաֆիկորեն: Կոորդինատային հարթության վրա անցկացնենք $3x_1 + 2x_2 = 6$, $x_1 + 2x_2 = 2$ և $-x_1 + x_2 = 1$ ուղիղները և գտնենք խնդրի թույլատրելի բազմությունը: Գծագրի վրա այն գծանշված տիրույթն է: Նպատակային ֆունկցիան իր մաքսիմալ արժեքը ընդունում է թույլատրելի բազմության A, B, C գագաթներից որևէ մեկում: Համեմատելով $A(0,1); B\left(4/5, 9/5\right); C(2,0)$ գագաթներում նպատակային ֆունկցիայի արժեքները, կստանանք օպտիմալ լուծումը B գագաթում՝ $x_1^0 = 4/5, x_2^0 = 9/5$, իսկ նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը՝ $13/5$

Այժմ նույն խնդիրը լուծենք սիմպլեքս-եղանակով: Կազմենք խնդրի սիմպլեքս աղյուսակը՝

x_1	x_2	1	
3	2	−6	$=-u_1$
−1	−2	2	$=-u_2$
−1	1^*	−1	$=-u_3$
1	1	0	w

Այս աղյուսակում որպես հենքային տարր ընտրենք աստղանիշով նշվածը, այսինքն տեղերով փոխենք x_2-ը և u_3-ը: Թվաբանական գործողություններից հետո կստանանք հետևյալ աղյուսակը՝

x_1	u_3	1	
5^*	−2	−4	$=-u_1$
−3	2	0	$=-u_2$
−1	1	−1	$=-x_2$
2	−1	1	w

Այս աղյուսակը արդեն տալիս է թույլատրելի կետ, քանի որ երրորդ սյունակի բոլոր սարրերը ոչդրական են: Վերջին տողում ունենք մեկ դրական թիվ՝ 2 թիվն է: Որպես ձևափոխության տարր պետք է ընտրենք աստղանիշով նշվածը: Նոր աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը՝

u_1	u_3	1	
$1/5$	$-2/5$	$-4/5$	$=-x_1$
$3/5$	$4/5$	$-12/5$	$=-u_2$
$1/5$	$3/5$	$-9/5$	$=-x_2$
$-2/5$	$-1/5$	$13/5$	w

Ստացված աղյուսակը տալիս է խնդրի լուծումը: Իրոք, այստեղ երրորդ սյունակը և վերջին տողը ոչ դրական են: Վերցնելով $u_1=0$, $u_3=0$ կստանանք $x_1^0=4/5$, $x_2^0=9/5$ և $w=13/5$ Այս լուծումը, իհարկե, համընկնում է գրաֆիկորեն ստացված լուծման հետ:

4.5. ԴԻՍԿՐԵՏ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Դիսկրետ ծրագրման տեսությունը ուսումնասիրում է մաթեմատիկական ծրագրման ընդհանուր խնդրի այն մասնավոր դեպքերը, երբ փոփոխականների մի մասը, կամ բոլորը, կարող են ընդունել միայն վերջավոր թվով արժեքներ: Այդպիսի մոդելներ առաջանում են տարբեր բնագավառներում, երբ, օրինակ, ստացվող լուծումը պետք է արտահայտվի ամբողջ թվերով՝ ամբողջարժեք ծրագրում: Այդպիսի խնդրի օրինակ է նաև նախորդ բաժնում դիտարկված նշանակումների խնդիրը: Ամբողջարժեք ծրագրման խնդիրների լուծման թվացյալ ամենապարզ եղանակը՝ կլորացումը, հաճախ բերում է օպտիմալ լուծումից շատ հեռու արդյունքների: Սա է պատճառը, որ դիսկրետ ծրագրումը ձևավորվել է որպես առանձին տեսություն:

Կիրառությունների տեսանկյունից շատ կարևոր դաս են կազմում գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրները: Դիցուք տրված է գծային ծրագրման 4.2.1 խնդիր՝

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,\dots,m, \\
x_j \ge 0, j = 1,\dots,n:
\end{cases}
$$

Ընդ որում պահանջվում է, որ փոփոխականները ընդունեն միայն ամբողջ արժեքներ: Նշանակենք G^c-ով

$$
G = \left\{ x \in R_+^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,\dots,m, \right\}
$$

բազմության բոլոր ամբողջ բաղադրիչներով վեկտորների բազմությունը և $C\left(G^c\right)$-ով G^c բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Քանի որ գծային ծրագրման խնդիրների լուծումը ոչ մի սկզբունքային դժվարություն չի պարունակում, ուստի հաճախ ամբողջարժեք խնդիրների լուծումը բերվում է գծային ծրագրման խնդիրների լուծմանը:

Թեորեմ 4.5.1: Գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրների լուծումը համընկնում է

$$\langle c,x\rangle=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,$$

$$x\in C\left(G^c\right):$$

գծային ծրագրման խնդրի լուծման հետ:

Ապացույցն անմիջականորեն հետևում է ուռուցիկ թաղանթի սահմանումից և 4.4.1 թեորեմից: Որոշ մասնավոր դեպքերում այս թեորեմը թույլ է տալիս անմիջապես ստանալ ամբողջարժեք խնդրի լուծումը լուծելով գծային ծրագրման խնդիր: Առանց ապացույցի (տես [13]) բերենք մեկ օրինակ:

Թեորեմ 4.5.2: Ցանկացած ամբողջ A_i և B_j գործակիցների դեպքում 4.3.2 տրանսպորտային խնդրի լուծումը ամբողջարժեք է անկախ նպատակային ֆունկցիայի գործակիցներից:

Ընդհանուր դեպքում 4.5.1 թեորեմի պնդումը ընկած է գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրների լուծման թվային ալգորիթմերի բավականաչափ մեծ խմբի՝ այսպես կոչված *կանոնավոր հատույթների* հիմքում: Ուրվագծորեն նկարագրենք կանոնավոր հատույթների եղանակը:

Դիցուք տրված է

$$\begin{cases}\langle c,x\rangle\to\max\\ x\in G^c:\end{cases}$$

գծային ծրագրման ամբողջարժեք խնդիրը և դիցուք

$$\begin{cases}\langle c,x\rangle\to\max\\ x\in G:\end{cases}$$

գծային ծրագրման խնդրի լուծումը՝ x^0-ն ամբողջարժեք չէ: Կանոնավոր հատույթ կանվանենք

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j \le b^1$$

անհավասարությունը, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$1).\sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j^0 > b^1,$$

$$2).G^C \subseteq \left\{ x \in R^n \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j \le b^1 \right\}:$$

Կանոնավոր հատույթը ավելացվում է խնդրի սահմանափակումներին և լուծվում է գծային ծրագրման նոր խնդիր՝

$$\begin{cases} \langle c, x \rangle \to \max \\ x \in G \cap \left\{ x \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_j^1 x_j \le b^1 \right\} \end{cases}$$

Եթե այս խնդրի լուծումը նորից ամբողջարժեք չէ, ապա կառուցվում է նոր կանոնավոր հատույթ և լուծվում հաջորդ խնդիրը: Այս գործընթացը շարունակվում է մինչև ամբողջարժեք լուծում ստանալը: Ներկայումս գոյություն ունեցող թվային ալգորիթմերը թույլ են տալիս տարբական գործողությունների միջոցով վերջավոր թվով քայլերով լուծել ամբողջարժեք խնդիրները:

Դիտարկենք դիսկրետ խնդիրների ևս մեկ եղանակ, որը կոչվում է *ճյուղերի և եզրերի եղանակ*: Դիցուք տրված է դիսկրետ խնդիր՝

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ x \in G \subseteq R^n \end{cases}$$

որտեղ G բազմությունը վերջավոր է: Ենթադրենք, որ մենք կարող ենք որևէ եղանակով գնահատել $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը G

բազմության վրա, այսինքն գտնել այնպիսի $\alpha(G)$ գնահատական (եզր), որ

$$f(x) \le \alpha(G), x \in G:$$

Եթե այժմ կարողանանք գտնել այնպիսի $x^0 \in G$, որ $f(x^0) = \alpha(G)$, ապա x^0-ն մեր խնդրի լուծումն է: Եթե ոչ, ապա տրոհում ենք G բազմությունը $G_1^1, G_2^1, ..., G_{k_1}^1$ բազմությունների (ճյուղավորում ենք խնդիրը) և գնահատում $f(x)$ ֆունկցիան $G_1^1, G_2^1, ..., G_{k_1}^1$ բազմությունների վրա: Ստանում ենք նոր գնահատականներ՝ $\alpha(G_1^1), \alpha(G_2^1), ..., \alpha(G_{k_1}^1)$: Քանի որ $G_i^1 \subseteq G$, ապա կարելի է սպասել, որ $\alpha(G_i^1) \le \alpha(G), i = 1, 2, ..., k_1$: Դիցուք՝ $\alpha(G_{i_0}^1) = \max\limits_{1 \le i \le k_1} \alpha(G_i^1)$: Եթե այժմ կարողանանք գտնել այնպիսի $x^0 \in G_{i_0}^1$, որ $f(x^0) = \alpha(G_{i_0}^1)$, ապա x^0-ն մեր խնդրի լուծումն է, այլապես այս գործընթացը պետք է շարունակել մինչև խնդրի լուծումը գտնելը:

ԲԱԶՄԱՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄ

5.1. ԽՄԲԱՅԻՆ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ինչպես նշվել է ներածությունում, խմբային ընտրության խնդիրը որոշումներ ընդունելու ընդհանուր խնդրի այն մասնավոր դեպքն է, երբ ինչպես որոշումների բազմությունը, այնպես էլ նախընտրելիության հարաբերությունների թիվը վերջավոր են: Խմբային ընտրության խնդիրը կարելի է ներկայացնել հետևյալ մոդելի տեսքով՝ $\left\langle X, \succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_n \right\rangle$, որտեղ՝ $X = \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_m \right\}$, իսկ նախընտրելիության հարաբերությունները ենթադրվում են թույլ կարգավորվածություններ X բազմության վրա:

Առաջին անգամ այս խնդիրը դիտարկվել է Էռոուի (Arrow) կողմից որպես որևէ դեմոկրատական երկրի ընտրական համակարգի մաթեմատիկական մոդել: Չնայած վերը նշված մոդելը շատ ավելի ընդհանուր է, սակայն մենք կպահպանենք Էռոուի մոտեցումները և ձևակերպումները:

Որոշումների բազմության $x_i, i = 1, 2, \ldots, m$ տարրերը անվանենք *թեկնածուներ*, իսկ նախընտրելիության $\succ_j, j = 1, 2, \ldots, n$ հարաբերությունները՝ *անհատական կարծիքներ:* Խնդիրը դրվում է հետևյալ կերպ: Ունենք m թեկնածու և n ընտրող: Ընտրողներից յուրաքանչյուրը արտահայտում է իր կարծիքը թեկնածուների վերաբերյալ՝ արդյունքում ստանում ենք n հատ նախընտրելիության հարաբերություն m թեկնածուների վերաբերյալ: Այդ անհատական կարծիքների հիման վրա հարկավոր է որոշել, թե ինչպիսին է ընտրողների հավաքական կարծիքը: Փաստորեն խնդիրը հետևյալն է՝ կառուցել արտապատկերում, որը X բազմության վրա անհատական կարգավորվածությունների ցանկացած $\left\{ \succ_j \right\}_1^n$ համակարգին համապատասխանության մեջ կդնի մեկ կարգավորվածություն՝ $\succ$ խմբային կարծիք: Այդ արտապատկերումը անվանում են ընտրական կանոնադրություն, կամ, ընդհանուր դեպքում, *խմբային ընտրության կանոն:* Էռոուն առաջարկել է հինգ մինիմալ պայմաններ, որոնց ներըմբռնողական պատկերացումներով պետք է բավարարի արդար ընտրական կանոնադրությունը դեմոկրատական երկրներում: Այդ պայմանները անվանում են Էռոուի աքսիոմների համակարգ: Դրանք են՝

1). *Միարժեքության աքսիոմ*: Խմբային ընտրության կանոնը միարժեքորեն որոշված է բոլոր հնարավոր անհատական կարծիքների $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգերի համար:

2). *Մոնոտոնության աքսիոմ*: Եթե անհատական կարծիքների որևէ $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգի և $x, y \in X$ թեկնածուների զույգի համար խմբային ընտրության կանոնի համաձայն $x \succ y$, ապա եթե անհատական կարծիքները փոխվեն այնպես, որ x-ը պարունակող զույգերի վերաբերյալ կարծիքները փոխվեն միայն ի օգուտ x-ի, իսկ մնացած կարծիքները չփոխվեն, ապա կանոնը նորից կհանգեցնի՝ $x \succ y$:

3). *Անկախություն չկապված այլընտրանքներից:* Եթե անհատական կարծիքների երկու համակարգերում $X^0 \subset X$ թեկնածուների ենթաբազմության վերաբերյալ բոլոր կարծիքները համընկնում են, ապա պետք է համընկնեն նաև խմբային կարծիքները:

4). *Բռնապետության արգելք:* Գոյություն չունի այնպիսի j_0 ընտրող, որ ցանկացած $x, y \in X$ զույգի համար $x \succ_{j_0} y$-ից հետևի՝ $x \succ y$:

5). *Պետության ինքնիշխանություն:* Ցանկացած $x, y \in X$ զույգի համար, եթե կանոնի համաձայն՝ $x \succ y$, ապա գոյություն ունի առնվազն մեկ՝ j_0 ընտրող, այնպես, որ՝ $x \succ_{j_0} y$:

Էռոուի հայտնի պարադոքսը կայանում է նրանում, որ այս աքսիոմները անհամատեղելի են՝ ցանկացած կանոն, որը բավարարում է առաջին երեք աքսիոմների, բերում է կամ բռնապետության, կամ ինքնիշխանության կորստի: Բերենք այդ արդյունքն առանց ապացուցման:

Թեորեմ 5.1.1: Գոյություն չունի կանոն, որը բավարարում է 1)-5) աքսիոմների համակարգին, եթե $n \ge 2, m \ge 3$:

Ընտրական կանոններից ամենաշատ կիրառվողը մեծամասնության կանոնն է: Այն կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ: Կամայական $x, y \in X$ զույգի համար նշանակենք՝

$$n_x = \left|\{ j : x \succ_j y\}\right|, \; n_y = \left|\{ j : y \succ_j x\}\right|, \; n_{xy} = \left|\{ j : x \sim_j y\}\right| :$$

Մեծամասնության կանոնը կձևակերպվի այսպես՝ $x \succ y$ այն, և միայն այն դեպքում, եթե՝ $n_x > n_y$: Հեշտ է տեսնել, որ մեծամասնության կանոնը չի բավարարում Էռոուի հենց առաջին աքսիոմին: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝

$$x \succ_1 y \succ_1 z,$$

$$y \succ_2 z \succ_2 x,$$

$$z \succ_3 x \succ_3 y :$$

Ըստ մեծամասնության կանոնի, մենք կստանանք՝ $x \succ y$, $y \succ z$, $z \succ x$, այսինքն ոչ տրանզիտիվ հարաբերություն: Մեծամասնության կանոնը լիովին նկարագրվում է աքսիոմների հետևյալ համակարգով՝

Ա 1: Կանոնը միարժեքորեն որոշված է թեկնածուների ցանկացած $x, y \in X$ զույգի համար:

Ա 2: Կանոնը կախված չէ թեկնածուների անվանումներից:

Ա 3: Կանոնը կախված չէ ընտրողների անվանումներից:

Ա 4: Եթե որևէ $x, y \in X$ զույգի համար կանոնը որոշել է, որ $x \sim y$ և ընտրողներից մեկը փոխել է իր կարծիքն ի օգուտ x-ի, ապա կանոնը պետք է որոշի, որ $x \succ y$:

***Թեորեմ 5.1.2*:** Միակ կանոնը, որը բավարարում է վերը բերված 4 աքսիոմի՝ մեծամասնության կանոնն է:

Ապացույց: Հեշտ է ստուգել, որ մեծամասնության կանոնը բավարարում է այս աքսիոմներին: Ցույց տանք, որ այն միակն է: Վերցնենք կամայական $x, y \in X$ զույգ: Քանի որ կանոնը կախված չէ ընտրողների անվանումներից, ապա կարող է կախված լինել միայն դրանց քանակից, այսինքն՝ n_x, n_y, n_{xy} թվերից: Դիցուք ինչ-որ կարծիքների $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգի դեպքում՝ $n_x = n_y$: Այդ դեպքում, ըստ 2 աքսիոմի կանոնը պետք է պնդի, որ $x \sim y$: Այժմ, եթե որևէ ընտրող փոխի իր կարծիքն ի օգուտ x-ի, կստանանք՝ $n_x > n_y$ և ըստ 4 աքսիոմի, կանոնը պետք է որոշի, որ $x \succ y$: Ստանում ենք մեծամասնության կանոնը:

Դիտարկենք մի կանոն ևս, որը լայն կիրառություններ ունի փորձագիտական գնահատականների տեսությունում, սպորտի բնագավառում և այլն: Դա *Կոպլենդի (Coplan)կանոնն է*:

Դիցուք տրված է կարծիքների որևէ $\{\succ_j\}_1^n$ համակարգ: Ցանկացած $x \in X$ նշանակենք՝

$$\alpha_j(x) = \left|\{y \in X : x \succ_j y\}\right|,$$

$$\beta_j(x) = \left|\{y \in X : y \succ_j x\}\right|$$

և կազմենք օգտավետության ֆունկցիա՝

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j(x) - \beta_j(x)\right):$$

Ըստ Կոպլենդի կանոնի՝

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(x):$$

Այս կանոնը, ի տարբերություն մեծամասնության կանոնի միշտ հանգեցնում է տրանզիտիվ լուծումների, սակայն չի բավարարում Էրոուի Ա.5 աքսիոմին:

Խմբային ընտրության տեսությունը հաճախ օգտագործվում է *փորձագիտական գնահատականների տեսության* շրջանակներում: Այն դեպքերում, երբ դժվար է ճշգրիտ գնահատական տալ այս կամ այն որոշմանը, կազմվում է տվյալ բնագավառի մասնագետների՝ փորձագետների խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրն արտահայտում է իր կարծիքը և այդ կարծիքների հիման վրա ընդունվում է վերջնական որոշում:

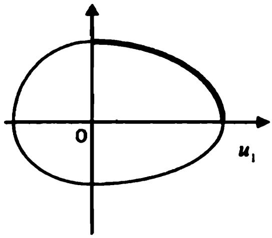
5.2. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄ

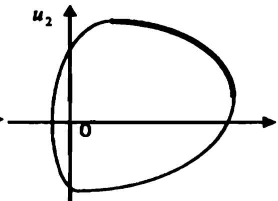
Վեկտորական օպտիմալացման տեսությունը ուսումնասիրում է որոշումներ ընդունելու մոդելի այն մասնավոր դեպքը, երբ նախընտրելիության հարաբերությունների թիվը վերջավոր է և յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի համապատասխան օգտավետության ֆունկցիա: Այսպիսով, վեկտորական օպտիմալացման մոդելը կարելի է դիտարկել հետևյալ տեսքով՝ $\mathrm{M} = \langle X, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \rangle$, որտեղ X-ը կամայական բազմություն է, իսկ $u_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ ֆունկցիաները՝ X-ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիաներ են: Հարկավոր է գտնել X բազմության կետ, որն ինչ-որ իմաստով մաքսիմալացնում է բոլոր $u_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ ֆունկցիաները միաժամանակ:

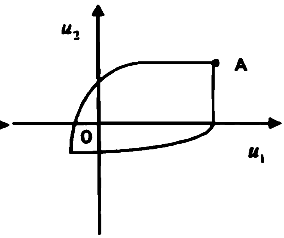
Կախված այն բանից, թե ինչ բնագավառների է վերաբերում վեկտորական օպտիմալացման խնդիրը և ինչ լրացուցիչ ինֆորմացիա կա այդ խնդրի վերաբերյալ, խնդրի լավագույն որոշումը կարելի է փնտրել ըստ օպտիմալության տարբեր սկզբունքների: Այստեղ կդիտարկվեն հայտնի սկզբունքներից մի քանիսը: Ամենաընդհանուր և կիրառվող սկզբունքներից է Պարետոյի (Pareto) օպտիմալության սկզբունքը:

Սահմանում 5.2.1: $x^0 \in X$ կետն անվանում են *Պարետո-օպտիմալ,* եթե գոյություն չունի այնպիսի $x \in X$, որ $u_i(x) \geq u_i(x^0),\ i = 1, 2, \ldots, n$, ընդ որում այդ անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է:

Գործնականում, այս սկզբունքով որոշվող կետերը հաճախ մի ընդարձակ բազմություն են կազմում, որն անվանում են Պարետո-բազմություն: Նկարներ 5.2.1 և 5.2.2-ում պատկերված են $n = 2$ դեպքում հաճախակի հանդիպող Պարետո-օպտիմալ բազմույուններին համապատասխանող u_1, u_2 օգտավետության ֆունկցիաների արժեքների բազմությունները: Նկար 5.2.3-ում պատկերված է այն դեպքը, երբ Պարետո-օպտիմալ բազմույունը բաղկացած է միակ կետից: Սա համապատասխանում է այն դեպքին, երբ գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in X$ կետ, որ $u_1(x^0) = \max\limits_{x \in X} u_1(x),\ u_2(x^0) = \max\limits_{x \in X} u_2(x)$: Այս դեպքում խնդիրը վերանում է վեկտորական օպտիմալացման խնդիր լինելուց:







Նկար 5.2.1

Նկար 5.2.1 Նկար 5.2.2 Նկար 5.2.3

Փաստորեն, այս սկզբունքով որոշվում է ոչ թե լավագույն կետը, այլ այն կետերի բազմությունը, որտեղ հարկավոր է փնտրել լավագույնը՝ օգտվելով խնդրի վերաբերյալ ստացած լրացուցիչ տեղեկատվությունից: Այն խնդիրներում, որտեղ այդ լրացուցիչ տեղեկատվությունը առկա է, այսինքն հայտնի են օգտավետության ֆունկցիաների համեմատական կարևորությունները, այդ ֆունկցիաների արժեքները արտահայտված են նույն միավորներով, կամ բերված են նույն մասշտաբի, շատ կիրառելի է այսպես կոչված *սկալյար սկզբունքը*:

Սահմանում 5.2.2: Դիցուք՝ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. $x^0 \in X$ կետն անվանում են օպտիմալ ըստ $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ կշիռներով սկալյար սկզբունքի, եթե բոլոր $x \in X$ կետերի համար՝

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^0) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x):$$

Այս երկու սկզբունքները տրամագծորեն տարբեր են թվում, քանի որ առաջինի դեպքում դուք ոչինչ չգիտեք խնդրի վերաբերյալ բացի X բազմությունից և u_i ֆունկցիաների տեսքից, իսկ երկրորդ սկզբունքը կարող է կիրառվել այն դեպքում, երբ հայտնի են ֆունկցիաների համեմատական կարևորությունները, որոնք որոշվում են λ_i գործակիցներով, ինչպես նաև ֆունկցիաների չափման միավորները: Սակայն պարզվում է, որ այս երկու սկզբունքները ինչ-որ իմաստով համարժեք են:

Թեորեմ *5.2.1*: Եթե որոշ $x^0 \in X$ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ համար՝

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^0) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x),$$

ապա x^0-ն օպտիմալ է ըստ Պարետոյի:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ դիցուք x^0-ն օպտիմալ չէ ըստ Պարետոյի: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $x \in X$, որ

$$u_i(x) \geq u_i(x^0),\ i = 1, 2, \dots, n,$$

ընդ որում այդ անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է: Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրը բազմապատկենք համապատասխան λ_i-ով և գումարենք: Քանի որ այդ անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է, կստանանք խիստ անհավասարություն՝

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x^0):$$

Սա հակասում է մեր ենթադրությանը:

Թեորեմ *5.2.2*: Դիցուք X-ը ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $u_i(x),\ i = 1, 2, \dots, n$ ֆունկցիաները գոգավոր ֆունկցիաներ են: Այս դեպքում, եթե x^0-ն օպտիմալ է ըստ Պարետոյի, ապա գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ թվեր, որ

$$\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x^0):$$

Ապացույց: Կազմենք հետևյալ արտահայտությունը՝ $\left((u_1(x)-u_1(x^0)),\ (u_2(x)-u_2(x^0)),\dots,\ (u_n(x)-u_n(x^0))\right)$: Ցանկացած ֆիքսած $x\in X$ կետի համար այն կարելի է դիտարկել որպես n-չափանի վեկտոր, այսինքն՝ կետ R^n-ից: Այդպիսի բոլոր հնարավոր վեկտորների բազմությունը նշանակենք V-ով՝

$$V=\left\{\left((u_1(x)-u_1(x^0)),\ (u_2(x)-u_2(x^0)),\dots,\ (u_n(x)-u_n(x^0))\right):x\in X\right\}:$$

Քանի որ ենթադրել ենք, որ x^0-ն օպտիմալ է ըստ Պարետոյի, ապա այս վեկտորների մեջ դրական վեկտորներ չկան՝ $V\cap R_+^n=\varnothing$: $C(V)$-ով նշանակենք V բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Ինչպես հայտնի է, ուռուցիկ թաղանթի ցանկացած կետ կարելի է ներկայացնել V բազմության ոչ ավելի, քան $n+1$ կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով (տես թեորեմ 2.1.1.): Դա նշանակում է, որ $C(V)$-ի ցանկացած y վեկտորի k-րդ բաղադրիչը $(k=1,2,\dots,n)$ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y_k=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j\left(u_k(x_j)-u_k(x^0)\right),$$

որտեղ՝

$$x_j\in X;\ \alpha_j\geq 0;\ j=1,2,\dots,n+1;\ \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j=1:$$

Այստեղից՝

$$y_k=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j u_k(x_j)-\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j u_k(x^0)=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j u_k(x_j)-u_k(x^0):$$

Քանի որ ենթադրվել է, որ $u_i(x),\ i=1,2,\dots,n$ ֆունկցիաները գոգավոր են, ապա՝

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j u_k(x_j) \le u_k\left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j\right):$$

Նշանակենք՝ $x' = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j$: X -ը ուռուցիկ բազմություն է, հետևաբար, $x' \in X$ Այսպիսով ստանում ենք, որ ցանկացած $y \in C(V)$ համար գոյություն ունի $x' \in X$, այնպես, որ՝ $y_k \le u_k(x') - u_k(x^0)$; $(k = 1, 2, \ldots, n)$: Այստեղից հետևում է, որ եթե V բազմության մեջ չկան դրական վեկտորներ, ապա այդպիսիք չկան նաև $C(V)$-ում: Դա նշանակում է, որ $C(V) \bigcap R_+^n = \varnothing$:

Ինչպես $C(V)$ բազմությունը, այնպես էլ R_+^n-ը ուռուցիկ են: Հետևաբար, անջատելիության թեորեմի համաձայն, այդ երկու բազմությունները կարելի է անջատել կոորդինատների սկզբնակետով անցնող հիպերհարթությամբ (տես թեորեմ 2.1.7): Անալիտիկորեն դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ թվեր, որոնք միաժամանակ 0 չեն, որ

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \le 0, \quad z \in C(V), \tag{5.2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \ge 0, \quad z \in R_+^n:$$

Եթե վերջին անհավասարության մեջ տեղադրենք $e^i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \in R_+^n$ վեկտորները, ապա կստանանք՝

$\beta_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$: Այսպիսով, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i > 0$: Նշանակենք՝

$$\lambda_i = \frac{\beta_i}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}:$$

Բաժանելով (5.2.1) անհավասարությունը $\sum_{i=1}^{n}\beta_i$ -ի վրա և որպես z վերցնելով V բազմության կետերը, կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left[u_k(x)-u_k(x^0)\right]\le 0,\ \ x\in X$$

Այստեղից՝

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x^0),\ \ x\in X$$

Հաշվի առնելով, որ $\lambda_i\ge 0, i=1,2,...,n$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, ստանում ենք թեորեմի պահանջվող պնդումը:

Այս երկու թեորեմները փաստորեն փակում են օպտիմալության սկզբունքների հարցը վեկտորական օպտիմալացման խնդիրներում: Իրոք, ցանկացած օպտիմալության սկզբունք պետք է հանգեցնի Պարետո-օպտիմալ կետի, սակայն ցանկացած Պարետո-օպտիմալ կետ կարելի է ստանալ համապատասխան կշիռներով սկալյար սկզբունքով:

Օրինակ 5.2.1: Ցանկացած արտադրական պրոցես ֆորմալ կարելի է նկարագրել (x,y) վեկտորների զույգով, որտեղ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$–ը *ծախսերի վեկտորն* է, $y=(y_1,y_2,...,y_m)$-ը *արտադրանքի վեկտորը*.

Այստեղ x_i -ն i -րդ տեսակի ծախսված ապրանքի քանակն է, y_j -ն j – րդ տեսակի արտադրանքի քանակն է: Որպես կանոն, եղած արտադրական տեխնոլոգիան հնարավորություն է տալիս իրագործել ոչ թե մեկ, այլ արտադրական պրոցեսների մի ամբողջ բազմություն, որոնցից յուրաքանչյուրը բնորոշվում է իր ծախսեր-արտադրանք վեկտորով: Նշանակենք T–ով բոլոր ծախսեր-արտադրանք վեկտորների բազմությունը, որոնք հնարավոր են տվյալ տեխնոլոգիայի պարագայում: Այսպիսով, T-ն R^{n+m} տարածության ենթաբազմություն է: Դիցուք $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)$ վեկտորների բոլոր բաղադրիչները դրական են: (α,β) զույգի համար կազմենք՝

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)=\langle\alpha,x\rangle+\langle\beta,y\rangle:$$

Եթե ենթադրենք, որ T-ն ուռուցիկ է, ապա տվյալ խնդրի համար վերը բերած թեորեմները կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

- *Ծախսեր-արտադրանք ցանկացած վեկտոր, որը մաքսիմալացնում է $F_{\alpha,\beta}(x,y)$ ֆունկցիան T բազմության վրա, Պարետո-օպտիմալ է:*
- *Եթե (x,y) վեկտորը Պարետո-օպտիմալ է T-ում, ապա գոյություն ունեն այնպիսի α և β վեկտորներ, որ (x,y)-ը $F_{\alpha,\beta}(x,y)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:*

Այս պնդումների տնտեսագիտական մեկնաբանությունը հետևյալն է: Դիցուք α-ն և β-ն համապատասխան ապրանքների գներն են (α_i-ն i-րդ տեսակի ծախսված ապրանքի միավորի գինն է, β_j-ն j–րդ տեսակի արտադրանքի միավորի գինն է): Այս դեպքում $F_{\alpha,\beta}(x,y)$-ը կհանդիսանա (α,β) գներով (x,y) արտադրական պրոցեսի իրականացումից ստացված շահույթը: Այժմ նախորդ պնդումները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

- *Ցանկացած արտադրական պրոցես, որը մաքսիմալացնում է շահույթը որևէ գների դեպքում, Պարետո-օպտիմալ է:*
- *Յուրաքանչյուր Պարետո-օպտիմալ արտադրական պրոցես մաքսիմալացնում է շահույթը գների որևէ վեկտորի դեպքում:*

5.3. ԳՈՐԾԱՐՔՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐ

Այժմ դիտարկենք վեկտորական օպտիմալացման խնդիրներին ձևային առումով շատ նման, սակայն իմաստային առումով տարբերվող խնդիր:

Դիցուք նորից ունենք որոշումների կամայական X բազմություն, սակայն որոշումն ընդունում է ոչ թե մեկ անձ, այլ n անձանց մի խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի իր սեփական $u_i(x), i=1,2,...,n$ օգտավետության ֆունկցիան: Միմյանց հետ գործարքի մեջ մտնելով, նրանք համատեղ ընտրում են մեկ կետ X բազմությունից: Եթե գործարքը տեղի չի ունենում, այսինքն չեն կարողանում միմյանց հետ գալ համաձայնության, ապա i-րդ մասնակիցը ստանում է ֆիքսած $u_i^*, (i=1,2,...,n)$ օգտավետություն: Այդ $u^*=\left(u_1^*, u_2^*,...,u_n^*\right)$ կետն անվանում են *ստատուս քվո* կետ: Այսպիսով, գործարքի մոդելը ստանում է հետևյալ տեսքը՝

$$\Gamma=\left\langle X; u_1(x), u_2(x),...,u_n(x); u_1^*, u_2^*,...,u_n^*\right\rangle=\left\langle X, u(x), u^*\right\rangle:$$

Բնական է, որ Γ գործարքի յուրաքանչյուր մասնակից ձգտում է ստանալ մաքսիմալ օգտավետություն և գործարքի լուծում ասելով կհասկանանք ոչ թե ընտրած որոշումը, այլ օգտավետությունները, որոնք ստանում են մասնակիցները այդ որոշման դեպքում: Γ գործարքի լուծումը նշանակենք $u^0(\Gamma)=(u_1^0, u_2^0,...,u_n^0)$: Քանի որ գործարքի խնդիրը էապես տարբերվում է վեկտորական օպտիմալացման խնդիրներից, ապա այս խնդրի համար հարկավոր է սահմանել նոր օպտիմալության սկզբունք: Հիմնական դիտարկվող սկզբունքը անվանում են Նեշի (Nash) սկզբունք: Այն սահմանվում է աքսիոմատիկորեն: Բերենք Նեշի աքսիոմների համակարգը:

Ա.1: Դիցուք $u^0(\Gamma)=(u_1^0, u_2^0,...,u_n^0)$-ն $\Gamma=\left\langle X, u(x), u^*\right\rangle$ գործարքի լուծումն է: Այդ դեպքում լուծումը. ա) հասանելի է, այսինքն գոյություն ունի $x^0 \in X$ այնպես, որ $u^0=u(x^0)$, բ) լուծումը անհատապես ռացիոնալ է՝ $u^0 \geq u^*$ և գ) լուծումը Պարետո օպտիմալ է՝ գոյություն չունի $x \in X$, որ $u_i(x) \geq u_i(x^0), i=1,2,...,n$ և այս անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է:

Ա.2: Դիցուք $L=\left(L_1,L_2,...,L_n\right)$-ը $u_i(x),i=1,2,...,n$ ֆունկցիաների դրական գծային ձևափոխությունն է: Այդ դեպքում $\left\langle X,Lu,Lu^*\right\rangle$ գործարքի լուծումը Lu^0 -ն է:

Ա.3: Դիցուք $X^0\subseteq X$ և $\Gamma=\left\langle X,u(x),u^*\right\rangle$ գործարքի լուծումը $u^0=u(x^0)$ -ն է: Եթե $x^0\in X^0$, ապա $\Gamma^0=\left\langle X^0,u(x),u^*\right\rangle$ գործարքի լուծումը նույնպես $u^0=u(x^0)$ -ն է:

Ա.4: Եթե խնդիրը սիմետրիկ է, այսինքն $u_i^*=u_j^*$, ($i, j=1,2,...,n$) և ցանկացած $x\in X$ համար և $\{1,2,...,n\}$ բազմության ցանկացած π տեղափոխության համար գոյություն ունի $y\in X$ այնպես, որ $u_i(x)=u_{\pi(i)}(y)$, ապա $u_i^0=u_j^0$, ($i, j=1,2,...,n$):

Այս համակարգում առաջին աքսիոմը պահանջում է, որ գործարքի լուծումը լինի Պարետո-օպտիմալ, այսինքն բավարարի ամենաթույլ օպտիմալության սկզբունքին:

Երկրորդ աքսիոմը պահանջում է, որ լուծումը անկախ լինի չափման միավորից: Այդ պահանջը բնական է, հաշվի առնելով, որ ֆունկցիաներն օգտավետության ֆունկցիաներ են:

Երրորդ աքսիոմը կոչվում է չկապված այլընտրանքների անկախություն: Այն կարելի է դիտարկել որպես ֆոնկցիայի էքստրեմումի հատկություններից մեկը:

Չորրորդ աքսիոմը կոչվում է արդարության աքսիոմ՝ եթե բոլոր խաղացողները գտնվում են նույն պայմաններում, ապա պետք է ստանան հավասար:

Պարզվում է, որ այս աքսիոմները բավարար են լուծումը միարժեքորեն որոշելու համար: Նշանակենք՝

$$U=\left\{u\in R^n:u=u(x),x\in X\right\}:$$

Քանի որ գործարքի մասնակիցներին հետաքրքրում է իրենց ստացվելիք օգտավետությունները և ոչ թե կոնկրետ որոշումն, ինչպես նաև հաշվի առնելով Ա.1 աքսիոմի առաջին պահանջը, ապա $\Gamma=\left\langle X,u(x),u^{*}\right\rangle$ գործարքը կարելի է դիտարկել $\Gamma=\left\langle U,u^{*}\right\rangle$ տեսքով:

Թեորեմ 5.3.1: Դիցուք U բազմությունը փակ, սահմանափակ, ուռուցիկ բազմություն է: Այդ դեպքում գոյություն ունի **Ա.1-Ա.4** աքսիոմներին բավարարող միակ $u^{0}\in U$ լուծում:

__*Ապացույց:*__ Այստեղ կբերենք ապացուցման միայն ընդհանուր սխեման: Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ գոյություն ունի այնպիսի $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in U$, որ $u_i>u_i^{*}$ բոլոր $i=1,2,...,n$ համար:

Կատարենք U բազմության դրական գծային ձևափոխություն, որի դեպքում u^{*} կետը կանցնի կոորդինատների սկզբնակետ՝ $u'=u-u^{*}$ U բազմության ձևափոխված պատկերը նշանակենք U'-ով: Պարզ է, որ U' բազմությունը նորից փակ, սահմանափակ, ուռուցիկ բազմություն է: Հետևաբար, գոյություն ունի $\overline{u}'\in U'$, այնպես, որ՝

$$\prod_{i=1}^{n}\overline{u}_i'=\max_{\substack{u'\in U',\\ u'>0}}\prod_{i=1}^{n}u_i' : \qquad (5.3.1)$$

Այժմ նորից կատարենք U' բազմության դրական գծային ձևափոխություն, որի դեպքում $\overline{u}'$ կետը կանցնի $(1,1,...,1)$ կետի՝ $u_i''=\dfrac{u_i'}{\overline{u}_i'}$: Նոր ստացված բազմությունը նշանակենք U''-ով:

Նշանակենք՝

$$\overline{U}=\left\{u=(u_1u_2,...,u_n)\in R^{n}:\prod_{i=1}^{n}u_i=1\right\}$$

և դիտարկենք $\left\langle\overline{U},0\right\rangle$ գործարքը: $\overline{U}$ բազմությունը սիմետրիկ բազմություն է և ակնհայտորեն բավարարում է Ա.4 աքսիոմի պայմաններին: Հետևաբար, $\left\langle\overline{U},0\right\rangle$ գործարքի լուծման մեջ բոլոր բաղադրիչները պետք է լինեն հավասար: $\overline{U}$ բազմության միակ հավասար բաղադրիչներով կետը, որը բավարարում է Ա.1 աքսիոմի Պարետո-օպտիմալության պայմանին՝ (1,1,...,1) կետն է: Մյուս կողմից, (5.3.1) պայմանից հետևում է, որ ցանկացած $u \in U''$ համար՝ $\prod_{i=1}^{n} u_i \leq 1$, այսինքն՝ $U'' \subseteq \bar{U}$, և, բացի դրանից, $(1,1,...,1) \in U''$ Այսպիսով, ըստ **Ա.3** աքսիոմի, (1,1,...,1) կետը լուծում է նաև $\langle U'', 0 \rangle$ գործարքի համար:

Քանի որ $\langle U'', 0 \rangle$ գործարքը ստացվել է $\langle U', 0 \rangle$ գործարքից դրական գծային ձևափոխության միջոցով, ապա $\langle U', 0 \rangle$ գործարքի լուծումը, ըստ **Ա.2** աքսիոմի, պետք է լինի (1,1,...,1) կետի նախապատկերը, այսինքն՝ $\bar{u}'$ -ը: **Ա.2** աքսիոմից օգտվելով, ևս մեկ քայլ ետ կարելի է կատարել և վերջնականապես կստանանք, որ $\langle U, u^* \rangle$ գործարքի լուծումը $\bar{u}' - u^*$ կետն է: Այսպիսով, **Ա.1-Ա.4** աքսիոմներին բավարարող լուծումը գտնելու համար հարկավոր է հաշվել

$$\max_{\substack{u \in U, \\ u > u^*}} \prod_{i=1}^{n} (u_i - u_i^*):$$

Վերադառնալով նախկին նշանակումներին, կստանանք, որ $\Gamma = \langle X, u(x), u^* \rangle$ գործարքի լուծումը $u^0 = u(x^0) \in U$ -է, որը բավարարում է հետևյալ առնչությանը՝

$$\prod_{i=1}^{n} \left(u(x^0) - u^* \right) = \max_{x \in X, u(x) > u^*} \prod_{i=1}^{n} \left(u(x) - u^* \right):$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ գոյություն չունի այնպիսի $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U$, որ $u_i > u_i^*$ բոլոր $i = 1, 2, ..., n$ համար: Ա.1 աքսիոմից հետևում է, որ բավական է դիտարկել միայն կետերը: Դիցուք գոյություն ունեն երկու կետեր ՝ $u', u'' \in U$, $u_i' > u_i^*$, $u_j' = u_i^*$; $u_j'' > u_j^*$, $u_i'' = u_j^*$, $i \neq j$: Այս դեպքում, քանի որ U -ն ենթադրվել է ուռուցիկ, ապա $u''' = \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u'' \in U$ Սակայն $u_i''' > u_i^*, u_j''' > u_j^*$՝ ստացանք հակասություն: Հետևաբար, ինդեքսների $I = \{1, 2, ..., n\}$ բազմությունը կարելի է տրոհել երկու՝ I_1 և I_2 մասերի՝

$$I_1 = \{i \in I : u_i(x) \le u_i^*, x \in X\},, \; I_2 = I - I_1 :$$

Եվ ընդհանուր դեպքում, $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0) \in U$ լուծումը կստանանք հետևյալ կերպ: u^0 վեկտորի $i \in I_2$ բաղադրիչները ստացվում են

$$\prod_{i \in I_2} \left(u_i(x^0) - u_i^*\right) = \max_{x \in X, u(x) > u^*} \prod_{i \in I_2} \left(u_i(x) - u_i^*\right)$$

առնչությունից, իսկ $i \in I_1$ համար՝ $u_i^0 = u_i^*$:

Օրինակ 5.3.1: Դիցուք ապահովագրական A ընկերությունն ունի ռիսկերի պորտֆել, որի դեպքում հատուցումների ξ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է 5 պայմանական միավորի, իսկ դիսպերսիան հավասար է 4 պայմանական միավորի: Ապահովագրական B ընկերությունը ռիսկերի պորտֆելի հատուցումների η պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է 10-ի, իսկ դիսպերսիան՝ 8-ի: Այս երկու ապահովագրական ընկերությունները որոշում են մասամբ փոխանակել իրենց պորտֆելների պարունակությունը ռիսկերը նվազեցնելու նպատակով: Դիցուք A ընկերության պորտֆելի հատուցումների սկզբնական արժեքը ξ_1 է, փոխանակումից հետո՝ ξ_2: Համապատասխանաբար, B ընկերության համար՝ η_1 և η_2: Եթե A ընկերությունը իր պորտֆելի α մասը փոխանակում է B ընկերության պորտֆելի β մասի հետ, ապա կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$E\xi_2=(1-\alpha)E\xi_1+\beta E\eta_1,$$
$$E\eta_2=\alpha E\xi_1+(1-\beta)E\eta_1$$

Այստեղից երևում է, որ փոխանակումից հետո հատուցումների մաթեմատիկական սպասումների գումարը չի փոխվում, հետևաբար փոխադարձ հաշվարկները կարող են կարգավորվել դրամական փոխհատուցմամբ։ Դիտարկենք ռիսկերի հիմնական բնութագրիչը՝ դիսպերսիան։ Ենթադրելով, որ պատահական ξ և η մեծությունները անկախ են, կստանանք՝

$$D\xi_2=(1-\alpha)^2 D\xi_1+\beta^2 D\eta_1=u_1(\alpha,\beta),$$
$$D\eta_2=\alpha^2 D\xi_1+(1-\beta)^2 D\eta_1=u_2(\alpha,\beta):$$

Հաշվի առնելով, որ եթե գործարքը չկայանա, ապա ընկերությունների դիսպերսիաները կմնան սկզբնական դիսպերսիաներ՝ $D\xi_1=4$ և $D\eta_1=8$, ուստի այս գործարքի մոդելը կարելի է ներկայացնել $\langle X;u_1(\alpha,\beta),u_2(\alpha,\beta);4,8\rangle$ մոդելի տեսքով, որտեղ $X=[0,1]\times[0,1]$։ Կազմենք գործարքի Նեշի ֆունկցիան՝

$$F(\alpha,\beta)=[4-u_1(\alpha,\beta)][8-u_2(\alpha,\beta)]=\left[4-4(1-\alpha)^2-8\beta^2\right]\left[8-4\alpha^2-8(1-\beta)^2\right]:$$

Մաքսիմալացնելով այս ֆունկցիան $\alpha+\beta=1$ պայմանի դեպքում կստանանք հետևյալ արդյունքը՝

$$\alpha^0=0,613;$$
$$\beta^0=0,387;$$
$$u_1(\alpha^0,\beta^0)=1,797;$$
$$u_2(\alpha^0,\beta^0)=4,509:$$

Այսպիսով, փոխանակման դեպքում ընկերությունների ռիսկերը (դիսպերսիաները) նվազում են համապատասխանաբար 2,203-ով և 3,491-ով։

ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

6.1. ԱՆԴԱՇԻՆՔ ԽԱՂԵՐ

Ինչպես նշվել էր նախաբանում, խաղերի տեսությունը կոնֆլիկտի կամ անորոշության պայմաններում որոշումներ ընդունելու մաթեմատիկական տեսություն է: Կոնֆլիկտային իրավիճակների մաթեմատիկական մոդելները կառուցելիս առաջին հերթին հարկավոր է նշել կոնֆլիկտի մասնակիցներին, մասնակիցների հնարավորությունները, ինչպես նաև նրանց նախապատվությունները: Դիցուք կոնֆլիկտի մասնակիցները n-են, որոնցից յուրաքանչյուր i-րդն ունի իր բոլոր հնարավոր որոշումների S_i բազմությունը, իսկ որոշումների արդյունքը գնահատվում է օգտավետության H_i ֆունկցիայով: Այդպիսով կոնֆլիկտի պայմաններում որոշումներ ընդունելու մոդելը կարելի է ներկայացնել

$$G=\left\langle I,\{S_i\}_{i\in I},\{H_i\}_{i\in I}\right\rangle \tag{6.1.1}$$

համակարգի տեսքով:

Այս համակարգն անվանում են *խաղ*, կոնֆլիկտի մասնակիցներին՝ *խաղացողներ*: $I=\{1,2,\dots,n\}$ բազմությունը խաղացողների համարների բազմությունն է, S_i-ն անվանում են i-րդ խաղացողի *ստրատեգիաների* բազմություն: Կախված խնդրի դրվածքից այն կարող է ունենալ տարբեր կառուցվածքներ,: H_i-ն n փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիա է, որն անվանում են i-րդ խաղացողի *շահույթի ֆունկցիա*:

Այդպես սահմանված խաղը խաղացվում է հետևյալ կերպ: Խաղացողներից յուրաքանչյուրը ընտրում է որևէ կետ իր ստրատեգիաների բազմությունից, որի արդյունքում ստացված $s=(s_1,s_2,\dots,s_n), s_i\in S_i, i=1,2,\dots,n$ վեկտորն անվանում են *իրավիճակ* խաղում: Այս իրավիճակում i-րդ խաղացողը ստանում է $H_i(s)$ շահույթ: Ընտրություն կատարելիս յուրաքանչյուր խաղացող ձգտում է առավելագույն շահույթի: Խաղերը միմիանցից կարող են տարբերվել ինչպես հակառակորդների քայլերի վերաբերյալ տեղեկատվությամբ, այնպես էլ խաղացողների միջև պայմանավորվածությունների առկայությամբ:

Սահմանում 6.1.1: (6.1.1) համակարգով որոշվող խաղն անվանում են *նորմալ տեսքով անդաշինք խաղ,* կամ պարզապես *անդաշինք խաղ,* եթե խաղացողներն իրենց ընտրությունները կատարում են միմյանցից անկախ, այսինքն չստանալով ոչ մի տեղեկատվություն հակառակորդների քայլերի վերաբերյալ, և իրավունք չունեն պայմանավորվել համատեղ գործողությունների մասին:

Ինչպես երևում է խաղի սահմանումից, խաղացողի շահույթը կախված է ոչ միայն իր ընտրած ստրատեգիայից, այլ նաև մյուս բոլոր խաղացողների ընտրություններից, (որոնք անդաշինք խաղերում խաղացողին հայտնի չեն): Այսինքն, ընտրելով n փոփոխականի ֆունկցիայի միայն մեկ փոփոխականի արժեքը, խաղացողը պետք է ձգտի ստանալու իր շահույթի ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը: Այսպիսով, առաջին հարցը, որն առաջանում է անդաշինք խաղերը դիտարկելիս, օպտիմալության սկզբունքի հարցն է: Հիմնական օպտիմալության սկզբունքը, որը կիրառվում է անդաշինք խաղերում՝ Նեշի հավասարակշռության սկզբունքն է: Այն վերաբերում է ոչ թե ստրատեգիաների այլ իրավիճակների օպտիմալությանը:

Սահմանում 6.1.2. $s^0=(s_1^0,s_2^0,\dots,s_i^0,\dots,s_n^0)$ իրավիճակն անվանոմ են *ընդունելի* i-րդ խաղացողի համար, եթե բոլոր $s_i\in S_i$ ստրատեգիաների համար՝

$$H_i\left(s_1^0,s_2^0,\dots,s_i^0,\dots,s_n^0\right)\geq H_i\left(s_1^0,s_2^0,\dots,s_i,\dots,s_n^0\right) \tag{6.1.2}$$

Սահմանում 6.1.3: $s^0=(s_1^0,s_2^0,\dots,s_i^0,\dots,s_n^0)$ իրավիճակն անվանում են ըստ Նեշի հավասարակշռության իրավիճակ, եթե այն ընդունելի է բոլոր խաղացողների համար միաժամանակ, այսինքն (6.1.2) անհավասարությունները բավարարվում են նաև բոլոր $i\in I$ համար:

Ինչպես երևում է սահմանումից, հավասարակշռության իրավիճակը խախտելը ձեռնատու չէ ոչ մի խաղացողի համար: Հետևյալ սահմանումը և հաջորդող թեորեմը թույլ են տալիս ստուգել հավասարակշռության սկզբունքի կոռեկտությունը, ինչպես նաև տարանջատել խաղի էական կողմերը ոչ էականներից:

Սահմանում 6.1.4: Երկու

$$G = \left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} \right\rangle,$$

$$G' = \left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i'\}_{i\in I} \right\rangle,$$

խաղերն անվանում են *ստրատեգիապես համարժեք*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $a > 0$ և $b_i, i \in I$ իրական թվեր, որ

$$H_i'(s) = aH_i(s) + b_i,\ \ i \in I \tag{6.1.3}$$

Թեորեմ *6.1.1:* Ստրատեգիապես համարժեք խաղերում հավասարակշռության իրավիճակների բազմությունները համընկնում են:

Թեորեմի ապացույցն ակներև է. Բավական է (6.1.3) արտահայտությունները տեղադրել (6.1.2) անհավասարությունների մեջ և կրճատել հաստատունները:

Սահմանում 6.1.5. Անդաշինք խաղն անվանում են *հաստատուն գումարով խաղ*, եթե՝

$$\sum_{i\in I} H_i\left(s\right) = const:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ հաստատուն գումարով ցանկացած խաղ ստրատեգիապես համարժեք է զրո գումարով խաղի:

Հավասարակշռության իրավիճակի գոյության և միակության հարցերը կախված են կոնկրետ խաղերի առանձնահատկություններից: Բերենք երեք տեսական օրինակներ, որտեղ արտացոլվում են հավասարակշռության իրավիճակի սահմանման ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական կողմերը:

Օրինակ 6.1.1: /Հանցագործի երկընտրանք:/ Ծանր հանցագործության մեջ մեղադրվող երկու հանցագործներ (առաջին և երկրորդ խաղացողներ) գտնվում են նախնական կալանքի միմիանցից մեկուսացված բանտախցերում: Չունենալով ուղիղ ապացույցներ, դատաքննությունը կարող է հիմնվել միայն հանցագործների խոստովանական ցուցմունքների վրա: Հանցագործներին հետևյալ պայմաններն են առաջարկվում: Եթե երկու հանցագործները խոստովանեն, որ կատարել են այդ հանցագործությունը, ապա կազատազրկվեն յուրաքանչյուրը 5 տարով: Այն դեպքում, երբ հանցագործներից միայն մեկը խոստովանի, ապա խոստովանողին ազատ են արձակում, իսկ մյուսին դատապարտում են առավելագույն ժամկետի՝ 10 տարվա ազատազրկման: Եվ եթե երկուսն էլ պնդում են իրենց անմեղությունը, ապա մեղադրողը խոստանում է ներկայացնել մեղադրանք որևէ մանր հանցագործության մեջ և դատապարտել մեկական տարի յուրաքանչյուրին:

Կառուցենք այս խաղի մաթեմատիկական մոդելը: Խաղացողներն երկուսն են՝ երկու հանցագործները, հետևաբար, $I=\{1,2\}$: Խաղացողների ստրատեգիաների բազմությունները երկէլեմենտ են՝ $S_1=S_2=\{0,1\}$, որտեղ 1-ը համապատասխանում է խոստովանելու ստրատեգիային, 0-ն՝ ժխտելու: Խաղացողների շահույթի ֆունկցիաները կունենան հետևյալ տեսքը

$$H_1(0,0)=-1,\quad H_2(0,0)=-1,$$
$$H_1(0,1)=-10,\quad H_2(0,1)=0,$$
$$H_1(1,0)=0,\quad H_2(1,0)=-10,$$
$$H_1(1,1)=-5,\quad H_2(1,1)=-5:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղում հավասարակշռության իրավիճակ գոյություն ունի և այն միակն է՝ դա (1,1) իրավիճակն է, որի դեպքում հանցագործները երկուսն էլ խոստովանում են: (0,0) իրավիճակը, որը թվում է, թե լավագույնն է հանցագործների համար, Պարետո-օպտիմալ է, սակայն կայուն չէ՝ այդ իրավիճակից շեղվելը ձեռնտու է հանցագործներից յուրաքանչյուրի համար:

Օրինակ 6.1.2: Ընտանեկան վեճ: Երիտասարդ զույգը որոշում է երեկոն անց կացնել միասին: Տվյալ պահին յուրաքանչյուրը կարող է ընտրել երկու հնարավոր վայրերից մեկը՝ գնալ թատրոն կամ ֆուտբոլի մարզադաշտ: Եթե երկուսով ընտրում են թատրոնը, ապա աղջկա (առաջին խաղացող) օգտավետությունը համարենք 5 միավոր, իսկ տղային (երկրորդ խաղացող)՝ 2 միավոր: Ֆուտբոլը ընտրելու դեպքում աղջկա օգտավետությունը վերցնենք 2 միավոր, տղայինը՝ 5 միավոր: Այն դեպքում, երբ ընտրությունները տարբեր են, օգտավետությունները համարենք հավասար 0-ի: Եթե թատրոն ընտրելու ստրատեգիան նշանակենք 0-ով, իսկ ֆուտբոլ ընտրելու ստրատեգիան 1-ով, ապա մոդելը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $I=\{1,2\}$, $S_1=S_2=\{0,1\}$,

$$H_1(0,0)=5, \quad H_2(0,0)=2,$$
$$H_1(0,1)=0, \quad H_2(0,1)=0,$$
$$H_1(1,0)=0, \quad H_2(1,0)=0,$$
$$H_1(1,1)=2, \quad H_2(1,1)=5:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ այս խաղում ունենք երկու հավասարակշռության իրավիճակ՝ (0,0) և (1,1), որոնք, ի դեպ, նաև Պարետո-օպտիմալ են:

Օրինակ 6.1.3: (Գիր, դուշ): Առաջին խաղացողը պահում է մետաղադրամը: Երկրորդ խաղացողը պետք է գուշակի, թե մետաղադրամի որ կողմն է պահած: Ճիշտ գուշակելու դեպքում ստանում է մեկ միավոր, սխալի դեպքում՝ կորցնում է մեկ միավոր: Եթե մետաղադրամի կողմերը համարակալենք, ապա կստանանք հետևյալ խաղը՝ $I=\{1,2\}$, $S_1=S_2=\{0,1\}$,

$$H_1(0,0)=-1, \quad H_2(0,0)=1,$$
$$H_1(0,1)=1, \quad H_2(0,1)=-1,$$
$$H_1(1,0)=1, \quad H_2(1,0)=-1,$$
$$H_1(1,1)=-1, \quad H_2(1,1)=1:$$

Այս խաղում գոյություն չունեն հավասարակշռության իրավիճակներ, ինչպես նաև Պարետո-օպտիմալ ստրատեգիաներ:

Այսպիսով, դիտարկված երեք պարզագույն օրինակները ցույց են տալիս, որ անդաշինք խաղերում կարող են գոյություն չունենալ հավասարակշռության իրավիճակներ, իսկ գոյության դեպքում այն կարող է միակը չլինել: Ընդ որում հավասարակշռությունը և Պարետո-օպտիմալությունը չեն առնչվում այս խաղերում:

6.2. ՀԱԿԱՄԱՐՏ ԽԱՂԵՐ

Սահմանում 6.2.1: Զրո գումարով երկու խաղացողի խաղն անվանում են *հակամարտ խաղ:*

Հակամարտ խաղերի համար կարելի է որոշ չափով պարզեցնել նախորդ կետում բերված սահմանումները: Իրոք, քանի որ հակամարտ խաղերում միշտ երկու խաղացող են, ապա (6.1.1) խաղի սահմանման մեջ կարելի է չնշել խաղացողների I բազմությունը: Այդպիսով, մոդելի սահմանման մեջ կմնան երկու բազմություններ և շահույթի երկու՝ H_1 և H_2 ֆունկցիաներ: Սակայն, քանի որ զրո գումարով խաղի սահմանումից հետևում է, որ $H_2 = -H_1$, ապա մոդելում կարելի է նշել միայն առաջին խաղացողի շահույթի ֆունկցիան: Վերջնականապես հակամարտ խաղի մոդելը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$G = \langle X, Y, H \rangle : \tag{6.2.1}$$

Այստեղ X-ը առաջին, իսկ Y-ը՝ երկրորդ խաղացողի ստրատեգիաների բազմությունն է, H-ը առաջին խաղացողի շահույթի ֆունկցիան: Խաղացողները միմիանցից անկախ ընտրում են համապատասխանաբար $x \in X$ և $y \in Y$ Արդյունքում երկրորդ խաղացողը վճարում է առաջինին $H(x, y)$ շահույթ: Դրանով խաղն ավարտվում է:

Հակամարտ խաղերում հավասարակշռության սահմանումը նույնպես պարզեցվում է: Իրոք, հավասարակշռության իրավիճակի (6.2.2) սահմանումից հետևում է, որ (x^0, y^0) կետը հավասարակշռության իրավիճակ է, եթե

$$H_1(x^0, y^0) \ge H_1(x, y^0), x \in X,$$
$$H_2(x^0, y^0) \ge H_2(x^0, y), y \in Y :$$

Հաշվի առնելով, որ $H_2(x, y) = -H_1(x, y)$ և միավորելով այս անհավասարությունները, կստանանք հավասարակշռության իրավիճակի սահմանում հակամարտ խաղերում:

Սահմանում 6.2.2։ $\left(x^0, y^0\right)$ իրավիճակն անվանում են *հավասարակշռության իրավիճակ* հակամարտ խաղերում, եթե բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$-ի համար այն բավարարում է հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը՝

$$H\left(x, y^0\right) \leq H\left(x^0, y^0\right) \leq H\left(x^0, y\right): \tag{6.2.2}$$

Այժմ դիտարկենք օպտիմալության մեկ այլ սկզբունք,: Դիցուք առաջին խաղացողն ընտրել է որևէ $x \in X$ Եթե երկրորդ խաղացողին որևէ եղանակով հայտնի դարձավ այդ կետը, ապա ակնհայտ է, որ նա կընտրի $y \in Arg \min\limits_{y \in Y} H\left(x, y\right)$ (այստեղ ենթադրվում է, որ $H\left(x, y\right)$ ֆունկցիայի բոլոր էքստրեմումները հասանելի են)։ Այսպիսով, առաջին խաղացողն, ընտրելով որևէ $x \in X$, չի կարող ապահովել իր շահույթը ավելին, քան $\min\limits_{y \in Y} H\left(x, y\right)$։ Ընտրելով $x' \in Arg \max\limits_{x \in X}[\min\limits_{y \in Y} H\left(x, y\right)]$ առաջին խաղացողի ապահոված շահույթը դառնում է նվազագույնը $\max\limits_{x \in X}[\min\limits_{y \in Y} H\left(x, y\right)] = v_1$:

Մյուս կողմից, ընտրելով որևէ $y \in Y$, երկրորդ խաղացողը չի վճարի առաջինին ավելին, քան $\max\limits_{x \in X} H\left(x, y\right)$, հետևաբար, ընտրելով $y' \in Arg \min\limits_{y \in Y}[\max\limits_{x \in X} H\left(x, y\right)]$ նա կվճարի առաջինին առավելագույնը $\min\limits_{y \in Y}[\max\limits_{x \in X} H\left(x, y\right)] = v_2$: Այն դեպքում, երբ $v_1 = v_2 = v$, առաջին խաղացողն ունի ստրատեգիա, որի դեպքում կստանա նվազագույնը v շահույթ, իսկ երկրորդ խաղացողն ունի ստրատեգիա, որի դեպքում չի վճարի առաջին խաղացողին v-ից ավել։ Եվ այս դեպքում (երբ $v_1 = v_2 = v$) x' և y' ստրատեգիաները կարելի է համարել օպտիմալ։ Այս սկզբունքն անվանում են *մաքսիմալ ապահոված շահույթի սկզբունք*։

Պարզվում է, որ հակամարտ խաղերում այս երկու օպտիմալության սկզբունքները՝ հավասարակշռության սկզբունքը և մաքսիմալ ապահոված շահույթի սկզբունքը համարժեք են: Ապացուցենք այդ փաստը: Նախ մեզ անհրաժեշտ կլինի հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմ 6.2.1: Երկու փոփոխականի ցանկացած $H(x,y)$ ֆունկցիայի համար

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y):$$

Ապացույց: Ցանկացած ֆիքսած $y\in Y$ և բոլոր $x\in X$ համար

$$H(x,y) \le \sup_{x\in X} H(x,y):$$

Այժմ ֆիքսենք որևէ $x\in X$ Քանի որ նախորդ անհավասարությունը բավարարվում է ցանկացած ֆիքսած $y\in Y$ համար, ապա

$$\inf_{y\in Y} H(x,y) \le \inf_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} H(x,y)\right):$$

Այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած ֆիքսած $x\in X$ դեպքում, հետևաբար այն ճիշտ է նաև sup-ի համար ըստ $x\in X$

$$\sup_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} H(x,y)\right) \le \inf_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} H(x,y)\right): \qquad (6.2.3)$$

Թեորեմ 6.2.2: *Որպեսզի հակամարտ $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում գոյություն ունենա հավասարակշռության իրավիճակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան և հավասար լինեն $\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y)$ և $\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y)$ կրկնակի էքստրեմումները:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, այսինքն (x^0,y^0) իրավիճակ, որը բավարարում է

$$H(x,y^0) \le H(x^0,y^0) \le H(x^0,y) \qquad (6.2.4)$$

անհավասարությանը բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար: Քանի որ այս անհավասարության աջ մասը ճիշտ է բոլոր $y\in Y$ համար, ապա՝

$$H\left(x^0, y^0\right)\le \inf_{y\in Y} H\left(x^0, y\right):$$

Եվ, քանի որ այն ճիշտ է x^0 կետում, ապա այն առավել ևս ճիշտ է նաև ճշգրիտ վերին եզրի համար, այսինքն՝

$$H\left(x^0, y^0\right)\le \inf_{y\in Y} H\left(x^0, y\right)\le \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right): \qquad (6.2.5)$$

Նույն եղանակով 6.2.4 անհավասարության ձախ մասից կստանանք՝

$$H\left(x^0, y^0\right)\ge \sup_{x\in X} H\left(x, y^0\right)\ge \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H\left(x, y\right): \qquad (6.2.6)$$

Միացնելով (6.2.5) և (6.2.6) անհավասարությունները, ստանում ենք՝

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right)\ge \inf_{y\in Y} H\left(x^0, y\right)\ge H\left(x^0, y^0\right)\ge$$
$$\ge \sup_{x\in X} H\left(x, y^0\right)\ge \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H\left(x, y\right):$$

Սակայն 6.2.1 լեմից հետևում է, որ երկու փոփոխականի ցանկացած ֆունկցիայի համար տեղի ունի հակառակ անհավասարությունը: Այսպիսով, եթե խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, ապա

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H\left(x, y\right)=H\left(x^0, y^0\right): \qquad (6.2.7)$$

Բացի այդ,

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right)=\inf_{y\in Y} H\left(x^0, y\right), \sup_{x\in X} H\left(x, y^0\right)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} H\left(x, y\right) \qquad (6.2.8)$$

հետևաբար, կրկնակի էքստրեմումների արտաքին էքստրեմումները հասանելի են (x^0 և y^0 կետերում) և վերջնականապես ստանում ենք, որ

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right)=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H\left(x, y\right):$$

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք, որ $\max\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} H(x,y)$-ը և $\min\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X} H(x,y)$-ը գոյություն ունեն և հավասար են: Արտաքին էքստրեմումների գոյությունից հետևում է այնպիսի $x'\in X$ և $y'\in Y$ կետերի գոյութունը, որոնց համար՝

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y)=\inf_{y\in Y} H(x',y),$$
$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y)=\sup_{x\in X} H(x,y'):$$

Ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերի սահմանումից հետևում է, որ բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար

$$\begin{aligned}&\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y)=\inf_{y\in Y} H(x',y)\le H(x',y),\\ &\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y)=\sup_{x\in X} H(x,y')\ge H(x,y'):\end{aligned}\qquad(6.2.9)$$

Քանի որ այս անհավասարությունները բավարարվում են բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար, ապա բավարարվում են նաև $x'\in X$ և $y'\in Y$ համար: Տեղադրելով այս կետերը 6.2.9 անհավասարությունների մեջ և հաշվի առնելով, որ ըստ թեորեմի պայմանի կրկնակի էքստրեմումները հավասար են, կստանանք

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} H(x,y)=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} H(x,y)=H(x',y'):\qquad(6.2.10)$$

Տեղադրելով կրկնակի էքստրեմումների $H(x',y')$ արժեքը (6.2.9) անհավասարությունների մեջ, ստանում ենք, որ

$$H(x,y')\le H(x',y')\le H(x',y)$$

բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար: Այսինքն, (x',y') իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է G խաղում:

Հետևանք: *Դիցուք* $\left(x^0, y^0\right)$*-ը* *և* $\left(x', y'\right)$*-ը* *երկու հավասարակշռության իրավիճակներ են* $G=\langle X, Y, H\rangle$ *խաղում: Այդ դեպքում* $\left(x^0, y'\right)$ *և* $\left(x', y^0\right)$ *իրավիճակները նույնպես հավասարակշռության իրավիճակներ են և*

$$H\left(x^0, y^0\right)=H\left(x', y'\right)=H\left(x^0, y'\right)=H\left(x', y^0\right):$$

Այս պնդումն արդեն ստացվել է թեորեմի ապացուցման ընթացքում: Իրոք,6.2.8 հավասարումներից հետևում է, որ

$$x^0 \in Arg \max_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right)\right),$$

$$x' \in Arg \max_{x\in X}\left(\inf_{y\in Y} H\left(x, y\right)\right),$$

$$y^0 \in Arg \min_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} H\left(x, y\right)\right),$$

$$y' \in Arg \min_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} H\left(x, y\right)\right):$$

Իսկ (6.2.10)-ից հետևում է, որ շահույթի ֆունկցիայի արժեքը հավասարակշռության իրավիճակում հավասար է կրկնակի էքստրեմումների ընդհանուր արժեքին, հետևաբար, հավասարակշռության բոլոր իրավիճակներում շահույթի ֆունկցիայի արժեքները նույնն են:

6.3. ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

Հակամարտ խաղերում հավասարակշռության իրավիճակների գոյության խնդրի դիտարկումը սկսենք մասնավոր դեպքից՝ վերջավոր հակամարտ խաղերից: Դիցուք $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում X և Y բազմությունները վերջավոր են, այսինքն՝ $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$: Նշանակենք $H(x_i,y_j)=h_{ij}$; $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$: Այսպիսով, յուրաքանչյուր վերջավոր հակամարտ խաղին կհամապատասխանի որևէ մատրից՝ $\{h_{ij}\}_{i=1,...,m}^{j=1,...,n}$ Եվ հակառակը, դիցուք տրված է որևէ $m\times n$ չափսերի H մատրից: Այս մատրիցը կարելի է դիտարկել որպես հակամարտ խաղ, որտեղ առաջին խաղացողն ունի m հատ ստրատեգիա (տողերի թվին համապատասխան) , երկրորդ խաղացողն ունի n հատ ստրատեգիա (սյուների թվին համապատասխան), իսկ առաջին խաղացողի շահույթը (i,j) իրավիճակում հավասար է h_{ij}: Այսպիսով, յուրաքանչյուր վերջավոր հակամարտ խաղին կարելի է համապատասխանության մեջ դնել մեկ մատրից և յուրաքանչյուր մատրից կարելի է դիտարկել որպես հակամարտ խաղ: Այդ պատճառով վերջավոր հակամարտ խաղերն անվանում են *մատրիցային խաղեր:*

Մատրիցային խաղերի դեպքում նախորդ բաժնի սահմանումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝ (i^0,j^0) իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, եթե բոլոր $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$ համար՝

$$h_{ij^0}\le h_{i^0j^0}\le h_{i^0j}:$$

Հաշվի առնելով, որ վերջավոր բազմությունների վրա էքստրեմումները միշտ հասանելի են, հավասարակշռության իրավիճակի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\max_i\min_j h_{ij}=\min_j\max_i h_{ij}:$$

Սակայն, ինչպես տեսանք թիվ 6.1.3 օրինակում, նույնիսկ պարզագույն խաղերում հավասարակշռության իրավիճակ կարող է գոյություն չունենալ: Այդ օրինակում բերված խաղի մատրիցն այսպիսին է՝

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}:$$

Հեշտ է ստուգել, որ այս խաղում $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij} = -1$, $\min\limits_j \max h_{ij} = 1$, այսինքն առաջին խաղացողի մաքսիմալ ապահոված շահույթը հավասար է -1-ի, իսկ երկրորդ խաղացողինը՝ 1-ի: Ընդլայնենք խաղացողների հնարավորությունները և թույլ տանք նրանց ոչ թե ընտրեն կոնկրետ տող կամ սյուն, այլ տողերը և սյուները ընտրեն որոշակի հավանականություններով: Դիցուք առաջին խաղացողը մատրիցի առաջին տողն ընտրում է $p \in [0,1]$ հավանականությամբ, իսկ երկրորդ տողը՝ $1-p$ հավանականությամբ: Այս դեպքում, եթե երկրորդ խաղացողն ընտրի առաջին տողն, ապա առաջին խաղացողի շահույթի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է $-1 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1-2p$, երկրորդ տողն ընտրելու դեպքում շահույթի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է $1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p-1$: Բոլոր դեպքերում առաջին խաղացողի շահույթի մաթեմատիկական սպասումը կլինի ոչ պակաս, քան $\min\{1-2p, 2p-1\}$: Հեշտ է տեսնել, որ այս արտահայտությունը հասնում է առավելագույն արժեքի $p = 1/2$ դեպքում և հավասար է 0 -ի: Այսպիսով, ընտրելով տողերը հավասար հավանականություններով, առաջին խաղացողն ապահովում է իր համար 0–ից ոչ պակաս շահույթի մաթեմատիկական սպասում: Բայց ճիշտ նույն կերպ կարող է գործել նաև երկրորդ խաղացողը, որը ընտրելով մատրիցի սյուները հավասար հավանականություններով կարող է վճարել առաջինին ոչ ավել, քան 0: Այսպիսով, օգտագործելով այսպիսի հավանականային ստրատեգիաներ, խաղացողների ապահոված շահույթները հավասարվում են: Այս օրինակը որոշակի հիմքեր է տալիս հավանականային ստրատեգիաներ օգտագործելու համար:

Սահմանում 6.3.1: $m \times n$ չափսերի H մատրիցային խաղում առաջին խաղացողի *խառն ստրատեգիա* է կոչվում ոչ բացասական $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$; $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ վեկտորը: Նմանապես, երկրորդ խաղացողի *խառն ստրատեգիա* է կոչվում ոչ բացասական $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$; $q_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$; $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ վեկտորը: Այստեղ p_i-ն H մատրիցի i-րդ տող ընտրելու, իսկ q_j-ն j-րդ սյուն ընտրելու հավանականությունն է: Առաջին խաղացողի բոլոր խառն ստրատեգիաների բազմությունը նշանակենք S_m-ով, իսկ երկրորդ խաղացողի բոլոր խառն ստրատեգիաների բազմությունը՝ S_n -ով, այսինքն՝

$$S_m = \left\{ p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in R_+^m : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\},$$

$$S_n = \left\{ q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in R_+^n : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}:$$

Ի տարբերություն խառն ստրատեգիաների, խաղացողի կողմից տողի կամ սյան համարի ընտրությունը անվանում են խաղացողի *մաքուր ստրատեգիա*: Առաջին խաղացողի i-րդ մաքուր ստրատեգիան կարելի է դիտարկել որպես $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ խառն ստրատեգիա, որտեղ $p_i = 1, p_k = 0, k \neq i$: Մաքուր ստրատեգիաի այդպիսի սահմանման դեպքում S_m բազմությունը հանդիսանում է առաջին խաղացողի մաքուր ստրատեգիաների բազմության ուռուցիկ թաղանթը: Նմանապես, S_n բազմությունը հանդիսանում է երկրորդ խաղացողի մաքուր ստրատեգիաների բազմության ուռուցիկ թաղանթը:

Խաղացողի շահույթը խառն ստրատեգիաների պայմաններում սահմանվում է, որպես շահույթի մաթեմատիկական սպասում: Քանի որ հակամարտ խաղերում խաղացողները գործում են միմիանցից անկախ, ապա առաջին խաղացողի h_{ij} շահույթ ստանալու հավանականությունը (p,q) իրավիճակում հավասար է $p_i q_j$, հետևաբար, շահույթի $H(p,q)$ մաթեմատիկական սպասումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_i h_{ij} q_j :$$

Այն դեպքերում, երբ խաղացողներից մեկն ընտրում է մաքուր ստրատեգիա, այսինքն (p,j), (i,q) տեսքի իրավիճակներում խաղացողի շահույթը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$H(p,j)=\sum_{i=1}^{m}p_i h_{ij}\,,\ \ H(i,q)=\sum_{j=1}^{n}h_{ij} q_j :$$

Ակնհայտ է, որ

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{m}p_i H(i,q)=\sum_{j=1}^{n}H(p,j) q_j :$$

Սահմանում 6.3.2: Մատրիցային խաղի խառն ընդլայնում անվանում են հետևյալ հակամարտ խաղը

$$G=\left\langle S_m,S_n,H(p,q)\right\rangle:$$

Այժմ անցնենք հավասարակշռության իրավիճակների գոյության խնդրին: Նախ ապացուցենք երկու լեմ:

Լեմ 6.3.1: *(Խառն ստրատեգիաների անցման լեմ): Եթե առաջին խաղացողի որևէ $p\in S_m$ ստրատեգիայի և c իրական թվի համար*

$$H(p,j)\geq c,\ j=1,2,\dots,n\,,$$

ապա բոլոր $q\in S_n$ համար $H(p,q)\geq c$:

Եթե երկրորդ խաղացողի որևէ $q \in S_n$ ստրատեգիայի և c իրական թվի համար

$$H(i,q) \le c, i = 1,2,\dots,m,$$

ապա բոլոր $p \in S_m$ համար $H(p,q) \le c$:

Ապացույց: Բավական է ապացուցել լեմի առաջին մասը: Դիցուք $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$-ն երկրորդ խաղացողի կամայական ստրատեգիա է: Այդ դեպքում՝

$$H(p,q) = \sum_{j=1}^{n} H(p,j) q_j \ge \sum_{j=1}^{n} c q_j = c \sum_{j=1}^{n} q_j = c:$$

Լեմ 13.2: (Լեմ երկընտրանքի վերաբերյալ): $m \times n$ չափսերի ցանկացած H մատրիցի համար տեղի ունի երկու այլընտրանքներից մեկը.

1. *Գոյություն ունի այնպիսի $p \in S_m$ վեկտոր, որ $H(p,j) \ge 0$ բոլոր $j = 1,2,\dots,n$ համար:*

2. *Գոյություն ունի այնպիսի $q \in S_n$ վեկտոր, որ $H(i,q) \le 0$ բոլոր $i = 1,2,\dots,m$ համար:*

Ապացույց: Դիցուք H-ը կամայական $m \times n$ չափսերի մատրից է: Մատրիցի սյուները կարելի է դիտարկել որպես m-չափանի վեկտորական տարածության կետեր՝ եթե H^j-ով նշանակենք H-ի j-րդ սյունը, այսինքն՝ $H^j = (h_{1j}, h_{2j}, \dots, h_{mj})$, ապա $H^j \in R^m$; $j = 1,2,\dots,n$: e^i-ով նշանակենք R^m-ի միավոր վեկտորը, որի i-րդ բաղադրիչը հավասար է 1-ի, իսկ մնացած բաղադրիչները հավասար են 0-ի: R^m տարածության $H^j, j = 1,2,\dots,n$ և $e^i, i = 1,2,\dots,m$ այդպես սահմանված $n+m$ կետերի ուռուցիկ թաղանթը նշանակենք C-ով: C-ն փակ ուռուցիկ բազմանիստ է R^m-ում (տես սահմանումը): Դիտարկենք երկու իրարամերժ դեպքեր. R^m տարածության սկզբնակետը կամ պատկանում է C բազմությանը կամ չի պատկանում::

1. $0 \notin C$: Այս դեպքում, քանի որ C-ն փակ ուռուցիկ բազմություն է և 0-ն չի պատկանում այդ բազմությանը, ապա ըստ անջատելիության թեորեմի (տես թեորեմ 2.1.4), 0 կետով կարելի է անց կացնել $\langle \lambda, z \rangle = 0$ հիպերհարթություն, այնպես, որ բոլոր $z \in C$ համար $\langle \lambda, z \rangle > 0$: Անալիտիկորեն դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ իրական թվեր, որոնք միաժամանակ 0 չեն, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i > 0, z \in C \tag{6.3.1}$$

Եթե որպես z կետեր վերցնենք $e^i, i = 1, 2, \ldots, m$ կետերը, ապա՝

$$\langle \lambda, e^i \rangle = \lambda_i > 0; \ i = 1, 2, \ldots, m:$$

Նշանակենք՝

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}; \ i = 1, 2, \ldots, m:$$

Ակնհայտ է, որ $p_i > 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, հետևաբար, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in S^m$: Բաժանելով (6.3.1) անհավասարությունը $\sum_{i=1}^{m} p_i$ վրա, կստանանք՝

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i = \sum_{i=1}^{m} p_i z_i > 0:$$

Այս անհավասարության մեջ որպես z վերցնելով $H^j, j=1,2,...,n$ կետերը, վերջնականապես կստանանք՝

$$0<\sum_{i=1}^{m} p_i h_{ij} = H(p,j);\ \ j=1,2,...,n:$$

Այսպիսով, այն դեպքում, երբ $0\notin C$, ստանում ենք լեմի առաջին երկընտրանքը:

2. $0\in C$: Այս դեպքում սկզբնակետը կարելի է ներկայացնել C բազմության ծայրակետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով: Քանի որ C բազմության ծայրակետերի բազմությունը $H^j, j=1,2,...,n$ $e^i, i=1,2,...,m$ վեկտորների բազմության ենթաբազմություն է, ապա սկզբնակետը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կոմբինացիայի տեսքով

$$0=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k e^k+\sum_{j=1}^{n}\beta_j H^j,$$

որտեղ

$$\alpha_k\geq 0,\ k=1,2,...,m;\ \beta_j\geq 0,\ j=1,2,...,n;\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k+\sum_{j=1}^{n}\beta_j=1$$

Այս հավասարությունը վեկտորական է: Եթե այն գրենք ըստ կոորդինատների, կստանանք հավասարությունների հետևյալ համակարգը

$$0=\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_j h_{ij},\ i=1,2,...,m: \tag{6.3.2}$$

Այստեղից, քանի որ բոլոր α_i-երը ոչ բացասական են, ապա

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j h_{ij}\leq 0,\ i=1,2,...,m \tag{6.3.3}$$

β_j, $j=1,2,\ldots,n$ գործակիցները ոչ բացասական են և չեն կարող միաժամանակ հավասար լինեն զրոի, այլապես (6.3.2)-ից կհետևի, որ բոլոր α_i, $i=1,2,\ldots,m$ գործակիցները նույնպես հավասար են զրոի, ինչը կհակասի $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k+\sum_{j=1}^{n}\beta_j=1$ պայմանին: Այսպիսով, $\sum_{j=1}^{n}\beta_j>0$ Նշանակենք՝

$$q_j=\frac{\beta_j}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j},\ j=1,2,\ldots,n:$$

Ակներև է, որ $q_j\geq o$, $j=1,2,\ldots,n$ և $\sum_{j=1}^{n}q_j=1$, այսինքն, $q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)\in S^n$ Մյուս կողմից, բաժանելով (6.3.3) անհավասարությունները $\sum_{j=1}^{n}q_j$ -ի վրա, կստանանք

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j}\sum_{j=1}^{n}\beta_jh_{ij}=\sum_{j=1}^{n}q_jh_{ij}=H(i,q)\leq 0,\ i=1,2,\ldots,m:$$

Այսպիսով ապացուցեցինք լեմի երկրորդ այլընտրանքային պնդումը ևս:

Այժմ անցնենք մատրիցային խաղերի հիմնական թեորեմի ապացուցմանը:

***Թեորեմ 6.3.1**: (Ֆոն Նեյման-Մորգենշթերն (J. von Neumann- O. Morgenstern)): Ցանկացած վերջավոր հակամարտ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ (ընդհանուր դեպքում խառն ստրատեգիաներով):*

***Ապացույց**:* Դիցուք տրված է որևէ $m\times n$ չափսերի H մատրիցով վերջավոր հակամարտ խաղ: Այդ մատրիցի համար պետք է բավարարվի երկընտրանքի վերաբերյալ լեմի այլընտրանքներից մեկը: Դիցուք կատարվում է լեմի առաջին այլընտրանքը, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի $p\in S^m$ վեկտոր, որ $H(p,j)\geq 0$ բոլոր $j=1,2,\dots,n$ համար: Քանի որ այս անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր $j=1,2,\dots,n$ համար, ապա, ըստ լեմ 6.3.1-ի, տեղի ունի նաև բոլոր $q\in S^n$ համար՝ $H(p,q)\geq 0$ հետևաբար, նաև $\min\limits_{q\in S^n} H(p,q)\geq 0$:

Այս անհավասարությունը ճիշտ է p կետի համար, հետևաբար՝

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q)\geq 0 \tag{6.3.4}$$

Այստեղ էքստրեմումի գոյությունը բխում է բազմությունների կոմպակտությունից:

Այն դեպքում, երբ H մատրիցի համար բավարարվում է 6.3.2 լեմի երկրորդ այլընտրանքը, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի $q\in S^n$ վեկտոր, որ $H(i,q)\leq 0$ բոլոր $i=1,2,\dots,m$ համար, ապա, ինչպես և առաջին դեպքում, կստանանք, որ

$$\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q)\leq 0: \tag{6.3.5}$$

Այսպիսով, ցանկացած H վերջավոր մատրիցի համար տեղի ունի կամ (6.3.4)-ը, կամ (6.3.5)-ը: Հետևաբար, ոչ մի մատրիցի համար հնարավոր չէ, որ միաժամանակ

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q)<0 \text{ և } \min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q)>0:$$

Այսինքն, ոչ մի մատրիցի համար չի կարող տեղի ունենալ հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n} H(p,q)<0<\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m} H(p,q): \tag{6.3.6}$$

Դիցուք c-ն կամայական իրական թիվ է: H մատրիցի բոլոր տարրերից հանենք c-ն և ստացված մատրիցը նշանակենք H'-ով: Քանի որ (6.3.6) կրկնակի անհավասարությունը չի կարող տեղի ունենալ ոչ մի մատրիցի համար, ուստի այն չի կարող տեղի ունենալ նաև H' մատրիցի համար: Մյուս կողմից,

$$H'(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_i\left(h_{ij}-c\right)q_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_ih_{ij}q_j-c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iq_j=H(p,q)-c,$$

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}\left(H(p,q)-c\right)=\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)-c,$$

$$\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}\left(H(p,q)-c\right)=\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}H(p,q)-c:$$

Այստեղից, ոչ մի H մատրիցի և ոչ մի իրական c թվի համար չի կարող տեղի ունենալ հետևյալ կրկնակի անհավասարությունը՝

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)-c<0<\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}H(p,q)-c,$$

կամ

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)<c<\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}H(p,q):$$

Հետևաբար ցանկացած H մատրիցի համար՝

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)\geq\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}H(p,q):$$

Սակայն մյուս կողմից, երկու փոփոխականի ցանկացած ֆունկցիայի համար (տես լեմ 6.2.1)

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)\leq\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}H(p,q):$$

Այսպիսով, ցանկացած H մատրիցի համար

$$\max_{p\in S^m}\min_{q\in S^n}H(p,q)=\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^m}H(p,q): \tag{6.3.7}$$

Հաշվի առնելով, որ H-ը կամայական ֆիքսած մատրից էր, և կրկնակի էքստրեմումների հավասարությունը հավասարակշռության գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է, թեորեմի պնդումը ապացուցված է:

Սահմանում 6.3.1: Մատրիցային H խաղում կրկնակի էքստրեմումների ընդհանուր արժեքը կոչվում է *խաղի արժեք* և նշանակվում է $V(H)$ -ով՝

$$V(H) = \max_{p\in S^m} \min_{q\in S^n} H(p,q) = \min_{q\in S^n} \max_{p\in S^m} H(p,q):$$

Բերենք խաղի արժեքի և խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների մի շարք հատկություններ: Առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիաների բազմությունը նշանակենք $T_1(H)$ -ով, երկրորդինը՝ $T_2(H)$ -ով:

Հ.1. Ցանկացած H մատրիցային խաղում՝

$$\max_i \min_j h_{ij} \le V(H) \le \min_j \max_i h_{ij}:$$

Այս պնդումը հետևում է այն փաստից, որ մաքուր ստրատեգիաների բազմությունը խառն ստրատեգիաների բազմության ենթաբազմություն է:

Հ.2. Եթե որևէ $p\in S^m$ ստրատեգիայի և իրական c թվի համար

$$H(p,j) \ge c,\ j = 1,2,\dots,n,$$

ապա՝ $V(H) \ge c$:

Եթե որևէ $q\in S^n$ ստրատեգիայի և իրական c թվի համար

$$H(i,q) \le c,\ i = 1,2,\dots,m,$$

ապա՝ $V(H) \le c$:

Սույն պնդման ապացույցը կրկնում է հիմնական թեորեմի ապացույցի սկզբնական մասը:

Հ.3. Դիցուք որևէ $p\in S^m$, $q\in S^n$ ստրատեգիաների և իրական c թվի համար

$$H(i,q')\le c\le H(p',j),\ i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n \qquad (6.3.8)$$

Այդ դեպքում՝

$$p\in T_1(H),\ q\in T_2(H),\ c=V(H):$$

Ապացույց: Քանի որ (6.3.8) անհավասարության աջ մասը բավարարվում է բոլոր $j=1,2,\dots,n$ համար, ապա ըստ խառն ստրատեգիաներին անցման լեմի, այն բավարարվում է նաև բոլոր $q\in S^n$ համար և, այդ թվում, q' ստրատեգիայի համար՝ $c\le H(p',q')$: Նմանապես, (6.3.8) անհավասարության ձախ մասը բավարարվում է բոլոր $i=1,2,\dots,m$ համար, հետևաբար, նաև բոլոր $p\in S^m$ և, այդ թվում, p'-ի համար՝ $c\ge H(p',q')$: Այսպիսով, $c=H(p',q')$ և բավական է (6.3.8) անհավասարության մեջ c-ի փոխարեն տեղադրել $H(p',q')$:

Հ.4. Որպեսզի $p'\in T_1(H)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$H(p',j)\ge V(H),\ j=1,2,\dots,n: \qquad (6.3.9)$$

Որպեսզի $q'\in T_2(H)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$H(i,q')\le V(H),\ i=1,2,\dots,m:$$

Ապացույց: Ապացուցենք հատկության միայն առաջին մասը: Անհրաժեշտությունը անմիջականորեն հետևում է հավասարակշռության իրավիճակի սահմանումից: Մյուս կողմից, մատրիցային խաղերի հիմնական թեորեմից հետևում է, որ $T_2(H)$-ը դատարկ չէ: Դիցուք՝ $q'\in T_2(H)$: Այս դեպքում, քանի որ q'-ը օպտիմալ է, ապա

$$H(i,q')\le V(H),\ i=1,2,\dots,m:$$

Միացնելով այս անհավասարությունը (6.3.9) անհավասարության հետ, խնդիրը կբերվի նախորդ հատկությանը:

Թեորեմ 6.3.2: *Դիցուք* j_0*-ն երկրորդ խաղացողի որևէ մաքուր ստրատեգիա է* $m\times n$ *չափսերի* H *մատրիցային խաղում: Այդ դեպքում կամ առաջին խաղացողն ունի այնպիսի* $p^0 \in T_1(H)$ *օպտիմալ ստրատեգիա, որ* $H(p^0, j_0) > V(H)$, *կամ երկրորդ խաղացողն ունի* $q^0 \in T_2(H)$ *օպտիմալ ստրատեգիա, որի* j_0*-րդ բաղադրիչը հավասար է զրոի՝* $q^0_{j_0} = 0$*:*

Ապացույց: Ընդհանրությունը չխախտելով կարելի է ենթադրել, որ $V(H)=0$ և $j_0 = n$: Դիտարկենք C ուռուցիկ կոնը, որը ծնված է R^m տարածության միավոր $e^{(i)}, i=1,2,...,m$ վեկտորներով և H մատրիցի $H^j, j=1,2,...,n$ սյուներով: Դիտարկենք երկու դեպք՝ $-H^n$ վեկտորը կամ պատկանում է C կոնին, կամ չի պատկանում: Եթե $-H^n \in C$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի ոչ բացասական $\alpha_i, i=1,2,...,m$; $\beta_j, j=1,2,...,n-1$ թվեր, որ

$$-H^n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^{(i)} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j H^j,$$

կամ

$$-h_{kn} = \alpha_k + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j h_{kj},\ k=1,2,...,m:$$

Սա նշանակում է, որ

$$\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j h_{kj} + h_{kn} = -\alpha_k \le 0,\ k=1,2,...,m:$$

Նշանակենք՝

$$q^0_j = \frac{\beta_j}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j},\ j=1,2,...,n-1;\ q^0_n = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j}:$$

Ակնհայտ է, որ $q_j^0 \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n;\ \sum_{j=1}^{n} q_j^0 = 1$, այսինքն, $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right) \in S^n$ և բոլոր $i=1,2,\ldots,m$ համար

$$H\left(q^0, i\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j} h_{ij} + \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j} h_{in} = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j h_{ij} + h_{in}\right) \leq 0:$$

Հետևաբար, ըստ Հ.4-ի, $q^0 \in T_2(H)$ և $q_n^0 > 0$:

Այժմ ենթադրենք, որ $-H^n \notin C$: Այս դեպքում, քանի որ սկզբնակետը ուռուցիկ կոնի ծայրակետ է, ապա, ըստ անջատելիության թեորեմի, սկզբնակետով կարելի է անց կացնել հիպերհարթություն, որն անջատում է $-H^n$ վեկտորը C կոնից: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի λ_i, $i=1,2,\ldots,m$ թվեր, որոնք միաժամանակ զրո չեն, որ բոլոր $z=\left(z_1, z_2, \ldots, z_m\right) \in C$ համար

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i \geq 0 \tag{6.3.10}$$

և

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(-h_{in}\right) < 0: \tag{6.3.11}$$

Եթե որպես $z \in C$ կետեր վերցնենք բոլոր $e^{(i)}, i=1,2,\ldots,m$ վեկտորները, ապա կստանանք, որ $\lambda_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,m$ և, հետևաբար, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i > 0$: Նշանակենք՝ $p_i^0 = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}$: Անմիջականորեն ստացվում է, որ

$$p_i^0 \geq 0,\ i=1,2,\ldots,m;\ \sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1:$$

Այժմ, եթե (6.3.10) անհավասարությունները բաժանենք $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$ վրա, և որպես $z \in C$ կետեր վերցնենք $H^j, j=1,2,...,n$ վեկտորները, ապա՝

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 h_{ij} = H\left(p^0, j\right) \geq 0 = V\left(H\right), j=1,2,...,n:$$

Հետևաբար, $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0,..., p_m^0\right) \in T_1\left(H\right)$ ստրատեգիան օպտիմալ է, իսկ (6.3.11)-ից կստանանք $\sum_{i=1}^{m} p_i^0 h_{in} > 0$:

Հետևանք: Դիցուք $p^0 \in S^m$ և որևէ j_0 -ի համար $H\left(p^0, j_0\right) > V\left(H\right)$: Այս դեպքում երկրորդ խաղացողն ունի օպտիմալ $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0,..., q_n^0\right)$ ստրատեգիա, որտեղ $q_j^0 = 0$: Եվ հակառակը, եթե երկրորդ խաղացողի բոլոր օպտիմալ ստրատեգիաներում j_0 բաղադրիչը հավասար է զրոի, ապա $p^0 \in S^m$ համար՝ $H\left(p^0, j_0\right) > 0$ Դիցուք $q^0 \in S^n$ և որևէ i_0 համար $H\left(i_0, q^0\right) < V\left(H\right)$: Այս դեպքում առաջին խաղացողն ունի օպտիմալ $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0,..., p_n^0\right)$ ստրատեգիա, որտեղ $p_j^0 = 0$: Եվ հակառակը, եթե առաջին խաղացողի բոլոր օպտիմալ ստրատեգիաներում i_0 բաղադրիչը հավասար է զրոի, ապա $q^0 \in S^n$ ստրատեգիայի համար $H\left(i_0, q^0\right) < V\left(H\right)$:

Վերը շարադրված հատկությունները որոշ դեպքերում օգնում են լուծել մատրիցային խաղերը:

Օրինակ 6.3.1: Դիտարկենք հետևյալ խաղը: Երկու խաղացողները միմյանցից անկախ ընտրում են $\{1,2,3,4,5\}$ բազմության թվերից մեկը: Շահույթի $H\left(i, j\right)$ ֆունկցիան հավասար է $|i-j|$: Այս խաղը կարելի է ներկայացնել 5×5 չափսի մատրիցի տեսքով՝

$$H=\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\1&0&1&2&3\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0\end{pmatrix}:$$

Հեշտ է տեսնել, որ այս խաղում $\max_i \min_j h_{ij}=0$, և $\min_j \max_i h_{ij}=2$, ուստի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում գոյություն չունի: Ըստ Հ1 հատկության՝ $0\le v(H)\le 2$: Նայելով խաղի պայմաններին, կարելի է գուշակել, որ երկրորդ խաղացողը պետք է ընտրի միջին թիվը՝ 3-ը, իսկ առաջին խաղացողը՝ ծայրի թվերը: Ստուգենք երկրորդ խաղացողի մաքուր՝ $j^0=3$ և առաջին խաղացողի խառն՝ $p^0=(0,5;0;0;0;0,5)$ ստրատեգիաները: Հաշվենք՝

$$H\left(p^0,3\right)=2;\ H\left(p^0 j\right)=2, j=1,2,3,4,5\,; H\left(i,3\right)\le 2, i=1,2,3,4,5:$$

Այսպիսով,

$$H\left(i,3\right)\le H\left(p^0,3\right)\le H\left(p^0 j\right), i=1,2,3,4,5; j=1,2,3,4,5:$$

Հետևաբար, ըստ Հ.3 հատկության, $j^0=3$ և $p^0=(0,5;0;0;0;0,5)$ ստրատեգիաները օպտիմալ են այս խաղում և $v(H)=2$

Որոշ մասնավոր դեպքերում մատրիցային խաղերը կարելի է լուծել գրաֆիկորեն: Դիտարկենք $(2\times n)$ չափսի մատրիցային խաղ՝

$$H=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}&&h_{1n}\\h_{21}&h_{22}&&h_{2n}\end{pmatrix}:$$

Այստեղ առաջին խաղացողի խառը ստրատեգիան կարելի է ներկայացնել $(p,1-p)$ տեսքով և խաղի արժեքը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$v(H) = \max_p \min_j H(p, j) = \max_p \min_j \left(ph_{1j} + (1-p) h_{2j} \right):$$

(v, p) կոորդինատային հարթության մեջ անց կացնենք $v = ph_{1j} + (1-p) h_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ ուղիղները և գտնենք $v = \min_j \left(ph_{1j} + (1-p) h_{2j} \right)$ բեկյալը: Ակներև է, որ այս բեկյալի առավելագույն արժեքը ըստ $p \in [0,1]$ հավասար կլինի խաղի արժեքին, իսկ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան հավասար է $\left(p^0, 1-p^0 \right)$, որտեղ p^0-ն այն կետն է, որտեղ բեկյալը հասնում է իր առավելագույն արժեքին:Երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան կարելի է գտնել, օգտվելով օպտիմալ ստրատեգիաների և խաղի արժեքի հատկություններից:

Օրինակ 6.3.2:

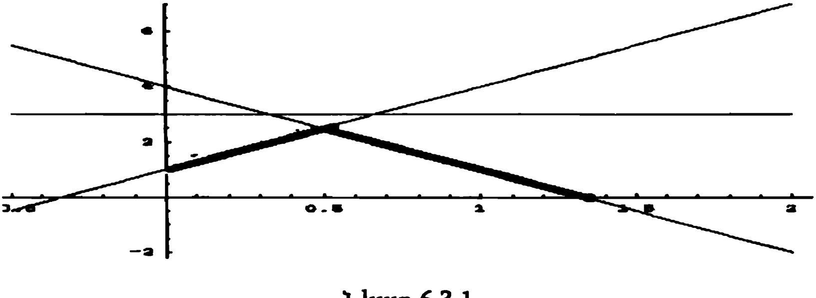
$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}:$$

(p, v) կոորդինատային հարթության վրա գծենք $H(p, j) = v, j = 1, 2, 3$ ուղիղները (տես նկ. 6.3.1)՝

$$v = 4p + (1-p),$$

$$v = 3p + 3(1-p),$$

$$v = p + 4(1-p):$$



Նկար 6.3.1

Նկարի վրա հաստ գծով նշված է $v=\min_j H(p,j)$ բեկյալը: Գծագրից երևում է, որ բեկյալի մաքսիմումը $p\in[0,1]$ տիրույթում համապատասխանում է $v=H(p,1)$ և $v=H(p,3)$ ուղիղների հատման կետին: Համատեղ լուծելով $v=4p+(1-p)$ և $v=p+4(1-p)$ հավասարումները, ստանում ենք՝ $p^0=0,5; v^0=2,5$: Այսպիսով՝ $v(H)=2,5$, իսկ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան $(0,5;0,5)$ խառն ստրատեգիան է:

Այժմ գտնենք երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան: Հաշվենք $H(p^0,j), j=1,2,3$ շահույթները՝

$$H(p^0,1)=0,5\cdot4+0,5\cdot1=2,5;\ H(p^0,2)=0,5\cdot3+0,5\cdot3=3;$$

$$H(p^0,3)=0,5\cdot1+0,5\cdot4=2,5:$$

Քանի որ $H(p^0,2)=3>v(H)$, ապա, ըստ թեորեմ 6.3.2 -ի, երկրորդ խաղացողի $q^0=(q_1^0,q_2^0,q_3^0)$ օպտիմալ ստրատեգիայում $q_2^0=0$, իսկ q_1^0 և q_3^0 բաղադրիչները կարելի է ստանալ հավասարումների հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases}4q_1+q_3=2,5\\ q_1+4q_3=2,5\end{cases}:$$

Լուծելով այն, ստանում ենք՝ $q_1^0=0,5;\ q_3^0=0,5$: Այդպիսով, երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան $(0,5;0;0,5)$ խառն ստրատեգիան է:

Օրինակ 6.3.3: Անկյունագծային խաղեր: Դիտարկենք մատրիցային խաղ, որի մատրիցն ունի անկյունագծային տեսք՝

$$H=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

որտեղ $a_i>0, i=1,2,...,n$: Գնահատենք խաղի արժեքը: Դիցուք առաջին խաղացողն ընտրել է $\overline{p}=(1/n,1/n,...,1/n)$ ստրատեգիան: Այս դեպքում բոլոր $i=1,2,...,n$ համար $H(\overline{p},j)=\frac{1}{n}a_j>0$, հետևաբար, ըստ Հ.2 հատկության՝ $V(H)>0$: Եթե առաջին խաղացողի օպտիմալ $p^0=(p_1,p_2,...,p_n)$ ստրատեգիայում որևէ բաղադրիչ, օրինակ i_0 բաղադրիչը, հավասար է զրոի, ապա՝ $H(p^0,i_0)=0$: Սա հակասում է Հ.4 հատկությանը, քանի որ $V(H)>0$: Այսպիսով, առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիայի բոլոր բաղադրիչները պետք է լինեն խիստ դրական: Հետևաբար, ըստ 6.3.2 թեորեմի հետևանքի, եթե երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան նշանակենք $q^0=(q_1,q_2,...,q_n)$, ապա՝ $H(i,q^0)=V(H), i=1,2,...,n$: Միացնելով այս գծային հավասարումների համակարգին նաև $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ հավասարումը, կստանանք $n+1$ փոփոխականներով $n+1$ հատ գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} a_1q_1=v, \\ a_2q_2=v, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_nq_n=v, \\ \sum_{i=1}^{n}q_i=1: \end{cases}$$

Հեշտ է ստուգել, որ համակարգի լուծումը հետևյալն է՝

$$q_i = \frac{1}{a_i \sum_{i=1}^{n} 1/a_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad V(H) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/a_i}:$$

Այստեղից հետևում է, որ երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիաի բոլոր բաղադրիչները խիստ դրական են, հետևաբար, օգտվելով նույն հատկությունից, երկրորդ խաղացողի $p^0 = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ օպտիմալ ստրատեգիաի համար կստանանք ՝

$$p_i = \frac{1}{a_i \sum_{i=1}^{n} 1/a_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n:$$

Օրինակ 6.3.4: Դիտարկենք *հարձակում-պաշտպանություն* տեսքի մի վերջավոր խաղ: Դիցուք ունենք n օբեկտներ, որոնք պաշտպանության կարիք ունեն: Դա կարող են լինել ինչպես ռազմական կամ տնտեսական, այնպես էլ ինֆորմացիոն բնույթի: Հարցակվողը (առաջին խաղացող) հարցակվում է այդ օբյեկտներից մեկի վրա: Պաշտպանը (երկրորդ խաղացող) այդ պահին կարող է պաշտպանել օբեկտներից միայն մեկը: Ենթադրենք, որ i-րդ օբեկտի արժեքը a_i-է, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, իսկ հարցակման գինը - $b > 0$: Այս իրավիճակը կարելի է ներկայացնել մատրիցային խաղի տեսքով՝

$$H = \begin{pmatrix} -b & a_1 - b & a_1 - b & a_1 - b \\ a_2 - b & a_2 - b & a_2 - b & a_2 - b \\ & & & \\ a_n - b & a_n - b & a_n - b & a_n - b \end{pmatrix}:$$

Ստրատեգիապես համարժեք խաղերի վերաբերյալ թեորեմից հետևում է, որ խաղը համարժեք է H' մատրիցով խաղին՝

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & & a_2 \\ & & & & \\ a_n & a_n & a_n & & 0 \end{pmatrix}:$$

Հաշվենք կրկնակի էքստրեմումները՝

$$\max_i \min_j h'_{ij} = 0, \ \min_j \max_i h'_{ij} = \max\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}:$$

Այսպիսով, H' խաղում չկա հավասարության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում, հետևաբար խաղացողները պետք է կիրառեն խառն ստրատեգիաներ: Փորձենք գտնել $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0\right)$, $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$ ստրատեգիաներ, որոնք կբավարարեն

$$H'\left(i, q^0\right) = v = H'\left(p^0, j\right), \ i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$$

հավասարումների համակարգին: Ակներև է, որ եթե ստանանք v, p^0 և q^0 լուծումներ, որոնք բավարարեն $p^0 \in S_n, q^0 \in S_n$ պայմաններին, ապա, ըստ օպտիմալ ստրատեգիաների 3-րդ հատկության, p^0-ն և q^--ն կլինեն օպտիմալ ստրատեգիաներ, իսկ v–ն՝ խաղի արժեք Կազմենք $H\left(p^0, j\right) = v$, $j = 1, 2, ..., n$ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \neq 1} p_i a_i = v, \\ \sum\limits_{i \neq 2} p_i a_i = v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i \neq n} p_i a_i = v, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1: \end{cases}$$

Այս համակարգը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = v - p_k a_k,\ k = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1:$$

Որտեղից՝

$$p_k^0 = \frac{1}{a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}},\ k = 1,2,\dots,n;\ v = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}:$$

Այժմ դիտարկենք $H'(i,q) = v, i = 1,2,\dots,n$ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_1 \sum_{j \neq 1} q_j = v, \\ a_2 \sum_{j \neq 2} q_j = v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n \sum_{j \neq n} q_j = v, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1: \end{cases}$$

Այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} a_k (1 - q_k) = v, k = 1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1: \end{cases}$$

Որտեղից՝

$$q_k^0 = 1 - \frac{n-1}{a_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}, \quad k = 1,2,\ldots,n:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $p^0 \in S_n$, սակայն q^0-ի պատկանելիությունը S_n-ին պետք է ստուգվի: Մասնավորապես դիտարկենք $n=3$ դեպքը և ենթադրենք, որ $a_1 > a_2 > a_3 > 1$: Տարանջատենք երկու դեպք՝

1. $a_3 > \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$,

2. $a_3 \le \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$:

Առաջին դեպքում՝

$$q_1^0 = 1 - \frac{2}{a_1\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3}} \ge 1 - \frac{2}{1+1+1} > 0,$$

$$q_2^0 = 1 - \frac{2}{a_2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)} = 1 - \frac{2}{1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_3}} \ge 1 - \frac{2}{1+1+\frac{a_2}{a_1}} > 0,$$

$$q_3^0 = 1 - \frac{2}{a_3\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)} = 1 - \frac{2}{1 + a_3\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)} \ge 1 - \frac{2}{1 + a_3 \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}}$$

և, հետևաբար, $q_i^0 > 0, i = 1,2,3,$ այսինքն՝ $q^0 \in S_n$, և

$$V(H') = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}:$$

Երկրորդ դեպքում, երբ $a_3 \le \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$, օգտվելով 6.3.2 թեորեմից, օպտիմալ ստրատեգիաները փնտրենք $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, 0\right)$, $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, 0\right)$ տեսքով: Լուծելով

$$
\begin{aligned}
&p_1^* a_2 = v, \qquad q_2^* a_1 = v,\\
&p_2^* a_1 = v, \qquad q_1^* a_2 = v,\\
&p_1^* + p_2^* = 1, \quad q_1^* + q_2^* = 1
\end{aligned}
$$

հավասարումների համակարգը, կստանանք՝

$$
p_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, q_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, v^* = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}:
$$

Հաշվենք $H'\left(p^*, j\right), j = 1, 2, 3$ և $H'\left(i, q^*\right), i = 1, 2, 3$ արժեքները՝

$$
H'\left(p^*, 1\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*, H'\left(p^*, 2\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*,
$$

$$
H'\left(p^*, 3\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} > v,
$$

$$
H'\left(q^*, 1\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*, H'\left(q^*, 2\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v^*,
$$

$$
H'\left(q^*, 3\right) = q_1^* a_3 + q_2^* a_3 = a_3 \le \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = v:
$$

Այսպիսով, երկրորդ դեպքում, օգտվելով օպտիմալ ստրատեգիաների վերաբերյալ երրորդ հատկությունից, ստանում ենք, որ $\left(p^*, q^*\right)$ իրավիճակը հավասարակշռության իրավիճակ է, և

$$
V\left(H'\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \; V\left(H\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} - b:
$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ n-ը կամայական է, պահանջվում է նմանատիպ վերլուծություն:

Հետևյալ թեորեմը ամբողջությամբ նկարագրում է օպտիմալ ստրատեգիաների բազմությունները:

Թեորեմ 6.3.3: *Մատրիցային խաղերում խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների $T_1(H), T_2(H)$ բազմությունները ոչ դատարկ, փակ, սահմանափակ և ուռուցիկ բազմություններ են:*

<u>Ապացույց:</u> Բազմությունների ոչ դատարկ լինելը հաստատվել է (6.3.1) թեորեմով: $T_1(H), T_2(H)$ բազմությունների սահմանափակությունը հետևում է այն փաստից, որ այս բազմությունները համապատասխանաբար S^m և S^n սահմանափակ բազմությունների ենթաբազմություններ են: Ապացուցենք ուռուցիկությունը: Դիցուք $p', p'' \in T_1(H)$ և $\alpha \in (0,1)$: S^m բազմության ուռուցիկությունից հետևում է, որ $p''' = \alpha p' + (1-\alpha)p'' \in S^m$ Ցույց տանք, որ p''' ստրատեգիան օպտիմալ է: Իրոք, բոլոր $j = 1, 2, ..., n$ համար

$$H(p''', j) = \alpha H(p', j) + (1-\alpha) H(p'', j) \geq$$
$$\geq \alpha V(H) + (1-\alpha) V(H) = V(H):$$

Այստեղից, ըստ Հ.4-ի, $p''' \in T_1(H)$

Այժմ ցույց տանք փակությունը: Վերցնենք $T_1(H)$ բազմության $p^1, p^2, ..., p^k, ...$ կետերի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է p^0 կետին: Քանի որ հաջորդականության կետերը պատկանում են նաև S^m բազմությանը, որը փակ է, ապա p^0 կետը նույնպես կպատկանի S^m-ին: $H(p, j)$ ֆունկցիան գծային է ըստ p-ի, հետևաբար, բոլոր $j = 1, 2, ..., n$ համար

$$\lim_{k \to \infty} H(p^k, j) = H(p^0, j),$$

և քանի որ, $p^k \in T_1(H)$, ապա բոլոր $j=1,2,\dots,n$ համար $H(p^k, j) \ge V(H)$, $k=1,2,\dots$, ուստի՝ $H(p^0, j) \ge V(H)$: Մնում է նորից կիրառել Հ.4 հատկությունը:

Նման եղանակով ապացուցվում է $T_2(H)$ բազմության ուռուցիկությունը և փակությունը:

Հետևանք: Յանկացած մատրիցային խաղում կամ գոյություն ունի միակ օպտիմալ ստրատեգիա, կամ դրանք անվերջ շատ են: Այս փաստը անմիջապես բխում է $T_1(H)$ և $T_2(H)$ բազմությունների ուռուցիկությունից:

Դիտարկենք օպտիմալ ստրատեգիաների ևս մեկ հատկություն, որը հաճախ հեշտացնում է խաղերի լուծումը:

Սահմանում 6.3.2: Կասենք, որ առաջին խաղացողի i-րդ մաքուր ստրատեգիան *գերադասելի է* k-րդ մաքուր ստրատեգիաից և նշանակենք՝ $i \succ k$, եթե բոլոր j-երի համար $h_{ij} \ge h_{kj}$, ընդ որում այս անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է: Նմանապես, երկրորդ խաղացողի j-րդ մաքուր ստրատեգիան *գերադասելի է* l-րդ մաքուր ստրատեգիաից և կնշանակենք՝ $j \succ l$, եթե բոլոր i-երի համար $h_{ij} \le h_{il}$, ընդ որում այս անհավասարություններից առնվազն մեկը խիստ է: Հետևյալ թեորեմը բերենք առանց ապացուցման:

Թեորեմ 6.3.4: *Դիցուք մատրիցային խաղում առաջին խաղացողի i-րդ մաքուր ստրատեգիան գերադասելի է k-րդ մաքուր ստրատեգիաից՝ $i \succ k$ Այս դեպքում առաջին խաղացողն ունի օպտիմալ $p^0=(p_1^0, p_2^0,\dots,p_m^0)$ ստրատեգիա, որտեղ $p_k^0=0$: Եթե երկրորդ խաղացողի j-րդ մաքուր ստրատեգիան գերադասելի է l-րդ մաքուր ստրատեգիաից՝ $j \succ l$, ապա երկրորդ խաղացողն ունի օպտիմալ $q^0=(q_1^0, q_2^0,\dots,q_n^0)$ ստրատեգիա, որտեղ $q_l^0=0$: Բացի այդ, օպտիմալ ստրատեգիաների դրական բաղադրիչները կարելի է գտնել այն* *խաղում, որը ստացվում է սկզբնական խաղից դուրս գցելով գերադասվող մաքուր ստրատեգիաներին համապատասխանող տողերը կամ սյուները:*

Դիտարկենք մատրիցային խաղերի մի կարևոր մասնավոր դեպք:

Սահմանում 6.3.3: H մատրիցային խաղն անվանում են սիմետրիկ, եթե H մատրիցը շեղսիմետրիկ է, այսինքն, բոլոր i, j -ի համար $h_{ij} = -h_{ji}$:

Թեորեմ 6.3.5: *Սիմետրիկ խաղերում*

$$V(H) = 0 \text{ և } T_1(H) = T_2(H):$$

Ապացույց: Դիցուք տրված է H սիմետրիկ խաղ: Սահմանումից հետևում է, որ H մատրիցը քառակուսի մատրից է: Ենթադրենք այն $n \times n$ չափսերի է: Քառակուսի մատրիցով խաղում խաղացողների ստրատեգիաների բազմությունները նույնն են՝ S^n բազմությունն է: Դիցուք երկու խաղացողներն էլ ընտրում են միևնույն $p \in S^n$ ստրատեգիան: Այս դեպքում

$$H(p,p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i h_{ij} p_j = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i h_{ji} p_j =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_j h_{ji} p_i = -H(p,p) = 0:$$

Դիտարկենք խաղացողի շահույթը որևէ (p,q) իրավիճակում: Ցանկացած $p \in S^n$ ստրատեգիայի դեպքում, ընտրելով որպես q նույն այդ ստրատեգիան շահույթը հավասար կլինի զրոի: Հետևաբար, $\min\limits_{q \in S^n} H(p,q) \le 0$ և, քանի որ այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած $p \in S^n$ համար, ապա

$$\max_{p \in S^n} \min_{q \in S^n} H(p,q) \le 0:$$

Մյուս կողմից, եթե առաջին խաղացողն ընտրի $p=q$, ապա շահույթը հավասար կլինի զրոի, հետևաբար, $\max\limits_{p\in S^n} H(p,q)\geq 0$ և, քանի որ այս անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած q-ի համար, ապա

$$\min_{q\in S^n}\max_{p\in S^n} H(p,q)\geq 0:$$

Միացնելով այս երկու անհավասարությունները, կստանանք թեորեմի առաջին պնդումը՝ $V(H)=0$:

Դիցուք, այժմ, $p\in T_1(H)$ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան է: Օպտիմալ ստրատեգիայի սահմանումից բոլոր $j=1,2,\ldots,n$ համար

$$H(p,j)=\sum_{i=1}^{n} p_i h_{ij}\geq V(H)=0:$$

Տեղադրելով $h_{ij}=-h_{ji}$, կստանանք՝

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i h_{ji}\geq 0$$

և

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ji} p_i = H(j,p)\leq 0=V(H)$$

բոլոր $j=1,2,\ldots,n$ համար: Հետևաբար, ըստ Հ.4-ի, $p\in T_2(H)$ և $T_1(H)\subseteq T_2(H)$: Նույն եղանակով ցույց է տրվում, որ $T_1(H)\supseteq T_2(H)$

__Մատրիցային խաղերի լուծման ընդհանուր եղանակ:__ Դիցուք տրված է $m\times n$ չափսերի H մատրիցային խաղ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $h_{ij}>0$ բոլոր i,j համար: Մատրիցային խաղը լուծել նշանակում է գտնել խաղի արժեքը՝ $V(H)$

-ն և խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների $T_1(H)$ և $T_2(H)$ բազմությունները: Քանի որ

$$V(H)=\max_{p\in S^m}\min_j H(p,j)=\min_{q\in S^n}\max_i H(i,q)\ , \tag{6.3.12}$$

$$T_1(H)=Arg\max_{p\in S^m}\min_j H(p,j),$$

$$T_2(H)=Arg\min_{q\in S^n}\max_i H(i,q),$$

ապա խաղը լուծելու համար բավական է հաշվել (6.3.12) կրկնակի էքստրեմումները:

Կամայական $p=(p_1,p_2,\dots,p_m)\in S^m$-ի համար նշանակենք՝ $v_p=\min_j H(p,j)$: Այստեղից՝

$$V(H)=\min_j H(p,j),\ T_1(H)=Arg\max_{p\in S^m} v_p\ ,$$

$$v_p\le H(p,j)=\sum_{i=1}^m p_i h_{ij},\ j=1,2,\dots,n: \tag{6.3.13}$$

Քանի որ բոլոր $h_{ij}>0$ և $p_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^m p_i=1$, ապա $v_p>0$ ցանկացած $p\in S^m$ համար: Բաժանենք (6.3.13) անհավասարության երկու մասերը v_p-ի վրա և նշանակենք $x_i=p_i/v_p$: Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^m x_i h_{ij}\ge 1,\quad j=1,2,\dots,n \tag{6.3.14}$$

Մյուս կողմից,

$$\sum_{i=1}^m x_i=\frac{\sum_{i=1}^m p_i}{v_p}=\frac{1}{v_p}:$$

Այստեղից, v_p ֆունկցիայի մաքսիմում գտնելու խնդիրը բերվում է $\sum_{i=1}^{m} x_i$ մինիմում գտնելու խնդրին որտեղ փոփոխականները բավարարում են (6.3.14) պայմաններին:

Դիտարկենք գծային ծրագրման հետևյալ խնդիրը

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i h_{ij} \geq 1, j = 1, 2, \ldots, n, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{6.3.15}$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խնդիրը սահմանափակ է և թույլատրելի: Դիցուք այս խնդրի լուծումը $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$-ն է: Հաշվի առնելով մեր նշանակումները, կստանանք՝

$$V(H) = \max_{p \in S^m} v_p = \frac{1}{\min \sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^0}:$$

Իսկ առաջին խաղացողի օպտիմալ $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0\right)$ ստրատեգիայի համար՝

$$p_i^0 = x_i^0 \cdot V(H) = \frac{x_i^0}{\sum_{i=1}^{m} x_i^0}, i = 1, 2, \ldots, m:$$

Նույն եղանակով, երկրորդ խաղացողի $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right)$ օպտիմալ ստրատեգիան և խաղի արժեքը գտնելու համար բավական է լուծել գծային ծրագրման հետևյալ խնդիրը

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max, \\
\sum_{j=1}^{n} y_j \le 1, i = 1,2,\dots,m, : \\
y_j \ge 0, j = 1,2,\dots,n
\end{cases}
\tag{6.3.16}
$$

Եթե այս խնդրի լուծումը նշանակենք $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\right)$ -ով, ապա

$$
V\left(H\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^0}, \qquad q_j^0 = \frac{y_j^0}{\sum_{j=1}^{n} y_j^0}, j = 1,2,\dots,n
$$

(6.3.15) և (6.3.16) խնդիրները երկակի խնդիրներ են (տես 4.2 բաժինը)։ Այսպիսով, մատրիցային խաղի լուծումը բերվում է գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգի լուծմանը։

Մատրիցային խաղերի և գծային ծրագրման կապը ավելի ակնառու դարձնելու համար բերենք գծային ծրագրման հիմնական՝ 4.2.2 թեորեմի մեկ այլ ապացույց։ Դիցուք տրված է գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգ՝

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,\dots,m, \\
x_j \ge 0, j = 1,\dots,n :
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, j = 1,2,\dots,n, \\
y_i \ge 0, i = 1,2,\dots,m :
\end{cases}
$$

Թեորեմ 4.2.2*: *Եթե գծային ծրագրման երկակի խնդիրների զույգից յուրաքանչյուրը թույլատրելի է, ապա երկուսն էլ ունեն լուծում, ընդ որում նպատակային ֆունկցիաների էքստրեմալ արժեքները հավասար են:*

Ապացույց: Դիտարկենք H մատրիցով հետևյալ մատրիցային խաղը՝

$$H=\begin{pmatrix} 0\ldots\ldots0 & a_{11}\ldots a_{1n} & -b_1 \\ \\ 0\ldots\ldots0 & a_{m1}\ldots a_{mn} & -b_m \\ -a_{11}\ldots-a_{m1} & 0\ldots\ldots0 & c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ -a_{1n}\ldots-a_{mn} & 0\ldots\ldots0 & c_n \\ b_1\ldots\ldots b_m & -c_1\ldots-c_n & 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղը սիմետրիկ խաղ է (տես սահմանում 6.3.3)։ Ըստ թեորեմ 6.3.5-ի այս խաղի արժեքը հավասար է զրոի՝ $v(H)=0$, իսկ խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաների բազմությունները համընկնում են։ Եթե առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան նշանակենք $s=(s_1,s_2,\ldots,s_{n+m+1})$-ով, ապա՝ $H(s,k)\geq v(H)=0;\ k=1,2,\ldots,n+m+1$։ Գրենք այս անհավասարությունները բացված տեսքով՝

$$-\sum_{j=1}^{n}s_{m+j}a_{ij}+s_{n+m+1}b_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}s_ia_{ij}-s_{n+m+1}c_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

$$-\sum_{i=1}^{m}s_ib_i+\sum_{j=1}^{n}s_{m+j}c_j\geq 0:$$

Ենթադրենք, որ $s_{n+m+1}>0$ և նշանակենք՝

$$x_j^0 = \frac{s_{m+j}}{s_{n+m+1}},\ j=1,2,\ldots,n; \qquad y_i^0 = \frac{s_i}{s_{n+m+1}},\ i=1,2,\ldots,m::$$

Այս նշանակումներով անհավասարությունները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 \le b_i,\ \ i=1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0 \ge c_j,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{6.3.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 :$$

Կիրառելով 4.2.5 լեմը, այստեղից ստանում ենք, որ $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ -ն առաջին խնդրի լուծումն է, իսկ $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\right)$-ն՝ երկրորդ խնդրի լուծումը:

Այժմ ենթադրենք, որ առաջին խաղացողի բոլոր օպտիմալ ստրատեգիաներում $s_{n+m+1} = 0$: Քանի որ H խաղը սիմետրիկ է, ուստի զրո է նաև երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիայի վերջին բաղադրիչը: Ըստ 6.3.2 թեորեմի, այստեղից հետևում է, որ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիայի սկալյար արտադրյալը H-ի վերջին սյան հետ խիստ մեծ է 0-ից: Այսպիսով, (6.3.16) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 \le 0,\ \ i=1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0 \ge 0,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{6.3.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 :$$

Այս վերջին անհավասարության մեջ կամ $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > 0$, կամ $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 < 0$: Դիցուք $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > 0$ և $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ կետը առաջին խնդրի թույլատրելի կետ է: Հեշտ է ստուգել, որ $x' + \alpha x^0$ վեկտորը թույլատրելի է ցանկացած $\alpha > 0$ թվի համար և α-ն մեծացնելով, առաջին խնդրի նպատակային ֆունկցիան կարելի է անվերջ մեծացնել, ուստի առաջին խնդիրը ոչ սահմանափակ է, ինչը հակասում է թեորեմի այն ենթադրությանը, որ երկրորդ խնդիրը թույլատրելի է: Նույն եղանակով, եթե $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 < 0$, ապա կստանանք, որ երկրորդ խնդիրն է ոչ սահմանափակ:

6.4 ԱՆՎԵՐՋ ՀԱԿԱՄԱՐՏ ԽԱՂԵՐ

Դիտարկումը սկսենք հաշվելի խաղերից, այսինքն այնպիսի խաղերից, որտեղ X և Y բազմությունները հաշվելի բազմություններ են՝ $X=\left\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\right\}$, $Y=\left\{y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\right\}$: Խաղացողների խառն ստրատեգիաները սահմանվում են համանման վերջավոր խաղերին (հաշվելի խաղերում խաղացողների ստրատեգիաների բազմությունները նույնն են)՝ $p=\left(p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\right)$; $p_i\geq 0$, $i=1,2,\ldots$; $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$: Առաջին խաղացողի շահութի $H\left(p,q\right)$ մաթեմատիկական սպասումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H\left(p,q\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_ih_{ij}q_j=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}q_jh_{ij}p_i: \qquad (6.4.1)$$

Այս սահմանումներից երևում է, որ կարող են առաջանալ տեխնիկական բարդույթներ, որոնք չկային վերջավոր դեպքում: Իրոք, (6.4.1) շարքերը կարող են ոչ միայն հավասար չլինեն, այլ նույնիսկ զուգամետ չլինել: Բացի այսպիսի տեխնիկական դժվարություններից, կարող են լինել նաև այնպիսի խաղեր, որոնք չունեն լուծում նույնիսկ խառն ստրատեգիաների դասում: Բերենք այդպիսի մի խաղի օրինակ՝ $G=\left\langle N,N,sign\left(i-j\right)\right\rangle$, որտեղ N-ը ամբողջ դրական թվերի բազմությունն է: Դիցուք $p=\left(p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\right)$-ն առաջին խաղացողի որևէ ստրատեգիա է: Քանի որ $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$, ապա ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0, որ $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}p_i<\varepsilon$: Հաշվենք խաղացողի շահութը $H\left(p,n_0\right)$ իրավիճակում ֆիքսած $\varepsilon>0$ թվի դեպքում՝

$$H\left(p,n_0\right)=\sum_{i=1}^{n_0-1}p_i\left(-1\right)+\sum_{i=n_0}^{\infty}p_i:$$

Այստեղից առաջին խաղացողի ցանկացած $p=\left(p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\right)$ ստրատեգիայի համար $\inf\limits_{j\in N} H\left(p,j\right)=-1$, ուստի՝ $\sup\limits_{p}\inf\limits_{j\in N} H\left(p,j\right)=-1$:

Մյուս կողմից, ինչպիսին էլ լինի երկրորդ խաղացողի $q=\left(q_1,q_2,\ldots,q_n,\ldots\right)$ ստրատեգիան, ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0, որ $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}q_i<\varepsilon$ և, քանի որ

$$H\left(n_0,q\right)=\sum_{i=1}^{n_0-1}q_i\left(+1\right)+\sum_{i=n_0}^{\infty}q_i\left(-1\right),$$

ապա $\sup\limits_{i} H\left(i,q\right)=1$ երկրորդ խաղացողի բոլոր ստրատեգիաների համար: Այստեղից՝ $\inf\limits_{q}\sup\limits_{i} H\left(i,q\right)=1$: Այսպիսով, $\inf\limits_{q}\sup\limits_{i} H\left(i,q\right)\neq\sup\limits_{p}\inf\limits_{j\in N} H\left(p,j\right)$, ուստի այս խաղում հավասարակշռության իրավիճակ գոյություն չունի: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ նույնիսկ ամենապարզ անվերջ խաղերում գոյության ընդհանուր թեորեմ չի կարող լինել: Սակայն խաղերի որոշ դասերի համար այդպիսի թեորեմներ ապացուցել հաջողվում է:

Դիտարկենք $G=\left\langle X,Y,H\right\rangle$ հակամարտ խաղերի ընդհանուր դեպքը, երբ X և Y բազմությունները կամայական բազմություններ են, իսկ $H\left(x,y\right)$-ը սահմանափակ իրականարժեք ֆունկցիա է, որոշված դեկարտյան $X\times Y$ արտադրյալի վրա:

Ստրատեգիաների X և Y բազմություններում կարելի է ներմուծել մետրիկա հետևյալ եղանակով: Ցանկացած $x',x''\in X$ կետերի համար սահմանենք՝

$$\rho\left(x',x''\right)=\sup_{y\in Y}\left|H\left(x',y\right)-H\left(x'',y\right)\right|:$$

Այս քվազիմետրիկան, որը հայտնի է որպես Հելիի (Helly) մետրիկա, հեշտությամբ կարելի վերածել մետրիկայի, դուրս զցելով X բազմությունից կրկնվող ստրատեգիաները: Տոպոլոգիան, որի հիմքը կազմում են այս մետրիկայով բաց բազմությունները, կոչվում է *բնական տոպոլոգիա*, իսկ մետրիկան՝ *բնական մետրիկա*:

Դժվար չէ ստուգել, որ բնական տոպոլոգիան կարելի է կառուցել նաև այլ ճանապարհով: Ցանկացած $x^0 \in X$ կետի և $\varepsilon > 0$ համար սահմանենք

$$B_X\left(x^0,\varepsilon\right)=\left\{x\in X:\sup_{y\in Y}\left|H\left(x^0,y\right)-H\left(x,y\right)\right|<\varepsilon\right\}$$

շրջակայքերի համակարգ: Այս շրջակայքերի համակարգով կազմված տոպոլոգիան նորից բնական տոպոլոգիան է: Նմանապես,

$$B_Y\left(y^0,\varepsilon\right)=\left\{y\in Y:\sup_{x\in X}\left|H\left(x,y^0\right)-H\left(x,y\right)\right|<\varepsilon\right\}$$

շրջակայքերի հիման վրա, կամ

$$\rho\left(y',y''\right)=\sup_{x\in X}\left|H\left(x,y'\right)-H\left(x,y''\right)\right|$$

մետրիկայի հիման վրա կառուցվում է Y բազմության բնական տոպոլոգիան:

Խաղացողների խառն ստրատեգիաներ սահմանելու համար, հարկավոր է X և Y բազմություններում ներմուծել չափելի համակարգեր: S_X-ով և S_Y-ով նշանակենք համապատասխանաբար X և Y բազմությունների ենթաբազմությունների σ-հանրահաշիվներ, որոնց վրա առայժմ սահմանափակումներ չենք դնում:

Սահմանում 6.4.1: $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում առաջին խաղացողի խառն ստրատեգիա է կոչվում $\left(X,S_X\right)$ չափելի տարածության վրա որոշված հավանականային չափը: Երկրորդ խաղացողի խառն ստրատեգիա է կոչվում $\left(Y,S_Y\right)$ չափելի տարածության վրա որոշված հավանականային չափը:

Խաղացողների խառն ստրատեգիաների բազմությունները նշանակենք համապատասխանաբար M_X –ով և M_Y -ով:

Հետագայում $H\left(x,y\right)$ ֆունկցիան ենթադրվում է սահմանափակ և չափելի $\left(X\times Y,S_X\times S_Y\right)$ չափելի տարածությունների արտադրյալի նկատմամբ: Ինչպես և վերջավոր դեպքում, առաջին խաղացողի շահույթը μ և ν խառն ստրատեգիաներ կիրառելիս սահմանվում է որպես շահույթի $H\left(\mu,\nu\right)$ մաթեմատիկական սպասում՝

$$H\left(\mu,\nu\right)=\int\limits_{X\times Y}H\left(x,y\right)d\left(\mu\times\nu\right):$$

Նշանակենք՝

$$H\left(\mu,y\right)=\int\limits_{X}H\left(x,y\right)d\mu,$$

$$H\left(x,\nu\right)=\int\limits_{Y}H\left(x,y\right)d\nu:$$

Քանի որ $H\left(x,y\right)$ ֆունկցիան ենթադրվում է սահմանափակ և չափելի, ուստի, ըստ Ֆուբինիի թեորեմի (տես Հավելված)՝

$$H\left(\mu,\nu\right)=\int\limits_{X}H\left(x,\nu\right)d\mu=\int\limits_{Y}H\left(\mu,y\right)d\nu:$$

Ինչպես արդեն նշվել է, ի տարբերություն վերջավոր խաղերի, ընդհանուր դեպքում կարող է գոյություն չունենալ հավասարակշռության իրավիճակ, սակայն, որոշ դեպքերում, կարելի է ցանկացած չափով մոտենալ այդ իրավիճակներին: Այսպիսի դեպքերի համար սահմանենք հավասարակշռության փոքր ինչ թույլ տարբերակ:

Սահմանում 6.4.2: Տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար $\left(\mu^{\varepsilon}, \nu^{\varepsilon}\right)$ իրավիճակը անվանում են ε*-հավասարակշռության իրավիճակ*, եթե բոլոր $\mu \in M_X$ և $\nu \in M_Y$ համար՝

$$H\left(\mu, \nu^{\varepsilon}\right) - \varepsilon < H\left(\mu^{\varepsilon}, \nu^{\varepsilon}\right) < H\left(\mu^{\varepsilon}, \nu\right) + \varepsilon : \qquad (6.4.1)$$

Հետևյալ պնդումը ապացուցվում է 6.2.2 թեորեմին համանման:

Թեորեմ 6.4.1: *Որպեսզի* $G = \langle X, Y, H \rangle$ *խաղում ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունենա* ε*-հավասարակշռության իրավիճակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի*

$$\sup_{\mu \in M_X} \inf_{\nu \in M_Y} H\left(\mu, \nu\right) = \inf_{\nu \in M_Y} \sup_{\mu \in M_X} H\left(\mu, \nu\right) : \qquad (6.4.2)$$

Այս կրկնակի էքստրեմումների ընդհանուր արժեքն անվանում են G խաղի արժեք և նշանակում $V\left(G\right)$-ով:

Սահմանում 6.4.3: $G = \langle X, Y, H \rangle$ խաղն անվանում են *լիովին որոշյալ*, եթե $H\left(x, y\right)$ ֆունկցիան բավարարում է (6.4.2) պայմանին:

Բերենք մի սահմանում, որից հետագայում օգտվելու ենք:

Սահմանում 6.4.4: X տոպոլոգիական տարածությունը կոչվում է *նախակոմպակտ* տարածություն, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի վերջավոր ε–ցանց, այսինքն վերջավոր $X^{\varepsilon} = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\} \subseteq X$ ենթաբազմություն, որ $X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \varepsilon\right)$:

Թեորեմ 6.4.1: *Եթե* $G = \langle X, Y, H \rangle$ *հակամարտ խաղում* X *և* Y *տարածությունները նախակոմպակտ են բնական տոպոլոգիայում, ապա խաղը լիովին որոշյալ է:*

Ապացույց: Ֆիքսենք որևէ $\varepsilon > 0$ և դիցուք $X^{\varepsilon} = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_m\right\}$ և $Y^{\varepsilon} = \left\{y_1, y_2, \ldots, y_n\right\} \subseteq Y$ բազմությունները ε-ցանցեր են համապատասխանաբար X և Y տարածություններում: Դիտարկենք $G^{\varepsilon}=\left\langle X^{\varepsilon},Y^{\varepsilon},H^{\varepsilon}\right\rangle$ վերջավոր հակամարտ խաղ, որտեղ H^{ε}-ը H ֆունկցիայի սեղմումն է $X^{\varepsilon}\times Y^{\varepsilon}$ -ի վրա, այսինքն, $H^{\varepsilon}(x,y)=H(x,y)$ բոլոր $(x,y)\in X^{\varepsilon}\times Y^{\varepsilon}$ համար: Մատրիցային խաղերի հիմնական 6.3.1 թեորեմի համաձայն, $G^{\varepsilon}=\left\langle X^{\varepsilon},Y^{\varepsilon},H^{\varepsilon}\right\rangle$ խաղում գոյություն ունի $\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right)$, $p^{\varepsilon}=\left(p_1,p_2,\ldots,p_m\right)$, $q^{\varepsilon}=\left(q_1,q_2,\ldots,q_n\right)$ հավասարակշռության իրավիճակ՝

$$\sum_{j=1}^{n}H\left(x_i,y_j\right)q_j\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j\le\sum_{i=1}^{m}p_iH\left(x_i,y_j\right)\qquad(6.4.4)$$

բոլոր $x_i\in X^{\varepsilon}$ և $y_j\in Y^{\varepsilon}$ համար: X տարածության նախակոմպակտությունից հետևում է, որ ցանկացած $x\in X$ համար գոյություն ունի այնպիսի $x_i\in X^{\varepsilon}$, որ

$$\sup_{y\in Y}\left|H(x,y)-H(x_i,y)\right|<\varepsilon,$$

ուստի՝

$$\left|H(x,y)-H(x_i,y)\right|<\varepsilon$$

բոլոր $y\in Y$ համար և, այդ թվում, բոլոր $y_j\in Y^{\varepsilon}$ համար՝

$$\left|H\left(x,y_j\right)-H\left(x_i,y_j\right)\right|<\varepsilon$$

Այստեղից՝

$$H\left(x,y_j\right)-\varepsilon<H\left(x_i,y_j\right),\ j=1,2,\ldots,n$$

Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրը բազմապատկելով երկրորդ խաղացողի $q^{\varepsilon}=\left(q_1,q_2,\ldots,q_n\right)$ օպտիմալ ստրատեգիայի համապատասխան բաղադրիչով և գումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^{n} H\left(x, y_j\right) q_j - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon q_j < \sum_{j=1}^{n} H\left(x_i, y_j\right) q_j :$$

Այսպիսով, ցանկացած $x \in X$ համար գոյություն ունի այնպիսի $x_i \in X^{\varepsilon}$, որ

$$\sum_{j=1}^{n} H\left(x, y_j\right) q_j - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} H\left(x_i, y_j\right) q_j$$

Մյուս կողմից, (6.4.4)-ից հետևում է, որ բոլոր $x_i \in X^{\varepsilon}$ համար

$$\sum_{j=1}^{n} H\left(x_i, y_j\right) q_j \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i H\left(x_i, y_j\right) q_j ,$$

հետևաբար, բոլոր $x \in X$ համար՝

$$\sum_{j=1}^{n} H\left(x, y_j\right) q_j - \varepsilon < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i H\left(x_i, y_j\right) q_j \qquad (6.4.5)$$

Համանման ձևով, օգտվելով Y տարածության նախակոմպակտությունից, կարելի է ցույց տալ, որ բոլոր $y \in Y$ համար՝

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i H\left(x_i, y_j\right) q_j < \sum_{i=1}^{m} p_i H\left(x_i, y_j\right) + \varepsilon \qquad (6.4.6)$$

Միացնելով (6.4.5) և (6.4.6) անհավասարությունները, կստանանք

$$\sum_{j=1}^{n} H\left(x, y_j\right) q_j - \varepsilon < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i H\left(x_i, y_j\right) q_j < \sum_{i=1}^{m} p_i H\left(x_i, y_j\right) + \varepsilon \, (6.4.7)$$

բոլոր $x \in X$ և $y \in Y$ -ի համար:

Հակամարտ $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում խաղացողների խառն ստրատեգիաները սահմանվում են որպես հավանակային չափեր համապատասխանաբար (X,S_X) և (Y,S_Y) չափելի տարածությունների վրա: Կառուցենք դիսկրետ հավանականային չափեր μ^ε և ν^ε հետևյալ կերպ: Ցանկացած $A\subseteq X$, $A\in S_X$ և ցանկացած $B\subseteq Y$,$B\in S_Y$ համար

$$\mu^\varepsilon(A)=\sum_{i:x_i\in A}p_i;\ \nu^\varepsilon(B)=\sum_{j:x_j\in B}q_j:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ կառուցված բազմության ֆունկցիաները իրոք հավանականային չափեր են և

$$H\left(\mu^\varepsilon,y\right)=\int_X H(x,y)\,d\mu^\varepsilon=\sum_{i=1}^m p_iH(x_i,y)\ ,$$

$$H\left(x,\nu^\varepsilon\right)=\int_Y H(x,y)\,d\nu^\varepsilon=\sum_{j=1}^n H\left(x,y_j\right)q_j\ ,$$

$$H\left(\mu^\varepsilon,\nu^\varepsilon\right)=\int_{X\times Y} H(x,y)\,d(\mu^\varepsilon\times\nu^\varepsilon)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j:$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները (6.4.7) անհավասարությունների մեջ, կստանանք՝

$$H\left(\mu,\nu^\varepsilon\right)-\varepsilon<H\left(\mu^\varepsilon,\nu^\varepsilon\right)<H\left(\mu^\varepsilon,\nu\right)+\varepsilon$$

բոլոր $x\in X$ և $y\in Y$ համար, այսինքն $\left(\mu^\varepsilon,\nu^\varepsilon\right)$ իրավիճակը $\varepsilon-$ հավասարակշռության իրավիճակ է $G=\langle X,Y,H\rangle$ խաղում:

Այժմ դիտարկենք հակամարտ խաղերի կարևոր մասնավոր դեպք, երբ X և Y բազմությունները իրական առանցքի հատվածներ են:

Սահմանում 6.4.4: $G=\langle[0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ հակամարտ խաղերը անվանում են *խաղեր միավոր քառակուսու վրա*:

Այս մասնավոր դեպքում, ինչպես ընդունված է հավանականությունների տեսությունում (տես Հավելված), չափելի բազմությունները կենթադրվեն իրական առանցքի բորելյան բազմությունները, իսկ որպես խառն ստրատեգիաներ ընդունված է դիտարկել բախշման ֆունկցիաներ:

Սահմանում 6.4.5: Միավոր քառակուսու վրա խաղերում առաջին խաղացողի խառն ստրատեգիան սահմանվում է որպես $[0,1]$ հատվածի վրա որոշված $F(x)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$F(x')\leq F(x''),\ \text{եթե}\ x'\leq x''$$

$$F(0)=0, F(1)=1,$$

$$F(x)=F(x+0), x\neq 0:$$

Երկրորդ խաղացողի խառն ստրատեգիան սահմանվում է համանմանորեն: Խաղացողի շահույթի մաթեմատիկական սպասումը խառն ստրատեգիաների օգտագործման պայմաններում սահմանվում է (ինչպես և ընդունված է հավանականությունների տեսությունում) որպես Ստիլտյեսի ինտեգրալներ (եթե գոյություն ունեն)՝

$$H(F,y)=\int_0^1 H(x,y)\,dF(x),$$

$$H(x,G)=\int_0^1 H(x,y)\,dG(y),$$

$$H(F,G)=\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dF(x)\,dG(y)=\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dG(y)\,dF(x):$$

Սահմանում 6.4.6: $G=\langle [0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ հակամարտ խաղն անվանում են *անընդհատ խաղ*, եթե $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0,1]\times[0,1]$ քառակուսու վրա:

Լեմ 6.4.1: Անընդհատ խաղերը նախակոմպակտ են բնական մետրիկայում:

Ապացույց: Քանի որ $H(x,y)$ ֆունկցիան ենթադրվել է անընդհատ փակ սահմանափակ բազմության վրա, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $\varepsilon>\varepsilon_1>0$ թվերի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ երբ $|x'-x''|<\delta$, ապա բոլոր $y\in[0,1]$ համար՝

$$|H(x',y)-H(x'',y)|<\varepsilon_1,$$

ուստի,

$$\sup_{y\in[0,1]}|H(x',y)-H(x'',y)|\le\varepsilon_1<\varepsilon:$$

Ակներև է, որ միավոր հատվածը նախակոմպակտ է էվկլիդեսյան մետրիկայում: Այսպիսով, ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ δ-ցանցը էվկլիդեսյան մետրիկայում հանդիսանում է ε-ցանց բնական մետրիկայում:

Թեորեմ 6.4.2: *Անընդհատ խաղերում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ:*

Ապացույց: Նախորդ լեմից հետևում է, որ անընդհատ խաղերը նախակոմպակտ են, հետևաբար, ըստ 6.4.1 թեորեմի, լիովին որոշյալ են: Ուստի, ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $(F^\varepsilon,G^\varepsilon)$ ε-հավասարակշռության իրավիճակ: Վերցնենք $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\ldots>\varepsilon_n>\ldots$ թվերի նվազող զրոին զուգամիտող հաջորդականություն:

Յուրաքանչյուր ε_n-ի համար գոյություն ունի ε_n-հավասարակշռության իրավիճակ

$$\int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n} - \varepsilon < \int_0^1\int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n}dF^{\varepsilon_n} < \int_0^1 H(x,y)dF^{\varepsilon_n} + \varepsilon \quad (6.4.8)$$

Այսպիսով, ստանում ենք բախշման ֆունկցիաների երկու հաջորդականություն՝ $\{F^{\varepsilon_n}\}$ և $\{G^{\varepsilon_n}\}$: Ըստ Հելլիի առաջին թեորեմի (տես Հավելված), այս հաջորդականություններից կարելի է ընտրել գրեթե ամենուրեք զուգամիտող ենթահաջորդականություններ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $\{F^{\varepsilon_n}\}$ և $\{G^{\varepsilon_n}\}$ հաջորդականություններն են զուգամիտող: Այս հաջորդականությունների սահմանային բաշխման ֆունկցիաները նշանակենք համապատասխանաբար $F^0(x)$-ով և $G^0(y)$-ով: Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int_0^1 H(x,y)dF^{\varepsilon_n} \qquad \int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n}:$$

Քանի որ H ֆունկցիան անընդհատ է ըստ երկու փոփոխականի, իսկ $\{F^{\varepsilon_n}\}$ և $\{G^{\varepsilon_n}\}$ հաջորդականությունները համարյա ամենուրեք զուգամիտում են $F^0(x)$ և $G^0(y)$ ֆունկցիաներին, ուստի, ըստ Հելլիի երկրորդ թեորեմի

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 H(x,y)dF^{\varepsilon_n} = \int_0^1 H(x,y)dF^0$$

բոլոր ֆիքսած $y\in[0,1]$ համար, և

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 H(x,y)dG^{\varepsilon_n} = \int_0^1 H(x,y)dG^0$$

բոլոր ֆիքսած $x \in [0,1]$ համար: Այնուհետև, քանի որ $\int_0^1 H(x,y)\,dG^0$ ինտեգրալը անընդհատ է ըստ x-ի, ապա, երկու անգամ կիրառելով Հելլիի երկրորդ թեորեմը, կստանանք՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dG^{\varepsilon_n}dF^{\varepsilon_n} = \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dG^0dF^0$$

Այժմ, անցնելով սահմանի (6.4.8) անհավասարություններում և հաշվի առնելով, որ $\varepsilon_n \to 0$, վերջնականապես կստանանք՝

$$\int_0^1 H(x,y)\,dG^0 \le \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dG^0dF^0 \le \int_0^1 H(x,y)\,dF^0$$

բոլոր $x \in [0,1]$ և $y \in [0,1]$ համար: Սա էլ նշանակում է, որ (F^0, G^0) զույգը հավասարակշռության իրավիճակ է անընդհատ խաղում:

Հետևյալ թեորեմները թույլ են տալիս որոշ մասնավոր դեպքերում գտնել նաև խաղացողների մաքուր օպտիմալ ստրատեգիաները:

Թեորեմ 6.4.3: *Եթե $G = \langle [0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ անընդհատ խաղում շահույթի ֆունկցիան գոգավոր է ըստ առաջին փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $y \in [0,1]$-ի համար, ապա առաջին խաղացողն ունի մաքուր օպտիմալ ստրատեգիա:*

Ապացույց: Քանի որ $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի առաջին խաղացողն ունի օպտիմալ, ընդհանուր դեպքում խառն ստրատեգիա: Դիցուք այն $F^0(x)$-ն է և $x^0 = \int_0^1 x\,dF^0(x)$: Ակնհայտ է, որ $x^0 \in [0,1]$ և կարող է դիտարկվել որպես առաջին խաղացողի մաքուր ստրատեգիա: Տրոհենք $[0,1]$ հատվածը $n+1$ հավասար մասերի՝ $0 = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = 1$ և նշանակենք՝

$\lambda_i = \left(F^0(x_{i+1}) - F^0(x_i)\right)$: Բաշխման ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ $\lambda_i \geq 0,\ i = 0,1,\ldots,n$ և $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = F(1) - F(0) = 1$:

$H(x,y)$ ֆունկցիան ենթադրվել է գոգավոր ըստ x-ի, հետևաբար, ցանկացած ֆիքսած $y \in [0,1]$-ի համար՝

$$H\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i, y\right) \geq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i H(x_i, y):$$

Սթիլթիեսի ինտեգրալի սահմանումից՝

$$x^0 = \int_0^1 x dF^0(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i \left(F^0(x_{i+1}) - F^0(x_i)\right),$$

$$\int_0^1 H(x,y) dF^0(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} H(x_i, y)\left(F^0(x_{i+1}) - F^0(x_i)\right):$$

Հաշվի առնելով, որ $H(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է, այստեղից կստանանք՝

$$H\left(\int_0^1 x dF^0(x), y\right) \geq \int_0^1 H(x,y) dF^0(x):$$

Այսինքն, $H(x^0, y) \geq H(F^0, y)$ բոլոր $y \in [0,1]$ համար: Սա նշանակում է, որ x^0 մաքուր ստրատեգիան օպտիմալ է առաջին խաղացողի համար:

Նույն եղանակով ապացուցվում են նաև հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 6.4.4. *Եթե $G = \langle [0,1],[0,1], H(x,y) \rangle$ անընդհատ խաղում շահույթի ֆունկցիան ուռուցիկ է ըստ երկրորդ փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $x \in [0,1]$ կետի համար, ապա երկրորդ խաղացողն ունի մաքուր օպտիմալ ստրատեգիա:*

Թեորեմ 6.4.5: Եթե $G=\langle [0,1],[0,1],H(x,y)\rangle$ անընդհատ խաղում շահույթի ֆունկցիան գոգավոր է ըստ առաջին փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $y\in[0,1]$ կետի համար և ուռուցիկ է ըստ երկրորդ փոփոխականի՝ ցանկացած ֆիքսած $x\in[0,1]$ կետի համար, ապա խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում:

Օրինակ 6.4.1: Դիտարկենք հետևյալ խաղը՝ $G=\langle [0,1],[0,1],(x-y)^2\rangle$: Այս խաղում $(x-y)^2$ ֆունկցիան ըստ երկու փոփոխականների էլ ուռուցիկ է, ուստի, համաձայն 6.4.4 թեորեմի, երկրորդ խաղացողն ունի մաքուր օպտիմալ ստրատեգիա: Այստեղից,

$$V(G)=\min_{y\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]}(x-y)^2:$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\max_{x\in[0,1]}(x-y)^2=\begin{cases}(1-y)^2, y\le 1/2,\\ y^2, y\ge 1/2\end{cases}$$

Հետևաբար, $V(G)=\min_{y\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]}(x-y)^2=1/4$ և երկրորդ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան $y^0=1/2$ է: Առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան գտնելու համար կարելի է օգտվել այն փաստից, որ օպտիմալ ստրատեգիայի սպեկտրի կետերը պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարմանը (այս հատկությունը ձևակերպվել էր վերջավոր խաղերի համար, սակայն տեղի ունի նաև անընդհատ խաղերում)՝

$$H(x,y^0)=(x-1/2)^2=1/4=V(G):$$

Այստեղից ստանում ենք երկու կետ՝ $x'=0,\ x''=1$: Դժվար չէ ստուգել, որ առաջին խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիան հետևյալ F^0 բաշխման ֆունկցիան է՝

$$F^0(x)=\begin{cases}1/2, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Դիտարկենք նաև խզվող շահույթի ֆունկցիաներով խաղերի մի դաս: Խաղեր միավոր քառակուսու վրա, որտեղ շահույթի ֆունկցիան ունի խզում քառակուսու անկյունագծի վրա և անընդհատ է անկյունագծից դուրս, հանդիպում են այն դեպքերում, երբ խաղացողի ստրատեգիան ժամանակի պահի ընտրությունն է և շատ էական է, թե որ խաղացողը կկատարի առաջին ընտրությունը: Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղերը նախակոմպակտ չեն և Վալդի թեորեմը կիրառելի չէ, սակայն այս խաղերը նույնպես ունեն լուծում:

Թեորեմ 6.4.6։ *Եթե $G=\left\langle[0,1],[0,1],H\right\rangle$ խաղում շահույթի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$H(x,y)=\begin{cases}L(x,y), & x<y,\\ \varphi(x), & x=y,\\ M(x,y), & x>y,\end{cases}$$

ընդ որում $L(x,y)$ և $M(x,y)$ ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման եռանկյունիների փակման վրա և ցանկացած $x\in[0,1]$ համար $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքը ընկած է $L(x,x)$ և $M(x,x)$ արժեքների միջև՝

$$\min\left\{L(x,x),M(x,x)\right\}\le\varphi(x)\le\max\left\{L(x,x),M(x,x)\right\},$$

ապա G խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ:

Ապացույց: Նախ ցույց տանք, որ G խաղը լիովին որոշված է: Վերցնենք $\varepsilon>0$ կամայական դրական թիվ: Քանի որ $L(x,y)$ և $M(x,y)$ ֆունկցիաները հավասարաչափ անընդհատ են, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\delta>0$, որ երբ $|x'-x''|<\delta$, ապա բոլոր $y\in[0,1]$ կետերի համար տեղի ունի՝

$$
\begin{aligned}
&\left|L(x', y) - L(x'', y)\right| < \varepsilon, \\
&\left|M(x', y) - M(x'', y)\right| < \varepsilon
\end{aligned}
\tag{6.4.9}
$$

և երբ $\left|y' - y''\right| < \delta$, ապա բոլոր $x \in [0,1]$ կետերի համար տեղի ունի՝

$$
\begin{aligned}
&\left|L(x, y') - L(x, y'')\right| < \varepsilon, \\
&\left|M(x, y') - M(x, y'')\right| < \varepsilon
\end{aligned}
\tag{6.4.10}
$$

Կամայականորեն ընտրենք՝

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$$

կետեր այնպես, որ $x_{i+1} - x_i < \delta$ բոլոր $i = 0,1,\ldots,n-1$ համար և վերցնենք $y_i = x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$: Նշանակենք՝ $X^\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, Y^\varepsilon = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ և դիտարկենք $G^\varepsilon = \left\langle X^\varepsilon, Y^\varepsilon, H \right\rangle$ վերջավոր հակամարտ խաղը: Խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիաները G^ε խաղում նշանակենք համապատասխանաբար $p^\varepsilon = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ և $q^\varepsilon = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$: Այսպիսով, բոլոր $x_i \in X^\varepsilon$, $y_j \in Y^\varepsilon$ համար

$$H(x_i, p^\varepsilon) \le H(p^\varepsilon, q^\varepsilon) \le H(p^\varepsilon, y_j): \tag{6.4.11}$$

Նկատենք, որ

$$H(p^\varepsilon, y_j) = \sum_{i<j} x_i L(x_i, y_j) + x_j \varphi(x_j) + \sum_{i>j} x_i M(x_i, y_j): \tag{6.4.12}$$

Վերցնենք կամայական $y \in [0,1]$: Ենթադրենք, որ $y \notin Y^\varepsilon$, $y \in (y_j, y_{j+1})$: Ունենք՝

$$H(p^\varepsilon, y) = \sum_{i \le j} x_i L(x_i, y) + \sum_{i>j} x_i M(x_i, y): \tag{6.4.13}$$

Ենթադրենք, որ

$$\varphi\left(x_j\right) \leq L\left(x_j, x_j\right): \tag{6.4.14}$$

Հանելով (6.4.13) անհավասարությունը (6.4.12)-ից, կստանանք՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right) - H\left(p^{\varepsilon}, y\right) = \sum_{i<j} p_i L\left(x_i, y_j\right) - \sum_{i<j} p_i L\left(x_i, y\right) -$$

$$-p_j L\left(x_j, y\right) + p_j \varphi\left(x_j\right) + \sum_{i>j} p_i M\left(x_i, y_j\right) - \sum_{i>j} p_i M\left(x_i, y\right) =$$

$$= \sum_{i<j} p_i (L\left(x_i, y_j\right) - L\left(x_i, y\right)) + p_j (\varphi\left(x_j\right) - L\left(x_j, y_j\right)) +$$

$$+ p_i (L\left(x_j, y_j\right) - L\left(x_j, y\right)) + \sum_{i>j} p_i (M\left(x_i, y_j\right) - M\left(x_i, y\right)):$$

Օգտվելով (6.4.10) անհավասարություններից,

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right) - H\left(p^{\varepsilon}, y\right) \leq \sum_{i<j} p_i \varepsilon + p_j \varepsilon + p_j (\varphi\left(x_j\right) - L\left(x_j, y_j\right)) + \sum_{i>j} p_i \varepsilon$$

և, հաշվի առնելով, որ $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ և (6.4.14) պայմանը, վերջնականապես կստանանք, որ բոլոր $y \in \left[y_j, y_{j+1}\right]$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$ համար՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y\right) + \varepsilon \geq H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right): \tag{6.4.15}$$

Այժմ ենթադրենք, որ

$$\varphi\left(x_{j+1}\right) \leq M\left(x_{j+1}, x_{j+1}\right):$$

Այս դեպքում՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_{j+1}\right) - H\left(p^{\varepsilon}, y\right) = \sum_{i<j+1} p_i (L\left(x_i, y_{j+1}\right) - L\left(x_i, y\right)) +$$

$$+ p_{j+1} (\varphi\left(x_{j+1}\right) - L\left(x_{j+1}, y_{j+1}\right)) + + p_{j+1} (L\left(x_{j+1}, y_{j+1}\right) -$$

$$-L\left(x_{j+1}, y\right)) + \sum_{i>j+1} p_i (M\left(x_i, y_{j+1}\right) - M\left(x_i, y\right)):$$

և, ինչպես և վերևում,

$$H\left(p^{\varepsilon}, y\right)+\varepsilon \geq H\left(p^{\varepsilon}, y_{j+1}\right)$$

բոլոր $y \in \left[y_j, y_{j+1}\right]$; $j=0,1,\ldots,n-1$ համար: Այսպիսով,

$$\varphi(x_i) \leq \max\left\{L(x_i,x_i),M(x_i,x_i)\right\},\ i=0,1,\ldots,n$$

դեպքում ցանկացած $y \in [0,1]$ համար գոյություն ունի $y_j \in Y^{\varepsilon}$, այնպես, որ՝

$$H\left(p^{\varepsilon}, y_j\right) \leq H\left(p^{\varepsilon}, y\right)+\varepsilon:$$

Այս անհավասարությունը միացնելով (6.4.11) անհավասարության հետ ստանում ենք, որ բոլոր $y \in [0,1]$ համար՝

$$H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right) \leq H\left(p^{\varepsilon}, y\right)+\varepsilon: \qquad (6.4.16)$$

Նման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ

$$\varphi(x_i) \geq \min\left\{L(x_i,x_i),M(x_i,x_i)\right\},\ i=0,1,\ldots,n$$

դեպքում ցանկացած $x \in [0,1]$ համար՝

$$H\left(x,q^{\varepsilon}\right)-\varepsilon \leq H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right):$$

Միացնելով այս անհավասարությունը (6.4.16) անհավասարությանը, կստանանք, որ բոլոր $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ համար՝

$$H\left(x,q^{\varepsilon}\right)-\varepsilon \leq H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right) \leq H\left(p^{\varepsilon}, y\right):$$

Նշանակենք $F^{\varepsilon}(x)$-ով և $G^{\varepsilon}(y)$-ով աստիճանային բաշխման ֆունկցիաները, որոնք համապատասխանաբար ունեն p_i թռիչքներ x_i,

$i=0,1,\dots,n$ կետերում, և q_j թռիչքներ y_j, $j=0,1,\dots,n$ կետերում: Հաշվի առնելով, որ՝

$$H\left(p^{\varepsilon},y\right)=\sum_{i=0}^{n}p_iH\left(x_i,y\right)=\int_0^1 H\left(x,y\right)dF^{\varepsilon}\left(x\right)=H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),y\right),$$

$$H\left(x,q^{\varepsilon}\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}H\left(x,y_j\right)q_j=\int_0^1 H\left(x,y\right)dG^{\varepsilon}\left(y\right)=H\left(x,G^{\varepsilon}\left(y\right)\right),$$

$$H\left(p^{\varepsilon},q^{\varepsilon}\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}p_iH\left(x_i,y_j\right)q_j=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 H\left(x,y\right)dF^{\varepsilon}\left(x\right)dG^{\varepsilon}\left(y\right)=H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),G^{\varepsilon}\left(y\right)\right),$$

(6.4.17) անհավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$H\left(x,G^{\varepsilon}\left(y\right)\right)-\varepsilon\le H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),G^{\varepsilon}\left(y\right)\right)\le H\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),y\right):$$

Սա էլ նշանակում է, որ $\left(F^{\varepsilon}\left(x\right),G^{\varepsilon}\left(y\right)\right)$ իրավիճակը ε-հավասարակշռության իրավիճակ է G խաղում: Հավասարակշռության իրավիճակի գոյությունը ապացուցվում է այնպես, ինչպես 6.4.2 թեորեմում, օգտվելով Հելլիի թեորեմներից:

6.5 ԿՈՈՊԵՐԱՏԻՎ ԽԱՂԵՐ

Սույն բաժնի սկզբում (կետ 6.1) սահմանել ենք n խաղացողի խաղ նորմալ տեսքով որպես $G=\left\langle I,\{S_i\}_{i\in I},\{H_i\}_{i\in I}\right\rangle$ համակարգ, որտեղ՝ $I=\{1,2,\dots,n\}$-ն խաղացողների բազմությունն է, S_i բազմությունները խաղացողների ստրատեգիաների բազմություններ են, իսկ $H_i(s_1,s_2,\dots,s_n)$ ֆունկցիաները խաղացողների շահույթի ֆունկցիաներն են: Սակայն այնտեղ դիտարկվում էր խաղի անդաշինք տարբերակը, այսինքն այն տարբերակը, երբ խաղացողները իրավունք չունեն պայմանավորվելու միմիանց հետ և կազմել դաշինքներ կամ կոալիցիաներ: Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ խաղացողները կարող են միավորվել: Դիցուք խաղացողների մի խումբ միավորվել է և ստեղծել $T\subseteq I$ կոալիցիա: Այդ դեպքում T կոալիցիայի մաքսիմալ ապահոված շահույթը՝ $\nu(T)$-ն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով (տես կետ 6.2)՝

$$\nu(T)=\max_{s_i:i\in T}\ \min_{s_i:i\in I\setminus T}\sum_{i\in T}H_i(s_1,s_2,\dots,s_n):$$

Ենթադրենք նաև, որ կոալիցիայի ընդհանուր շահույթը կարող է կամայականորեն բաշխվել կոալիցիայի անդամների միջև: Այսպիսի խաղերն անվանում են *խաղեր կողմնակի վճարումներով:* Այսուհետ դիտարկվելու են միայն այսպիսի խաղեր: Այս խաղերում խաղացողի ստրատեգիայի ընտրությունը թելադրվում է կոալիցիայի կողմից, որին նա անդամակցում է: Այսպիսով, խաղացողի և՛ գործողությունները, և՛ շահույթը կախված են միայն կոալիցիաների շահույթներից: Հետևաբար կարելի է վերանալ խաղի սկզբնական ստրատեգիական բնույթից և դիտարկել միայն $\nu(T)$ ֆունկցիան:

Սահմանում 6.5.1: I բազմության բոլոր ենթաբազմությունների բազմության վրա որոշված $\nu(T)$ իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են *բնութագրիչ ֆունկցիա,* եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1. $v(\varnothing)=0,$

2. $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T), T\cap S=\varnothing$: (3.5.1)

Այստեղ երկրորդ պայմանը բնական է և նշանակում է, որ միավորվելով խաղացողները կարող են միայն շահել:

Սահմանում 6.5.2: *Կոոպերատիվ n խաղացողի խաղ* անվանում են $\langle I, v(T)\rangle$ զույգը, որտեղ $I=\{1,2,...,n\}$ բազմությունը խաղացողների բազմությունն է, իսկ $v(T)$-ն (6.5.1) սահմանմանը բավարարող բնութագրիչ ֆունկցիա:

Ակնհայտ է, որ ամենամեծ $v(I)$ ընդհանուր շահույթը խաղացողները կստանան, եթե բոլորը միավորվեն: Այս դեպքում հիմնական հարցը ընդհանուր շահույթը խաղացողների միջև արդարացի բաժանելն է:

Սահմանում 6.5.3: Կոոպերատիվ $\langle I, v(T)\rangle$ խաղում $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ վեկտորն անվանում են *բաժանք*, եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին՝

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(I),$

2. $x_i \geq v(\{i\}), i\in I$:

Խաղում բոլոր բաժանքների բազմությունը նշանակենք $X(v)$-ով: Բաժանքի սահմանումից հետևում է, որ ընդհանուր շահույթը ամբողջությամբ է բաժանվում խաղացողների միջև և յուրաքանչյուրը ստանում է ոչ պակաս, քան եթե խաղա միայնակ:

Սահմանում 6.5.4: $\langle I, v(T)\rangle$ խաղն անվանում են *էական խաղ*, եթե $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(I)$: Ակներև է, որ հետաքրքրություն ներկայացնում են միայն էական խաղերը, քանի որ ոչ էական խաղերում գոյություն ունի միայն մեկ բաժանք՝ $x_i = v(\{i\}), i\in I$:

Կոոպերատիվ խաղերի հիմնական խնդիրը լավագույն բաժանքներ գտնելն է: Լավագույն բաժանքները գտնելու համար նախ սահմանենք բաժանքների գերադասելիության հարաբերությունը: Դիցուք խաղում x-ը և y-ը երկու տարբեր բաժանքներ են: Քանի որ այս երկու վեկտորների բաղադրիչների գումարները հավասար են, ապա x բաժանքը ձեռնտու կլինի խաղացողների մի մասին, y բաժանքը՝ մեկ այլ մասին: Սակայն, որպեսզի խաղացողները պնդեն այս կամ այն բաժանքի վրա, նրանք պետք է այդ իրավունքը ունենան: Սա հանգեցնում է հետևյալ սահմանման:

Սահմանում 6.5.5: Ասում են, որ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ բաժանքը գերադասելի է $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ բաժանքից ըստ $S\subseteq I$ կոալիցիայի, և նշանակում են $x\underset{S}{\succ}y$, եթե

1. $x_i > y_i, i\in S,$
2. $\sum\limits_{i\in S} x_i \le v(S)$:

Եվ կասենք, որ x բաժանքը գերադասելի է y բաժանքից՝ $x\succ y$, եթե գոյություն ունի $S\subseteq I$ կոալիցիա, ըստ որի $x\underset{S}{\succ}y$:

Բաժանքների գերադասելիության սահմանումից երևում է, որ սա բավականին "վատ" հարաբերություն է՝ օրինակ այն կարող է տրանզիտիվ չլինել: Ուստի կոպերատիվ խաղերում օպտիմալության սկզբունք սահմանելը կարևորագույն խնդիրներից է: Հայտնի են օպտիմալության սկզբունքների բազմաթիվ սահմանումներ, որոնք կիրառվում են տարբեր ոլորտներում: Այստեղ կդիտարկվեն այդ սկզբունքներից մի քանիսը:

Սահմանում 6.5.6: Բաժանքների $V\subseteq I$ բազմությունը կոչվում է N-M-*լուծում*, կամ պարզապես լուծում, եթե V բազմության ոչ մի բաժանք գերադասելի չէ մյուսից և ցանկացած $y\notin V$ բաժանքի համար գոյություն ունի այնպիսի $x\in V$ բաժանք, որ $x\succ y$:

Սահմանում 6.5.7: Չգերադասվող բաժանքների բազմությունը կոչվում է *խաղի միջուկ* և նշանակվում է $C(v)$-ով:

Դիտարկենք խաղի լուծման և միջուկի որոշ հատկություններ: Հայտնի են խաղեր, որտեղ լուծումները բազմաթիվ են, սակայն կառուցված են նաև խաղեր, որտեղ լուծում գոյություն չունի: Ի տարբերություն լուծման, միջուկը, եթե դատարկ չէ, ապա միակն է խաղում և ընկած է լուծման մեջ: Խաղի մի լուծում չի կարող ընկած լինել մեկ այլ լուծման մեջ: Իրոք, դիցուք խաղում գոյություն ունեն երկու` V', V'' լուծումներ, ընդ որում $V' \subset V''$ Եթե $y \in V'' \setminus V'$, ապա, քանի որ V'-ը լուծում է, գոյություն ունի այնպիսի $x \in V'$ որ $x \succ y$: Դա հակասում է այն պայմանին, որ V''-ը լուծում է: Այստեղից և այն փաստից, որ միջուկը ընկած է լուծման մեջ, հետևում է, որ եթե միջուկը համընկնում է լուծման հետ, ապա լուծումը միակն է: Հետևյալ թեորեմը բնորոշում է միջուկի կառուցվածքը:

Թեորեմ 6.5.1: *$\langle I, v \rangle$ խաղի $C(v)$ միջուկը համընկնում է*

$$E = \left\{ x \in X : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), S \subseteq I \right\}$$

բազմության հետ:

Ապացույց: Դիցուք $x \in E$: Եթե $x \notin C(v)$, ապա պետք է գոյություն ունենա $y \in X$, $y \succ x$ բաժանք: Դիցուք $y \underset{S}{\succ} x$, այսինքն

$$y_i > x_i, i \in S,$$

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S):$$

Սակայն $\sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$: Սա հակասում է նրան, որ $x \in E$:

Մյուս կողմից, դիցուք $x \in C(v)$, սակայն որևէ $S \subseteq I$ կոալիցիայի համար $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$: Կառուցենք բաժանք հետևյալ եղանակով: Նշանակենք

$$\lambda = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

և սահմանենք՝

$$y_i = \begin{cases} x_i + \lambda / |S|, i \in S \\ v(\{i\}) + \dfrac{v(I) - v(S) - \sum_{i \in I \setminus S} v(\{i\})}{|I \setminus S|}, & i \in I \setminus S \end{cases}$$

Հեշտ է ստուգել, որ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$-ը բաժանք է և $y \succ_S x$: Սա հակասում է այն ենթադրությանը, որ $x \in C(v)$: Այսպիսով, $C(v) = E$:

Սահմանում 6.5.8: Երկու՝ $\langle I, v \rangle$ և $\langle I, w \rangle$ խաղերն անվանում են *ստրատեգիապես համարժեք*, կամ պարզապես *համարժեք*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $a > 0$ և $b_i, i \in I$ իրական թվեր, որ բոլոր $S \subseteq I$ համար՝

$$v(S) = aw(S) + \sum_{i \in S} b_i :$$

Դիցուք $\langle I, v \rangle$ և $\langle I, w \rangle$ խաղերը համարժեք են, $X(v)$-ն բաժանքների բազմությունն է $\langle I, v \rangle$ խաղում, իսկ $Y(w)$-ն բաժանքների բազմությունն է $\langle I, w \rangle$ խաղում: Ակներն է, որ $y(x) = ax + b$ արտապատկերումը փոխմիարժեք համապատասխանություն է հաստատում $X(v)$ և $Y(w)$ բազմությունների միջև, ընդ որում $x' \succ x''$ առնչությունից հետևում է, որ $y(x') \succ y(x'')$:

Քանի որ ստրատեգիական համարժեքությունը համարժեքության հարաբերություն է խաղերի բազմության վրա, ապա հետաքրքիր է ընտրել յուրաքանչյուր համարժեքության դասից մի կոնկրետ խաղ:

Սահմանում 6.5.9: $\langle I, v\rangle$ խաղն անվանում են $(0,1)$ տեսքի խաղ, եթե

1. $v(\{i\})=0, i\in I,$
2. $v(I)=1:$

Այս սահմանումներից անմիջականորեն հետևում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6.5.2: *Ցանկացած էական խաղ ստրատեգիապես համարժեք է մեկ և միայն մեկ $(0,1)$ տեսքի խաղի:*

Այժմ դիտարկենք կոոպերատիվ խաղերի մի կարևոր դաս:

Սահմանում 6.5.10: $\langle I, v\rangle$ խաղն անվանում են *ուռուցիկ խաղ,* եթե բոլոր $S, T\subset I$ կոալիցիաների համար՝

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)+v(S\cap T):$$

Թեորեմ 6.5.3: *$\langle I, v\rangle$ խաղն ուռուցիկ է այն, և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $i\in I$ համար*

$$v(S\cup\{i\})-v(S)\le v(T\cup\{i\})-v(T)$$

i-րդ խաղացողին չպարունակող բոլոր $S\subset T\subseteq I\setminus\{i\}$ կոալիցիաների համար:

Ապացույց. Նախ ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Դիցուք $L\subset M$ կոալիցիաները չեն պարունակում i-ն: Խաղի ուռուցիկությունից հետևում է, որ

$$v(L\cup\{i\})+v(M)\le v(L\cup M\cup\{i\})+v(L\cup\{i\}\cap M),$$

որտեղից՝

$$\nu(L\cup\{i\})+\nu(M)\le\nu(M\cup\{i\})+\nu(L)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\nu(L\cup\{i\})-\nu(L)\le\nu(M\cup\{i\})-\nu(M):$$

Ապացուցենք բավարարությունը: Դիտարկենք երկու՝ $L\subset M$ կոալիցիաներ և կամայական K կոալիցիա, այնպիսին, որ $M\cap K=\varnothing$: Դիցուք՝ $K=\{i_1,i_2,...,i_k\}$: Այս դեպքում ցանկացած $l=1,2,...,k$ համար՝

$$\nu(L\cup\{i_1,i_2,...,i_l\})-\nu(L\cup\{i_1,i_2,...,i_{l-1}\})\le$$
$$\le\nu(M\cup\{i_1,i_2,...,i_l\})-\nu(M\cup\{i_1,i_2,...,i_{l-1}\}):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները ըստ l-ի 1-ից k, կստանանք, որ ցանկացած $L\subset M$ և $K\subseteq I\setminus M$ կոալիցիաների համար՝

$$\nu(L\cup K)-\nu(L)\le\nu(M\cup K)-\nu(M):$$

Այժմ վերցնենք կամայական S,T կոալիցիաներ: Նախորդ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\nu((S\cap T)\cup(S\setminus T))-\nu(S\cap T)\le\nu(T\cup(S\setminus T))-\nu(T),$$

կամ՝

$$\nu(S)-\nu(S\cap T)\le\nu(S\cup T)-\nu(T):$$

Ապացույցն ավարտված է:

Թեորեմ 6.5.4 *Ուռուցիկ խաղերում միջուկը դատարկ չէ:*

<u>Ապացույց</u>: Դիցուք տրված է $(0,1)$ տեսքի $\langle I,\nu\rangle$ ուռուցիկ խաղը: Նշանակենք՝

$$x_1=\nu\{1\},x_i=\nu(\{1,2,...,i\})-\nu(\{1,2,...,i-1\}),i\in I\setminus\{1\}:$$

$v(S)$ ֆունկցիայի սուպերադիտիվությունից (տես (6.5.1)) հետևում է, որ $x_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} x_i = v(I)$, ուստի $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորը բաժանք է:

Վերցնենք կամայական $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ կոալիցիա և դիտարկենք երկու՝ $L = \{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}\}$ և $M = \{1, 2, \ldots, i_{p-1}\}$, $1 \leq p \leq s$ կոալիցիաներ: Քանի որ $L \subset M$, ապա, ըստ նախորդ թեորեմի՝

$$v\{i_1, i_2, \ldots, i_p\} - v\{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}\} \leq v\{1, 2, \ldots, i_p\} - v\{1, 2, \ldots, i_{p-1}\} = x_p :$$

Գումարելով այս անհավասարությունները ըստ p-ի 1-ից s, կստանանք՝

$$v\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} = v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i :$$

Հետևաբար, ըստ 6.5.1 թեորեմի, x բաժանքը պատկանում է $C(v)$ միջուկին:

Ակներև է, որ այս թեորեմում էական չէ խաղացողների համարակալումը, ուստի միջուկին կպատկանեն նաև բոլոր $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորները, որտեղ՝

$$x_1 = v(\{i_1\}), x_2 = v(\{i_1, i_2\}) - v(\{i_1\}),$$

$$x_k = v(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) - v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Ուռուցիկ խաղերի միջուկի ամբողջական նկարագրությունը տալիս է հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 6.5.5: *Ուռուցիկ խաղի միջուկը ուռուցիկ բազմանիստ է, որի ծայրակետերի բազմությունը համընկնում է նախորդ թեորեմում սահմանված բաժանքների բազմության հետ:*

Վերևում դիտարկված օպտիմալության սկզբունքները հանգեցնում են օպտիմալ բաժանքների բազմությունների, որոնցից այնուհետև հարկ է լինում ընտրել լավագույն բաժանքը, օգտվելով այս կամ այն հանգամանքներից: Հաջորդ օպտիմալության սկզբունքը զերծ է այդ թերություններից, որոշում է միակ բաժանք, ըստ որում այն գոյություն ունի ցանկացած խաղում: Այս սկզբունքով որոշվող բաժանքը կոչվում է խաղի արժեք, կամ Շեպլիի վեկտոր: Նախ տանք մի քանի սահմանումներ:

Սահմանում 6.5.11: $\langle I, v\rangle$ խաղի *կրիչ* անվանում են այն $T \subseteq I$ կոալիցիան, որ $v(S) = v(S \cap T)$ ցանկացած $S \subsetneq I$ համար:

Սահմանում 6.5.12: Դիցուք π-ն n տարրերի որևէ տեղափոխություն է և $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subsetneq I$ կոալիցիաի համար՝ $\pi S = \{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_s)\}$: $\langle I, \pi v\rangle$-ով նշանակենք խաղը, որի համար՝

$$\pi v(S) = v(\pi S),\ S \subsetneq I$$

Սահմանում 6.5.13: $\langle I, v\rangle$ *խաղի արժեք*, կամ *Շեպլիի վեկտոր* կոչվում է $\varphi[v] = (\varphi_1[v], \varphi_2[v], \ldots, \varphi_n[v])$ բաժանքը, որը բավարարում է Շեպլիի հետևյալ երեք աքսիոմներին:

Ա1. Եթե $T \subsetneq I$-ն խաղի կրիչ է, ապա

$$\sum_{i \in T} \varphi_i[v] = v(I):$$

Ա2. Ցանկացած $i \in I$ և π տեղափոխության համար՝

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v]:$$

Ա3. Ցանկացած երկու՝ $\langle I, v\rangle$ և $\langle I, u\rangle$ խաղերի համար՝

$$\varphi_i[u+v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v], i \in I$$

Թեորեմ 6.5.6: *Ցանկացած կոոպերատիվ խաղում գոյություն ունի միակ վեկտոր, որը բավարարում է Ա1-Ա3 աքսիոմների:*

Թեորեմի ապացույցը կարելի է գտնել խաղերի տեսության դասագրքերում (տես, օրինակ, [16],[25]): Նշենք միայն, որ թեորեմը կառուցողական է և տալիս է Շեպլիի վեկտորի բացահայտ տեսքը՝

$$\varphi_i[v]=\sum_{\substack{S\subseteq I\\ i\in S}}\frac{(|S|-1)!(|I\setminus S|)!}{n!}\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right],\ i\in I: \qquad (6.5.2)$$

Օրինակ 6.5.1: Դիցուք բաժնետիրական ընկերությունը ունի չորս բաժնետեր, որոնք համապատասխանաբար ունեն 10, 20, 30 և 40 բաժնետոմսեր: Ենթադրենք, որ S կոալիցիաի շահույթը հավասար է 1-ի, եթե այդ կոալիցիայի անդամների բաժնետոմսերի ընդհանուր քանակը գերազանցում է բոլոր բաժնետոմսերի 50 տոկոսը և 0-ի այլ դեպքում (սա նշանակում է, որ այդ կոալիցիան կարող է հաղթել քվեարկության դեպքում): Այս խաղում Շեպլիի վեկտորը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $(1/12, 3/12, 3/12, 5/12)$: Այստեղից երևում է, որ խաղացողի «ուժը» որոշվում է ոչ միայն բաժնետոմսերի քանակով, այլ նաև որոշումների վրա ազդելու հնարավորություններով: Օրինակ երկրորդ և երրորդ խաղացողների բաժնետոմսերի քանակը տարբեր է, սակայն հնարավորությունները նույնն են:

Օրինակ 6.5.2: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Դիցուք որևէ կազմակերպություն ունի 1,8 մլն դրամ ազատ միջոցներ և ցանկանում է ներդնել բանկ բարձր տոկոսադրույքով: Բանկային տոկոսադրույթները հետևյալն են՝

Գումար	Տոկոս
0-ից մինչև 1մլն	8
1մլն-3մլն	10
3մլն-5մլն	12

Բարձր տոկոսադրույքով եկամուտ ստանալու նպատակով իրեն համաձայն են միանալ ևս երկու կազմակերպություն՝ համապատասխանաբար 900000 և 300000 դրամ միջոցներով: Հիմնական հարցը, որը առաջանում է այս խնդրում՝ ինչպես բաշխել ստացված եկամուտը: Այստեղ պարզունակ լուծումը կարող է լինել բաշխումը ըստ ներդրած գումարի 12 տոկոսի: Սակայն այս լուծումը հաշվի չի առնում մասնակիցների յուրահատկությունները:

Կառուցենք 3 խաղացողի կոոպերատիվ $\langle I, v\rangle$ խաղ, որտեղ $I=\{1,2,3\}$, իսկ $v(S)$ ֆունկցիան որոշվում է այն գումարով, որը կստանան S կոալիցիայի մասնակիցները, գործելով մյուսներից անկախ: Հարմարության համար նշանակենք՝

$$v(\{i\})=v_i, v(\{i,j\})=v_{ij}, v(\{1,2,3\})=v_{123}:$$

Այսպիսով՝

$$v_1=180000,\ v_2=72000,\ v_3=24000,$$
$$v_{12}=270000,\ v_{13}=220000,\ v_{23}=120000,$$
$$v_{123}=360000:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ կառուցված խաղը ուռուցիկ է: Գտնենք խաղի միջուկը: 6.5.5 թեորեմի համաձայն բավական է գտնել միջուկի ծայրակետերը: Երեք խաղացող կարող են կազմել 6 հնարավոր հերթականություն՝

$$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1):$$

Ուստի միջուկի ծայրակետերը վեցն են՝

$$x^1=(180000,90000,90000),$$
$$x^2=(180000,140000,40000),$$
$$x^3=(198000,72000,90000),$$
$$x^4=(240000,72000,48000),$$
$$x^5=(196000,140000,24000),$$
$$x^6=(240000,96000,24000):$$

Այսպիսով, միջուկը այս վեց վեկտորների ուռուցիկ թաղանթն է և միջուկի ցանկացած բաժանք կարող է հանդիսանալ եկամուտների օպտիմալ բաշխում:

Հաշվենք նաև Շեպլիի վեկտորը և համեմատենք ստացված լուծման հետ: Օգտվելով (6.5.2) բանաձևից, կստանանք՝

$$\varphi_1 = \frac{2!}{3!}(v_{123} - v_{23}) + \frac{1!1!}{3!}(v_{12} - v_2) + \frac{1!1!}{3!}(v_{13} - v_3) + \frac{2!}{3!}(v_1 - 0) = 205666,6$$

$$\varphi_2 = \frac{2!}{3!}(v_{123} - v_{13}) + \frac{1!1!}{3!}(v_{12} - v_1) + \frac{1!1!}{3!}(v_{23} - v_3) + \frac{2!}{3!}(v_2 - 0) = 101666,6$$

$$\varphi_3 = \frac{2!}{3!}(v_{123} - v_{12}) + \frac{1!1!}{3!}(v_{13} - v_1) + \frac{1!1!}{3!}(v_{23} - v_2) + \frac{2!}{3!}(v_3 - 0) = 52666,6$$

Դժվար չէ ստուգել, որ Շեպլիի վեկտորը համընկնում է միջուկի ծանրության կենտրոնի հետ և կարող է համարվել այս խնդրի լավագույն լուծում:

Օրինակ 6.5.3: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, կապված ապահովագրական ընկերությունների գործունեության հետ: Դիցուք ունենք 100 անհատներից բաղկացած խումբ, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է տվյալ ժամանակահատվածում կորցնել 1 միավոր բարիք $p_1 = 0,01$ հավանականությամբ: Իրենց ռիսկերը նվազեցնելու համար նրանք որոշում են միավորվել և ստեղծել փոքր ապահովագրական ընկերություն: Ենթադրենք, որ խմբի հիմնադիր կապիտալը պետք է լինի այնպիսին, որ ընկերության սնանկանալու հավանականությունը չգերազանցի 0,001-ը: Ենթադրելով պարզության համար, որ ռիսկերը անկախ են, մոտարկենք բինոմիալ բաշխվածությունը նորմալ բաշխվածությամբ և, օգտվելով այդպես կոչված "3 սիգմաների օրենքից", հիմնադիր կապիտալի համար կստանանք հետևյալ արժեքը՝

$$V_1 = n_1 p_1 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1)} = 10 + 9 = 19:$$

Այսպիսով, յուրաքանչյուրը պետք է ներդնի 0,19 միավոր:

Դիցուք երկրորդ խումբը նույնպես բաղկացած է 100 անհատից, սակայն երկրորդ խմբի անդամները նույն ժամանակահատվածում 1 միավորը կորցնում են $p_2 = 0,02$ հավանականությամբ: Եթե իրենք նույնպես ստեղծեն ապահովագրական միություն, ապա այս խմբի ապահովագրական ֆոնդը հավասար է՝

$$V_2 = n_2 p_2 + 3\sqrt{n_2 p_2 (1 - p_2)} = 20 + 12 = 32:$$

Դիտարկենք նաև երրորդ խումբը, որը նորից բաղկացած է 120 անդամից, որոնց համար 1 միավոր բարիք կորցնելու հավանականությունը $p_3 = 0,03$ է: Այս խմբի ապահովագրական ֆոնդը հավասար է՝

$$V_3 = n_3 p_3 + 3\sqrt{n_3 p_3 (1 - p_3)} = 36 + 15 = 51:$$

Այժմ ենթադրենք, որ այս երեք ընկերությունները որոշում են միավորվել և ստեղծել մեկ ընդհանուր ընկերություն: Հաշվենք այս միցյալ ընկերության ապահովագրական ֆոնդը՝

$$\begin{aligned} V_{123} &= n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + \\ &+ 3\sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1) + n_2 p_2 (1 - p_2) + n_3 p_3 (1 - p_3)} = 66 + 21 = 87: \end{aligned}$$

Ինչպես տեսնում ենք, միավորումը թույլ է տալիս նվազեցնել ապահովագրական ֆոնդի ծավալը, քանի որ եթե ընկերությունները գործում են միմիանցից անկախ, ապա ապահովագրական ֆոնդերի գումարը կկազմի $19 + 32 + 51 = 102$ իսկ միավորվելու դեպքում՝ 87 միավոր: Սակայն միավորվելիս հարկավոր է որոշել յուրաքանչյուր խմբի ներդրումը ընդհանուր ապահովագրական ֆոնդում: Այս խնդիրը դիտարկենք որպես կոպերատիվ խաղ՝ $G = \langle I, v \rangle$, որտեղ $I = \{1,2,3\}$, և՝

$v\{1\} = V_1 = 19,$

$v\{2\} = V_2 = 32,$

$v\{3\} = V_3 = 51,$

$$\nu\{1,2\} = n_1 p_1 + n_2 p_2 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1-p_1) + n_2 p_2 (1-p_2)} = 30 + 15 = 45,$$

$$\nu\{2,3\} = n_2 p_2 + n_3 p_3 + 3\sqrt{n_2 p_2 (1-p_2) + n_3 p_3 (1-p_3)} \approx 75{,}3,$$

$$\nu\{1,3\} = n_1 p_1 + n_3 p_3 + 3\sqrt{n_1 p_1 (1-p_1) + n_3 p_3 (1-p_3)} \approx 63{,}5,$$

$$\nu\{1,2,3\} = V_{123} = 87:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս խաղի համար Շեպլիի վեկտորը կտա հետևյալ բաժանքը՝ $(14{,}9;26{,}9;45{,}6)$: Դուրս գրենք խաղի միջուկը բնութագրող առնչությունները՝

$$x_1 \le 19,$$
$$x_2 \le 32,$$
$$x_3 \le 51,$$
$$x_1 + x_2 \le 45,$$
$$x_2 + x_3 \le 75{,}3,$$
$$x_1 + x_3 \le 63{,}5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 87:$$

Հեշտությամբ ստուգվում է, որ Շեպլիի վեկտորը պատկանում է խաղի միջուկին, հետևաբար այն կարող է դիտվել, որպես խնդրի օպտիմալ բաշխում: Այսպիսով, ընդհանուր ապահովագրական ընկերություն ստեղծելու համար առաջին խմբի անդամները պետք է ներդնեն յուրաքանչյուրը մոտավորապես 0,15 միավոր, երկրորդ խմբի անդամները մոտավորապես 0,27 միավոր և երրորդ խմբի անդամները՝ 0,38 միավոր յուրաքանչյուրը:

ԴԻՆԱՄԻԿ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Սույն բաժնում դիտարկվում են որոշումներ ընդունելու այնպիսի խնդիրներ, որտեղ որոշումը ընդունվում է ժամանակի ընթացքում՝ քայլ առ քայլ, կամ անընդմեջ:

7.1. ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐՈՒՄ

Դիցուք ձեռնարկությունն ունի որևէ արտադրանք ստանալու երկու տեխնոլոգիական պրոցեսներ, ընդ որում առաջին պրոցեսում x քանակությամբ ռեսուրսը /պաշարը/ բերում է $g(x)$ եկամուտ և սկզբնական պաշարից մնում է αx քանակություն, իսկ երկրորդ պրոցեսում x պաշարը բերում է $h(x)$ եկամուտ և պաշարը նվազում է մինչև βx: Դիցուք պաշարի սկզբնական քանակը x է: Այն բաշխելով երկու պրոցեսների միջև, համապատասխանաբար y և $x-y$ մասերի, ձեռնարկությունը կստանա $R_1(x,y)=g(y)+h(x-y)$ եկամուտ, իսկ մնացյալ պաշարը հավասար կլինի $x_1=\alpha y+\beta(x-y)$: Դիցուք մնացած պաշարը նորից բաշխում ենք երկու պրոցեսների միջև՝ x_1-ը տրոհում ենք y_1 և x_1-y_1 մասերի, ստանալով $g(y_1)+h(x_1-y_1)$ եկամուտ և $x_2=\alpha y_1+\beta(x_1-y_1)$ մնացյալ պաշար: Այս դեպքում բաշխման երկու քայլերից ստացված եկամուտը հավասար կլինի՝

$$R_2(x,y,y_1)=g(y)+h(x-y)+g(y_1)+h(x_1-y_1): \tag{7.1.1}$$

Կրկնելով այս գործընթացը, n-րդ քայլում կստանանք՝

$$R_n(x,y,y_1,\dots,y_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}R_i(x,y,y_1,\dots,y_{i-1}),$$

որտեղ՝

$$x_1=\alpha y+\beta(x-y),0\le y\le x,$$
$$x_i=\alpha y_{i-1}+\beta(x_{i-1}-y_{i-1}),0\le y_{i-1}\le x_{i-1},i=2,3,\dots,n:$$

Առավելագույն վերջնական շահույթը կստանանք մաքսիմալացնելով $R_n\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)$ ֆունկցիան $y_1, \ldots, y_n$ փոփոխականների՝ վերևում նշված անհավասարություններով որոշվող տիրույթում:

Եթե ենթադրենք, որ $g(x)$ և $h(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ և ածանցելի են իրենց որոշման տիրույթում, ապա այս խնդիրը կարելի է լուծել դասական եղանակներով, օրինակ դիտարկելով որպես պայմանական էքստրեմումի խնդիր: Սակայն դասական եղանակները հիմնականում տալիս են տիրույթի ներսում էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմաններ և հարկավոր է լինում ստուգել ֆունկցիայի վարքը տիրույթի եզրում: Այս ամենը շատ է բարդեցնում խնդիրը մեծ n -ի դեպքում:

Դինամիկ ծրագրման եղանակը թույլ է տալիս նման խնդիրները լուծել քայլ առ քայլ: Նկարագրենք այդ եղանակը վերևում բերված օրինակի վրա:

Քանի որ $R_n\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right)$ ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը կախված է միայն սկզբնական ռեսուրսի x քանակից և քայլերի n թվից, նշանակենք՝

$$f_1(x)=\max_{0 \leq y \leq x}[g(y)+h(x-y)], f_n(x)=\max_{y, y_1, \ldots y_{n-1}} R_n\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right)$$

Բաշխման երկու քայլերից հետո ամբողջ ստացած եկամուտը հավասար է առաջին քայլում ստացած եկամուտի և երկրորդ քայլում $x_1=\alpha y+\beta(x-y)$ ռեսուրսը բաշխելիս ստացված եկամուտի գումարին: Ինչպիսին էլ լինի առաջին քայլում ընտրած y-ը, մնացորդային ռեսուրսը հաջորդ քայլում պետք է բաշխվի օպտիմալ ձևով: Այսպիսով, եթե y_1-ը օպտիմալ է ընտրվել, ապա (7.1.1) արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$R_2\left(x, y, y_1\right)=g(y)+h(x-y)+f_1(\alpha y+\beta(x-y)):$$

Իսկ մաքսիմալ եկամուտի համար կստանանք՝

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f_1(\alpha y+\beta(x-y))]:$$

Շարունակելով այս դատողությունները, n-քայլանի գործընթացի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$f_n(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f_{n-1}(\alpha y+\beta(x-y))],\ n\ge 2,\quad (7.1.2)$$

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\left[g(y)+h(x-y)\right]:$$

Այս ռեկուրենտ բանաձևերը թույլ են տալիս n-չափանի խնդիրը հանգեցնել n հատ մեկ չափանի խնդիրների: Իրոք, դիցուք՝

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\left[g(y)+h(x-y)\right]=\left[g(y_1)+h(x-y_1)\right]:$$

Երկրորդ քայլում հաշվում ենք՝

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f_1(\alpha y+\beta(x-y))]:$$

Ապա հաշվում ենք $f_3(x)$ և այսպես շարունակ: Արդյունքում ստանում ենք երկու հաջորդականություններ՝ $\{y_i\}$ և $\{f_i(x)\}$, $i=1,2,\ldots$, որոնք տալիս են տրված ռեսուրսով և քայլերով բաշխման խնդրի օպտիմալ լուծումը: Այն դեպքերում, երբ քայլերի թիվը շատ մեծ է, կարելի է (7.1.2) ռեկուրենտ բանաձևերի փոխարեն օգտվել ֆունկցիոնալ հավասարումից՝

$$f(x)=\max_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)+f(\alpha y+\beta(x-y))]:$$

Լուծման այս նույն եղանակը կարելի է կիրառել տարբեր խնդիրներում: Դիտարկենք, օրինակ, պայմանական էքստրեմումի բազմաչափ խնդիր՝

$$\begin{cases} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x_i)\to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=c, \\ x_i\ge 0, i=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Ենթադրենք, որ բոլոր $g_i(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $x \geq 0$ տիրույթում: Քանի որ խնդրի լուծումը կախված է միայն c-ից և n-ից, ուստի կարելի է նշանակել՝

$$f_n(c) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n):$$

Դատելով այնպես, ինչպես նախորդ խնդրում, կարող ենք ստանալ ռեկուրենտ բանաձև՝

$$\begin{aligned} &f_1(c) = g_1(c), \\ &f_i(c) = \max_{0 \leq x \leq c} \left[g_i(x) + f_{i-1}(c-x) \right] \end{aligned} \qquad (7.1.3)$$

$i = 2, \dots, n$ համար:

Այս երկու բերված մոդելներում կիրառված է դինամիկ ծրագրման խնդիրների լուծման հիմնական օպտիմալության սկզբունքը՝ օպտիմալ կերպով բաշխել ռեսուրսը վերջին քայլում, եթե հայտնի է, թե ինչպես օպտիմալ կերպով բաշխել մնացորդային ռեսուրսը նախորդ քայլերում և այդպես, քայլ առ քայլ գալ մինչև սկիզբ:

Բերենք թվային օրինակ: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{c_i} \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = c, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Այստեղ $c_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$:

Այս խնդրի համար (7.1.3) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_k(c) = \min_{0 \leq x \leq c} \left(f_{k-1}(c-x) + \frac{x^2}{c_k} \right):$$

Կազմենք՝

$$f_1(c)=R_1(c)=\frac{c^2}{c_1},\ R_2(x)=\frac{(c-x)^2}{c_1}+\frac{x^2}{c_2}:$$

Ածանցելով և հավասարեցնելով զրոի, կստանանք՝

$$x_2(c)=\frac{cc_2}{c_1+c_2},\quad c-x_2(c)=\frac{cc_1}{c_1+c_2},\ f_2(c)=\min_{0\le x\le c}R_2(x)=\frac{c^2}{c_1+c_2}:$$

Այժմ ենթադրենք, որ

$$f_k(c)=\frac{c^2}{c_1+c_2+\ldots+c_k}$$

և կազմենք

$$f_{k+1}(c)=\min_{0\le x\le c}\left(\frac{(c-x)^2}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+\frac{x^2}{c_{k+1}}\right):$$

Դժվար չէ ստուգել, որ

$$x_{k+1}(c)=\frac{cc_{k+1}}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}},\quad f_{k+1}(c)=\frac{c^2}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}}:$$

Այսպիսով, ցանկացած $n\ge 2$ համար՝

$$\min\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{c_i}=\frac{c^2}{c_1+c_2+\ldots+c_n}:$$

Իսկ ռեսուրսի օպտիմալ բաշխման $x_1^0,x_2^0,\ldots x_n^0$ կետերը ստանալու համար օգտվենք դինամիկ ծրագրման հիմնական սկզբունքից. նախ որոշենք x_n^0-ն՝

$$x_n^0=x_n(c)=\frac{cc_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}:$$

Հաջորդ քայլում որոշվում է x_{n-1}^0-ն՝

$$x_{n-1}^0 = x_{n-1}\left(c - x_n^0\right) = \frac{\left(c - x_n^0\right)c_{n-1}}{c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}} =$$

$$= \left(c - \frac{cc_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}\right)\frac{c_{n-1}}{c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}} =$$

$$= \frac{c\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)c_{n-1} - cc_{n-1}c_n}{\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}\right)} =$$

$$= \frac{cc_{n-1}\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}\right)}{\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}\right)} = \frac{cc_{n-1}}{\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)}:$$

Շարունակելով, կստանանք՝

$$x_i^0 = \frac{cc_i}{\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n:$$

7.2. ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Օպտիմալ կառավարման տեսությունը ուսումնասիրում է որոշումներ ընդունելու այնպիսի խնդիրներ, որտեղ որոշումներն ընդունվում են անընդհատ, ժամանակի յուրաքանչյուր պահին:

Որպես օրինակ դիտարկենք ավտոմեքենայի ուղղագիծ շարժումը: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ այդ շարժումը կատարվում է իրական առանցքով, և ժամանակի t պահին մեքենան գտնվում է իրական առանցքի $x(t)$ կետում: Մեքենայի վիճակը յուրաքանչյուր t պահին կարելի է նկարագրել $x(t)$ դիրքով և $\dot{x}(t)$ արագությամբ: Ուղղագիծ շարժման դեպքում մեքենայի կառավարումը կատարվում է վարորդի կողմից մեքենայի վրա ուժ կիրառելով (այս կամ այն չափով սեղմելով "գազի պեդալը") Ժամանակի t պահին կիրառվող ուժը նշանակենք $u(t)$-ով: Հաշվի առնելով, որ արագացումը հավասար է $\ddot{x}(t)$, ըստ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի շարժման հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$m\ddot{x} = u - b\dot{x}, \tag{7.2.1}$$

որտեղ m-ը մեքենայի զանգվածն է, $b\dot{x}$-ը շփման ուժը: Որպեսզի ստանանք մեքենայի վիճակի պարամետրերի անմիջական կախվածությունը կիրառվող ուժից, նշանակենք՝ $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$: Այս դեպքում (7.2.1) հավասարումը կվերածվի համարժեք համակարգի՝

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}u - \dfrac{b}{m}\dot{x}_1 \end{cases}$$

Ընտրելով յուրաքանչյուր t պահին $u(t)$ կառավարումը, և լուծելով դիֆերենցիալ հավասարումների սույն համակարգը, կարելի է ստանալ մեքենայի շարժման $(x_1(t), x_2(t))$ հետագիծը ցանկացած սկզբնական դիրքի դեպքում:

Ընդհանուր դեպքում *կառավարվող օբյեկտի* վիճակը կարող է նկարագրվել $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ վեկտորով, որն անվանում են *ֆազային կետ,* շարժումը կարող է կառավարվել $u=(u_1,u_2,\dots,u_m)\in U\subseteq R^m$ պարամետրերով, որոնք անվանում են *կառավարող պարամետրեր,* իսկ U բազմությունը՝ *կառավարման տիրույթ*: Շարժման օրենքը տրվում է դիֆերենցիալ հավասարումների

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \end{cases} \tag{7.2.2}$$

համակարգով, որոնք անվանում են *շարժման հավասարումներ* Այս համակարգը կարելի է գրել վեկտորական տեսքով՝

$$\dot{x}=f(x,u),$$

որտեղ f-ով նշանակել ենք $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ վեկտոր-ֆունկցիան: Ակներն է, որ տարբեր եզրային պայմանների և տարբեր $u(t)$ կառավարումների դեպքում կստանանք տարբեր $x(t)$ հետագծեր: Դիցուք տարածության մեջ տրված է որևէ Σ մակերևույթ (մասնավորապես այն կարող է բաղկացած լինել մեկ կետից) և ենթադրենք, որ մեր կառավարվող գործընթացը սկսվում է ժամանակի t_0 պահին $x^0=x(t_0)$ կետից և ավարտվում է t_1 պահին, երբ $x(t)$ կետը հասնում է Σ մակերևույթին՝ $x(t_1)\in\Sigma$: Այս մակերևույթն անվանենք *տերմինալ մակերևույթ*: Կառավարման նպատակը տրվում է *նպատակային ֆունկցիոնալով,* որը ընդհանուր դեպքում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1} L\big(x(t),u(t)\big)\,dt+H(s), \tag{7.2.3}$$

որտեղ $H(s)$ ֆունկցիան որոշված է Σ տերմինալ մակերևույթի վրա: Մասնավոր դեպքում, երբ $H(s)\equiv 0$, խնդիրը անվանում են *Լագրանժի խնդիր*, իսկ երբ $H(s)\equiv 0$, $L\equiv 1$ (այսինքն՝ $J(x,u)=t_1-t_0$), խնդիրն անվանում են *արագագործության խնդիր*: (x,u) զույգը, որտեղ $u(t)$-ն որևէ կառավարում է, իսկ $x(t)$-ն այդ կառավարմանը համապատասխանող (7.2.2) համակարգի միարժեք լուծումն է (եթե այդպիսին գոյություն ունի), որը սկսվում է x^0 կետից և ավարտվում Σ տերմինալ մակերևույթի վրա, կոչվում է *կառավարվող պրոցես*: Կառավարվող պրոցեսը, որի դեպքում (7.3.3) ֆունկցիոնալը ստանում է էքստրեմալ արժեքը (մաքսիմալ կամ մինիմալ, կախված խնդրի դրվածքից), կոչվում է *օպտիմալ կառավարվող պրոցես*:

Այսպիսով, օպտիմալ կառավարման խնդիրը տրված է, եթե տրված են՝

1. կառավարման $U\subseteq R^m$ տիրույթը,
2. տերմինալ Σ մակերևույթը,
3. շարժման $\dot{x}=f(x,u)$ հավասարումները,
4. նպատակային ֆունկցիոնալը՝

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t))dt+H(s):$$

Չնայած օպտիմալ կռավարման տեսությունը սկզբնական շրջանում ուսումնասիրել է խնդիրներ, որոնք կապված էին ֆիզիկական շարժման հետ՝ տիեզերագնացության, բալիստիկ հրթիռների, ինքնաթիռների ավտոմատ կառավարման և այլ բնագավառներում, այժմ այս տեսությունը լայն կիրառություններ է ստացել նաև տնտեսագիտության, բժշկության, քաղաքաշինության և այլ բնագավառներում: Բերենք մի քանի օրինակ: Յուրաքանչյուր մարդու առողջական վիճակը կարելի է նկարագրել վերջավոր թվով պարամետրերով՝ ճնշում, ջերմաստիճան, արյան բաղադրություն և այլն, այսինքն ներկայացնել, որպես ֆազային կետ: Յուրաքանչյուր պահին ընտրելով դեղորայքների տեսակը և քանակը (կառավարումները) կարելի է դնել խնդիր՝ մինիմալ ժամանակում կամ մինիմալ վնասներով առողջացնել հիվանդին:

Բերենք մեկ այլ օրինակ: Քաղաքի կամ երկրի տնտեսական իրավիճակը կարելի է նկարագրել մի շարք պարամետրերով՝ բյուջե, էներգետիկա, տրանսպորտային ցանց, տվյալ ճյուղի գործարանների հզորություններ և այլն: Այդ պարամետրերը կարող են փոփոխվել վարկային, հարկային և այլ միջոցառումների շնորհիվ: Կարող է դրվել խնդիր՝ մինիմալ ժամանակահատվածում, կամ մինիմալ ծախսերով հզորացնել երկիրը:

Դինամիկ ծրագրման մոտեցում: Պարզության համար հիմնական մոտեցումները և արդյունքները դիտարկենք արագագործության խնդրի օրինակի վրա: Դիցուք ֆազային x կետից հարկավոր է մինիմալ ժամանակում, շարժվելով շարժման (7.2.2) հավասարումներին համաձայն, հասնել x^1 ֆազային կետ: Այստեղ վերջնական x^1 կետը համարում ենք ֆիքսված, իսկ սկզբնական x կետը փոփոխական, այսինքն խնդիրը փորձում ենք լուծել ցանկացած սկզբնական դիրքի համար:

Ենթադրություն 1: Ենթադրենք, որ ցանկացած սկզբնական x կետի համար գոյություն ունի միակ օպտիմալ (x,u) պրոցես և $T(x)$ -ով նշանակենք x կետից x^1 կետ հասնելու մինիմալ ժամանակը:

Ենթադրություն 2: Ենթադրենք, որ այս բաժնում դիտարկվող բոլոր ֆունկցիաները անընդհատ են և ունեն այնքան անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, որքան պահանջվի: Հետագա դատողություններում ավելի հարմար է $T(x)$ ժամանակի փոխարեն դիտարկել հակադարձ՝ $\theta(x)=-T(x)$ ժամանակը:

Դիցուք x^0-ն ֆազային տարածության որևէ կետ է, և $u^0\in U$ Ենթադրենք, որ t_0 պահին մեր օբյեկտը գտնվում է x^0 կետում և շարժվում է u^0 հաստատուն կառավարման ներքո, համաձայն շարժման (7.2.2) հավասարումների, մինչև $x(t)$ կետը, ծախսելով $t-t_0$ ժամանակ: $x(t)$ կետից շարժվելով օպտիմալ մինչև x^1 կետը կծախսվի

$T(x(t))$ ժամանակ: Ուստի, x^0 կետից մինչև x^1 կծախսվի $(t-t_0)+T(x(t))$ ժամանակ: Սակայն, քանի որ x^0 կետից մինչև x^1 հասնելու օպտիմալ (մինիմալ) ժամանակը հավասար է $T(x^0)=T(x(t_0))$, ապա՝

$$T(x(t_0)) \le (t-t_0)+T(x(t)):$$

Փոխարինելով $T(x)$ ֆունկցիան $-\theta(x)$-ով և բաժանելով $t-t_0$ վրա, կստանանք՝

$$\frac{\theta(x(t))-\theta(x(t_0))}{t-t_0} \le 1:$$

Անցնելով սահմանին, երբ $t \to t_0$, ստանում ենք՝

$$\left.\frac{d}{dt}\theta(x(t))\right|_{t=t_0} \le 1:$$

Եվ, քանի որ $\dot{x}_i(t)=f_i(x,u)$, ապա վերջնականապես ստանում ենք՝

$$\left.\frac{d}{dt}\theta(x(t))\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x^0)}{\partial x_i}\left.\dot{x}_i(t)\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x^0)}{\partial x_i} f_i(x^0,u^0) \le 1:$$

Այստեղ x^0 և u^0 կետերը կամայական էին: Ուստի *ֆազային տարածության ցանկացած x կետի և կառավարման տիրույթի ցանկացած u կետի համար*՝

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i} f_i(x,u) \le 1: \qquad (7.2.4)$$

Դիցուք, այժմ, $(x(t),u(t))$-ն օպտիմալ պրոցես է, որը տեղափոխում է օբյեկտը $x^0=x(t_0)$ կետից $x^1=x(t_1)$ կետ, այսինքն t_0 պահին օբյեկտը գտնվում է $x(t_0)$ ֆազային կետում և ծախսելով $T(x^0)$ ժամանակ, t_1 պահին հասնում է x^1 կետ: Այստեղից՝ $t_1 = t_0 + T(x^0)$, ընդ որում ավելի արագ հասնել x^1 կետ հնարավոր չէ: Դիցուք t-ն, $t_0 \le t < t_1$ որևէ միջանկյալ պահ է: Շարժումը օպտիմալ $(x(t),u(t))$ պրոցեսի դեպքում ֆազային $x^0 = x(t_0)$ կետից մինչև $x(t)$ կետ տևում է $t - t_0$ ժամանակ, իսկ $x(t)$-ից մինչև $x^1 = x(t_1)$ կետ՝ $T(x(t))$ ժամանակ: Ավելի արագ $x(t)$ կետից հասնել $x^1 = x(t_1)$ կետ անհնար է. դա կխախտեր $(x(t),u(t))$ պրոցեսի օպտիմալությունը: Այսպիսով,

$$T(x(t_0)) = (t - t_0) + T(x(t)):$$

Այստեղ, փոխարինելով $T(x)$-ը $-\theta(x)$-ով, կստանանք՝

$$\frac{\theta(x(t)) - \theta(x(t_0))}{t - t_0} = 1:$$

Անցնելով սահմանին, երբ $t \to t_0$, ստանում ենք՝

$$\frac{d}{dt}\theta(x(t))\bigg|_{t=t_0} = 1$$

և, ինչպես և վերևում, կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t),u(t)) = 1: \tag{7.2.5}$$

Հարմարության համար նշանակենք՝

$$B(x,u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} f_i(x,u) \tag{7.2.6}$$

Այժմ, համեմատելով (7.2.4) և (7.2.5) առնչությունները, կարելի է ձևակերպել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 7.2.1: *Եթե ֆիքսված x^1 վերջնական դիրքով, շարժման $\dot{x} = f(x,u)$ հավասարումներով և U կառավարման տիրույթով արագագործության խնդրում բավարարվում են 1 և 2 ենթադրությունները, ապա՝*

1. *$B(x,u) \le 1$ բոլոր $x \ne x^1$ կետերի և u կառավարումների համար,*
2. *$B(x(t),u(t)) \equiv 1$ ցանկացած օպտիմալ $(u(t),x(t))$ պրոցեսի համար:*

Դիցուք, այժմ, $(u(t),x(t))$-ն, $t_0 \le t < t_1$, օպտիմալ կառավարվող պրոցես է: Ֆիքսենք որևէ $t \in [t_0,t_1)$: Մեր ենթադրությունների համաձայն գոյություն ունեն $B(x,u)$ ֆունկցիայի անընդհատ մասնակի ածանցյալները ըստ $x_1, x_2, \dots, x_n$, ընդ որում վերը նշված թեորեմից հետևում է, որ մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոի: Ածանցենք $B(x,u)$ ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(x,u(t))}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x,u(t)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k} = 0,\end{aligned} \quad , k = 1,2,\dots,n: \qquad (7.2.7)$$

Քանի որ՝

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta(x(t))}{\partial x_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x_k \partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x_k \partial x_i} f_i(x(t),u(t)), \qquad (7.2.8)$$

ուստի (7.2.7) հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k}=0 \quad k=1,2,\ldots,n: \quad (7.2.7^*)$$

Նկատենք, որ նախորդ (7.2.4) – (7.2.7*) բանաձևերում $\theta(x)$ ֆունկցիան չի մտնում, մտնում են միայն դրա մասնակի ածանցյալները: Հարմարության համար նշանակենք՝

$$\psi_1(t)=\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_1},\psi_2(t)=\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_2},\ldots,\psi_n(t)=\frac{\partial\theta(x(t))}{\partial x_n}:$$

Այս նշանակումներով (7.2.6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$B(x,u)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)f_i(x,u),$$

իսկ (7.2.7*) հավասարումները՝

$$\dot{\psi}_k(t)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k}=0,\ \ k=1,2,\ldots,n:$$

Կամ՝

$$\dot{\psi}_k(t)=-\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\frac{\partial f_i(x,u(t))}{\partial x_k}, \quad k=1,2,\ldots,n: \quad (7.2.9)$$

Հարմարության համար ներմուծենք՝ $2n+m$ փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$H(\psi_1,\psi_2,..\psi_n;x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,\ldots,u_m)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i(x,u): \quad (7.2.10)$$

Այս ֆունկցիայի օգնությամբ (7.2.9) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{\psi}_k=-\frac{\partial H}{\partial x_k},\quad k=1,2,\ldots,n: \quad (7.2.11)$$

Ամփոփելով վերընշված ոչ խիստ դատողությունները, կարելի է ձևակերպել օպտիմալ կարավարման արագագործության խնդրի լուծման հետևյալ սկզբունքը:

Մաքսիմումի սկզբունք: Եթե կառավարվող պրոցեսը օպտիմալ է, ապա գոյություն ունի (7.2.9) համակարգի այնպիսի $\psi_1, \psi_2, ..\psi_n$ ոչ տրիվիալ լուծում, որ ցանկացած $t_0 \leq t < t_1$ համար՝

$$H\left(\psi(t), x(t), u(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(\psi(t), x(t), u\right), \tag{7.2.12}$$

$$\dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right):$$

Չնայած այն հանգամանքի, որ այս սկզբունքը ստացվել է դժվար ստուգվող ենթադրությունների դեպքում և չի կարող համարվել օպտիմալ պրոցեսի գոյության անհրաժեշտ պայման, սակայն պարզվում է, որ այս սկզբունքը գործում է նաև առանց որևէ ենթադրությունների $\theta(x)$ ֆունկցիայի վերաբերյալ: Անցնենք այդ սկզբունքի խիստ ապացուցմանը մասնավոր՝ գծային խնդրի դեպքում: Ընդհանուր դեպքի ապացույցը բավականաչափ բարդ է և կարելի է գտնել [7]-ում:

Արագագործության գծային խնդիր: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Դիցուք օպտիմալ կառավարման շարժման հավասարումները գծային են՝

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k \;;\; i = 1, 2, ..., n, \tag{7.2.13}$$

որտեղ a_{ij} և b_{kj} գործակիցները հաստատուններ են: Նույնիսկ ամենապարզ խնդիրներում օպտիմալ կառավարումը կարող է չլինել անընդհատ: Այդ պատճառով հարկավոր է ընդլայնել դիտարկվող կառավարումների դասը:

Սահմանում 7.2.1: $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\right)$ կառավարումը անվանում են *թույլատրելի կառավարում,* եթե $u_k(t)$, $k = 1, 2, ..., m$

ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը ունի ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով առաջին կարգի խզման կետեր (գոյություն ունեն աջից և ձախից վերջավոր սահմաններ), անընդհատ է աջից և անընդհատ է որոշման տիրույթի ծայրակետերում:

Եթե (7.2.13) հավասարումների a_{ij}, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$ գործակիցների մատրիցը նշանակենք A-ով և b_{ik}, $i=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,m$ գործակիցների մատրիցը՝ B-ով, ապա (7.2.13) հավասարումները կարող ենք գրել վեկտորական տեսքով՝

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{7.2.14}$$

Տրված $u(t)$ կառավարման համար հետագծի գոյության հարցը հանգեցնում է (7.2.13) համակարգի լուծման գոյությանը: Ինչպես հայտնի է (տես, օրինակ, [7]), համակարգի *լուծումը* սահմանվում է, որպես $a<t<b$ միջակայքի վրա որոշված $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right)$ ածանցելի ֆունկցիաների համակարգ, որոնք տեղադրելով (7.2.13) համակարգի մեջ, այդ համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումը դարձնում են նույնություն:

Բերենք գոյության մի թեորեմ, որի ապացույցը կարելի է գտնել [7] ում:

Թեորեմ 7.2.2: Եթե $u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $a<t<b$ միջակայքի վրա, ունեն վերջավոր սահմաններ $t\to a$ և $t\to b$ դեպքում, ապա, ինչպիսին էլ լինեն ֆազային $x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0$ կետերը, գոյություն ունեն $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$ ֆունկցիաներ, որոնք որոշված և անընդհատ են ամբողջ $a\le t\le b$ հատվածի վրա, հանդիսանում են (7.2.13) համակարգի լուծում և, բացի այդ, բավարարված են

$$x_1(a)=x_1^0\ ,x_2(a)=x_2^0\ ,\ldots,\ x_n(a)=x_n^0 \tag{7.2.15}$$

պայմանները: Այս պայմաններով $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ ֆունկցիաները որոշվում են միարժեքորեն:

Օգտվելով այս թեորեմից, կարելի է լուծում ստանալ նաև թույլատրելի կառավարումների դեպքում: Իրոք, դիցուք թույլատրելի կառավարումը կամայական $u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)\right)$ վեկտոր-ֆունկցիան է, որոշված $t_0 \le t \le t_1$ հատվածի վրա և $x^0=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$-ն որևէ ֆազային կետ է: Նշանակենք $\tau_1,\tau_2,...,\tau_l$ բոլոր այն կետերը, որտեղ $u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)$ ֆունկցիաներից առնվազն մեկը խզում ունի: Դիցուք այս կետերը համարակալված են աճման կարգով՝ $\tau_1<\tau_2<...<\tau_l$: Տեղադրելով $u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)$ ֆունկցիաները (7.2.10) հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k(t) \qquad i=1,2,...,n \tag{7.2.16}$$

կամ, վեկտորական տեսքով՝

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t): \tag{7.2.16*}$$

Նախ (7.2.16) համակարգը դիտարկենք $[t_0,\tau_1]$ հատվածում: Այս հատվածի վրա (7.2.13) համակարգը բավարարում է 7.2.2 թեորեմի պայմաններին, ուստի գոյություն ունեն $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են և անընդհատ $t_0 \le t \le \tau_1$ հատվածի վրա, բավարարում են սկզբնական (7,2.15) պայմաններին և հանդիսանում են (7.2.16) համակարգի լուծում $t_0<t<\tau_1$ վրա:

Այժմ կարող ենք (7.2.16) համակարգը դիտարկել $[\tau_1,\tau_2]$ հատվածի վրա, վերցնելով $x(\tau_1)=\left(x_1(\tau_1),x_2(\tau_1),...,x_n(\tau_1)\right)$ կետը որպես սկզբնական դիրք: $[\tau_1,\tau_2]$ հատվածի վրա նորից կարող ենք կիրառել 7.2.2 թեորեմը՝ գոյություն ունի լուծում $x(\tau_1)$ սկզբնական դիրքով: Այս լուծումը նույնպես նշանակենք $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$: Այժմ

$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ֆունկցիաները կառուցված են $t_0 < t < \tau_2$ հատվածի վրա, անընդհատ են այդ հատվածի վրա, ներառյալ τ_1 կետը և բավարարում են (7.2.15) սկզբնական պայմաններին: Շարունակելով այս գործընթացը, վերջ ի վերջո կկառուցենք $x(t)$ ֆունկցիան ամբողջ հատվածի վրա: Ստացված $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա և կտոր առ կտոր ածանցելի (կարող են խզվել միայն $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ կետերում): Այսպես կառուցված $x(t)$ ֆունկցիան կանվանենք (7.2.16) համակարգի՝ $u(t)$ կառավարմանը համապատասխանող լուծում: Կասենք, որ $u(t)$ կառավարումը տեղափոխում է ֆազային կետը x^0 դիրքից x^1 դիրք, եթե նրան համապատասխանող $x(t)$ լուծման համար $x(t_0) = x^0$ $x(t_1) = x^1$:

Այժմ անցնենք մաքսիմումի սկզբունքի ապացուցմանը արագագործության գծային խնդրում: Ենթադրենք, որ կառավարման U տիրույթը ուռուցիկ բազմանիստ է, պարունակում է սկզբնակետը, սակայն սկզբնակետը U-ի ծայրակետ չէ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ վերջնական ֆազային x^1 դիրքը սկզբնակետն է: Այսպիսով, դիտարկում ենք հետևյալ խնդիրը՝ կառավարվող օբյեկտը, որի շարժումը նկարագրվում է (7.2.16) հավասարումներով, հարկավոր է, ընտրելով յուրաքանչյուր վայրկյանին որևէ $u \in U$ կառավարում, R^n ֆազային տարածության ցանկացած x դիրքից մինիմալ ժամանակում բերել սկզբնակետ:

Սահմանում 7.2.2: Դիցուք T-ն որևէ դրական թիվ է: V_T-ով նշանակենք ֆազային տարածության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որտեղից կարելի է տեղափոխվել սկզբնակետ T ժամանակամիջոցում, կամ ավելի արագ, շարժվելով որևէ թույլատրելի կառավարմամբ: V_T բազմությունը անվանում են *T-ին համապատասխանող հասանելիության տիրույթ*:

Լեմ 7.2.1: V_T հասանելիության տիրույթը ուռուցիկ բազմություն է:

Ապացույց: Դիցուք x^0-ն V_T բազմության կամայական կետ է, $u(t)$-ն թույլատրելի կառավարում է, որը տեղափոխում է այդ կետը սկզբնակետ T-ն չգերազանցող t_1 ժամանակահատվածում և $x(t)$-ն $u(t)$-ին համապատասխանող հետագիծն է: Եթե $t_1 < T$, ապա կարող ենք շարունակել $u(t)$ կառավարումը և $x(t)$ հետագիծը ամբողջ $[0,T]$ հատվածի վրա, վերցնելով $x(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0$, երբ $t_1 < t \leq T$ Նշանակենք՝

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), \ 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, \quad t_1 < t \leq T \end{cases}, \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), \ 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, \quad t_1 < t \leq T \end{cases}$$

Այլ կերպ ասած, $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ կառավարվող պրոցեսի դեպքում $x(t)$ կետը t_1 պահին հասնում է սկզբնակետ և այնտեղ կանգնում ամբողջ մնացած ժամանակի ընթացքում: Այսպիսով, եթե $x^0 \in V_T$, ապա գոյություն ունի այնպիսի թույլատրելի կառավարում, որը տեղափոխում է կետը սկզբնակետ ուղիղ T ժամանակահատվածում և, հետևաբար V_T-ն կարելի է սահմանել, որպես ֆազային կետերի այնպիսի բազմություն, որոնցից կարելի է տեղափոխվել սկզբնակետ ուղիղ T ժամանակահատվածում:

Այժմ ցույց տանք V_T բազմության ուռուցիկությունը: Դիցուք x_0'-ն և x_0''-ն V_T բազմության երկու կամայական կետեր են և $\lambda \in (0,1)$: Կազմենք $\bar{x}_0 = \lambda x_0' + (1-\lambda) x_0''$ և ցույց տանք, որ $\bar{x}_0$ կետը նույնպես պատկանում է V_T-ին: Ըստ V_T բազմության սահմանման, գոյություն ունեն $(x'(t), u'(t))$ և $(x''(t), u''(t))$ թույլատրելի կառավարվող պրոցեսներ, որոշված $[0,T]$ հատվածի վրա, որոնք բավարարում են հետևյալ եզրային պայմաններին՝

$$x'(0)=x'_0,\ x''(0)=x''_0,\ x'(T)=x''(T)=0: \tag{7.2.17}$$

Նշանակենք՝

$$\overline{u}(t)=\lambda u'(t)+(1-\lambda)u''(t),\quad 0\le t\le T, \tag{7.2.18}$$

$$\overline{x}(t)=\lambda x'(t)+(1-\lambda)x''(t),\quad 0\le t\le T: \tag{7.2.19}$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, U կառավարման տիրույթը ուռուցիկ բազմանիստ է, ուստի (7.2.18)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $0\le t\le T$ համար $\overline{u}(t)$-ն պատկանում է U բազմությանը: Այնուհետև, $u'(t)$ և $u''(t)$ կառավարումները թույլատրելի կառավարումներ են, այսինքն ունեն ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով խզման կետեր, հետևաբար նաև $\overline{u}(t)$-ն ունի ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով խզման կետեր, այսինքն թույլատրելի է:

Մյուս կողմից, $x'(t)$-ն և $x''(t)$-ն համապատասխանաբար $u'(t)$ և $u''(t)$ կառավարումներին համապատասխանող հետագծերն են, ուստի $0<t<T$ միջակայքի բոլոր կետերում, բացի խզման կետերից, բավարարում են շարժման հավասարումներին՝

$$\dot{x}'(t)=Ax'(t)+Bu'(t),$$

$$\dot{x}''(t)=Ax''(t)+Bu''(t):$$

Բազմապատկելով այս առնչություններից առաջինը λ-ով, իսկ երկրորդը՝ $(1-\lambda)$-ով, կստանանք՝

$$\begin{aligned}\dot{\overline{x}}&=\lambda\dot{x}'(t)+(1-\lambda)\dot{x}''(t)=\\&=\lambda Ax'(t)+\lambda Bu'(t)+(1-\lambda)Ax''(t)+(1-\lambda)Bu''(t)=\\&=A\left[\lambda x'(t)+(1-\lambda)x''(t)\right]+B\left[\lambda u'(t)+(1-\lambda)u''(t)\right]=\\&=A\overline{x}(t)+B\overline{u}(t):\end{aligned}$$

Այսպիսով, բոլոր $0<t<T$ համար, բացի կառավարումների խզման կետերից, կառավարվող $(\overline{x}(t),\overline{u}(t))$ պրոցեսը բավարարում է շարժման հավասարումներին, այսինքն՝ $\overline{x}(t)$ հետագիծը համապատասխանում է $\overline{u}(t)$ կառավարմանը:

Վերջապես ստուգենք եզրային պայմանները: (7.2.17) և (7.2.19) –ից ունենք՝

$$\overline{x}(0)=\lambda x'(0)+(1-\lambda)x''(0)=\lambda x_0'+(1-\lambda)x_0''=\overline{x}_0,$$

$$\overline{x}(T)=\lambda x'(T)+(1-\lambda)x''(T)=\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 0=0:$$

Այսպիսով, ստացվեց, որ $\overline{u}(t)$ թույլատրելի կառավարումը տեղափոխում է ֆազային կետը $\overline{x}_0$ կետից սկզբնակետ T ժամանակում, այսինքն՝ $\overline{x}_0\in V_T$, և, հետևաբար, V_T-ն ուռուցիկ է:

Լեմ 7.2.2: Եթե x^0-ն V_T բազմության ներքին կետ է, ապա x^0-ից կարելի է հասնել սկզբնակետ ավելի արագ, քան T ժամանակահատվածում:

Ապացույց: Դիցուք x^0-ն V_T բազմության որևէ ներքին կետ: Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի ռռուցիկ M_0 բազմանիստ, որը ամբողջությամբ ընկած է V_T բազմության մեջ: M_0 բազմանիստի ծայրակետերը նշանակենք $y^1,y^2,\ldots,y^k$-ով: Քանի որ $y^i\in V_T, i=1,2,\ldots,k$, ապա յուրաքանչյուր y^i -ի համար գոյություն ունի $u^i(t)$ կառավարում, որը T ժամանակահատվածում y^i կետը տեղափոխում է սկզբնակետ: Համապատասխան հետագծերը նշանակենք $y^i(t)$-ով, $i=1,2,\ldots,k$: Այսպիսով, $y^i(0)=y^i$, $y^i(T)=0$: Վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ և նշանակենք

M_ε-ով $y^1(\varepsilon), y^2(\varepsilon), ..., y^k(\varepsilon)$ կետերի ուռուցիկ թաղանթը: Բավականաչափ փոքր ε-ի դեպքում այն նորից կպարունակի x^0 կետը: $y^i(\varepsilon)$, $i = 1,2,...,k$ կետից կարելի է հասնել սկզբնակետ $T-\varepsilon$ ժամանակում, շարժվելով $y^i(t)$ հետագծով: Հետևաբար, բոլոր $y^1(\varepsilon), y^2(\varepsilon), ..., y^k(\varepsilon)$ կետերը պատկանում են հասանելիության $V_{T-\varepsilon}$ տիրույթին: Քանի որ $V_{T-\varepsilon}$ բազմությունը ուռուցիկ է, ուստի $V_{T-\varepsilon}$ բազմությանը կպատկանի նաև x^0 կետը: Սա էլ նշանակում է, որ x^0 կետից կարելի է հասնել սկզբնակետ $T-\varepsilon<T$ ժամանակում:

Արագագործության գծային խնդրի համար (7.2.9)-(7.2.12) նշանակումները և առնչությունները կընդունեն ավելի պարզ տեսք՝

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k = \langle \psi, Ax \rangle + \langle \psi, Bu \rangle \qquad (7.2.20)$$

և, քանի որ առաջին գումարելին չի պարունակում u-ն, ապա՝

$$H\left(\psi(t), x(t), u(t)\right) = \max_{u\in U} H\left(\psi(t), x(t), u\right) =$$

$$= \max_{u\in U} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k = \max_{u\in U} \langle \psi, Bu \rangle : \qquad (7.2.21)$$

Օժանդակ $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ ֆունկցիաների համար կունենանք՝

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \psi_i, \quad j = 1,2,...,n,$$

հետևաբար,

$$\dot{\psi}_j = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\psi_i\,, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{7.2.22}$$

կամ՝

$$\dot{\psi} = -A^T\psi :$$

Լեմ 7.2.3: Դիցուք $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ *-ն կամայական թույլատրելի կառավարում է, որոշված* $t_0 \le t \le t_1$ *հատվածի վրա,* $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *-ն (7.2.10) հավասարման համապատասխան լուծումն է, որը սկսվում է որևէ* x^0 *կետից, իսկ* $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$ *ֆունկցիաները (7.2.9) հավասարումների համակարգի կամայական ոչ տրիվիալ լուծումն է: Այդ դեպքում՝*

$$\frac{d}{dt}\langle \psi(t), x(t)\rangle = \langle \psi(t), Bu(t)\rangle \tag{7.2.23}$$

$u(t)$ *կառավարման անընդհատության բոլոր կետերում (այն կետերում, որտեղ բոլոր* $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ *ֆունկցիաները անընդհատ են) և, հետևաբար,*

$$\langle \psi(t_1), x(t_1)\rangle - \langle \psi(t_0), x(t_0)\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(\tau), Bu(\tau)\rangle d\tau : \tag{7.2.23}$$

__Ապացույց:__ $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ կառավարումների անընդհատության կետերում՝

$$\frac{d}{dt}\langle \psi(t), x(t)\rangle = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\dot{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\dot{\psi}_i(t)x_i(t) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k\right)\psi_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\left(-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\psi_j(t)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k\right)\psi_i(t)=\langle\psi(t),Bu(t)\rangle:$$

Քանի որ $\langle\psi(t),x(t)\rangle$ սկալյար արտադրյալը անընդհատ ֆունկցիա է և ունի ածանցյալներ ամենուրեք, բացի վերջավոր թվով կետերից, ուստի՝

$$\psi(t_1)x(t_1)-\psi(t_0)x(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\langle\psi(\tau),x(\tau)\rangle d\tau=\int_{t_0}^{t_1}\langle\psi(\tau)Bu(\tau)\rangle d\tau:$$

Հետևանք: Դիցուք $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ ֆունկցիաները

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad i=1,2,...,n$$

համասեռ համակարգի լուծումն է, իսկ $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),...,\psi_n(t))$ ֆունկցիաները՝ (7.2.22) համակարգի լուծումն է: Այդ դեպքում $\langle\psi(t),x(t)\rangle$ սկալյար արտադրյալը հաստատուն է:

Իրոք, $x(t)$-ն (7.2.10) համակարգի լուծումն է $u(t)\equiv 0$ կառավարման դեպքում: Հետևաբար՝

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t),x(t)\rangle=0, \quad \text{այսինքն՝} \qquad \langle\psi(t),x(t)\rangle=const:$$

Թեորեմ 7.2.3 (Մաքսիմումի սկզբունք). *Դիցուք արագագործության գծային խնդրում $(u(t),x(t))$–ն օպտիմալ պրոցես է, որը մինիմալ ժամանակում տեղափոխում է x^0 ֆազային կետը սկզբնակետ: Այդ դեպքում գոյություն ունի (7.2.22) համակարգի այնպիսի ոչ տրիվիալ*

$\psi(t)$ լուծում, որ ժամանակի ցանկացած պահին $u(t)$ կառավարումը բավարարվում է մաքսիմումի պայմանին՝

$$H\left(\psi(t),x(t),u(t)\right)=\max_{u\in U}H\left(\psi(t),x(t),u\right)=$$
$$=\max_{u\in U}\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k=\max_{u\in U}\langle\psi,Bu\rangle:$$

Ապացույց: Դիցուք $\left(x(t),u(t)\right)$-ն օպտիմալ պրոցես է, որը տեղափոխում է օբյեկտը x^0 ֆազային կետից սկզբնակետ $T=t_1-t_0$ ժամանակում: Դիտարկենք հասանելիության V_T տիրույթը: 7.2.2 լեմից հետևում է, որ x^0 կետը V_T բազմության եզրային կետ է: Դիցուք Γ-ն x^0 կետով անցկացրած V_T բազմության որևէ հենքային հիպերհարթություն է: Նշանակենք Π-ով այն կիսատարածությունը, որը որոշվում է Γ հիպերհարթությամբ և պարունակում է V_T բազմությունը: Նշանակենք $\overline{n}$-ով հիպերհարթության նորմալ վեկտորը, որը դուրս է գալիս x^0 կետից և գտնվում է Π կիսատարածությունում: Π կիսատարածությունը բաղկացած է այն բոլոր x կետերից, որոնց համար $\left(x-x^0\right)$ վեկտորը կազմում է սուր կամ ուղիղ անկյուն $\overline{n}$ վեկտորի հետ, այսինքն որոնց համար $\left\langle\overline{n},\left(x-x^0\right)\right\rangle$ սկալյար արտադրյալը ոչ բացասական է՝

$$\left\langle\overline{n},\left(x-x^0\right)\right\rangle\geq 0: \tag{7.2.25}$$

Քանի որ V_T բազմությունը ամբողջությամբ ընկած է Π կիսատարածության մեջ, ուստի V_T բազմության ցանկացած x կետի համար այս անհավասարությունը ճիշտ է:

Սկզբնական $\psi(t_0)=\overline{n}$ պայմանով (7.2.22) հավասարման լուծումը նշանակենք $\psi(t)=\left(\psi_1(t),\psi_2(t),\ldots,\psi_n(t)\right)$-ով և այն դիտարկենք

$t_0 \le t \le t_1$ հատվածի վրա: Այս լուծումը տրիվիալ չէ, քանի որ $\overline{n} \ne 0$: Ցույց տանք, որ $\psi(t)$-ն այն լուծումն է, որի դեպքում $u(t)$-ն բավարարում է մաքսիմումի պայմանին: Ենթադրենք հակառակը՝ որոշակի $\tau \in [t_0, t_1]$ պահին մաքսիմումի (7.2.21) պայմանը տեղի չունի, այսինքն կգտնվի այնպիսի $v \in U$, որի համար

$$\langle \psi(\tau), Bu(\tau) \rangle < \langle \psi(\tau), Bv \rangle \tag{7.2.26}$$

Եթե $\tau < t_1$, ապա $u(t)$ կառավարումը և, հետևաբար, $\langle \psi(t), Bu(t) \rangle$ սկալյար արտադրյալը անընդհատ է աջից τ կետում, այսինքն անընդհատ է որևէ $[\tau, \tau + h]$ հատվածի վրա: Անընդհատությունից հետևում է, որ այդ հատվածի վրա տեղի ունի (7.2.26) անհավասարությունը:

Եթե $\tau = t_1$, ապա $u(t)$ կառավարումը և, հետևաբար, $\langle \psi(t), Bu(t) \rangle$ սկալյար արտադրյալը անընդհատ է ձախից τ կետում, այսինքն անընդհատ է որևէ $[\tau - h, \tau]$ հատվածի վրա: Անընդհատությունից հետևում է, որ այդ հատվածի վրա տեղի ունի (7.2.26) անհավասարությունը: Բոլոր դեպքերում ստանում ենք, որ գոյություն ունի այնպիսի $[\tau_1, \tau_2]$ հատված, որ բոլոր $t \in [\tau_1, \tau_2]$ համար՝

$$\langle \psi(t), Bu(t) \rangle < \langle \psi(t), Bv \rangle$$

Այժմ սահմանենք $\overline{u}(t)$ կառավարում $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա հետևյալ կերպ՝ $\overline{u}(t) = v$, եթե $t \in [\tau_1, \tau_2)$ և հավասար է $u(t)$ $[t_0, t_1]$ հատվածի մյուս կետերում: $\overline{x}(t)$-ով նշանակենք $\overline{u}(t)$ կառավարմանը համապատասխանող հետագիծը $\overline{x}(t_1) = 0$ վերջնական պայմանով: Այս հետագիծը դիտարկենք $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա և սկզբնական կետը նշանակենք $\overline{x}^0$-ով ($\overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$): Այսպիսով, $\overline{x}^0$ կետից կարելի է տեղափոխվել սկզբնակետ $T=t_1-t_0$ ժամանակում կիրառելով $\overline{u}(t)$ կառավարումը: Ուստի $\overline{x}^0$ կետը պատկանում է V_T հասանելիության տիրույթին և ըստ (7.2.25)-ի՝

$$\left\langle \overline{n}, \left(\overline{x}^0 - x^0\right)\right\rangle \geq 0:$$

Կիրառենք լեմ 7.2.3-ը $\psi(t), x(t), u(t)$ ֆունկցիաների նկատմամբ $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա՝

$$\left\langle \psi(t_1), x(t_1)\right\rangle - \left\langle \psi(t_0), x(t_0)\right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(\tau), Bu(\tau)\right\rangle d\tau:$$

Նմանապես՝

$$\left\langle \psi(t_1), \overline{x}(t_1)\right\rangle - \left\langle \psi(t_0), \overline{x}(t_0)\right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(\tau), B\overline{u}(\tau)\right\rangle d\tau:$$

Հանելով երկրորդ հավասարությունը առաջինից և նկատելով, որ $x(t_1) = \overline{x}(t_1) = 0$, ստանում ենք՝

$$\left\langle \psi(t_0), \left(\overline{x}(t_0) - x(t_0)\right)\right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left(\left\langle \psi(\tau), Bu(\tau)\right\rangle - \left\langle \psi(\tau), B\overline{u}(\tau)\right\rangle\right) d\tau:$$

Այս հավասարության ձախ մասը հավասար է $\left\langle \overline{n}, \left(\overline{x}^0 - x^0\right)\right\rangle$, իսկ աջ մասում $[\tau_1, \tau_2]$ հատվածի վրա $\overline{u}(t) = v$, իսկ այս հատվածից դուրս $\overline{u}(t) = u(t)$, հետևաբար ենթաինտեգրալային ֆունկցիան հավասար է 0-ի: Այսպիսով կստանանք՝

$$\left\langle \overline{n}, \left(\overline{x}^0 - x^0\right)\right\rangle = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\left\langle \psi(\tau), Bu(\tau)\right\rangle - \left\langle \psi(\tau), Bv\right\rangle\right) d\tau:$$

Քանի որ աջ մասում ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ըստ (7.2.26)-ի խիստ բացասական է, ուստի՝

$$\left\langle \overline{n}, \left(\overline{x}^0 - x^0 \right) \right\rangle < 0$$

Սա հակասում է (7.2.25) անհավասարությանը: Այս հակասությունը ապացուցում է, որ մաքսիմումի պայմանը բավարարվում է բոլոր $t \in \left[t_0, t_1 \right]$ համար:

Օրինակ: Որպես արագագործության գծային խնդրի օրինակ դիտարկենք սույն բաժնի սկզբում դիտարկված մեքենայի ուղղագիծ շարժման օրինակը, ենթադրելով, որ շփման ուժը բացակայում է, իսկ զանգվածը հավասար է 1-ի: Այս խնդրի շարժման հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u: \end{cases}, \ |u| \le 1 \ , \ \ x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0:$$

Կառուցենք H ֆունկցիան՝

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u:$$

Հեշտ է տեսնել, որ H ֆունկցիայի մաքսիմումը կախված է u-ի գործակցի նշանից՝ եթե t պահին $\psi_2(t) > 0$, ապա H ֆունկցիան կունենա մաքսիմում $u = 1$ կառավարման դեպքում, իսկ եթե $\psi_2(t) < 0$ ապա մաքսիմում կստանանք, երբ $u = -1$: Այնուհետև, օգտվելով (7.2.9) բանաձևերից, օժանդակ $\psi_1(t), \psi_2(t)$ ֆունկցիաների համար ստանում ենք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1: \end{cases}$$

որտեղից՝

$$\psi_1(t) = c_1, \psi_2(t) = c_1 t + c_2,$$

որտեղ c_1, c_2-ը ինտեգրման հաստատուններն են: Այսպիսով, $\psi_2(t)$ ֆունկցիան, լինելով գծային ֆունկցիա, նշանը կարող է փոխել ոչ ավելի քան մեկ անգամ, հետևաբար օպտիմալ կառավարումը ունի ոչ ավելի, քան մեկ խզման կետ $[t_0, t_1]$ հատվածի վրա:

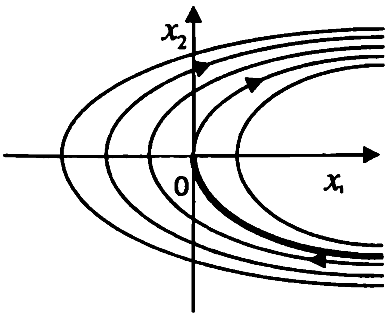
Ժամանակի այն հատվածում, որտեղ $u \equiv 1$, շարժման հետագծի համար կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1: \end{cases}$$

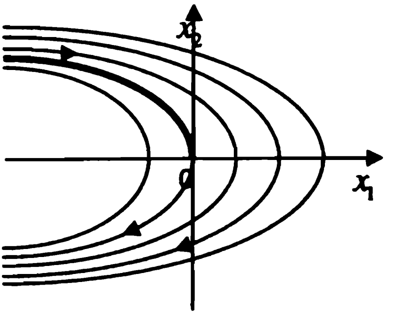
Որտեղից՝

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c:$$

Ստանում ենք պարաբոլների ընտանիք, կախված c հաստատունից: Այսպիսով, հետագծի այն կտորը, որը համապատասխանում է $u \equiv 1$ կառավարմանը, իրենից ներկայացնում է պարաբոլի աղեղ: Քանի որ $\dot{x}_2 = 1 > 0$, հետևաբար շարժումը այս պարաբոլներով կատարվում է ներքևից վերև (տես նկ. 7.2.1), ընդ որում այս ընտանիքի միայն մեկ պարաբոլն է անցնում սկզբնակետով:



Նկ.7.2.1



Նկ.7.2.2

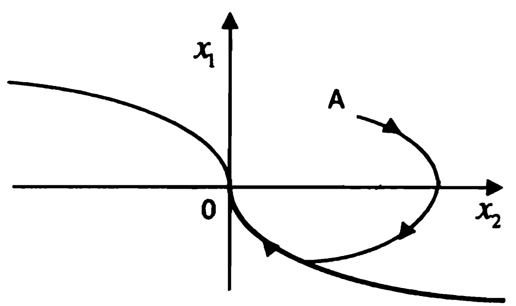
Այն հատվածում, որտեղ $u \equiv -1$, շարժման հավասարումները կստանան հետևյալ տեսքը՝

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2, \\
\dot{x}_2 = -1:
\end{cases}
$$

և հետագծի համար կստանանք՝

$$
x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + c
$$

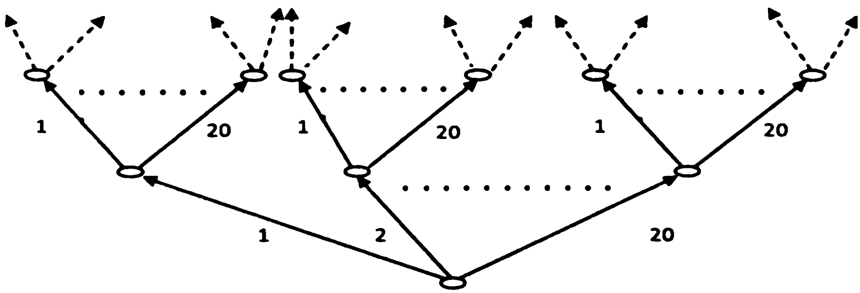
Նորից ստանում ենք պարաբոլների ընտանիք, սակայն ողղված հակառակ կողմ: Այս պարաբոլներով շարժումը կկատարվի վերից վար, քանի որ $\ddot{x}_2 = -1 < 0$ (տես նկ.7.2.2), ընդ որում և այս ընտանիքի միայն մեկ պարաբոլն է անցնում սկզբնակետով :
Այսպիսով, հետագիծը կունենա հետևյալ տեսքը. կախված այն բանից, թե որ քառորդում է սկզբնական դիրքը, կետը կշաժվի մեկ պարաբոլով, այնուհետև, փոխելով կառավարումը $u \equiv 1$-ից $u \equiv -1$, կամ հակառակը, կանցնի մյուս պարաբոլի վրա և կհասնի սկզբնակետ:Նկար 7.2.3-ում պատկերված է A սկզբնական դիրքից ֆազային կետի օպտիմալ հետագծի մի օրինակ:



Նկ.7.2.3

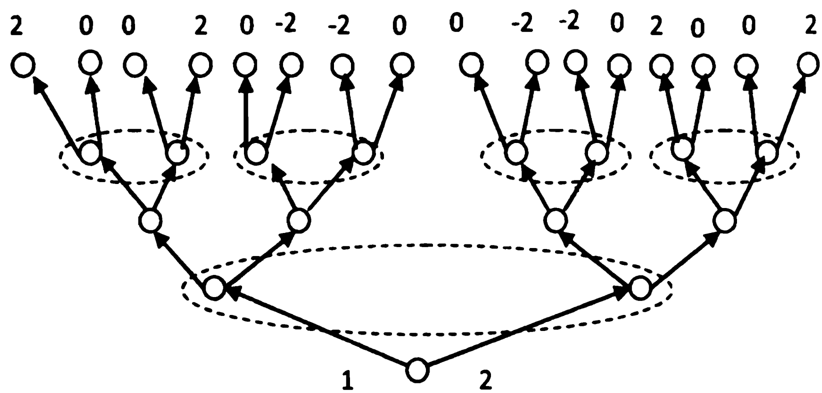
7.3. ԴԻՐՔԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ

Դիրքային խաղերը *n* խաղացողի այն խաղերն են, որտեղ որոշումներն ընդունվում են ժամանակի ընթացքում՝ քայլ առ քայլ: Դիտարկենք մի օրինակ՝ բոլորին հայտնի շախմատային խաղը: Ինչպես հայտնի է, այս խաղում երկու խաղացող կա՝ սպիտակները և սևերը: Խաղն սկսվում է սկզբնական դիրքից՝ խաղատախտակի վրա ֆիգուրների սկզբնական դասավորությունից: Այս դիրքին կարելի է համապատասխանեցնել մի կետ հարթության վրա: Առաջին քայլը կատարում են սպիտակները՝ ընտրելով 20 հնարավոր քայլերից մեկը: Հնարավոր այս քայլերից յուրաքանչյուրի ընտրության դեպքում խաղատախտակի վրա ստանում ենք նոր դիրք՝ 20 հնարավոր դիրքերից մեկը, որը նույնպես կարելի է նշել կետով հարթության վրա: Ցույց տալու համար, որ այս դիրքերը կարելի է «ընկնել» սկզբնական դիրքից, յուրաքանչյուր դիրքը սկզբնականի հետ միացնենք սլաքով: Հաջորդ քայլը սևերինն է: Նրանք նույնպես ունեն 20 հնարավոր ընտրություն ստացված 20 դիրքերից յուրաքանչյուրում: Հետևաբար, սևերի առաջին քայլից հետո կարող է ստեղծվել 400 դիրք: Այս պրոցեսը շարունակելով, հարթության վրա կստանանք կետերի և սլաքների բազմություն (տես նկ.7.3.1): Այն դիրքերին, որտեղ խաղն ավարտվում է (օրինակ մատային կամ պատային դիրքերում) համապատասխանում են դիրքեր, որոնցից սլաք չի դուրս գալիս (վերջնական դիրքեր): Յուրաքանչյուր վերջնական դիրքին համապատասխանեցնենք 1, -1, կամ 0 թվեր, կախված նրանից, սպիտակները հաղթել են այդ դիրքում, պարտվել են, թե խաղն ավարտվել է ոչ-ոքի:



Նկար 7.3.1

Նշանակենք բոլոր դիրքերի բազմությունը X-ով, սլաքների բազմությունը՝ E-ով, վերջնական դիրքերի բազմությունը՝ X^*-ով: Այս նշանակումներով շախմատի մոդելը կարելի է ներկայացնել $\Gamma = \langle X, E \rangle$ զույգով և $H : X^* \to \{-1, 0, +1\}$ շահույթի ֆունկցիայով: Ինչպես հայտնի է, $\langle X, E \rangle$ զույգը կոչվում է *գրաֆ* և, մասնավորապես, կառուցված գրաֆը միակապ, կողմնորոշված, ացիկլիկ գրաֆ է, որն անվանում են *ծառ*, իսկ սկզբնական դիրքը՝ *ծառի արմատ*: Ընդհանուր դեպքում կարող են լինել երկուսից ավելի խաղացողներ: Բացի այդ, քանի որ որոշումները ընդունվում են ժամանակի ընթացքում, ապա որոշումները ընդունելիս առաջանում է նաև նախորդ քայլերում ընդունված որոշումների վերաբերյալ տեղեկատվության քանակի և կառուցվածքի հարցը: Դիրքային խաղերում այս տեսակի հարցերը ընդունված է լուծել ինֆորմացիոն բազմությունների հասկացության միջոցով: Կոպիտ ասած, քայլ կատարելիս խաղացողը կարող է իմանալ ոչ թե կոնկրետ դիրքը, այլ միայն դիրքերի որ բազմությունում է գտնվում: Նկար 7.3.2-ում բերված է երկու քայլանի “գիր-դուշ” խաղի ծառը:



Նկար 7.3.2

Այժմ տանք դիրքային խաղի ընդհանուր սահմանումը:

Սահմանում 7.3.1: n-խաղացողի G խաղը որոշվում է.

1. Խաղի $\langle X, E\rangle$ ծառով,
2. Խաղացողների $I=\{1,2,\ldots,n\}$ բազմությամբ,
3. $X=X_1\bigcup X_2\bigcup\ldots\bigcup X_m\bigcup X^*$ տրոհումով ըստ քայլերի, $X_1=\{x_1\}$,
4. $X\setminus X^*=\bigcup\limits_{i\in I}X^i$ տրոհումով ըստ խաղացողների,
5. $X^i\bigcap X_j=\bigcup\limits_{l=1}^{k_{ij}}u_l^{ij}$, $i\in I$ ինֆորմացիոն տրոհումներով,
6. $h_i: X^*\to(-\infty,+\infty)$, $i\in I$ շահույթի ֆունկցիաներով:

Դիրքային խաղը խաղացվում է հետևյալ կերպ: Նշանակենք E_x-ով սլաքների բազմությունը, որը դուրս է գալիս x դիրքից: Սլաքները անվանում են *այլընտրանքներ*: Դիցուք սկզբնական x_1 դիրքը պատկանում է X^{j_0} բազմությանը: Սա նշանակում է, որ սկզբնական դիրքում քայլի իրավունքը j_0 խաղացողինն է՝ նա ընտրում է որևէ $e=(x_1,x_2)\in E_{x_1}$: Եթե $x_2\in u_l^{2j_1}\subseteq X^{j_1}$, ապա քայլը j_1-րդ խաղացողինն է և նա ընտրում որևէ $e=(x_2,x_3)\in E_{x_2}$: Այստեղ ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր ինֆորմացիոն բազմության x դիրքերի համար E_x բազմությունները համընկնում են: Այս պրոցեսը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև խաղը տեղափոխվի որևէ $x\in X^*$ Այստեղ խաղն ավարտվում է և յուրաքանչյուր խաղացող ստանում է իր շահույթի ֆունկցիայի արժեքը $x\in X^*$ կետում:

Սահմանում 7.3.2. Խաղացողի *մաքուր ստրատեգիա* G խաղում անվանում են ցանկացած արտապատկերում, որը խաղացողի յուրաքանչյուր ինֆորմացիոն բազմությանը համապատասխանության մեջ է դնում այդ բազմությունից դուրս եկող որևէ այլընտրանք: Դժվար չէ ստուգել, որ ստրատեգիաների ցանկացած $s=(s_1, s_2, \ldots s_n)$ վեկտորը միարժեքորեն որոշում է որևէ $x(s)\in X^*$ վերջնական դիրք: Եթե i-րդ խաղացողի մաքուր ստրատեգիաների բազմությունը նշանակենք S_i-ով, և $H_i(s)=h_i(x(s))$, $i\in I$, ապա խաղը կարելի է ներկայացնել հետևյալ համակարգի տեսքով՝

$$\left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i(s)\}_{i\in I} \right\rangle$$

որն անվանում են n-խաղացողի խաղի նորմալ տեսք (տես *5.1* բաժինը): Այս եղանակով ցանկացած վերջավոր դիրքային խաղ կարելի է բերել նորմալ տեսքի: Մասնավորապես հակամարտ դիրքային խաղերը կբերվեն մատրիցային խաղերի, որոնց լուծման գոյությունը և լուծման եղանակները դիտարկվել են *5.3* բաժնում:

Սակայն երբ ինֆորմացիոն բազմությունների թիվը աճում է, շատ արագ աճում է մաքուր ստրատեգիաների թիվը: Բացի այդ, որոշ դեպքերում դիրքային կառուցվածքը թույլ է տալիս անհամեմատ հեշտ լուծել խաղը:

Բերենք դիրքային խաղերի մի կարևոր մասնավոր դեպքի սահմանում:

Սահմանում 7.3.3. Դիրքային G խաղն անվանում են *լրիվ ինֆորմացիայով խաղ*, եթե խաղի բոլոր ինֆորմացիոն բազմությունները մեկ տարրանի բազմություններ են:

Լրիվ ինֆորմացիայով խաղի օրինակ է հանդիսանում շախմատը: Առանց ապացուցման բերենք թեորեմ լրիվ ինֆորմացիայով խաղերի վերաբերյալ (տես [18]):

Թեորեմ 7.3.1. Լրիվ ինֆորմացիայով խաղերում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ մաքուր ստրատեգիաներում:

Դիտարկենք դիրքային խաղի մեկ այլ մոդել, որը չի օգտագործում գրաֆը, որպես մոդելի հիմք, ինչը թույլ է տալիս այն օգտագործել նաև ուսումնասիրելու անվերջ դիրքային խաղերը: Այս մոդելի հիմնական առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ այն դիրքային է միայն առաջին խաղացողի համար: Մոդելը տրվում է օբյեկտների հետևյալ համակարգով..

1. $U_1, U_2, ... U_n$ բազմություններով, որոնց անվանում են ինֆորմացիոն տարածություններ,

2. $X_1 X_2, ..., X_n$ բազմություններով, որոնց անվանում են առաջին խաղացողի այլընտրանքների տարածություններ,

3. $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ բազմություններով, որոնց անվանում են հակառակորդի այլընտրանքների տարածություններ,

4. $g_i : \prod_{j=1}^{i} Z_j \times \prod_{j=1}^{i-1} X_j \to U_i, i = 1, 2, ..., n$

արտապատկերումներով, որոնց անվանում են ինֆորմացիոն արտապատկերումներ,

5. $H : \prod_{j=1}^{n} Z_j \times \prod_{j=1}^{n} X_j \to R$ արտապատկերումով, որն

անվանում են առաջին խաղացողի շահույթի ֆունկցիա:

Խաղում են հետևյալ կերպ: Առաջին քայլում հակառակորդը ընտրում է որևէ $z_1 \in Z_1$ այլընտրանք: Արաջին խաղացողին հայտնի է դառնում $g_1(z_1) \in U_1$ արտապատկերման արժեքը և նա ընտրում է որևէ $x_1 \in X_1$ կետ: Այնուհետև հակառակորդը ընտրում է որևէ $z_2 \in Z_2$: Առաջին խաղացողին հայտնի է դառնում $g_2(z_1, z_2, x_1) \in U_2$ արտապատկերման արժեքը, և նա ընտրում է որևէ $x_2 \in X_2$: Խաղը շարունակվում է այնքան ժամանակ, մինչև ընտրվեն բոլոր $z_1, ... z_n, x_1, ..., x_n$ և առաջին խաղացողը ստանում է H արտապատկերման արժեքն այդ կետում, այսինքն՝ $H(z_1, ... z_n, x_1, ..., x_n)$: Ընդհանուր դեպքում բոլոր $U_1, U_2, .. U_n$; $X_1 X_2, ..., X_n$ բազմությունները ենթադրվում են չափելի տարածություններ, իսկ H և $g_i, i = 1, 2, ..., n$ արտապատկերումները՝

չափելի արտապատկերումներ: Սակայն, ավելորդ բարդություններից խուսափելու համար կդիտարկենք միայն վերջավոր խաղեր:

Սահմանում 7.3.3. *Խաղացողի մաքուր ստրատեգիան* սահմանվում է որպես

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n),\; c_i : U_i \to X_i,\; i = 1,2,\ldots,n$$

արտապատկերումների վեկտոր: *Հակառակորդի ստրատեգիան* սահմանվում է որպես $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \prod_{j=1}^{n} Z_j$ վեկտոր: (Այստեղ չենք տարբերում հակառակորդի մաքուր և խառն ստրատեգիաները):

Խաղացողի և հակառակորդի ստրատեգիաների յուրաքանչյուր (c, z) զույգ միարժեքորեն որոշում է $x_{c,z} = (x_1, \ldots, x_n)$ կետ հետևյալ կերպ՝

$$x_i = c_i(g_i(z_1, \ldots, z_i, x_1, \ldots, x_{i-1})), i = 2, \ldots, n$$
$$x_1 = c_1(z_1):$$

Այստեղից, ստրատեգիաների յուրաքանչյուր (c, z) զույգ միարժեքորեն որոշում է խաղացողի շահույթը՝

$$\bar{H}(c, z) = H(x_{c,z}, z):$$

Խաղացողի խառն ստրատեգիան սահմանվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$-ն հավանականային տարածություն է: Նշանակենք՝ $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$

Սահմանում 7.3.4. *Խաղացողի խառն ստրատեգիա* կանվանենք

$$s = \{s_u\}_{u \in U},\; s_u : \Omega \to X_i,\; u \in U_i \;\; i = 1, 2, \ldots, n:$$

Պատահական մեծությունների համախմբությունը:

Տիքսած $z \in Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ դեպքում յուրաքանչյուր s խառն ստրատեգիան միարժեքորեն որոշում է $\mu_{s,z}$ հավանականային չափ $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ բազմության վրա հետևյալ կերպ: Յուրաքանչյուր (ω, z, s) եռյակի համար, որտեղ $\omega \in \Omega$, ռեկուրենտ բանաձևով սահմանենք $w(\omega, s, z) = (w_1, w_2, ..., w_n)$ վեկտոր՝

$$w_1 = s_{g_1(z_1)}(\omega), \quad w_i = s_{g_i(z_1,...,z_i w_1,...,w_{i-1})}(\omega), \quad i = 1,2,...,n.$$

Եվ $\mu_{s,z}$ չափը սահմանվում է որպես $w(\cdot, s, z)$ պատահական վեկտորի հավանականային բաշխում՝

$$\mu_{s,z} = Pw^{-1}(\cdot, s, z):$$

Սահմանում 7.3.5. Երկու՝ s' և s'' ստրատեգիաներն անվանում են *համարժեք*, եթե ցանկացած $z \in Z$ համար $\mu_{z,s'} = \mu_{z,s''}$:

Խաղի ինֆորմացիոն կառուցվածքը բնորոշվում է g_i ինֆորմացիոն արտապատկերումների հատկություններով:

Սահմանում 7.3.6. Խաղն անվանում են *լրիվ հիշողությամբ խաղ*, եթե գոյություն ունեն այնպիսի

$$\varphi_j^i : U_i \to U_j \quad j < i,$$

$$\psi_j^i : U_i \to X_j, \quad j < i,$$

արտապատկերումներ (որոնք հայտնի են խաղացողին) որ՝

$$\varphi_j^i g_i(z_1, ..., z_i, x_1, ... x_{i-1}) = g_i(z_1, ..., z_j, x_1, ... x_{j-1}),$$

$$\psi_j^i g_i(z_1, ..., z_i, x_1, ... x_{i-1}) = x_j:$$

Սա նշանակում է, որ լրիվ հիշողությամբ խաղերում խաղացողը հիշում է, թե ինչպիսի ինֆորմացիա է նա ստացել, և ինչ ընտրություններ է կատարել նախորդ քայլերում:

Սահմանում 7.3.7. Խաղացողի խառն $s=\{s_u\}_{u\in U}$ ստրատեգիան կանվանենք *վարքելակերպի ստրատեգիա*, եթե բոլոր $s_u, u\in U$ պատահական մեծությունները միմիանցից անկախ են:

Թեորեմ 7.3.1. *Լրիվ հիշողությամբ խաղերում խաղացողի ցանկացած խառն ստրատեգիայի համար գոյություն ունի համարժեք վարքելակերպի ստրատեգիա:*

Ապացույց: Դիցուք $s=\{s_u\}_{u\in U}$ խաղացողի որևէ խառն ստրատեգիա է: Կառուցենք այս ստրատեգիային համապատասխանող վարքելակերպի ստրատեգիա: Դիցուք $u\in U, u\in U_i$, $u=g_i(z_1,z_2,\ldots,z_i;x_1,x_2,\ldots,x_{i-1})$: Նշանակենք՝ $u_k=g_i(z_1,z_2,\ldots,z_k;x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})$, $k=1,2,\ldots,i-1$: Քանի որ խաղը լրիվ հիշողությամբ խաղ է, ուստի՝

$$u_k=\varphi_k^i u,\ \ x_k=\phi_k^i u,\ k=1,2,\ldots,i-1:$$

Նշանակենք՝

$$\nu_u(x_i)=P\left\{s_u=x_i\mid s_{u_k}=x_k, k=1,2,\ldots,i-1\right\}=$$

$$=P\left\{s_u=x_i\mid s_{\varphi_k^i u}=\phi_k^i u, k=1,2,\ldots,i-1\right\}:$$

Այստեղ $P(\cdot|\cdot)$-ով նշանակված են պայմանական հավանականությունները: Հավանականությունների դասընթացից հայտնի է, որ X_i բազմության վրա որոշված ցանկացած ν_u հավանականային բաշխման համար գոյություն ունի $q_u:\Omega\to X_i$ պատահական մեծություն, այնպես, որ՝ $\nu_u(x_i)=P\{q_u=x_i\}$: Ակնհայտ է, որ այսպես կառուցած $q=\{q_u\}_{u\in U}$ ստրատեգիան վարքելակերպի ստրատեգիա է:

Ցույց տանք, որ s և q ստրատեգիաները համարժեք են: Ֆիքսենք որևէ $z \in Z$ և կամայական $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ համար դիտարկենք՝

$$\mu_{z,s}(x) = P\{w(\cdot, s, z) = x\} =$$
$$= P\left\{s_{g_1(z)} = x_1, s_{g_2(z,x_1)} = x_2, \dots, s_{g_{n-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})} = x_n\right\}:$$

Նշանակենք՝ $u_i = g_i(z, x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$: Կստանանք՝

$$\mu_{z,s}(x) = P\left\{s_{u_1} = x_1, s_{u_2} = x_2, \dots, s_{u_n} = x_n\right\} =$$
$$= P\left\{s_{u_n} = x_n \mid s_{u_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, s_{u_1} = x_1\right\} \times$$
$$\times P\left\{s_{u_{n-1}} = x_{n-1} \mid s_{u_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, s_{u_1} = x_1\right\} \cdots$$
$$\cdots P\left\{s_{u_1} = x_1\right\} = P\left\{s_{u_n} = x_n \mid s_{\phi_{n-1}^n u} = \phi_{n-1}^n u_n, \dots, s_{\phi_1^n u_n} = \phi_1^n u_n\right\} \times$$
$$\times P\left\{s_{u_n - 1} = x_{n-1} \mid s_{\phi_{n-2}^n u} = \phi_{n-2}^n u_n, \dots, s_{\phi_1^n u_n} = \phi_1^n u_n\right\} \cdots P\left\{s_{\phi_1^n u_n} = x_1\right\} =$$
$$= \nu_{u_n}(x_n) \nu_{u_{n-1}}(x_{n-1}) \cdots \nu_{u_1}(x_1) =$$
$$= P\left\{q_{u_n} = x_n\right\} P\left\{q_{u_{n-1}} = x_{n-1}\right\} \cdots P\left\{q_{u_1} = x_1\right\} =$$
$$= P\left\{q_{u_n} = x_n, q_{u_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, q_{u_1} = x_1\right\} = \mu_{z,q}(x):$$

Այսպիսով թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 7.3.8. Լրիվ հիշողությամբ խաղն անվանում են *միաժամանակյա խաղ*, եթե խաղում գոյություն ունեն խաղացողին հայտնի

$$\psi_j^i : U_i \to Z_j \, , \; j < i$$

արտապատկերումներ, այնպես որ՝

$$\psi_j^i g_i(z_1, \dots, z_i, x_1, \dots x_{i-1}) = z_j :$$

Ներմուծենք օժանդակ խաղեր նորմալ տեսքով: Նշանակենք՝

$$G(0)=\langle X_1,Z_1,H_0\rangle,\ G(\hat{x}_{n-1},\hat{z}_{n-1})=\langle X_n,Z_n,H_{\hat{x}_{n-1},\hat{z}_{n-1}}\rangle,$$

$$G(\hat{x}_{k-1},\hat{z}_{k-1})=\langle X_k,Z_k,H_{\hat{x}_{k-1},\hat{z}_{k-1}}\rangle,\ k=1,2,\dots,n-1,$$

Որտեղ՝

$$\tilde{H}_0(x_1,z_1)=V(G(x_1,z_1)),$$
$$\tilde{H}_{\hat{x}_{n-1},\hat{z}_{n-1}}(x_n,z_n)=H(x_1,x_2,\dots,x_n;z_1,z_2,\dots,z_n),$$
$$\tilde{H}_{\hat{x}_{k-1},\hat{z}_{k-1}}(x_k,z_k)=V(G(\hat{x}_{k-1},\hat{z}_{k-1})),\ k=1,2,\dots,n-1:$$

Այստեղ $V(G)$-ով նշանակված է G խաղի արժեքը, ցանկացած $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ վեկտորի համար նշանակել ենք՝ $\hat{y}_k=(y_1,y_2,\dots,y_k)$: Առանց ապացուցման բերենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 7.3.2. Միաժամանակյա խաղի լուծումը կարելի է ստանալ հաջորդաբար լուծելով $G(\hat{x}_{k-1},\hat{z}_{k-1})$ հակամարտ խաղերը:

Օրինակ: Դիտարկենք սույն բաժնում բերված "գիր-դուշ" խաղի երկու քայլանի տարբերակը: Խաղի գրաֆը պատկերված է նկար 7.3.2-ում: Առաջին խաղացողի՝ "հակառակորդի" ստրատեգիան կունենա (z_1,z_2) տեսքը, որտեղ $z_1\in[1,2]$, $z_2\in[1,2]$ Այս խաղում՝

$$U_1=\{u_1\},U_2=\{u_1^2,u_2^2,u_3^2,u_4^2\},$$
$$X_1=\{1,2\},X_2=\{1,2\}:$$

Կառուցենք $G(1,1)=\langle Z_2,X_2,H_{1,1}\rangle$ խաղը: Այն մատրիցային խաղ է $H_{1,1}$ մատրիցով՝

$$H_{1,1}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}:$$

Համանմանորեն կառուցենք $G(1,2),G(2,1),G(2,2)$ խաղերը: Համապատասխան մատրիցները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$H_{1,2}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ H_{1,1}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ H_{1,1}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Հեշտությամբ կարելի է գտնել այս խաղերի արժեքները՝

$$v\big(G(1,1)\big)=-1,\ v\big(G(1,2)\big)=1,\ v\big(G(2,1)\big)=1,\ v\big(G(2,2)\big)=-1:$$

Այժմ կարելի է կառուցել G^0 խաղը, որի մատրիցն է՝

$$H_0=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}:$$

Այս խաղի և, հետևաբար, սկզբնական խաղի արժեքը հավասար է 0-ի: Իսկ խաղացողի օպտիմալ ստրատեգիաները նույնն են այս բոլոր խաղերում՝ $q^0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, ուստի խաղացողի օպտիմալ վարքի ստրատեգիան՝ $\eta^0=\left(\eta_{u_1},\eta_{u_1^2},\eta_{u_2^2},\eta_{u_3^2},\eta_{u_4^2}\right)$ կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$P\{\eta_u=x\}=\frac{1}{2}$ բոլոր $u\in U_1\bigcup U_2$ և $x\in X_1\bigcup X_2$ համար:

7.4: ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԵՐ

Այս բաժնում դիտարկվում են հակամարտ դիֆերենցիալ խաղեր: Այս խաղերը դիրքային խաղերի ընդհանրացում են, որտեղ քայլերի թիվն անվերջ է, այսինքն առաջին և երկրորդ խաղացողները, որոնց նշանակում են E-ով և P-ով, որոշումները ընդունում են ժամանակի յուրաքանչյուր պահին: Նախ դիտարկենք *հետապնդման խաղերը*: Դիցուք տարածության մեջ տրված են երկու՝ $x \in R^n$ և $y \in R^n$ կետեր, որոնց շարժումը կառավարում են երկու խաղացողներ, ընտրելով յուրաքանչյուր պահին համապատասխանաբար $u \in U \subseteq R^k$ և $w \in W \subseteq R^m$ կառավարումները: Այստեղ, ինչպես և օպտիմալ կառավարման խնդիրներում, խաղացողների շարժման հետագծերը u և w պարամետրերից կախված համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծումներ են: Դիցուք $x(t)$ կետի շարժման հավասարումներն են՝

$$\dot{x} = f(x,u),\ x \in R^l,\ u \in U \subseteq R^k$$

սկզբնական x^0 պայմանով, իսկ $y(t)$ կետի շարժման հավասարումները՝

$$\dot{y} = g(y,w),\ y \in R^s,\ w \in W \subseteq R^m$$

սկզբնական y^0 պայմանով: Ինչպես և օպտիմալ կառավարման խնդիրներում, կետերի ֆազային տարածությունները կարող են չհամընկնել շարժման իրական R^n տարածության հետ $(l \geq n,\ s \geq n)$: Այստեղ մենք կդիտարկենք լրիվ ինֆորմացիայով խաղերը, այսինքն այն դեպքը, երբ խաղացողները յուրաքանչյուր t պահին գիտեն $x(t)$ և $y(t)$ ֆազային կետերը: Խաղը սկսվում է (x^0, y^0) սկզբնական դիրքից և յուրաքանչյուր t պահին $(x(t), y(t))$ ֆազային կետում խաղացողները ընտրում են $u \in U$ և $w \in W$ կառավարումները: Հետապնդման խաղերում շահույթի ֆունկցիաները կարող են տրվել տարբեր եղանակներով: Հիմնականում դիտարկվում են երկու տարբերակներ՝ արագագործության խնդիր, երբ առաջին խաղացողը ձգտում է մինիմալ ժամանակում մոտեցնել իր կողմից կառավարվող $x(t)$ կետը երկրորդ խաղացողի կողմից կառավարվող $y(t)$ կետին նախորոք տրված l հեռավորության վրա, և ֆիքսած T ժամանակամիջոցով խնդիր, երբ շահույթի ֆունկցիան $\rho(x(T), y(T))$ հեռավորությունն է:

Ֆորմալ տեսանկյունից ունենալ երկու կետ R^n -ում համարժեք է նրան, որ դիտարկվի մեկ կետ՝ $z \in R^{2n}$ տարածության մեջ, որը կառավարվում է երկու խաղացողների կողմից՝ $u \in U$ և $w \in W$ կառավարումներ ընտրելով:

Ընդհանուր դեպքում կասենք, որ տրված է *հակամարտ դիֆերենցիալ խաղ*, եթե տրված են.

1. $U \subseteq R^k$ և $W \subseteq R^m$ կառավարման տիրույթները,
2. $\dot{z} = f(z,u,w)$, $z \in R^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $u \in U$, $w \in W$ շարժման հավասարումները,
3. Տերմինալ $\Sigma \subset R^n$ տիրույթը,
4. $H(u,w) = \int_0^T G(z)\,dt + h(s)$, $s \in \Sigma$ շահույթի ֆունկցիան:

Այս տեսքով սահմանված դիֆերենցիալ խաղն արտաքնապես նման է օպտիմալ կառավարման խնդրի մոդելին, սակայն կան նաև էական տարբերություններ: Նախ, քանի որ այս խաղը հակամարտ խաղ է, ուստի հարկավոր է սահմանել խաղացողների ստրատեգիաները, քանի որ կառավարումները բացի ժամանակից կախված են նաև ֆազային դիրքերից: Բացի այդ, հարկավոր են պայմաններ, որոնք կապահովեն հավասարակշռության իրավիճակի գոյությունը: Կան նաև այլ տեսական և տեխնիկական խնդիրներ, որոնք էականորեն բարդացնում են դիֆերենցիալ խաղերի ուսումնասիրությունը:

Հիմնական մոտեցումները նկարագրելու համար առայժմ ենթադրենք, որ խաղում գոյություն ունի հավասարակշռության իրավիճակ, գոյություն ունեն օպտիմալ կառավարումներ և համապատասխան հետազծեր, ընդ որում կառավարման U և W տիրույթները որոշվում են $a_i \le u_i \le b_i$, $i=1,2,...,k$; $c_j \le w_j \le d_j$, $j=1,2,...,m$ անհավասարություններով: Ինչպես նաև ենթադրենք, որ բոլոր ֆունկցիաները, որոնց հետ առնչվելու ենք այս բաժնում, անընդհատ ածանցելի են այնքան անգամ, որքան հարկավոր լինի: Սկզբնական $z \in R^n$ ֆազային կետում սկսվող խաղի արժեքը նշանակենք $V(z)$-ով:

Ենթադրենք, որ $t=0$ պահին E խաղացողն ընտրում է $\bar{u} \in U$ կառավարումը, իսկ P խաղացողը՝ $\bar{w} \in W$ կառավարումը: Այս դեպքում բավականաչափ փոքր Δt ժամանակամիջոցից հետո ֆազային փոփոխականները մոտավորապես հավասար կլինեն $z+\Delta z$, որտեղ՝

$$\Delta z_i = f_i\left(z,\bar{u},\bar{w}\right)\Delta t \quad i=1,2,...,n$$

և շահույթի ֆունկցիան հավասար կլինի՝

$$\int_0^{\Delta t} G\left(z_1,z_2,...z_n\right)dt \approx G\left(z_1,z_2,...z_n\right)\Delta t:$$

Խաղը վերսկսվում է $z+\Delta z$ կետից և, եթե Δt պահից օգտագործվում են օպտիմալ կառավարումները, ապա շահույթը հավասար կլինի՝

$$G\left(z_1,z_2,...z_n\right)\Delta t + V\left(z+\Delta z\right):$$

Քանի որ

$$V\left(z+\Delta z\right) \approx V\left(z\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right)\Delta z_i ,$$

որտեղ V_i-ով նշանակել ենք $V\left(z_1,z_2,...,z_n\right)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները ըստ z_i, $i=1,2,...,n$: Այստեղից՝

$$V\left(z+\Delta z\right) \approx V\left(z\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z\right) f_i\left(z,\bar{u},\bar{w}\right)\Delta t$$

Հետևաբար, ենթադրելով, որ $\bar{u}$-ն և $\bar{w}$-ն օպտիմալ կառավարումներն են $t=0$ պահին, $V(z)$ շահույթի ֆունկցիայի համար ստանում ենք

$$V(z) \approx G(z_1, z_2, \ldots z_n)\Delta t + V(z) + \sum_{i=1}^{n} V_i(z) f_i(z, \bar{u}, \bar{w})\Delta t :$$

Ձգտեցնելով $\Delta t \to 0$, կստանանք *դիֆերենցիալ խաղերի հիմնական հավասարումը*՝

$$G(z_1, z_2, \ldots z_n) + \sum_{i=1}^{n} V_i(z) f_i(z, \bar{u}, \bar{w}) = 0 : \qquad (7.4.1)$$

Կամ, որը համարժեք է՝

$$\max_u \min_w \left\{ G(z_1, z_2, \ldots z_n) + \sum_{i=1}^{n} V_i(z) f_i(z, u, w) \right\} = 0 : \qquad (7.4.2)$$

Հիմնական հավասարումը ստանալուց հետո, ինչպես և օպտիմալ կառավարման խնդրում, կարող ենք ստանալ հետագծերի հավասարումները: Ածանցելով (7.4.1) հավասարումը ըստ z_j-ի (հաշվի առնելով, որ u և w կառավարումները կախված են z-ից) և հավասարեցնելով 0-ի, կստանանք՝

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i(z) f_i(z, \bar{u}, \bar{w}) + G(z_1, z_2, \ldots z_n) \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} V_i(z) \frac{\partial f_i(z, \bar{u}, \bar{w})}{\partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i(z)}{\partial z_j} f_i(z, \bar{u}, \bar{w}) + \\
&+ \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i(z) f_i(z, \bar{u}, \bar{w}) + G(z) \right) \frac{\partial u_l}{\partial z_j} + \qquad (7.4.3) \\
&+ \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial w_s}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i(z) f_i(z, \bar{u}, \bar{w}) + G(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial z_j} + \\
&+ \frac{\partial G(z_1, z_2, \ldots z_n)}{\partial z_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

Այս գումարում՝ (համեմատել (7.2.8)-ի հետ)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_i(z)}{\partial z_j}f_i(z,\bar{u},\bar{w})=\frac{dV_j}{dt}:$$

Այժմ դիտարկենք

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n}V_i(z)f_i(z,\bar{u},\bar{w})+G(z)\right)\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial z_j}$$

արտահայտությունը: Օպտիմալ կառավարման յուրաքանչյուր $\bar{u}_j$ բաղադրիչն իր արժեքը կարող է ընդունել $\left[a_j,b_j\right]$ հատվածի կամ ներքին կետում, կամ ծայրակետերից մեկում: Եթե այդ արժեքը ներքին կետում է, ապա՝

$$\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n}V_i(z)f_i(z,\bar{u},\bar{w})+G(z)\right)=0:$$

Իսկ եթե օպտիմալ արժեքը որոշման տիրույթի ծայրակետում է, ապա $\bar{u}_l$-ը հաստատուն է հետևաբար, $\partial\bar{u}_i/\partial z_j=0$: Այսպիսով, բոլոր դեպքերում՝

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_{i=1}^{n}V_i(z)f_i(z,\bar{u},\bar{w})+G(z)\right)\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial z_j}=0,\quad j=1,2,...,n:$$

Նույն դատողությունների համաձայն, նաև՝

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial w_s}\left(\sum_{i=1}^{n}V_i(z)f_i(z,\bar{u},\bar{w})+G(z)\right)\frac{\partial\bar{w}_s}{\partial z_j}=0\,,\quad j=1,2,...,n:$$

Վերջնականապես, (7.4.3) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{i=1}^{n}V_i(z)f_i(z,\bar{u},\bar{w})+G(z_1,z_2,...z_n)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}V_i(z)\frac{\partial f_i(z,\bar{u},\bar{w})}{\partial z_j}+\frac{dV_j}{dt}+\frac{\partial G(z_1,z_2,...z_n)}{\partial z_j}=0:$$

Կամ՝

$$\dot{V}_j = -\sum_{i=1}^{n} V_i(z)\frac{\partial f_i(z,\bar{u},\bar{w})}{\partial z_j} - \frac{\partial G(z)}{\partial z_j},\ j = 1,2,\dots,n:$$

Այս հավասարումները

$$\dot{z}_j = f_j(z,\bar{u},\bar{w}),\quad j = 1,2,\dots,n$$

հավասարումների հետ միասին անվանում են դիֆերենցիալ խաղի *հետագծի հավասարումներ:*

Օրինակ 7.4.1 (Խեղազար վարորդ): Այս խաղում շարժումը տեղի է ունենում հարթության վրա: Վարորդը (P) ավտոմեքենայով փորձում է վրաերթի ենթարկել հետիոտնին (E): Ենթադրվում է, որ ավտոմեքենայի շարժումը սահմանափակված է պտտման մինիմալ r շառավիղով, իսկ հետիոտնը կարող յուրաքանչյուր պահին ընտրել ցանկացած ուղղություն: Պարզության համար ենթադրենք, որ խաղացողների արագությունները հաստատուն են՝ համապատասխանաբար a և b, $a < b$: Հետիոտնի կառավարումը շարժման ուղղությունն է՝ այդ պահին իր ուղղության վեկտորի և աբցիսների առանցքի միջև կազմած φ անկյունը: Ավտոմեքենայի կառավարումը՝ կորության R շառավիղի ընտրությունը: Այսպիսով, հետիոտնի շարժման հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{x}_1 = a\cos\varphi,$$
$$\dot{x}_2 = a\sin\varphi:$$

Իսկ ավտոմեքենայի շարժման հավասարումները կազմելու համար կարող ենք օգտվել անկյունային արագության բանաձևից՝ $\dot{\theta} = b/R$՝

$$\dot{x}_3 = b\cos x_5,$$
$$\dot{x}_4 = b\sin x_5,$$
$$\dot{x}_5 = \frac{b}{R}:$$

Որտեղ x_5-ը մեքենայի ուղղության վեկտորի կազմած անկյունն է աքցիսների առանցքի հետ: Քանի որ կառավարման որոշման տիրույթը՝ $[r,+\infty)$ բազմությունը սահմանափակ չէ, ներմուծենք նոր կառավարում՝ $\phi = r/R$, և ենթադրենք, որ աջ ուղղությունը դրական է, ձախ ողղությունը բացասական: Այսպիսով, վարորդի կառավարման տիրույթը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $|\phi| \le 1$: Խաղի շարժման հավասարումները կլինեն՝

$$\dot{x}_1 = a\cos\varphi,$$
$$\dot{x}_2 = a\sin\varphi,$$
$$\dot{x}_3 = b\cos x_5,$$
$$\dot{x}_4 = b\sin x_5,$$
$$\dot{x}_5 = \frac{b\phi}{r}:$$

Այս խաղը դիտարկենք որպես արագագործության խաղ, այսինքն ենթադրենք, որ P-ն փորձում է հնարավորինս արագ բռնել E-ին, իսկ E-ն փորձում է հնարավորինս հետաձգել այդ պահը (հույս ունենալով օգնություն ստանալ):

Կազմենք այս խաղի հիմնական հավասարումը՝

$$\max_{\varphi}\min_{\phi}\left(V_1 a\cos\varphi + V_2 a\sin\varphi + V_3 b\cos x_5 + V_4 b\sin x_5 + V_5\frac{b\phi}{r}\right) = 0:$$

Կամ՝

$$\max_{\varphi}\min_{\phi}\left(a\left(V_1\cos\varphi + V_2\sin\varphi\right) + b\left(V_3\cos x_5 + V_4\sin x_5\right) + V_5\frac{b\phi}{r}\right) = 0$$

Այստեղ φ-ից կախված է միայն առաջին փակագիծը, իսկ ϕ-ից միայն վերջին գումարելին: Դժվար չէ ստուգել, որ օպտիմալ $\overline{\varphi}$ և $\overline{\phi}$ կառավարումները հետևյալն են՝

$$\cos\overline{\varphi}=\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}},\sin\overline{\varphi}=\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}};\overline{\phi}=\operatorname{sgn}V_5:$$

Այժմ կազմենք հետազծերի հավասարումները՝

$$\dot{V}_1=0,$$
$$\dot{V}_2=0,$$
$$\dot{V}_3=0,$$
$$\dot{V}_4=0$$
$$\dot{V}_5=b\left(V_3\cos x_5-V_4\sin x_5\right):$$

Օպտիմալ կառավարումների տեսքից երևում է, որ E-ի համար օպտիմալ կառավարումը հաստատուն է ($\overline{\varphi}=const$), իսկ P-ի օպտիմալ կառավարումը բաղկացած է լինելու աջ և ձախ հնարավորինս կտրուկ պտույտներից: Այսպիսով, չնայած մենք ենթադրել էինք, որ բոլոր դիտարկվող ֆունկցիաները պետք է բավականաչափ ողորկ լինեն, կառավարումը անընդհատ չէ և ընդհանուր դեպքում չենք կարող խոսել շարժման հավասարումների լուծման գոյության մասին: Այս թերությունները կարելի է վերացնել, դիտարկելով խաղացողների ստրատեգիաների նոր դաս:

Սահմանում 7.4.1. E խաղացողի $u(\cdot)$ կտոր առ կտոր ծրագրային ստրատեգիա անվանում են (σ,a) զույգը, որտեղ σ-ն $[0,+\infty)$ ժամանակահատվածի որևէ $0=t_0\leq t_1\leq\cdots\leq t_k\leq\cdots$ տրոհում է վերջավոր կուտակման կետեր չունեցող t_k կետերով, իսկ a-ն արտապատկերում է, որը յուրաքանչյուր t_k կետին և $z(t_k)$ ֆազային դիրքին համապատասխանության մեջ է դնում $[t_k,t_{k+1})$ միջակայքում որոշված չափելի $u^k(t)$ ֆունկցիա: Նույն կերպ, P խաղացողի $w(\cdot)$ կտոր առ կտոր ծրագրային ստրատեգիա անվանում են (δ,b) զույգը, որտեղ δ-ն $[0,+\infty)$ ժամանակահատվածի որևէ

$0=t_0'\le t_1'\le\cdots\le t_k'\le\cdots$ տրոհում է վերջավոր կուտակման կետեր չունեցող t_k' կետերով, իսկ b-ն արտապատկերում է, որը յուրաքանչյուր t_k' կետին և $z(t_k')$ ֆազային դիրքին համապատասխանության մեջ է դնում $w^k(t)$ չափելի ֆունկցիա, որոշված $[t_k', t_{k+1}')$ միջակայքում: Դիֆերենցիալ խաղերի տարբեր դասերի համար հավասարակշռության գոյության թեորեմներ բերված են [24]-ում:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

Օգտագործվող տերմինների և հասկացությունների վերաբերյալ տարակարծություններից խուսափելու նպատակով բերենք մի քանի հիմնական սահմանումներ և արդյունքներ (տես [12],[24]):

ԲԻՆԱՐ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում: Տրված X բազմության կարգավորված զույգերի $R \subseteq X \times X$ ենթաբազմությունը անվանում են *բինար հարաբերություն*: Եթե $(x, y) \in R$, ապա ասում են, որ x տարրը բինար հարաբերության մեջ է y տարրի հետ և նշանակում են xRy: Ներկայացնենք հարաբերությունների մի քանի հատկություններ.

- R հարաբերությունն անվանում են *ռեֆլեքսիվ*, եթե ցանկացած $x \in X$ համար xRx:
- R հարաբերությունն անվանում են *հակառեֆլեքսիվ*, եթե xRy -ից հետևում է, որ $x \neq y$:
- R հարաբերությունն անվանում են *սիմետրիկ*, եթե xRy -ից հետևում է yRx:
- R հարաբերությունն անվանում են *հակասիմետրիկ*, եթե xRy , yRx -ից հետևում է, որ $x = y$:
- R հարաբերությունն անվանում են *տրանզիտիվ*, եթե xRy , yRz -ից հետևում է, որ xRz :

Սահմանում: R հարաբերությունն անվանում են *թույլ կարգավորություն*, եթե այն ռեֆլեքսիվ, հակասիմետրիկ և տրանզիտիվ հարաբերություն է: R հարաբերությունն անվանում են *խիստ կարգավորություն*, եթե այն հակառեֆլեքսիվ և տրանզիտիվ հարաբերություն է: R հարաբերությունն անվանում են *համարժեքություն*, եթե այն ռեֆլեքսիվ, սիմետրիկ և տրանզիտիվ հարաբերություն է: X բազմությունն անվանում են *լիովին կամ գծայնորեն կարգավորված* R կարգավորությամբ, եթե ցանկացած երկու՝ $x, y \in X$ կետերի համար տեղի ունի կամ xRy , կամ yRx :

X բազմության ենթաբազմությունների S բազմությունն անվանում են բուլյան σ -հանրահաշիվ, կամ պարզապես σ *-հանրահաշիվ*, եթե

1. Ցանկացած $E \subseteq X, E \in S$ և $F \subseteq X, F \in S$ համար՝ $E \setminus F \in S$
2. Ցանկացած հաշվելի թվով $E_i \subseteq X, E_i \in S; i = 1, 2, \ldots$ բազմությունների համար՝ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$ ։
3. $X \in S$ ։

Բազմությունների վերաբերյալ հայտնի $E \cap F = (E \cup F) \setminus (E \setminus F) \setminus (F \setminus E)$ առնչությունից հետևում է, որ σ -հանրահաշիվը փակ է նաև հաշվելի հատման նկատմամբ, այսինքն, եթե $E_i \subseteq X, E_i \in S; i = 1, 2, \ldots,$ ապա՝ $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in S$ ։ (X, S) զույգն անվանում են *չափելի տարածություն*, իսկ $E \subseteq X, E \in S$ բազմությունները՝ *չափելի բազմություններ*։

Իրական առանցքի վրա կիսաբաց միջակայքերով ($[a, b)$ տեսքի) ծնված σ -հանրահաշիվն անվանում են *բորելյան* σ *-հանրահաշիվ*։ Հեշտությամբ ապացուցվում է, որ այն պարունակում է նաև իրական առանցքի բոլոր ինչպես բաց, այնպես էլ փակ բազմությունները։

(X, S) չափելի տարածության վրա որոշված իրականարժեք $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են *չափելի ֆունկցիա*, եթե ցանկացած բորելյան բազմության նախապատկերը չափելի է, այսինքն, բորելյան ցանկացած B բազմության համար՝ $f^{-1}(B) \in S$

Հավանականային չափ (X, S) չափելի տարածության վրա անվանում են S σ -հանրահաշվի վրա որոշված բազմության $\mu(E)$ ֆունկցիան, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. $\mu(E)\geq 0$ ցանկացած $E\in S$ համար:
2. ցանկացած $E\subseteq X$, $E\in S$ և $F\subseteq X$, $F\in S$, $E\cap F=\varnothing$ բազմությունների համար՝ $\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)$:
3. $\mu(\varnothing)=0,\ \mu(X)=1$:

(X,S) չափելի տարածության վրա որոշված $f(x)$ իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են պարզ ֆունկցիա, եթե այն կարելի է ներկայացնել

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x)$$

տեսքով, որտեղ $\chi_{E_i}(x)$-ն E_i բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան է՝

$$\chi_{E_i}(x)=\begin{cases}1, x\in E_i,\\ 0, x\notin E_i:\end{cases}$$

Պարզ ֆունկցիայի ինտեգրալ ըստ հավանականային μ չափի սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\int f(x)d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i):$$

(X,S) չափելի տարածության վրա որոշված իրականարժեք $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են *ինտեգրելի ֆունկցիա* ըստ μ չափի, եթե գոյություն ունի պարզ $f_n(x)$ ֆունկցիաների միջինում ֆունդամենտալ հաջորդականություն, որը զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային ըստ μ չափի, այսինքն այնպիսի հաջորդականություն, որ՝

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\left|f_n(x)-f_m(x)\right|d\mu=0,$$

և

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

ինչպիսին էլ որ լինի $\varepsilon>0$ թիվը: Ինտեգրելի ֆունկցիայի ինտեգրալը ըստ չափի սահմանվում է որպես՝ $\int f(x)d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x)d\mu$:

(X,S) չափելի տարածության վրա որոշված սահմանափակ չափելի ֆունկցիաները ինտեգրելի են ըստ ցանկացած հավանականային չափի:

(X,S) չափելի տարածության վրա որոշված հավանականային չափն անվանում են *դիսկրետ չափ*, եթե գոյություն ունեն $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ և $p_1, p_2, \ldots, p_n;\ p_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ թվեր այնպես, որ ցանկացած $E \subseteq X, E \in S$ բազմության համար՝

$$\mu(E) = \sum_{i: x_i \in E} p_i :$$

Ինտեգրալը ըստ դիսկրետ չափի վերածվում է գումարի՝

$$\int f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i :$$

(X,S) *և* (Y,T) *չափելի տարածությունների արտադրյալ* անվանում են $(X \times Y, S \times T)$ զույգը, որտեղ $X \times Y$ -ը X և Y բազմությունների դեկարտյան արտադրյալն է, իսկ $S \times T$ -ն մինիմալ σ -հանրահաշիվը, որը պարունակում է $E \times F, E \in S, F \in T$ տեսքի բոլոր ուղղանկյունները:

Դիցուք (X,S) և (Y,T) չափելի տարածությունների վրա տրված են համապատասխանաբար μ և ν հավանականային չափեր: μ և ν *չափերի արտադրյալ* անվանում են այն $(\mu \times \nu)$ չափը, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին. ցանկացած $E \subseteq X$, $E \in S$ և $F \subseteq X$, $F \in S$ համար՝ $(\mu \times \nu)(E \times F) = \mu(E)\nu(F)$: Այս վերջին պայմանով $(\mu \times \nu)$ չափը որոշվում է միարժեքորեն: Ակնհայտ է, որ $(\mu \times \nu)$ չափը նույնպես հավանականային չափ է:

Թեորեմ 8.1 (Ֆուբինի): Դիցուք $H(x,y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $(X\times Y, S\times T)$ չափելի տարածության վրա ըստ $(\mu\times\nu)$ հավանականային չափի: Այդ դեպքում, հետևյալ կերպ սահմանված

$$f(x)=\int H(x,y)\,d\nu \quad \text{և} \quad g(y)=\int H(x,y)\,d\mu$$

ֆունկցիաները ինտեգրելի են և

$$\int H(x,y)\,d(\mu\times\nu)=\int f(x)\,d\mu=\int g(y)\,d\nu :$$

Դիտարկենք (R,B) չափելի տարածությունը, որտեղ R-ը իրական ուղիղն է, իսկ B-ն՝ բորելյան բազմությունների σ-հանրահաշիվը: (R,B)-ի վրա որոշված ցանկացած հավանականային μ չափի համար կարելի է կառուցել իրականարժեք $F(x)$ ֆունկցիա՝

$$F(x)=\mu((-\infty,x)):$$

$F(x)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$F(x')\le F(x'')$, եթե $x'\le x''$

$F(x)=F(x+0)$,

$F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1:$

Այս պայմաններին բավարարող յուրաքանչյուր ֆունկցիա անվանում են *բաշխման ֆունկցիա:* Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. Ցանկացած $F(x)$ բաշխման ֆունկցիային կարելի է համապատասխանեցնել հավանականային μ չափ (R,B) չափելի տարածության վրա՝

$$\mu([a,b))=F(b)-F(a):$$

Դիցուք $F(x)$-ը բաշխման ֆունկցիա է և $f(x)$-ը $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված որևէ անընդհատ ֆունկցիա է: Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի որևէ տրոհում՝

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b:$$

Այս տրոհման յուրաքանչյուր $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածում ընտրենք կամայական ξ_i կետ և կազմենք

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$$

գումարը: Երբ $\max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$, այս գումարները, անկախ տրոհման եղանակից և կետերից, ձգտում են որոշակի սահմանի, որը կոչվում է Ռիման-Ստիլտյեսի (Riemann-Stieltjes) ինտեգրալ և նշանակվում՝

$$\int_a^b f(x)\,dF(x):$$

Թեորեմ 8.2 (Հելի (Helly)): Բաշխման ֆունկցիաների ցանկացած անվերջ հաջորդականությունից կարելի է ընտրել ենթահաջորդականություն, որը գրեթե ամենուրեք զուգամիտում է որևէ բաշխման ֆունկցիայի:

Թեորեմ 8.3: (Հելի (Helly)): Դիցուք $f(x)$-ը անընդհատ է $[a,b]$ հատվածի վրա և բաշխման ֆունկցիաների $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ հաջորդականությունը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է $F^0(x)$ բաշխման ֆունկցիային: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dF_n(x) = \int_a^b f(x)\,dF(x):$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **Ավետիսյան Վ., Պողոսյան Մ.**, Վարիացիոն հաշիվ և օպտիմալ կառավարում, Երևան, 2008:

[2] **Թունին Ա.Դ., Մովսիսյան Յու.Մ.**, Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ, Երևան, 2002:

[3] **Սահակյան Մ.Ա., Սարգսյան Հ.Լ., Սարգսյան Ա.Դ., Տոնոյան Ռ.Ն.**, Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, I հ., Երևան, 1997:

[4] **Սահակյան Մ.Ա., Սարգսյան Հ.Լ., Սարգսյան Ա.Դ., Տոնոյան Ռ.Ն.**, Տնտեսության վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, II հ., Երևան, 2001:

[5] **Ашманов С.А.**, Линейное программирование, М., Наука, 1981.

[6] **Беллман Р.** Динамическое программирование, И*Л, М., 1960.

[7] **Болтянский В.Г.**, Математические методы оптимального управления, М., Наука,1969.

[8] **Воробьев Н.Н.**, Бескоалиционные игры, М., Наука, 1984.

[9] **Гихман И.И., Скороход А.В.**, Введение в теорию случайных процессов,М.,Наука,1965.

[10] **Зангвилл У.И.**, Нелинейное программирование, М., Сов.Радио, 1973.

[11] **Карманов В.Г.**, Математическое программирование, М., ФМЛ, 2004.

[12] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.**, Элементы теории функций и функционального анализа, М., ФМЛ, 2004.

[13] **Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.**, Дискретное программирование, М., Наука, 1969.

[14] **Мулен Э.**, Теория игр, М., Мир, 1985.

[15] **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и мат.экономика, М., Мир, 1972

[16] **Оуэн Г.**, Теория игр, М., Мир, 1971.

[17] **Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.**,Некоторые вопросы теории игр двух лиц, М.,Мир,1974.

[18] **П етросян Л. И** и др., Теория игр, ИВШ, М., 1998

[19] **Позиционные игры**, сб., М., Наука, 1967.

[20] **Полиа** Г., **Сеге** Г., Задачи и теоремы из анализа, М., ФМЛ, 1978.

[21] **Понтрягин** Л.С., Обыкновенные диф. уравнения, М., Наука, 1965.

[22] **Розен** В.В., Математические модели принятия решении в экономике, ИВШ, М., 2002.

[23] **Толстов** Г.П., Мера и интеграл, М., Наука, 1976.

[24] **Халмош** П., Теория меры, М., И*Л, 1953.

[25] **Schmidt** C., Game Theory and Economic Analysys, NY, London, 2002.

[26] van **Brunt**, The Calculus of Variations, Springer-Verlag,2004.

Բովանդակություն

ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ ԿԱՐԵՆ ՎԱՉԱԳԱՆԻ

ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ
ԵՎ
ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ստորագրված է տպագրության 08.02.2013 թ.:
Չափսը՝ $60x84^{1}/_{16}$:
Տպաքանակ՝ 150: Պատվեր՝ 18:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: