

Կ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԼՈԿԱԼ ԵՎ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԳԱՆ
ՆԱԽԱԼՍԱՐԱՆ**

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. Լ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

**ԼՈԿԱԼ ԵՎ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ
ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ**

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

2018

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161g73
Ա 791

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը*

Ավետիսյան Կ. Լ.

Ա 791 Լոկալ և պայմանական էքստրեմումներ/Կ. Լ. Ավետիսյան.
-Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2018, 132 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված է մաթեմատիկական անալիզի կիրառական ուղղություններից մեկը՝ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների էքստրեմումների տեսությունը: Ներկայացված են լոկալ (բացարձակ) և պայմանական էքստրեմումների որոնման հիմնական մեթոդներն ու առանձնահատկությունները: Բացի անհրաժեշտ տեսական նյութից ձեռնարկը պարունակում է 35 մանրամասն վերլուծված օրինակներ, ինչպես նաև ինքնուրույն աշխատանքի համար 60 վարժություններ իրենց պատասխաններով: Ձեռնարկը նախատեսված է մաթեմատիկական, տնտեսագիտական և բնագիտական մասնագիտությունների ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161g73

ISBN 978-5-8084-2279-7

© ԵՊՀ հրատ., 2018
© Ավետիսյան Կ. Լ., 2018

Նախաբան

Ձեռնարկը ներկայացնում է մաթեմատիկական անալիզի կիրառական ուղղություններից մեկը՝ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների էքստրեմումների պետությունը: Տվյալ ֆունկցիայի էքստրեմումների, մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնելու և հայտնաբերելու կարողությունը մեծ դեր է կատարում ոչ միայն մաթեմատիկայում, այլ մաթեմատիկական մեթոդներ կիրառող տարբեր բնագավառներում՝ տեխնիկական, տնտեսագիտական, բոլոր բնագիտական մասնագիտություններում: Կիրառողները շահագրգռված են նվազագույն, հնարավորին չափ պարզ մեթոդներով ստանալ ցանկալի արդյունքը: Տվյալ ձեռնարկում շարադրված են այդ մեթոդներից ամենապարզված և արդյունավետներից մի քանիսը՝ շատ փոփոխականի ֆունկցիաների համար:

Սկզբում ներկայացված են ֆունկցիայի լոկալ (կամ բացարձակ, ոչ պայմանական) էքստրեմումների որոնման հիմնական մեթոդներն ու առանձնահատկությունները: Այնուհետև բերված են ֆունկցիայի պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումների որոնման եղանակները, որոնցից, թերևս, ամենակարևորը՝ Լագրանժի բազմապարկիչների մեթոդն է: Ներկայացված յուրաքանչյուր մեթոդից, տեսական ամեն մի դրույթից հետո ներկայացված են մի քանի համապատասխան օրինակներ՝ նշված մեթոդների գործողությունը ցուցադրելու համար: Առանձին օրինակներ լուծված են երկու-երեք տարբեր եղանակներով՝ ցուցադրելու համար տարբեր մեթոդների արդյունավետությունը և համարեղելիությունը: Կան նաև տնտեսագիտական բնույթի օրինակներ: Ձեռնարկը չի հավակնում էքստրեմումների պետության ամբողջական ծավալին:

Մասնավորապես ընդգրկված չէ անբացահայտ ֆունկցիաների էքսպրեմումների թեման: Ձեռնարկն ընդամենը պարունակում է 35 մանրամասն վերլուծված օրինակներ, ինչպես նաև ինքնուրույն աշխատանքի համար 60 վարժություններ իրենց պատասխաններով:

Ձեռնարկը հասանելի է համալսարանական առաջին-երկրորդ կուրսի մաթ. անալիզի կամ բարձրագույն մաթեմատիկա առարկայի հիմնական գաղափարների ծանոթ ուսանողին: Նեղիմակը նպատակ էր դրել առավել մաքուր լեզվով ներկայացնելու և՛ տեսական նյութը, և՛ լուծված օրինակները այնպես, որ ձեռնարկի հիմնական նյութը ($\mathbb{R}^2$ և $\mathbb{R}^3$ -ում) հասանելի լինի մաթեմատիկայում անգամ թույլ պատրաստված ուսանողին: Այն ընթերցողները, ովքեր կհետաքրքրվեն ավելի խորը տեսական գիտելիքներով և ավելի բազմազան օրինակներով, կարող են դիմել ձեռնարկի վերջում բերված գրականությանը:

Շնորհակալություն եմ հայտնում ԵՊՏ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դոցենտ Ս. Ռաֆայելյանին արժեքավոր դիտողությունների և առաջարկությունների համար, ինչպես նաև պրոֆեսորներ Ա. Սահակյանին և Վ. Աթաբեկյանին՝ աջակցության համար:

Նեղիմակը շնորհակալությամբ կընդունի ընթերցողների յուրաքանչյուր դիտողություն և առաջարկ:

Կարեն Ավետիսյան

Նաճախ օգտագործվող նշանակումներ

1. $\forall$ ցանկացած, կամայական, յուրաքանչյուր, բոլոր :
2. $\exists$ նշանակում է «գոյություն ունի» :
3. s.t. նշանակում է «այնպիսին, որ» :
4. $C(\Omega)$ Ω բազմության մեջ անընդհար ֆունկցիաների դասը;
5. $C^1(\Omega)$ Ω բազմության մեջ անընդհար դիֆերենցելի կամ ողորկ ֆունկցիաների դասը: Գրում են $f \in C^1(\Omega)$, եթե գոյություն ունեն f -ի 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, որոնք անընդհար են Ω բազմության մեջ: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում մասնակի ածանցյալների փոխարեն պետք է հասկանալ սովորական ածանցյալ՝

$$f(x) \in C^1(\Omega) \iff f'(x) \in C(\Omega);$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^1(\Omega) \iff \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega), \quad 1 \leq j \leq n :$$

6. $C^m(\Omega)$ Ω բազմության մեջ $m \in \mathbb{N}$ անգամ անընդհար դիֆերենցելի (m -րդ կարգի ողորկ) ֆունկցիաների դասը: Գրում են $f \in C^m(\Omega)$, եթե գոյություն ունեն f -ի m -րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, որոնք անընդհար են Ω բազմության մեջ: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում մասնակի ածանցյալների փոխարեն պետք է հասկանալ սովորական ածանցյալներ:
7. $C^\infty(\Omega)$ Ω բազմության մեջ անվերջ դիֆերենցելի (անվերջ ողորկ) ֆունկցիաների դասը:
8. $\mathcal{U}(M_0)$ $M_0 \in \mathbb{R}^n$ կետի շրջակայք, այսինքն՝ M_0 կենտրոնով և ինչ-որ շառավղով բաց միջակայք, եթե $n = 1$, կամ բաց շրջան, եթե $n = 2$, կամ բաց գունդ, եթե $n \geq 3$:

9. $\partial\Omega$ Ω բազմության եզրը:

10. **Կոմպակտ** ($\mathbb{R}^n$ -ում) նշանակում է փակ և սահմանափակ բազմություն:

11. **Տիրույթը** մաթեմատիկայում, ինչպես հայրնի է, նշանակում է բաց և կապակցված բազմություն, թեև հաճախ կիրառվում է նաև լայն իմաստով, որպես կամայական բազմություն: Ընթերցողը ենթադրեքսրից կկարողանա հասկանալ՝ նեղ թե լայն իմաստով է կիրառվում այդ տերմինը:

12. $df(M_0)$ ավյալ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է: Մասնավորապես, երկու փոփոխականի $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0)$ կետում

$$df(M_0) = df(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy :$$

Նկատենք, որ $df(M_0)$ դիֆերենցիալը կախված է ոչ միայն M_0 կետից, այլ նաև անկախ փոփոխականների $dx = \Delta x$ և $dy = \Delta y$ աճերից (դիֆերենցիալներից), ինչը կարելի է արտահայտել բացահայտ՝ $df = df(M_0, dx, dy)$: Նմանապես երեք փոփոխականի $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում սահմանում են

$$df(M_0) = df(x_0, y_0, z_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) dz :$$

13. $df(M_0) \equiv 0$ նշանակում է, որ $df(M_0)$ դիֆերենցիալը նույնաբար հավասար է զրոյի, այսինքն հավասար է զրոյի $dx = \Delta x$ և $dy = \Delta y$ աճերի (դիֆերենցիալների) ցանկացած ընտրության դեպքում ($dx = dy = 0$ դեպքը սովորաբար չի դիտարկվում):

14. Անկախ փոփոխականների $dx = \Delta x$ և $dy = \Delta y$ աճերի (դիֆերենցիալների) աստիճանների համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները՝

$$\begin{aligned} dx^2 &= (dx)^2, & dy^2 &= (dy)^2, & \Delta x^2 &= (\Delta x)^2, & \Delta y^2 &= (\Delta y)^2, \\ dx^k &= (dx)^k, & dy^k &= (dy)^k, & \Delta x^k &= (\Delta x)^k, & \Delta y^k &= (\Delta y)^k \end{aligned}$$

և այլն:

15. $d^k f(M_0)$ f ֆունկցիայի k -րդ կարգի ($k \in \mathbb{N}$) դիֆերենցիալը M_0 կետում: Մասնավորապես, երկու փոփոխականի $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0)$ կետում սիմվոլիկ կարելի է գրել

$$d^k f(M_0) = d^k f(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(M_0) :$$

Օրինակ, $k = 2$ համար 2-րդ կարգի դիֆերենցիալ կարելի է բացահայտ ներկայացնել՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= d^2 f(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(M_0) = \\ &= \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} dy^2 : \end{aligned}$$

Նմանապես երեք փոփոխականի $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում 2-րդ կարգի դիֆերենցիալ կընդունի հետևյալ բացահայտ արտաբնությունը՝

$$\begin{aligned} d^2 f(x_0, y_0, z_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f(M_0) = \\ &= \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} dz^2 + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} dy dz : \end{aligned}$$

16. $M_{\max}$ $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետը:

17. $M_{\min}$ $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետը:

18. $f_{\max}$ f ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի արժեքը (կամ պարզապես մաքսիմումը):
19. $f_{\min}$ f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի արժեքը (կամ պարզապես մինիմումը):
20. $\max_{M \in \Omega} f(M)$ f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը դիտարկվող Ω բազմությունում:
21. $\min_{M \in \Omega} f(M)$ f ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը դիտարկվող Ω բազմությունում:

Գլուխ 1

Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները

Ֆունկցիայի էքստրեմումների որոնումը և հայտնաբերումը ֆունկցիաների հեքագործման կարևորագույն փարերից է: Կսկսենք երկու անկախ փոփոխականից կախված $z = f(x, y)$ ֆունկցիաների հեքագործումից: Շար փոփոխականից կախված ֆունկցիաների մեջ սա պարզագույն և միակ դեպքն է, երբ գրաֆիկների միջոցով կարելի է րեսանելի դարձնել և՛ ֆունկցիան, և՛ նրա էքստրեմումի կերերը, և՛ էքստրեմումները:

1.1 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Թամբակերի գաղափարը:

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ հարթ բազմության մեջ և $M_0(x_0, y_0)$ -ն այդ բազմության ներքին կեր է:

Սահմանում 1.1. $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կերը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի (**լոկալ**) **մաքսիմումի կեր**, եթե գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կերի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$

շրջակայք, որտեղ $f(x, y)$ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը $M_0(x_0, y_0)$ կերպում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0) : \quad (1.1)$$

Իսկ $z_0 = f(x_0, y_0)$ արժեքը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքս-մինիմումի արժեք** կամ պարզապես **մաքսիմում**: Կգրենք $M_{\max} = M_0$ և $f_{\max} = z_0$ կամ $z_{\max} = z_0$:

Նմանապես սահմանում են ֆունկցիայի մինիմումի կերը և մինիմումը:

Սահմանում 1.2. $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կերը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի կեր**, եթե գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կերի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ շրջակայք, որտեղ $f(x, y)$ ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը $M_0(x_0, y_0)$ կերում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0) : \quad (1.2)$$

Իսկ $z_0 = f(x_0, y_0)$ արժեքը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի արժեք** կամ պարզապես **մինիմում**: Կգրենք $M_{\min} = M_0$ և $f_{\min} = z_0$ կամ $z_{\min} = z_0$:

Կասենք նաև, որ $M_0(x_0, y_0)$ կերում $f(x, y)$ ֆունկցիան **խիստ մաքսիմում** կամ **խիստ մինիմում** ունի, եթե (1.1) և (1.2) պայմանների մեջ անհավասարության ոչ խիստ նշանները փոխարինենք խիստ նշաններով, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0), \quad M \neq M_0, \quad (1.3)$$

կամ համապարասխանաբար

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(x_0, y_0) < f(x, y) \quad \forall M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0), \quad M \neq M_0 : \quad (1.4)$$

Լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կերերը անվանում են **(լոկալ) էքստրեմումի կերեր**, իսկ (լոկալ) մաքսիմումները և մինիմումները՝ **(լոկալ) էքստրեմումներ**:

Դիփոդություն 1.1. Բերված սահմանումներում նշված անհավասարությունները կարելի է արտահայտել ֆունկցիայի աճման տերմիններով: Նշանակելով $M_0(x_0, y_0)$ կերպում ֆունկցիայի (լրիվ) աճը

$$\Delta f(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0), \quad M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0),$$

կարելի է (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) պայմանների մեջ անհավասարությունները համապատասխանորեն փոխարինել համարժեք անհավասարություններով, $\Delta f(M_0) \leq 0$, $\Delta f(M_0) \geq 0$, $\Delta f(M_0) < 0$, $\Delta f(M_0) > 0$:

Դիփոդություն 1.2. Ֆունկցիայի (լոկալ) մաքսիմումի և մինիմումի արժեքները, որոնք նշանակվում են $f_{\max}$, $f_{\min}$ կամ $z_{\max}$, $z_{\min}$, չպետք է շփոթել տվյալ բազմության մեջ ֆունկցիայի **մեծագույն և փոքրագույն արժեքների** հետ: Դրանք կրճատվենք հետագայում՝ Բաժին 3.4-ում:

Դիփոդություն 1.3. Մենք հիմնականում դիտարկելու ենք ներքին (լոկալ) էքստրեմումի կետեր: Նկարագրում հնարավոր է՝ մեզ հանդիպեն նման սահմանմանը բավարարող ոչ թե ներքին $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ էքստրեմումի կետեր, այլ եզրային $M_0(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ «էքստրեմումի» կետեր: Այդ դեպքերում մենք հատուկ կնշենք նման երևույթը:

Բերենք լոկալ էքստրեմումների երեք պարզ օրինակ:

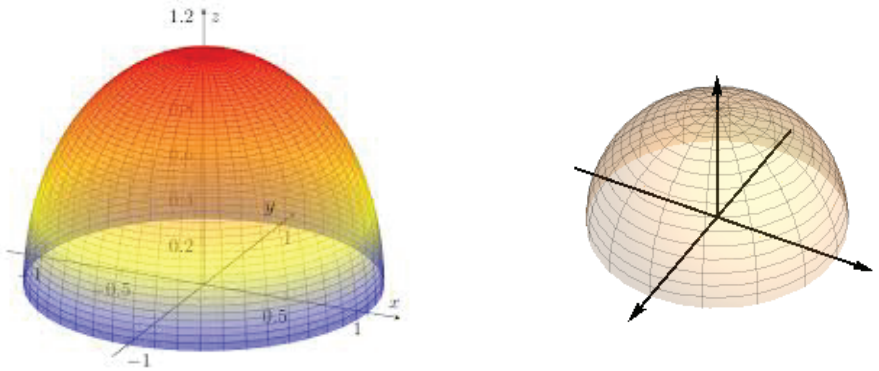
Օրինակ 1. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

ֆունկցիան: Նեշտր է տեսնել, որ f -ի որոշման տիրույթը $\overline{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ միավոր փակ շրջանն է, իսկ արժեքների տիրույթը $[0, 1]$ փակ հատվածն է,

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow [0, 1] :$$

Քանի որ ֆունկցիայի բանաձևը կարելի է արտագրել $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, րեւոյժ, եզրակացնում ենք, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկը կիսասփերա է (վերին միավոր կիսասփերա), րեն գծ. 1 : Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կեր ունի՝ խիստ մաքսիմումի կեր $M_{\max} = (0, 0)$, և մաքսիմումի արժեքն է $f_{\max} = 1$:

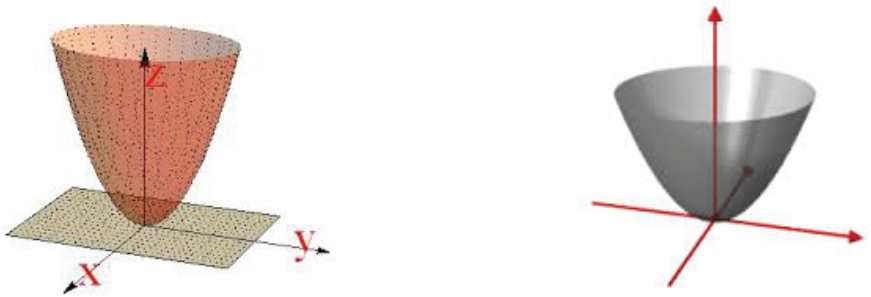


Գծ. 1

Օրինակ 2. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Վեշտ է րեսնել, որ f -ի որոշման րիրոյթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթոյթունն է, իսկ արժեքների րիրոյթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսառանցքը: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է էլիպտիկական պարաբոլիդ $(0, 0)$ զագարով, րեն գծ. 2: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կեր ունի՝ խիստ մինիմումի կեր $M_{\min} = (0, 0)$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$:



ՊՃ. 2

Օրինակ 3. Մահմանենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x - y)^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

Փունկցիան: Բնչպես նախորդ օրինակում, f -ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսաառանցքը: Ակնհայտ է, որ f Փունկցիան ունի անվերջ թվով ոչ խիստ մինիմումի կետեր, որոնք զբաղեցնում են $y = x$ ուղիղը՝ $M_{\min} = (x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$: Նպասքրքիր է, որ f Փունկցիան ոչ մի մաքսիմումի կետ չունի:

Մեր նպատակն է հայտնաբերել Փունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը: Կսկսենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանից: Նիշենք, որ մեկ փոփոխականի Փունկցիաների համար լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանն իրենից փաստորեն ներկայացնում է Ֆերմայի հայտնի թեորեմը: Այժմ մի քանի փոփոխականի Փունկցիաների համար ունենք Ֆերմայի թեորեմի ընդլայնումը:

Թեորեմ 1.1. (Ֆերմա)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե $M_0(x_0, y_0)$ կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները, $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \equiv f'_x(x_0, y_0)$ և $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \equiv f'_y(x_0, y_0)$, ապա դրանք հավասար են զրոյի՝

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0} :$$

Մասնակի ածանցյալներով վերջին պայմանը կարելի է արտագրել համար-
ժեք տեսքով

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \text{grad } f(M_0) = \vec{0}},$$

օգտագործելով M_0 կետում ֆունկցիայի գրադիենտը, որը մասնակի ածան-
ցյալներով կազմված վեկտոր է՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \text{grad } f(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right\}} :$$

Նշելով ֆունկցիայի (լրիվ) դիֆերենցիալի տեսքը $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝

$$\boxed{df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy},$$

կարելի է Ֆերմայի թեորեմին մի փոքր այլ ձևակերպում տալ:

Թեորեմ 1.2. (Ֆերմա)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում դիֆերենցելի է և լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում $M_0(x_0, y_0)$ կետում f -ի դիֆերենցիալը նույնաբար զրո է՝

$$\boxed{df(M_0) \equiv 0}, \text{ այսինքն՝}$$

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy = 0$$

dx և dy աճերի (դիֆերենցիալների) ցանկացած ընտրության դեպքում:

Սահմանում 1.3. Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$: Եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0},$$

այս $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է f **ֆունկցիայի ստացիոնար կետ**:

Նշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել Ֆերմայի բեռները ստացիոնար կետի տերմիններով:

Թեորեմ 1.3. (Ֆերմա)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե $M_0(x_0, y_0)$ կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, այս $M_0(x_0, y_0)$ -ն f -ի ստացիոնար կետ է:

Այլ կերպ ասած, ավյալ $M_0(x_0, y_0)$ կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալների գոյության պայմանի դեպքում լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ ստացիոնար է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է} \right) \implies \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի ստացիոնար կետ է} \right) \quad (1.5)$$

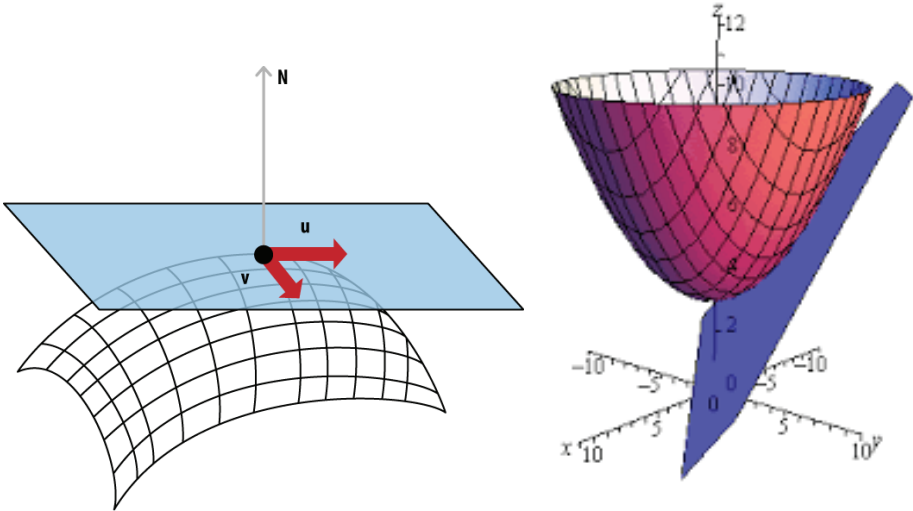
Մասնավորապես, դիտարկված Օրինակներ 1, 2, 3-ում բոլոր էքստրեմումի կետերը նաև ստացիոնար կետեր են:

Երկրաչափորեն ստացիոնար կետի փաստը նշանակում է, որ $M_0(x_0, y_0)$ ավյալ ստացիոնար կետում $f(x, y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթին կարելի է տանել շոշափող հարթություն, որը զուգահեռ է Oxy հարթությանը կամ համընկնում է նրա հետ: Իսկապես, շոշափող հարթության հավասարումն է

$$z = f(M_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0),$$

որը սրագիծնար կերի համար պարզունակ րեսք է ընդունում՝

$$z = f(M_0) \quad \text{կամ} \quad z = z_0 :$$



Գծ. 3

Նկատենք, որ եթե սրագիծնար կերում ֆունկցիան նաև մաքսիմում ունի, ապա այդ կերում րարված շոշափող հարթությունը ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթից վերև է գրնվում (եթե վերցնենք այդ մաքսիմումի կերի որոշակի փոքր շրջակայք): Այդ պարկերը կարելի է րեսնել գծ. 3-ում, իսկ Օրինակ 1-ում բերված ֆունկցիայի շոշափող հարթությունը $(0, 0)$ մաքսիմումի կերում $z = 1$ հորիզոնական հարթությունն է:

Իսկ եթե սրագիծնար կերում ֆունկցիան մինիմում ունի, ապա այդ կերում րարված շոշափող հարթությունը ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթից ներքև է գրնվում (եթե վերցնենք այդ մինիմումի կերի որոշակի փոքր շրջակայք): Այդ պարկերը կարելի է րեսնել Օրինակ 2-ում (գծ. 2), որում բերված ֆունկցիայի շոշափող հարթությունը $(0, 0)$ մինիմումի կերում հորիզոնական է և

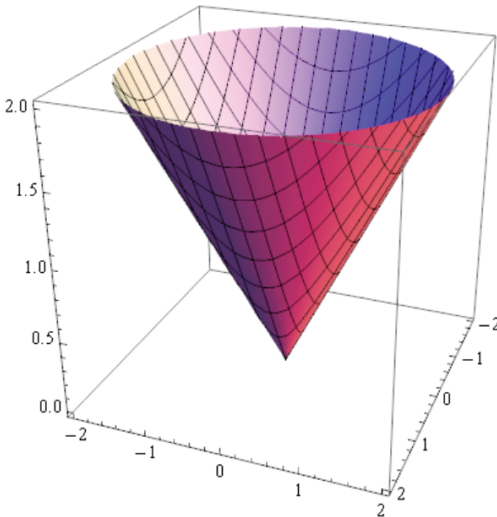
համընկնում է Oxy կոորդինատական հարթության հետ ($z = 0$ հավասարումով) և գտնվում է պարաբոլիդից ներքև:

Այժմ բերենք էքստրեմումի կերի այնպիսի օրինակ, որը սրացիոնար չէ:

Օրինակ 4. Դիպարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

Ֆունկցիան: Տեղը է տեսնել, որ f -ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսաառանցքը: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է անվերջ շրջանային կոն՝ $(0, 0)$ գագաթով և Oz առանցքով: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կեր ունի՝ խիստ մինիմումի կեր $M_{\min} = (0, 0)$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$:



Պժ. 4

Սակայն մյուս կողմից մինիմումի $M_{\min} = (0, 0)$ կերը սրացիոնար կեր չէ, քանի որ այդ կերում f -ի մասնակի ածանցյալները գոյություն

չունենն,

$$\begin{aligned}\nabla \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta y^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} : \end{aligned}$$

Դիփտողություն 1.4. Եթե Ֆերմայի թեորեմի մեջ $z = f(x, y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի, և M_0 կետում գոյություն ունի f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից միայն մեկը, ապա հենց այդ մասնակի ածանցյալը հավասար կլինի զրոյի, իսկ երկրորդը՝ կարող է գոյություն չունենալ: Բերենք սրացիոնար կետ չհանդիսացող էքստրեմումի կետի այդպիսի օրինակ: Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + |y| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Դարձյալ f -ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսաառանցքը: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մինիմումի կետ $M_{\min} = (0, 0)$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$: Մինչդեռ $M_{\min} = (0, 0)$ կետում մասնակի ածանցյալներից մեկը գոյություն ունի (և ուրեմն՝ հավասար է զրոյի), իսկ երկրորդը գոյություն չունի,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 0, \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ լոկալ էքստրեմումի կետը կարող է լինել ինչպես սրացիոնար կետ, այնպես էլ չլինել սրացիոնար: Միավորելով Ֆերմայի թեորեմը ոչ սրացիոնար էքստրեմումի կետի դեպքի հետ՝ ստանում ենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ 1.4. (Ընկալ էքսպրենմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքսպրենմում ունի: Այդ դեպքում $M_0(x_0, y_0)$ կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները կան հավասար են զրոյի, կան գոյություն չունեն:

Նշված $M_0(x_0, y_0)$ կետերին նոր անվանում քանք:

Սահմանում 1.4. Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$: $M_0(x_0, y_0)$ կետը կանվանենք f **ֆունկցիայի կրիտիկական կետ**, եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի կան գոյություն չունեն:

Ուրեմն՝ սպացիոնար կետերը կրիտիկական կետերի մի մասն են կազմում:

Նաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել վերջին թեորեմը կրիտիկական կետի տերմիններով:

Թեորեմ 1.5. (Ընկալ էքսպրենմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքսպրենմում ունի: Այդ դեպքում M_0 -ն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

Այլ կերպ ասած, լոկալ էքսպրենմումի կետը միշտ կրիտիկական է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքսպրենմումի կետ է} \right) \implies \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի կրիտիկական կետ է} \right) \quad (1.6)$$

Նաշվի առնելով, որ կրիտիկական և մասնավորապես սպացիոնար կետերը տալիս են լոկալ էքսպրենմումի միայն անհրաժեշտ պայմանը, կրիտիկական կետերը անվանում են նաև տվյալ ֆունկցիայի **էքսպրենմումի հնարավոր կետեր**: Ստացված (1.5), (1.6) պնդումներից եզրակացնում ենք, որ

f ֆունկցիայի լոկալ էքսպրենմումի կետերը որոնելիս, նախ պետք է գտնել f ֆունկցիայի սպացիոնար և բոլոր կրիտիկական կետերը:

Այնուամենայնիվ, Թեորեմներ 1.4 և 1.5-ում մենք ունենք լոկալ էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայմանը, այսինքն՝ (1.5), (1.6) պնդումների հակադարձ պնդումները սխալ են:

Իսկապես, ցույց փանք, որ գոյություն ունեն սրացիոնար և կրիտիկական կետեր, որոնք էքստրեմումի կետեր չեն:

Օրինակ 5. *Դիփարկենք*

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

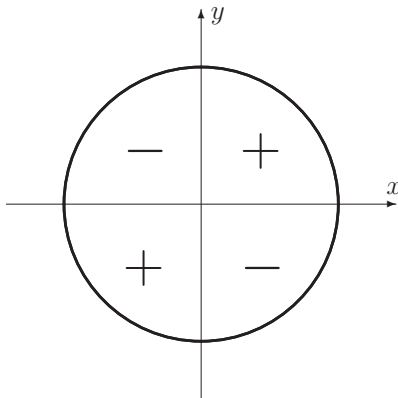
Ֆունկցիան: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է հիպերբոլական պարաբոլոիդ: Շեշտ է տեսնել, որ $(0, 0)$ կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = y \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = x \Big|_{(0,0)} = 0,$$

և ուրեմն՝ $(0, 0)$ կետը f ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է:

Սակայն $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև $(0, 0)$ կետի ցանկացած շրջակայքում f ֆունկցիան ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ,

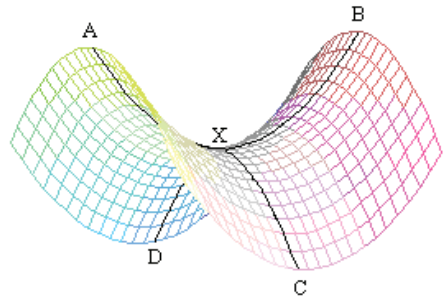
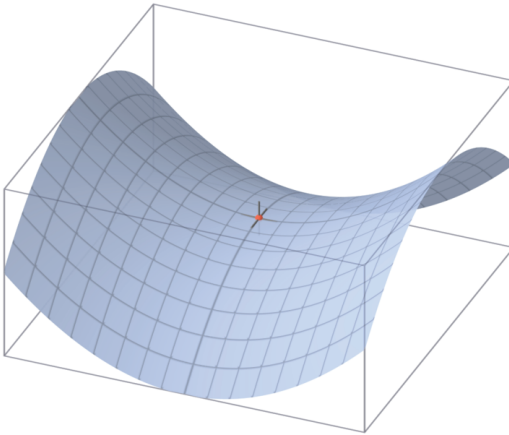
$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) > 0, \quad \text{երբ } x, y > 0, \quad f(x, y) < 0, \quad \text{երբ } x > 0, y < 0 :$$



Գծ. 5

Գծագիր 5-ում պատկերված է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, $(0, 0)$ սկզբնականների կամայական շրջակայք, որտեղ f ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ: Եթե մենք դիտարկենք ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող մակերևույթը (տես գծ. 6), ապա կարող ենք նկատել, որ $(0, 0)$ սրացիոնար կետի շրջակայքում այդ մակերևույթը հիշեցնում է թամբ կամ լեռնանցք՝ մի ուղղությամբ ուռուցիկ, իսկ մեկ այլ ուղղությամբ՝ գոգավոր: Նման դեպքում սրացիոնար կետն անվանում են **թամբակետ**: Թամբակետը, որոշակի իմաստով, մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների շրջման կետի նմանակն է շար փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում: Գրաֆիկի մակերևույթի տեսքից արդեն կարելի է հասկանալ, թե ինչու տվյալ սրացիոնար կետն էքստրեմումի կետ չէ:

Սահմանում 1.5. **Ֆունկցիայի թամբակետ** է կոչվում այդ ֆունկցիայի այն սրացիոնար կետը, որն էքստրեմումի կետ չէ:



Գծ. 6

Նաջորդ օրինակը ցույց է տալիս, որ կրիտիկական կետը կարող է չլինել ոչ սրացիոնար, ոչ էլ էքստրեմումի կետ:

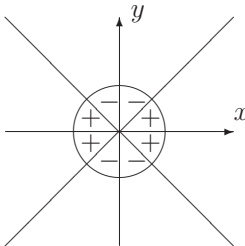
Օրինակ 6. Հիպարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x| - |y| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

Ֆունկցիան: Նեշը է տեսնել, որ $(0, 0)$ կետում f ֆունկցիան մասնակի ածանցյալներ չունի, և ուրեմն՝ f -ի կրիտիկական կետ է, բայց ոչ սրահիոնար,

$$\begin{aligned} \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \\ \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-|\Delta y|}{\Delta y} : \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝ $(0, 0)$ կետը f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև $f(0, 0) = 0$ և $(0, 0)$ սկզբնականի կամայական շրջակայքում f ֆունկցիան ընդունում է արժեքներ նշանների արժեքներ, տես գծ. 7՝



Գծ. 7

1.2 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Այժմ անցնենք լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանների ձևակերպումներին: Ինչպես տեսանք նախորդ բաժնի օրինակներում, անհրաժեշտ պայմանին բավարարող կետերը կարող են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չլինել (այդպես է նաև ավելի պարզ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար): Ուրեմն՝

մեզ պետք են հայրանիշներ՝ լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմաններով: Ստորև կբերենք մի քանի այդպիսի հայրանիշներ (թեորեմներ), որոնցում միշտ կենթադրենք, որ դիֆարկվող կետը ստացիոնար է, այսինքն՝ M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

կամ f -ի առաջին կարգի դիֆերենցիալն է զրոյական՝

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) dy \equiv 0, \quad \forall dx, dy :$$

Դրանից հետո էքստրեմումի կետ լինելու կամ չլինելու համար վճռական նշանակություն կունենա M_0 կետում f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը: Ընդունենք, որ դիֆարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ ֆունկցիա է M_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, այսինքն՝ $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$ և դիֆարկենք f -ի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կետում՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(M_0) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) dy^2 = \\ &= f''_{xx}(x_0, y_0) dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f''_{yy}(x_0, y_0) dy^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

անկախ փոփոխականների dx և dy դիֆերենցիալների կամայական և բավականաչափ փոքր արժեքների համար: Այսպես պետք է չմոռանալ, որ (1.7) և նմանօրինակ այլ դիֆերենցիալ բանաձևերում dx^2 և dy^2 արտահայտությունները ոչ թե x^2 կամ y^2 ֆունկցիաների դիֆերենցիալներ են, այլ dx և dy դիֆերենցիալների բառակուսիներ: Նույն դիֆարկումը վերաբերում է նաև անկախ փոփոխականների աճերին՝

$$\boxed{dx^2 = (dx)^2, \quad dy^2 = (dy)^2}, \quad \boxed{\Delta x^2 = (\Delta x)^2, \quad \Delta y^2 = (\Delta y)^2} :$$

Սա ընդունված գրելաձև է: Նույնը վերաբերում է ավելի բարձր աստիճաններին:

Թեորեմ 1.6. Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կերպի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կերպը $f(x, y)$ ֆունկցիայի սրագիծնար կերպ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$:

- 1) Եթե $d^2 f(M_0) > 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կերպ է՝ $M_0 = M_{\min}$:
- 2) Եթե $d^2 f(M_0) < 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կերպ է՝ $M_0 = M_{\max}$:
- 3) Եթե $d^2 f(M_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ), երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կերպ չէ:
- 4) Եթե $d^2 f(M_0) \geq 0$ կամ $d^2 f(M_0) \leq 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա սրույգ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0)$ կերպը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կերպ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կապահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Այսպիսով՝ համաձայն Թեորեմ 1.6-ի՝ էքստրեմումի առկայությունը որոշվում է ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանապահականման հատկությամբ: Այն է՝ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը փվյալ կերպում նշանափոխ է, ապա էքստրեմում չի կարող: Իսկ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը փվյալ կերպում պահպանում է (խիստ իմաստով) իր նշանը, ապա էքստրեմումն առկա է:

Ներագա ձևակերպումների համար հարմար է նշանակել f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները $M_0(x_0, y_0)$ կերպում՝

$$\begin{array}{cc} \boxed{a_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)}, & \boxed{a_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)}, \\ \boxed{a_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)}, & \boxed{a_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0)} : \end{array} \quad (1.8)$$

Քանի որ մենք ենթադրել էինք, որ դիփարակվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է, $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$ ուրեմն՝ մասնավորապես, ըստ Շվարցի հայտնի թեորեմի՝ f -ի երկրորդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են՝

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) : \quad (1.9)$$

Այսպիսի նշանակումներով արտագրենք f ֆունկցիայի (1.7) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$d^2 f(M_0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 : \quad (1.10)$$

Ըստ էության՝ (1.10) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն իրենից ներկայացնում է քառակուսի եռանդամ, որի նշանապահականման հարկությունները վճռորոշ դեր են կատարում Գոլյալ $M_0(x_0, y_0)$ կետի էքսպրեմումի կետ լինել-չլինելու հարցում: Նշանակենք (1.10) եռանդամի փարբերիչը (դիսկրիմինանսը), ավելի ճիշդ նրա հակադիրը

$$\Delta \equiv \Delta(M_0) \stackrel{def}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Նանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ քառակուսի եռանդամի նշանապահականումը որոշվում է նրա փարբերիչի նշանով: Մասնավորապես, եթե փարբերիչը դրական է, ապա քառակուսի եռանդամը նշանափոխ է, և ուրեմն՝ Գոլյալ կետում էքսպրեմում լինել չի կարող: Իսկ եթե փարբերիչը բացասական է, ապա քառակուսի եռանդամը պահպանում է իր նշանը, և ուրեմն՝ Գոլյալ կետը էքսպրեմումի կետ է: Ամբողջական և ճշգրիտ արդյունքը ձևակերպենք հետևյալ թեորեմում:

Թեորեմ 1.7. *Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում՝ $f(x, y) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Ընդունենք (1.8) նշանակումները M_0 կետում f -ի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների համար և (1.11) փարբերիչի համար,*

$$\Delta \equiv \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \text{Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները.}$$

- 1) Եթե $\Delta(M_0) > 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ էքստրեմումի կերպ է, ընդ որում՝
 խիստ մինիմումի կերպ է $M_0 = M_{\min}$, երբ $a_{11} > 0$ (կամ $a_{22} > 0$),
 խիստ մաքսիմումի կերպ է $M_0 = M_{\max}$, երբ $a_{11} < 0$ (կամ $a_{22} < 0$):
- 2) Եթե $\Delta(M_0) < 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերպը f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կերպ չէ:
- 3) Եթե $\Delta(M_0) = 0$, ապա սրույգ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0)$ կերպը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կերպ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Նշենք, որ Թեորեմ 1.6-ի 4)-րդ կետի և Թեորեմ 1.7-ի 3)-րդ կետի դեպքում, երբ թեորեմն ի գործ է պարզել M_0 կետի կարգավիճակը, սովորաբար դիմում են էքստրեմումի կետի սահմանմանը:

Այժմ բերենք մի քանի պարզ օրինակներ, որոնք ցույց կտան, թե ինչպես են գործում Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ում ներկայացված բավարար պայմանները:

Օրինակ 7. Դիպարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան (էլիպտական պարաբոլիդ), որն արդեն քննարկել էինք Օրինակ 2-ում և պարզել, որ $M_{\min} = (0, 0)$ սկզբնակետը f -ի մինիմումի կերպ է:

Ցույց տանք, որ էքստրեմումի կետերը կարելի է գտնել Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանների միջոցով:

Նախ գտնենք f -ի ստացիոնար (կրիտիկական) կետերը: Դրա համար պետք է լուծել հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \iff (0, 0)\text{-ն միակ ստացիոնար կետն է:}$$

Այս փաստը տալիս է էքստրեմումի կետի առայժմ միայն անհրաժեշտ պայմանը: Գտնված $(0, 0)$ սրագիտնար կետը ֆունկցիայի **էքստրեմումի հնարավոր կետ է**: Ստուգելու համար, թե արդյոք $(0, 0)$ սրագիտնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանները: Նաշվենք f -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 :$$

Կազմենք Δ որոշիչը,

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 :$$

Նամանայն թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը էքստրեմումի կետ է հանդիսանում դիտարկվող f ֆունկցիայի համար: Ավելին՝ $a_{11} = 2 > 0$ պայմանն էլ նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը մինիմումի կետ է, $M_{\min} = (0, 0)$:

Նույն եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0, 0)$ սրագիտնար կետում,

$$d^2 f(0, 0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 = 2 dx^2 + 2 dy^2 = 2 (dx^2 + dy^2) > 0 :$$

Ակնհայտ է, 2-րդ կարգի այս դիֆերենցիալը (սխալ) դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$: Ըստ թեորեմ 1.6-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը մինիմումի կետ է, $M_{\min} = (0, 0)$, դիտարկվող f ֆունկցիայի համար:

Այսպիսով՝ էքստրեմումի կետերի որոնումը և հայտնաբերումը կարելի է իրականացնել առնվազն երկու եղանակով, առաջինը՝ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի միջոցով (թեորեմ 1.6), երկրորդը՝ 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներից կազմված որոշիչների միջոցով (թեորեմ 1.7): Ընթերցողին ենք թողնում այս երկու եղանակներից ավելի հարմարի ընտրությունը:

Օրինակ 8. Հիպարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

Ֆունկցիան (հիպերբոլական պարաբոլոիդ), որն արդեն քննարկել էինք Օրինակ 5-ում և պարզել, որ $(0, 0)$ սկզբնակետը f -ի թամբակետ է, այսինքն՝ էքստրեմումի կետ չէ, թեև սրացիոնար կետ է (ընդ որում միակը),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 :$$

Որպես սրացիոնար կետ՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի միակ հնարավոր կետն է։ Այն, որ $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, Օրինակ 5-ում ասպացուցել էինք էքստրեմումի բուն սահմանման միջոցով։ Այժմ նույնը ցույց տանք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանների միջոցով։

Նաշվենք f -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 :$$

Կազմենք Δ որոշիչը,

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 :$$

Նամանայն Թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետում դիպարկվող f ֆունկցիան էքստրեմում չունի։

Նույն եզրակացությունը կարելի է հասնել, եթե Թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել Թեորեմ 1.6-ը։ Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0, 0)$ սրացիոնար կետում,

$$d^2 f(0, 0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 = 2 dx dy :$$

Ակնհայտ է՝ 2-րդ կարգի այս դիֆերենցիալը նշանափոխ է, այսինքն՝ ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ տարբեր dx և dy աճերի համար, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$:

Համաձայն Թեորեմ 1.6-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Դարձյալ, էքստրեմումի երկու բավարար պայմաններից (Թեորեմներ 1.6 և 1.7) ընթերցողը կիրառվածն համար կարող է ընտրել ավելի դուրեկանը:

Ցավոք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ում ներկայացված էքստրեմումի բավարար պայմանները ունիվերսալ միջոց չեն և ամենևին էլ բավարար չեն որոշ ֆունկցիաների համար: Բերենք համապատասխան օրինակներ:

Օրինակ 9. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^4 + y^4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: *Էքստրեմումի սահմանումից* ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ միևնույնի կետ $M_{\min} = (0, 0) : \text{Բայց այժմ մեր նպատակն է հետազոտել ֆունկցիայի հնարավոր էքստրեմումները՝ կիրառելով Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Հաշվելով առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները՝ համոզվում ենք, որ ֆունկցիան միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի,$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \iff (0, 0)\text{-ն միակ ստացիոնար կետն է:}$$

Այս փաստը տալիս է էքստրեմումի կետի միայն անհրաժեշտ պայմանը, և $(0, 0)$ ստացիոնար կետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի հնարավոր կետ է: Ստուգելու համար, թե արդյոք $(0, 0)$ ստացիոնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար

սլաքմանները: Տաշվենք f -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 :$$

Կազմենք Δ որոշիչը,

$$\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 :$$

Տամաձայն Թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը ընդհանրապես ասած կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է $(0, 0)$ կետի լրացուցիչ հետազոտում, ինչը մենք արդեն կատարել էինք հետազոտման սկզբում:

Նույն անորոշ եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե Թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել Թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0, 0)$ սրացիոնար կետում,

$$d^2 f(0, 0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 \equiv 0 :$$

Ըստ Թեորեմ 1.6-ի 4)-րդ կետի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է $(0, 0)$ կետի լրացուցիչ հետազոտում:

Նման անորոշ վիճակում որպես կանոն արդյունավետ է դիմել էքստրեմումի կետի բուն սահմանմանը: Տե՛ս դա մենք արել էինք սկզբում և հաստատել, որ $M_{\min} = (0, 0) :$

Օրինակ 10. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^3 + y^3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

ֆունկցիան:

Նաշվելով առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները՝ համոզվում ենք, որ ֆունկցիան միայն մեկ սրացիոնար կետ ունի,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 \end{cases} \iff (0,0)\text{-ն միակ սրացիոնար կետն է:}$$

Այս փաստը ցույց է տալիս, որ $(0,0)$ -ը f ֆունկցիայի $(0,0)$ -ում հարավոր կետ է: Ստուգելու համար, թե արդյոք $(0,0)$ սրացիոնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանները: Նաշվենք f -ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0:$$

Կազմենք Δ որոշիչը,

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0:$$

Նամանայն թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ կետը ընդհանրապես առաջ կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է $(0,0)$ կետի լրացուցիչ հետազոտում:

Նույն անորոշ եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0,0)$ սրացիոնար կետում,

$$d^2 f(0,0) = a_{11} dx^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dy^2 \equiv 0:$$

Ըստ թեորեմ 1.6-ի 4)-րդ կետի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ կետը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է $(0,0)$ կետի լրացուցիչ հետազոտում:

Նման անորոշ վիճակում որպես կանոն արդյունավետ է դիմել էքստրեմումի կետի բուն սահմանմանը: Դժվար չէ նկատել, որ $(0, 0)$ սկզբնականորեն f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև $(0, 0)$ կետի ցանկացած շրջակայքում f ֆունկցիան ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ,

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) > 0, \quad \text{երբ } x, y > 0, \quad f(x, y) < 0, \quad \text{երբ } x > 0, y < 0 :$$

Սկզբնականորեն շրջակայքում f ֆունկցիայի նշանների դասավորությունը այնպիսին է, ինչպես պատկերված է գծ. 5-ում: Այսպիսով $(0, 0)$ սկզբնականորեն f ֆունկցիայի թամբակետ է:

1.3 Բարձր կարգի դիֆերենցիալներով լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը

Ինչպես նշվեց նախորդ բաժնում, Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ում ներկայացված էքստրեմումի բավարար պայմանները ունիվերսալ միջոց չեն և ամենևին էլ բավարար չեն որոշ ֆունկցիաների համար: Մասնավորապես, եթե տվյալ $M_0(x_0, y_0)$ կետը $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է՝ $df(M_0) \equiv 0$, և նաև f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կետում ևս նույնաբար զրո է՝ $d^2f(M_0) \equiv 0$, ապա Թեորեմ 1.6-ը ի գործ չէ որոշել, թե M_0 կետը էքստրեմումի կետ է թե՛ ոչ: Այսպիսով՝

$$\boxed{df(M_0) \equiv 0, \quad d^2f(M_0) \equiv 0} \quad (1.12)$$

դեպքում հարցը մնում է բաց և անորոշ: Ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար, մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար էլ (1.12) անորոշ դեպքում, գոյություն ունեն բարձր կարգի

$$d^k f(M_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(M_0), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.13)$$

դիֆերենցիալներով ձևակերպված էքստրեմումի բավարար պայմաններ:

Թեորեմ 1.8. Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կերի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիան m ($m \in \mathbb{N}$) անգամ անընդհար դիֆերենցելի է՝ $f(x, y) \in C^m(\mathcal{U}(M_0))$, և բացի այդ՝ M_0 կերում

$$df(M_0) \equiv 0, \quad d^2f(M_0) \equiv 0, \quad d^3f(M_0) \equiv 0, \quad \dots, \quad d^{m-1}f(M_0) \equiv 0 :$$

- 1) Եթե m -ը գույգ թիվ է և $d^m f(M_0) > 0 \quad \forall \, dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերը f ֆունկցիայի (սիսար) լոկալ մինիմումի կեր է՝ $M_0 = M_{\min}$:
- 2) Եթե m -ը գույգ թիվ է և $d^m f(M_0) < 0 \quad \forall \, dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերը f ֆունկցիայի (սիսար) լոկալ մաքսիմումի կեր է՝ $M_0 = M_{\max}$:
- 3) Եթե m -ը կենր թիվ է և $d^m f(M_0) > 0$ կամ $d^m f(M_0) < 0 \quad \forall \, dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, ապա $M_0(x_0, y_0)$ կերը f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կեր չէ:

Բնականաբար չպետք է մտածել, թե Թեորեմ 1.8-ը տալիս է բոլոր դեպքերի պարասխանը, բայց որոշ դեպքերում նրա կիրառումն արդարացված է:

Օրինակ 11. Դիպարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{def}{=} x^4 + y^4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան, որն արդեն քննարկել էինք Օրինակ 9-ում: Էքստրեմումի սահմանումից ակնհայտ է, որ $M_{\min} = (0, 0)$:

Փորձենք նույն արդյունքին հասնել կիրառելով Թեորեմ 1.8-ի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Նաշվելով մասնակի ածանցյալները՝ համոզվում ենք, որ

$$df(0, 0) \equiv 0, \quad d^2f(0, 0) \equiv 0, \quad d^3f(0, 0) \equiv 0, \quad d^4f(0, 0) \neq 0 :$$

Ամենացածր կարգի ոչ զրոյական դիֆերենցիալը 4-րդ կարգի է և հեշտ է այն հաշվել և պարզել նրա նշանը՝

$$d^4 f(0, 0) = 24(dx^4 + dy^4) > 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0 :$$

Ըստ Թեորեմ 1.8-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0, 0)$ կետը f -ի միմիայնակ կետ է՝ $M_{\min} = (0, 0)$:

Օրինակ 12. 5-րդ աստիճանի

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^5 + y^5$$

բազմանդամը միայն մեկ սրացիոնար կետ ունի՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը, $df(0, 0) \equiv 0$, ինչպես նախորդ Օրինակ 11-ում:

Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը ըստ Թեորեմ 1.8-ի՝ հաշվելով ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալները՝

$$\begin{aligned} d^2 f(0, 0) &\equiv 0, & d^3 f(0, 0) &\equiv 0, & d^4 f(0, 0) &\equiv 0, \\ d^5 f(0, 0) &= 120(dx^5 + dy^5) \not\equiv 0 \quad \forall dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ $d^5 f(0, 0)$ դիֆերենցիալն ակնհայտորեն նշանավորի է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$, և գործ ունենք կետը աստիճանի դիֆերենցիալի հետ, ապա համաձայն Թեորեմ 1.8, 3)-ի՝ $(0, 0)$ սկզբնակետը էքստրեմումի կետ չէ:

Ըհշտ է, այս եզրակացությունն անմիջապես հետևում էր նաև էքստրեմումի կետի բուն սահմանումից, քանի որ $(0, 0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի զրոն է, իսկ շրջակայքում ֆունկցիան նշանավորի է:

Գլուխ 2

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները

Այս գլխում կքննարկենք կամայական $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ թվով անկախ փոփոխականների

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումների հարցը: Էքստրեմումի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները կամայական թվով անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների համար նման են Գլուխ 1-ում քննարկված երկու անկախ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքին: Ստորև բերված թեորեմներն անմիջականորեն տարածում են նախորդ գլխի արդյունքները երկու անկախ փոփոխականի դեպքից շար փոփոխականի դեպքի վրա: Բնականաբար ձևակերպումները տեխնիկապես ավելի բարդ և մեծածավալ կլինեն:

Ընդհանուր դեպքում մեզ անհրաժեշտ կլինեն որոշ փաստեր գծային հանրահաշվից, մասնավորապես, քառակուսային ձևերի մասին, որոնք թույլ կտան հստակեցնել և կարգավորել հայտանիշների ձևակերպումները:

2.1 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Կոդիփարկենք հետևյալ տեսքի մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են n -չափանի կամ մասնավորապես եռաչափ տիրույթում,

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

$$u = f(M) = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} :$$

Ենթադրենք $u = f(M)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ բազմության մեջ և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ -ն այդ բազմության ներքին կետ է:

Սահմանում 2.1. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետը կոչվում է $f(M)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքսիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի M_0 կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ շրջակայք, որտեղ $f(M)$ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը M_0 կետում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(M_0) \geq f(M) \quad \forall M \in \mathcal{U}(M_0) : \quad (2.1)$$

Իսկ $u_0 = f(M_0)$ արժեքը կոչվում է $f(M)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքսիմումի արժեք** կամ սրարգապես **մաքսիմում**: Կգրենք $M_{\max} = M_0$ և $f_{\max} = u_0$ կամ $u_{\max} = u_0$:

Նմանապես սահմանում են ֆունկցիայի մինիմումի կետը և մինիմումը՝

Սահմանում 2.2. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետը կոչվում է $f(M)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի M_0 կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ շրջակայք, որտեղ $f(M)$ ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը M_0 կետում, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad f(M_0) \leq f(M) \quad \forall M \in \mathcal{U}(M_0) : \quad (2.2)$$

Իսկ $u_0 = f(M_0)$ արժեքը կոչվում է $f(M)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի արժեք** կամ սրարգապես **մինիմում**: Կգրենք $M_{\min} = M_0$ և $f_{\min} = u_0$ կամ $u_{\min} = u_0$:

Կասենք նաև, որ M_0 կերպում $f(M)$ ֆունկցիան **խիստ մաքսիմում** կամ **խիստ մինիմում** ունի, եթե (1.1) և (1.2) պայմանների մեջ անհավասարության ոչ խիստ նշանները փոխարինենք խիստ նշաններով, այսինքն՝

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(M_0) > f(M) \quad \forall M \in \mathcal{U}(M_0), M \neq M_0, \quad (2.3)$$

կամ համապարասխանաբար

$$\exists \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(M_0) < f(M) \quad \forall M \in \mathcal{U}(M_0), M \neq M_0 : \quad (2.4)$$

Լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կերպերը անվանում են **(լոկալ) էքստրեմումի կերպեր**, իսկ (լոկալ) մաքսիմումները և մինիմումները՝ **(լոկալ) էքստրեմումներ**:

Դիփոդություն 2.1. Բերված սահմանումներում նշված անհավասարությունները կարելի է արտահայտել ֆունկցիայի աճման տերմիններով: Նշանակելով $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կերպում ֆունկցիայի (լրիվ) աճը՝

$$\Delta f(M_0) \stackrel{def}{=} f(M) - f(M_0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad M \in \mathcal{U}(M_0)$$

կարելի է (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) պայմանների մեջ անհավասարությունները համապարասխանորեն փոխարինել համարժեք անհավասարություններով, $\Delta f(M_0) \leq 0$, $\Delta f(M_0) \geq 0$, $\Delta f(M_0) < 0$, $\Delta f(M_0) > 0$:

Դիփոդություն 2.2. Ֆունկցիայի (լոկալ) մաքսիմումի և մինիմումի արժեքները, որոնք նշանակվում են $f_{\max}$, $f_{\min}$ կամ $u_{\max}$, $u_{\min}$, չպետք է շփոթել տվյալ բազմության մեջ ֆունկցիայի **մեծագույն և փոքրագույն արժեքների** հետ: Դրանք կրկնարկենք հետագայում, Բաժին 3.4-ում:

Բացի այդ, լոկալ էքստրեմումի կերպերը անվանում են նաև **բացարձակ էքստրեմումի կերպեր**, որպեսզի հետագայում դրանք չշփոթեն պայմանական էքստրեմումի կերպերի հետ, որոնց կհետագուրենք Գլուխ 3-ում:

Դիփոդություն 2.3. Մենք միշտ դիտարկելու ենք ներքին (լոկալ) էքստրեմումի կերպեր: Ներազայում հնարավոր է՝ մեզ հանդիպեն նման սահմանմանը բավարարող ոչ թե ներքին $M_0 \in \Omega$ էքստրեմումի կերպեր, այլ

եզրային $M_0 \in \partial\Omega$ «Էքստրեմումի» կետեր: Այդ դեպքերում մենք հաստատվում ենք նման երևույթը:

Մեր նպատակն է սովորել հայտնաբերել լոկալ էքստրեմումի կետերը:

Կսկսենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանից: Նշենք, որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը իրենից փաստորեն ներկայացնում է Ֆերմայի հայտնի թեորեմը: Այժմ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար ունենք Ֆերմայի թեորեմի ընդլայնումը:

Թեորեմ 2.1. (Ֆերմա)

Դիցուք $u = f(M)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե M_0 կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները,

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \equiv f'_{x_1}(M_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) \equiv f'_{x_2}(M_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) \equiv f'_{x_n}(M_0),$$

այսպես դրանք հավասար են գրոյի՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0 :$$

Մասնակի ածանցյալներով վերջին պայմանը կարելի է արտահայտել համարժեք տեսքով

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \text{grad } f(M_0) = \vec{0}},$$

օգտագործելով M_0 կետում ֆունկցիայի գրադիենտը, որը մասնակի ածանցյալներով կազմված վեկտոր է՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \text{grad } f(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) \right\}} :$$

Նշելով ֆունկցիայի (լրիվ) դիֆերենցիալի տեսքը $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կետում՝

$$\boxed{df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) dx_n}$$

կարելի է Ֆերմայի թեորեմին մի փոքր այլ ձևակերպում փոխել:

Թեորեմ 2.2. (Ֆերմա)

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետում դիֆերենցելի է և լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0 կետում f -ի դիֆերենցիալը նույնաբար զրո է $\boxed{df(M_0) \equiv 0}$:

Սահմանում 2.3. Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$: Եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0,}$$

այս M_0 կետը կոչվում է f **ֆունկցիայի սրացիոնար կետ**:

Նաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել Ֆերմայի թեորեմը սրացիոնար կետի տերմիններով:

Թեորեմ 2.3. (Ֆերմա)

Դիցուք $f(M)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0 \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե M_0 կետում գոյություն ունեն $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, այս M_0 -ն f -ի սրացիոնար կետ է:

Այլ կերպ ասած՝ փվյալ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալների գոյության պայմանի դեպքում, լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ սրացիոնար է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է} \right) \implies \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի սրացիոնար կետ է} \right) \quad (2.5)$$

Օրինակ 4-ում բերված է մի ֆունկցիա, որի էքստրեմումի կետը սրացիոնար չէ:

Դիփոդություն 2.4. Եթե Ֆերմայի թեորեմի մեջ $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$: կետում լոկալ էքստրեմում ունի և M_0 կետում գոյություն ունի $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից ոչ բոլորը՝ այլ մի քանիսը, ապա հենց այդ մասնակի ածանցյալները հավասար կլինեն զրոյի, իսկ մյուսները կարող են գոյություն չունենալ:

Այսպիսով՝ լոկալ էքստրեմումի կետը կարող է սրացիոնար կետ լինել, այնպես էլ չլինել սրացիոնար: Միավորելով Ֆերմայի թեորեմը ոչ սրացիոնար էքստրեմումի կետի դեպքի հետ՝ սրանում ենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ 2.4. (Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները կան հավասար են զրոյի, կան գոյություն չունեն:

Նկարագրված M_0 կետերին նոր անվանում փանք:

Սահմանում 2.4. Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$: M_0 կետը կանվանենք $f(M)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ, եթե M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի կամ գոյություն չունեն:

Ուրեմն՝ սրացիոնար կետերը կրիտիկական կետերի մի մասն են կազմում:

Նաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել վերջին թեորեմը կրիտիկական կետի տերմիններով:

Թեորեմ 2.5. (Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0 -ն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

Այլ կերպ ասած՝ լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ կրիտիկական է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է} \right) \implies \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի կրիտիկական կետ է} \right) \quad (2.6)$$

Նաշվի առնելով, որ կրիտիկական և մասնավորապես ստացիոնար կետերը պալիս են լոկալ էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայմանը, կրիտիկական կետերը անվանում են նաև տվյալ ֆունկցիայի **էքստրեմումի հնարավոր կետեր**:

Ստացված (2.5), (2.6) պնդումներից եզրակացնում ենք, որ

f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը որոնելիս, նախ պետք է գտնել f ֆունկցիայի ստացիոնար և բոլոր կրիտիկական կետերը:

Այնուամենայնիվ՝ Թեորեմներ 2.4 և 2.5-ում մենք ունենք լոկալ էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայմանները, այսինքն՝ (2.5), (2.6) պնդումների հակադարձները սխալ են: Որպես հաստատող օրինակներ կարելի է դիտարկել Օրինակներ 4 և 6-ը:

2.2 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը

մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Այժմ անցնենք լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանների ձևակերպումներին: Ինչպես րեսանք նախորդ բաժնի օրինակներում, անհրաժեշտ պայմանին բավարարող կետերը կարող են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չլինել (այդպես է նաև ավելի պարզ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար): Ուրեմն՝ մեզ

պեքը են հայրանիշներ (թերեմներ) լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմաններով: Մտորն կրերենք մի քանի այդպիսի հայրանիշներ, որոնցում միշտ կենթադրենք, որ դիտարկվող կեքը սրացիոնար է, այսինքն՝ $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կեքում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0,$$

կամ f -ի առաջին կարգի դիֆերենցիալն է զրոյական

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) dx_n \equiv 0 \quad \forall dx_i (i = \overline{1, n}) :$$

Դրանից հետո էքստրեմումի կեք լինելու կամ չլինելու համար վճռական նշանակություն կունենա M_0 կեքում f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը: Ընդունենք, որ դիտարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է M_0 կեքի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, $f(M) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$ և դիտարկենք f -ի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կեքում,

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f(M_0) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (2.7)$$

անկախ փոփոխականների dx_i դիֆերենցիալների կամայական և բավականաչափ փոքր արժեքների համար:

Թեորեմ 2.6. *Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կեքի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, $f(M)$ ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է, $f(M) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կեքը $f(M)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կեք է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$:*

1) *Եթե f -ի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է անկախ փոփոխականների կամայական $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ աճերի (դիֆերենցիալների) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,*

$$d^2 f(M_0) > 0 \quad \forall dx_i (i = \overline{1, n}), \quad dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0,$$

սպա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է՝
 $M_0 = M_{\min}$:

- 2) Եթե f -ի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է անկախ փոփոխականների կամայական $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ աճերի (դիֆերենցիալների) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,

$$d^2 f(M_0) < 0 \quad \forall dx_i \ (i = \overline{1, n}), \quad dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0,$$

սպա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է՝
 $M_0 = M_{\max}$:

- 3) Եթե $d^2 f(M_0)$ երկրորդ դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ), երբ $dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0$, սպա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ:

- 4) Եթե $d^2 f(M_0) \geq 0$ կամ $d^2 f(M_0) \leq 0 \quad \forall dx_i, dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0$, սպա սրույգ ոչինչ ասել չենք կարող, M_0 կետը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Այսպիսով՝ համաձայն Թեորեմ 2.6-ի՝ էքստրեմումի առկայությունը որոշվում է ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանապահականման հարկությունը: Այն է՝ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը փոխադրվում է նշանափոխ է, ապա էքստրեմում չի կարող: Իսկ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը փոխադրվում պահպանում է իր նշանը (խիստ իմաստով), ապա էքստրեմումն առկա է:

Օրինակ 13. Գտնենք

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները: Ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, ինչը թույլ է տալիս կիրառել

վերջին թեորեմը: Նախ և առաջ, գրենք f ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների միջոցով: Կազմենք և լուծենք հերևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \\ f'_z = 2z - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \quad M_0(-1, -2, 3) :$$

Սրացանք, որ $f(M)$ ֆունկցիան ընդամենը մեկ սրացիոնար կետ ունի՝ M_0 -ն: Սրուգենք՝ արդյո՞ք M_0 կետը էքստրեմումի կետ է թե՛ ոչ: Նաշվենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\begin{aligned} f''_{xx}(M) &= 2, & f''_{xy}(M) &= 0, \\ f''_{yy}(M) &= 2, & f''_{xz}(M) &= 0, \\ f''_{zz}(M) &= 2, & f''_{yz}(M) &= 0 : \end{aligned}$$

Կազմենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M) &= f''_{xx}(M) dx^2 + f''_{yy}(M) dy^2 + f''_{zz}(M) dz^2 + \\ &\quad + 2f''_{xy}(M) dx dy + 2f''_{xz}(M) dx dz + 2f''_{yz}(M) dy dz = \\ &= 2 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right) > 0, \quad \text{եթե} \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, ապա համաձայն Թեորեմ 2.6, 1)-ի $M_0(-1, -2, 3)$ սրացիոնար կետը $f(M)$ ֆունկցիայի միակ մինիմումի կետն է, $M_{\min} = M_0(-1, -2, 3)$: Նաշվենք նաև $f(M)$ ֆունկցիայի համապարաստիսն մինիմումի արժեքը՝

$$f_{\min} = f(M_0) = (-1)^2 + (-2)^2 + 3^2 - 2 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -14 :$$

Ի դեպ, քանի որ մինիմումի կետը միակն է, ապա սրացված $f_{\min} = -14$ մինիմումը հանդիսանում է նաև $f(M)$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեք՝

$$\min_{M \in \mathbb{R}^3} f(M) = f_{\min} = -14 :$$

Օրինակ 14. Ներագուրենք

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ֆունկցիան լուրի էքստրեմումների առումով: Ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, և սկզբում գտնենք f Ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների միջոցով: Կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ f'_y = 2y + 12x = 0 \\ f'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 72x = 0 \\ y = -6x \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - 24) = 0 \\ y = -6x \\ z = -1 \end{cases}$$

Նամոզվում ենք, որ համակարգն ունի երկու լուծում, այսինքն $f(M)$ Ֆունկցիան երկու ստացիոնար կետ ունի՝

$$M_1(0, 0, -1), \quad M_2(24, -144, -1) :$$

Այժմ ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները M_1 և M_2 ստացիոնար կետերի համար: Նաշվենք $f(M)$ Ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\begin{aligned} f''_{xx}(M) &= 6x, & f''_{xy}(M) &= 12, \\ f''_{yy}(M) &= 2, & f''_{xz}(M) &= 0, \\ f''_{zz}(M) &= 2, & f''_{yz}(M) &= 0 : \end{aligned}$$

Կազմենք $f(M)$ Ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M) &= f''_{xx}(M) dx^2 + f''_{yy}(M) dy^2 + f''_{zz}(M) dz^2 + \\ &\quad + 2f''_{xy}(M) dx dy + 2f''_{xz}(M) dx dz + 2f''_{yz}(M) dy dz = \\ &= 6x dx^2 + 2 dy^2 + 2 dz^2 + 2 \cdot 12 dx dy = \\ &= 2(3x dx^2 + dy^2 + dz^2 + 12 dx dy) : \end{aligned}$$

Սրացիոնար M_1 և M_2 կետերը սրուզենք հաջորդաբար: Նախ, կազմենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_1 կետերում և պարզենք նրա նշանը՝

$$d^2 f(M_1) = d^2 f(0, 0, -1) = 2(dy^2 + dz^2 + 12 dx dy) :$$

Յույց տանք, որ վերջին արտահայտությունը նշանափոխ է փոքր dx, dy, dz անքի համար: Բսկապես,

$$\begin{aligned} \text{եթե վերցնենք } dx = dy = 0, \quad dz \neq 0, \quad \text{ապա } d^2 f(M_1) &= 2 dz^2 > 0, \\ \text{իսկ եթե } dx = -dy \neq 0, \quad dz = 0, \quad \text{ապա } d^2 f(M_1) &= -22 dy^2 < 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_1 կետում նշանափոխ է, երբ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, ապա համաձայն Թեորեմ 2.6, 3)-ի $M_1(0, 0, -1)$ սրացիոնար կետը $f(M)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Այժմ սրուզենք էքստրեմումի բավարար պայմանները M_2 սրացիոնար կետի համար: Կազմենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_2 կետերում և պարզենք նրա նշանը՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M_2) &= d^2 f(24, -144, -1) = 2(3 \cdot 24 dx^2 + dy^2 + dz^2 + 12 dx dy) = \\ &= 2(72 dx^2 + 12 dx dy + dy^2) + 2 dz^2 : \end{aligned}$$

Դժվար չէ նկատել, որ $72 dx^2 + 12 dx dy + dy^2$ համասեռ քառակուսի եռանդամը իհստ դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$: Դրանում կարելի է համոզվել, անջատելով լրիվ քառակուսին կամ հաշվելով նրա տարբերիչը՝

$$\text{Discriminant} = 12^2 - 4 \cdot 72 = 144 - 288 = -144 < 0 :$$

Ուրեմն՝

$$d^2 f(M_2) = 2(72 dx^2 + 12 dx dy + dy^2) + 2 dz^2 > 0, \quad \text{երբ } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 :$$

Նամաձայն Թեորեմ 2.6, 1)-ի M_2 սրացիոնար կետը $f(M)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է, $M_{\min} = M_2(24, -144, -1)$: Նաշվենք նաև $f(M)$ ֆունկցիայի համապարասխան մինիմումի արժեքը՝ $f_{\min} = f(M_2) = -6913$:

Նկատենք, որ բերված Թեորեմ 2.6-ը երկու անկախ փոփոխականների դեպքին վերաբերող Թեորեմ 1.6-ի տարածումն է n անկախ փոփոխականի դեպքի վրա: Մեր հաջորդ նպատակն է n փոփոխականի դեպքի վրա տարածել նաև Թեորեմ 1.7-ը, որը էքսպրեմումի բավարար պայման է տալիս ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալների միջոցով: Դրա համար մեզ անհրաժեշտ կլինեն որոշ փաստեր գծային հանրահաշվից, մասնավորապես բառակուսային ձևերից: Թեև հաջորդ բաժինը շատ օգտակար է էքսպրեմումի հարցում, այնուամենայնիվ, ընթերցողը կարող է շրջանցել այն, եթե ցանկանում է խուսափել հանրահաշվական հավելյալ հասկացություններից:

2.3 Որոշ տեղեկություններ հանրահաշվից բառակուսային ձևերի մասին

Էքսպրեմումի հարցում, ինչպես ցույց է տալիս Թեորեմ 2.6-ը, ֆունկցիայի 2-րդ կարգի (2.7) դիֆերենցիալը վճռական դեր է կատարում և այն արժանի է հատուկ հետազոտման: Փաստորեն 2-րդ կարգի (2.7) դիֆերենցիալը

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (2.8)$$

իրենից ներկայացնում է անկախ փոփոխականների dx_i աճերից (դիֆերենցիալներից) կախված բազմանդամ (ընդ որում՝ 2-րդ աստիճանի համասեռ):

Նարմար է նշանակել գործակիցները՝ $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ $i, j = \overline{1, n}$ և dx_i աճերը (դիֆերենցիալները) մեկ այլ տառով:

Սահմանում 2.5. $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ փոփոխականների

$$Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

տեսքի ֆունկցիան անվանում են **քառակուսային ձև**: Քառակուսային ձևի $a_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R}$ գործակիցներից կազմված

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

քառակուսի մատրիցը կոչվում է **Q քառակուսային ձևի մատրից**:

Դիպոդոլություն 2.5. Եթե քառակուսային ձևի A մատրիցի մեջ բացահայտ ենթամատրիք, որ a_{ij} գործակիցները դիտարկվող $f(M) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն են M_0 կետում

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

ապա ստացված

$$A \equiv \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են f ֆունկցիայի **Վեսսելի մատրից** (տվյալ M_0 կետում) կամ կարճ՝ **հեսսիան**:

Սահմանման մեջ դրված $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանը բնական է, որովհետք այն համապատասխանում է խառը մասնակի ածանցյալների հավասարությանը՝

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_j \partial x_i} :$$

Բացի այդ, $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանը նշանակում է, որ A մատրիցը **սիմետրիկ** է, այլ կերպ ասած A մատրիցը համընկնում է իր շրջված (տրանսպոնացված) մատրիցի հետ՝ $A = A^T$:

Մասնավորապես, $n = 2$ երկչափ և $n = 3$ եռաչափ դեպքերում քառակուսային ձևը և նրա մաթրիցը ներկայացվում են այսպես՝

$$Q = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1 y_2 + a_{22}y_2^2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$Q = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1 y_2 + 2a_{13}y_1 y_3 + 2a_{23}y_2 y_3, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} :$$

Անհրաժեշտության դեպքում Q քառակուսային ձևը կարելի է ներկայացնել մաթրիցային տեսքով՝ օգտագործելով նրա մաթրիցը, y_i փոփոխականներից կազմված մեկ վորդ և մեկ սյուն,

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = y^T A y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

որտեղ նշանակված է սյան տեսքով վեկտոր՝ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} :$

Մահմանում 2.6. *Դիցուք տրված է*

$$Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = y^T A y$$

քառակուսային ձևը:

1) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **դրական որոշյալ**, եթե $Q(y)$ -ն ընդունում է միայն դրական արժեքներ բոլոր ոչ զրոյական $y \neq 0$

վեկորներն է համար, այսինքն՝ երբ $y_1, y_2, \dots, y_n$ փոփոխականները միաժամանակ զրո չեն,

$$Q(y) > 0, \quad \text{երբ } \forall y \neq 0 \quad \text{կամ } y_1^2 + \dots + y_n^2 \neq 0 :$$

- 2) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **բացասական որոշյալ**, եթե $Q(y)$ -ն ընդունում է միայն բացասական արժեքներ բոլոր $y \neq 0$ վեկորներն է համար, այսինքն՝ երբ $y_1, y_2, \dots, y_n$ փոփոխականները միաժամանակ զրո չեն,

$$Q(y) < 0, \quad \text{երբ } \forall y \neq 0 \quad \text{կամ } y_1^2 + \dots + y_n^2 \neq 0 :$$

- 3) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **նչ բացասական որոշյալ** (կամ **դրական կիսաորոշյալ**), եթե $Q(y)$ -ն ընդունում է միայն n բացասական արժեքներ բոլոր $y \in \mathbb{R}^n$ վեկորներն է համար, և նաև ընդունում է զրո արժեքը ինչ-որ n զրոյական $y' \in \mathbb{R}^n$ վեկորի համար,

$$Q(y) \geq 0, \quad \text{երբ } \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{և } \exists y' \in \mathbb{R}^n, y' \neq 0 \quad \text{s.t.} \quad Q(y') = 0 :$$

- 4) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **նչ դրական որոշյալ** (կամ **բացասական կիսաորոշյալ**), եթե $Q(y)$ -ն ընդունում է միայն n դրական արժեքներ բոլոր $y \in \mathbb{R}^n$ վեկորներն է համար, և նաև ընդունում է զրո արժեքը ինչ-որ n զրոյական $y' \in \mathbb{R}^n$ վեկորի համար,

$$Q(y) \leq 0, \quad \text{երբ } \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{և } \exists y' \in \mathbb{R}^n, y' \neq 0 \quad \text{s.t.} \quad Q(y') = 0 :$$

- 5) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **նշանաորոշյալ**, եթե նա կամ դրական, կամ բացասական որոշյալ է:

- 6) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **կիսաորոշյալ** կամ **քվադրինշանաորոշյալ**, եթե նա կամ դրական, կամ բացասական կիսաորոշյալ է:

7) $Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է **նշանափոխ** (կամ **նշանասանդորոշ**), եթե նա ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ:

Օրինակ 15. 1. $\boxed{Q(y_1, y_2, y_3) \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2}$ քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, $Q(y_1, y_2, y_3) > 0 \quad \forall y = (y_1, y_2, y_3), y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \neq 0$:

2. $\boxed{Q(y_1, y_2, y_3) \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3}$ քառակուսային ձևը դրական կիսաորոշյալ է, քանի որ

$$Q(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 + y_3)^2 \geq 0 \quad \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ ընդ որում}$$

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad \text{երբ} \quad y_1 = -y_2 - y_3 \neq 0:$$

3. $\boxed{Q(y_1, y_2, y_3) \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3}$ քառակուսային ձևը նշանափոխ է, քանի որ $Q(1, 0, 0) = 1 > 0, Q(0, 1, 0) = -1 < 0$:

Քառակուսային ձևերի նշանաորոշվածության հասկացության համար մի քանի հայտանիշներ կան: Ամենահարմար հայտանիշը, թերևս, Սիլվեստրի հայտնի հայտանիշն է:

Դիտարկենք որևիցե մի քառակուսային ձև

$$\boxed{Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (2.9)}$$

որի մատրիցն է

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

Սահմանենք հետևյալ որոշիչները՝

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} a_{11}, \quad \Delta_2 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\Delta_k \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \Delta_n \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

որոնք կոչվում են A մատրիցի անկյունային (կամ գլխավոր) միներներ:

Թեորեմ 2.7. (Միլվեստրի հայտարանիչը)

1) Որպեսզի (2.9) քառակուսային ձևը դրական որոշյալ լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցի բոլոր անկյունային միներները դրական լինեն՝

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0: \quad (2.10)$$

2) Որպեսզի (2.9) քառակուսային ձևը բացասական որոշյալ լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցի անկյունային միներները նշանահերթափոխ լինեն, ընդ որում առաջին միները լինի բացասական, այսինքն՝

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \Delta_n > 0: \quad (2.11)$$

3) Որպեսզի (2.9) քառակուսային ձևը ոչ բացասական որոշյալ (դրական կիսաորոշյալ) լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցի բոլոր անկյունային միներները ոչ բացասական լինեն՝

$$\Delta_1 \geq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \geq 0, \quad \dots, \quad \Delta_n \geq 0, \quad (2.12)$$

ընդ որում՝ գոյություն ունի զրոյական անկյունային միներ, $\exists \Delta_k = 0$ ինչ-որ k -ի համար:

4) Որպեսզի (2.9) քառակուսային ձևը ոչ դրական որոշյալ (բացասական կիսաորոշյալ) լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ կարարվի հետևյալ պայմանը

$$\Delta_1 \leq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \leq 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \Delta_n \geq 0, \quad (2.13)$$

ընդ որում՝ գոյություն ունի զրոյական անկյունային միևնույն, $\exists \Delta_k = 0$ ինչ-որ k -ի համար:

5) Եթե A մատրիցի անկյունային միևնույնները բավարարում են (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) պայմաններից տարբերվող մեկ այլ պայմանին, ապա (2.9) քառակուսային ձևը նշանափոխ (նշանասանրոշ) է:

Դիփոդություն 2.6. Ցանկացած սիմետրիկ քառակուսի $A = (a_{ij})$ մատրիցին նույնպես կարելի է վերագրել Սահմանում 2.6-ում տեղ գրած նշանաորոշյալ, կիսաորոշյալ կամ նշանասանրոշ լինելու հատկությունները: Պարզապես այդ մատրիցի a_{ij} տարրերից կարելի է կազմել

$$Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = y^T A y$$

քառակուսային ձև և կրկնել Թեորեմ 2.7-ի 1)-5) կետերի պայմանները:

2.4 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար (շարունակություն)

Օգրվելով Սահմանում 2.6-ի մեջ պարունակվող հանրահաշվական հասկացություններից, կարելի է վերաձևակերպել Թեորեմ 2.6-ը:

Թեորեմ 2.8. Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, $f(M)$ ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է՝ $f(M) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կետը

$f(M)$ ֆունկցիայի սրագիտնար կեր է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Բացի այդ՝ M_0 կերում $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները նշանակենք

$$a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

և դրանցից կազմենք

$$Q \equiv Q(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \equiv d^2 f(M_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j \quad (2.14)$$

քառակուսային ձևն իր $A = (a_{ij})$ մատրիցով:

- 1) Եթե Q քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, ապա M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կեր է՝ $M_0 = M_{\min}$:
- 2) Եթե Q քառակուսային ձևը բացասական որոշյալ է, ապա M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կեր է՝ $M_0 = M_{\max}$:
- 3) Եթե Q քառակուսային ձևը նշանափոխ (նշանասանրորոշ) է, ապա M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կեր չէ :
- 4) Եթե Q քառակուսային ձևը կիսաորոշյալ է, ապա սրույզ ոչինչ ասել չենք կարող. M_0 կերը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կեր լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում) :

Կիրառելով Թեորեմ 2.7-ում ներկայացված Սիլվեստրիի հայտանիշը՝ կարելի է ձևակերպել այդ հայտանիշով արգահայտված էքստրեմումի բավարար պայմանը:

Թեորեմ 2.9. *Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կերի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում $f(M)$ ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է՝ $f(M) \in C^2(\mathcal{U}(M_0))$, և M_0 կերը $f(M)$ ֆունկցիայի սրագիտնար կեր է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Բացի*

այդ՝ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները նշանակենք

$$a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

և դրանցից կազմենք $A = (a_{ij})$ մատրիցը:

1) Եթե A մատրիցի բոլոր անկյունային միներները դրական են

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0, \quad (2.15)$$

այս M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է $M_0 = M_{\min}$:

2) Եթե A մատրիցի անկյունային միներները նշանահերթափոխ են, ընդ որում՝ առաջին միները բացասական է, այսինքն՝

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \Delta_n > 0, \quad (2.16)$$

այս M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է, $M_0 = M_{\max}$:

3) Եթե Q քառակուսային ձևը նշանափոխ (նշանասանդորոշ) է, այս M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ :

4) Դիցուք րեդի ունի կիսատրոշվածության պայմաններից որևէ մեկը՝

$$\Delta_1 \geq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \geq 0, \quad \dots, \quad \Delta_n \geq 0, \quad (2.17)$$

կամ

$$\Delta_1 \leq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \leq 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \Delta_n \geq 0, \quad (2.18)$$

ընդ որում՝ զոյություն ունի զրոյական անկյունային միներ, $\exists \Delta_k = 0$ ինչ-որ k -ի համար: Այդ դեպքում ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող. M_0 կետը կարող է ինչպես f -ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում) :

5) Եթե A մատրիցի անկյունային միտրոները բավարարում են (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) պայմաններից փարբերվող մեկ այլ պայմանին, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ :

Նկատենք, որ Թեորեմ 2.9-ը n -չափանի դեպքի վրա է փարածում երկու փոփոխականի դեպքին վերաբերող Թեորեմ 1.7-ը, որում մասնակցում էին անկյունային միտրոներից առաջին երկուսը միայն:

Օրինակ 16. Գտնենք

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները: Նախ նկատենք, որ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, և դիֆերենցման հետ խնդիր առաջանալ չի կարող: Գտնենք ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը, իսկ դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f'_x = 4x - y + 2z = 0 \\ f'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ f'_z = 2x + 2z = 0 : \end{cases}$$

Լուծելով համոզվում ենք, որ համակարգն ունի միայն երկու լուծում՝

$$M_1 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), \quad M_2 \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) :$$

Սրանք f ֆունկցիայի սրացիոնար կամ էքստրեմումի հնարավոր կետերն են: Այժմ անցնենք ֆունկցիայի էքստրեմումի բավարար պայմանների ստուգմանը: Նաշվենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\begin{aligned} f''_{xx}(M) &= 4, & f''_{xy}(M) &= -1, \\ f''_{yy}(M) &= 6y, & f''_{xz}(M) &= 2, \\ f''_{zz}(M) &= 2, & f''_{yz}(M) &= 0 : \end{aligned}$$

Կազմենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը և դիտարկենք այն որպես քառակուսային ձև,

$$\begin{aligned} d^2 f(M) &= f''_{xx}(M) dx^2 + f''_{yy}(M) dy^2 + f''_{zz}(M) dz^2 + \\ &\quad + 2f''_{xy}(M) dx dy + 2f''_{xz}(M) dx dz + 2f''_{yz}(M) dy dz = \\ &= 4 dx^2 + 6y dy^2 + 2 dz^2 - 2 dx dy + 4 dx dz, \end{aligned}$$

որի մատրիցը կաբանա հերկյալ տեսքը՝ $A \equiv A(M) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

Ներազոտրենք նախ $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ սրացիոնար կետի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Քառակուսային $d^2 f(M)$ ձևի մատրիցը M_1 կետում կընդունի հերկյալ տեսքը՝

$$A(M_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Նաշվենք $A(M_1)$ մատրիցի անկյունային (գլխավոր) միևորները,

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0 : \quad (2.19)$$

Քանի որ $A(M_1)$ մատրիցի անկյունային բոլոր միևորները դրական են, ապա համաձայն Թեորեմ 2.9-ի՝ M_1 կետը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_1$:

Նշենք, որ (2.19) պայմանները, այն է՝ $A(M_1)$ մատրիցի անկյունային բոլոր միևորների դրական լինելը՝ ըստ Սիլվեստրի հայտանիշի (Թեորեմ 2.7) նշանակում է, որ $A(M_1)$ մատրիցը կամ նրան համապատասխանող քառակուսային $d^2 f(M_1)$ ձևը դրական որոշյալ են, ինչը համաձայն Թեորեմ 2.8-ի՝ նույնպես հաստատում է, որ M_1 կետը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_1$:

Այժմ հետազոտենք $M_2 \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ստացիոնար կետի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Քառակուսային $d^2 f(M)$ ձևի մատրիցը M_2 կետում կրկնորակ հերկյալ տեսքը՝

$$A(M_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Տաշվենք $A(M_2)$ մատրիցի սակյունային (գլխավոր) միևորները,

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0 : \quad (2.20)$$

(2.20) պայմանները մատնանշում են, որ $A(M_2)$ մատրիցը ոչ նշանաորոշյալ է, ոչ էլ կիսատրոշյալ և չի բավարարում Թեորեմ 2.9-ի 1)-4) պայմաններին, այլ բավարարում է Թեորեմ 2.9-ի 5)-րդ պայմանին, ինչից եզրակացնում ենք, որ M_2 կետը էքստրեմումի կետ չէ:

Նույն եզրակացությանը կարելի է հասնել, եթե դիտարկենք $d^2 f(M_2)$ քառակուսային ձևը,

$$\begin{aligned} d^2 f(M_2) &= f''_{xx}(M_2) dx^2 + f''_{yy}(M_2) dy^2 + f''_{zz}(M_2) dz^2 + \\ &+ 2f''_{xy}(M_2) dx dy + 2f''_{xz}(M_2) dx dz + 2f''_{yz}(M_2) dy dz = \\ &= 4 dx^2 - 3 dy^2 + 2 dz^2 - 2 dx dy + 4 dx dz : \end{aligned}$$

Ցույց տանք, որ $d^2 f(M_2)$ քառակուսային ձևը նշանափոխ է: Իսկապես, եթե վերցնենք $dy = dz = 0$ և $dx \neq 0$, ապա կտրանանք $d^2 f(M_2) = 4 dx^2 > 0$: Իսկ եթե վերցնենք $dx = dz = 0$ և $dy \neq 0$, ապա կտրանանք $d^2 f(M_2) = -3 dy^2 < 0$: Քառակուսային $d^2 f(M_2)$ ձևի նշանափոխությունը ըստ Թեորեմ 2.8-ի՝ դարձյալ ցույց է տալիս, որ M_2 կետը էքստրեմումի կետ չէ:

Գլուխ 3

Ֆունկցիայի պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումները: Լագրանժի մեթոդը

Նախորդ գլուխներում քննարկված էքստրեմումի կետերն անվանում են լոկալ, բացարձակ, սովորական կամ ոչ պայմանական: Ի փարբերություն դրանց՝ այս գլխում քննարկվող պայմանական (կամ հարաբերական) էքստրեմումի կետերը պետք է բավարարեն որոշ լրացուցիչ պայմաններին:

3.1 Խնդրի դրվածքը երկու

փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Պարզաբանենք պայմանական էքստրեմումի հասկացությունը մի պարզ օրինակով:

Օրինակ 17. *Դիտարկենք*

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը $\overline{\mathbb{D}} := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ փակ միավոր շրջանն է, իսկ գրաֆիկը վերին միավոր կիսասփերան։ Այս ֆունկցիան արդեն հետազոտել էինք Օրինակ 1-ում և պարզել, որ f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի միակ կետն է սկզբնակետը՝ լոկալ մաքսիմումի կետ, $M_{\max} = (0, 0)$: Մասնով լոկալ և բացարձակ էքստրեմումի խնդիրը լուծվին լուծված է։

Այժմ մի փոքր այլ խնդիր ձևակերպենք։ Գտնել տվյալ f ֆունկցիայի էքստրեմումները ոչ թե նրա ամբողջ $\overline{\mathbb{D}}$ որոշման տիրույթում, այլ $\overline{\mathbb{D}}$ -ի ինչ-որ ենթաբազմության վրա՝ ինչ-որ կորի կամ հատվածի վրա, օրինակ գտնենք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները $y = 1 - x$ ուղղի այն հատվածի վրա, որն ընկած է որոշման տիրույթում։ Ուղղի հավասարումն արտագրենք համարժեք տեսքով՝

$$\boxed{\varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1 = 0}, \quad (3.1)$$

որն անվանում են **կապի հավասարում**։ էքստրեմումի դրված խնդիրը կարճ կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\begin{cases} f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ուրեմն՝ մեր նպատակն է լուծել պայմանական էքստրեմումի (3.2) խնդիրը (3.1) կապի հավասարման առկայության դեպքում։ Իսկ (3.2) խնդրի սկնկավորող լուծումները՝ որպես $\mathbb{R}^2$ հարթության կետեր կանվանենք **պայմանական էքստրեմումի կետեր** $\varphi(x, y) = 0$ կորի վրա կամ (3.1) կապի հավասարման դեպքում։

Նկատենք, որ եթե $\varphi(x, y) = 0$ կորը անցնեք բացարձակ էքստրեմումի կետով, ապա այդպիսի պայմանական էքստրեմումի կետը կհամընկնեք բացարձակ էքստրեմումի $M_{\max} = (0, 0)$ կետի հետ։ Մակայն (3.2) խնդրի (3.1) կապի հավասարման կորը չի անցնում սկզբնակետով և ուրեմն՝ կունենա պայմանական էքստրեմումի այլ կետեր։

Քանի որ մենք փաստորեն դիտարկում ենք ոչ թե ամբողջ f ֆունկցիան, այլ միայն նրա նեղացումը $\varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$ ուղղի վրա, ապա (3.2) խնդիրը հեշտությամբ կլուծվի, եթե անմիջականորեն տեղադրենք կապի $y = 1 - x$ հավասարումը f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ և ձևակերպենք սովորական էքստրեմումի խնդիր՝

$$f(x, y) \Big|_{y=1-x} = f(x, 1-x) = \sqrt{1-x^2 - (1-x)^2} \mapsto \text{extr.}, \quad x \in [0, 1] :$$

Սրացված միաչափ և սովորական էքստրեմումի խնդիրն արագ լուծվում է սովորական ածանցյալի միջոցով՝

$$f(x, 1-x) = \sqrt{1-x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2x(1-x)}, \quad x_{\max} = \frac{1}{2} :$$

Այստեղից էլ ստանում ենք, որ (3.1) կապի հավասարմանը բավարարող $M_{\max} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կերը միակ պայմանական էքստրեմումի (մաքսիմումի) կերն է, իսկ պայմանական մաքսիմումի արժեքը կլինի $f_{\max} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

Ինչպես տեսանք, պայմանական էքստրեմումի խնդիրը հեշտությամբ լուծվեց կապի հավասարման անմիջական տեղադրմամբ ֆունկցիայի բանաձևի մեջ: Սա հնարավոր եղավ առաջին հերթին կապի հավասարման պարզության շնորհիվ, երբ y -ը բացահայտ արտահայտվեց x -ի միջոցով՝ $y = y(x)$:

Եթե $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումը թույլ է փախս մի փոքր ավելի ընդհանուր *պարամետրական* ներկայացում,

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

ապա անմիջական տեղադրման եղանակը դեռևս հնարավոր է: Սրացվող

$$z = f(x(t), y(t)) \mapsto \text{extr.} \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.3)$$

ֆունկցիան կախված է միայն մեկ t անկախ փոփոխականից և դարձյալ պայմանական էքսպրեսմումի (3.2) խնդիրը հանգում է (3.3) սովորական էքսպրեսմումի խնդրին:

Ավելի բարդ դեպք ենք ունենում, երբ $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումից չենք կարող x և y փոփոխականներից մեկը բացահայտ արտահայտել մյուսով, կամ համարժեք պարամետրական հավասարումներով ներկայացնել: Դարձյալ ենթադրում ենք, որ $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումը որոշում է մեկ փոփոխականի $y = y(x)$ ֆունկցիա, որն արդեն իրենից կներկայացնի *անբացահայտ ֆունկցիա*,

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = y(x) \quad \text{անբացահայտ ֆունկցիա} :$$

Թեև $y = y(x)$ ֆունկցիայի բացահայտ արտահայտումը այժմ չունենք, այնուամենայնիվ ձևականորեն կարելի է այն արտահայտել $z = f(x, y)$ ֆունկցիայի մեջ և համարել, որ հարցը բերվում է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սովորական էքսպրեսմումի հետազոտմանը՝

$$z = f(x, y(x)) \mapsto \text{extr.} \quad x_0 \leq x \leq x_1 : \quad (3.4)$$

Ներառվումը շարունակելու համար պահանջվում է (3.4) բարդ ֆունկցիան ածանցել (բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնով)՝

$$z'_x = f'_x + f'_y y'_x : \quad (3.5)$$

Այսպեղից էլ կարիք է առաջանում հաշվել $y = y(x)$ անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը, ինչը կարելի է անել անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցման հայտնի բանաձևով կամ անմիջականորեն ածանցելով $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարումը ըստ x -ի՝ համարելով, որ y -ը կախյալ է x -ից՝

$$0 = \frac{d}{dx} \varphi(x, y(x)) = \varphi'_x + \varphi'_y y'_x : \quad (3.6)$$

Լրացուցիչ ենթադրելով, որ $\varphi'_y \neq 0$, ստանում ենք անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$\boxed{y'_x = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}} : \quad (3.7)$$

Տեղադրելով (3.7)-ը (3.5)-ի մեջ, ստանում ենք (3.4) z բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$z'_x = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} : \quad (3.8)$$

Էքստրեմումի որոնումը պահանջում է, որ նախ և առաջ պետք է գտնենք ստացիոնար կետերը, և ուրեմն՝ (3.8) ածանցյալը հավասարեցնենք զրոյի՝

$$z'_x = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0 : \quad (3.9)$$

Այսպիսով պայմանական հնարավոր էքստրեմումի կետերը պետք է բավարարեն (3.9) և կապի հավասարումներին՝

$$f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0 : \quad (3.10)$$

Սրացանք հավասարումների համակարգ, որը կարելի է ներկայացնել ավելի հարմար համաչափ տեսքով: Դրա համար ներմուծենք նոր օժանդակ պարամետր

$$-\lambda \stackrel{def}{=} \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}, \quad (3.11)$$

որտեղ $(-)$ նշանը պարփադիր չէ և դրված է զույգ տեխնիկական հարմարության առումով: Օգտվելով λ պարամետրից, (3.10) համակարգը արտագրվում է այսպես՝

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 : \end{cases} \quad (3.12)$$

Այսպիսով (3.12) համակարգը տալիս է $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի **անհրաժեշտ պայմանը** $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Շիշենք, որ մենք փորձում ենք լուծել

$$\begin{cases} f(x, y) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

պայմանական էքստրեմումի խնդիրը: Կազմելով և լուծելով (3.12) համակարգը՝ մենք կստանանք պայմանական հնարավոր էքստրեմումի բոլոր կետերը (ստացիոնար կետերը), որոնցից դեռ պետք է ընտրենք իսկապես պայմանական էքստրեմումի կետերը:

(3.12) համակարգին ավելի ամփոփ տեսք տալու համար կազմում են հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$L(x, y) \equiv L(x, y, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y) + \lambda \varphi(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

որպեսզի (x, y) կետը փոփոխվում է իր (որոշման) $D \subset \mathbb{R}^2$ հարթ տիրույթում, իսկ λ -ն անորոշ պարամետր է:

Սահմանված L ֆունկցիան անվանում են **Լագրանժի ֆունկցիա**, λ պարամետրը՝ **Լագրանժի բազմապատկիչ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակից**, և առհասարակ պայմանական էքստրեմումի նկարագրված եղանակը անվանում են **Լագրանժի մեթոդ**:

Նշելով, որ (3.12) համակարգի բոլոր երեք հավասարումների ձախմասերը Լագրանժի L ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն են՝

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Մենք փաստորեն ապացուցեցինք պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը, որը Լագրանժի ֆունկցիայի միջոցով հետևյալ ձևակերպումը կստանա:

Թեորեմ 3.1. Դիցուք $z = f(x, y)$ և $\varphi(x, y)$ ֆունկցիաները որոշված են և ողորկ են $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում, $f(x, y), \varphi(x, y) \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետը f -ի պայմանական էքստրեմումի կետ է $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Բացի այդ, $M_0(x_0, y_0)$ կետում $\varphi(x, y)$ ֆունկցիայի գրադիենտը զրոյական չէ, այսինքն՝ $\varphi'_x(x_0, y_0)$ և $\varphi'_y(x_0, y_0)$ ածանցյալները միաժամանակ զրո չեն:

Այդ դեպքում գոյություն ունի $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ արժեք այնպիսին, որ (x_0, y_0, λ_0) եռյակը բավարարում է (3.15) համակարգին, այսինքն՝ *Լագրանժի L ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է:*

Բնականաբար պայմանական էքստրեմումի (3.16) խնդիրը լիովին լուծելու համար մեզ անհրաժեշտ կլինի ստանալ պայմանական էքստրեմումի ոչ միայն անհրաժեշտ, այլ նաև բավարար պայմանները: Լագրանժի նկարագրված մեթոդը այնքան արդյունավետ է, որ թույլ է տալիս այդ բավարար պայմանները ամփոփ ձևակերպել Լագրանժի ֆունկցիայի տերմիններով: Նիմնական միջոցը հետևյալն է՝

$f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:

Այժմ ավելի ճշգրիտ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը:

Թեորեմ 3.2. (Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում, այսինքն՝

$$\begin{cases} f(x, y) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) = 0 : \end{cases} \quad (3.16)$$

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետը ինչ-որ $\lambda = \lambda_0$ արժեքի դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիայի Լագրանժի $L(x, y) \equiv L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է, այսինքն՝ $dL(x_0, y_0) \equiv 0$, կամ

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 : \end{cases} \quad (3.17)$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝

$$d^2L(x_0, y_0) = L''_{xx}(x_0, y_0) dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + L''_{yy}(x_0, y_0) dy^2 :$$

- 1) Եթե $d^2L(x_0, y_0) > 0$ բոլոր $\forall dx, dy$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$dx^2 + dy^2 \neq 0, \quad \boxed{\varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0}, \quad (3.18)$$

սպա $M_0(x_0, y_0)$ կերը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մինիմումի կեր է $M_0(x_0, y_0) = M_{\min}$, $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում:

- 2) Եթե $d^2L(x_0, y_0) < 0$ բոլոր $\forall dx, dy$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$dx^2 + dy^2 \neq 0, \quad \varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0,$$

սպա $M_0(x_0, y_0)$ կերը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կեր է $M_0(x_0, y_0) = M_{\max}$, $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում:

- 3) Եթե $d^2L(x_0, y_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ) dx, dy դիֆերենցիալների (աճերի) նույն (3.18) սահմանափակումների ներքո, սպա $M_0(x_0, y_0)$ կերը f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կեր չէ:

- 4) Եթե $d^2L(x_0, y_0) \geq 0$ կամ $d^2L(x_0, y_0) \leq 0$, երբ dx, dy դիֆերենցիալները (աճերը) բավարարում են նույն (3.18) սահմանափակումներին, սպա սրույզ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0)$ կերը կարող է ինչպես f -ի պայմանական էքստրեմումի կեր լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Այսպիսով՝ ինչպես լուրջ էքստրեմումի դեպքում էր (տես Թեորեմ 1.6), այժմ պայմանական էքստրեմումի դեպքում ևս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը (Լագրանժի ֆունկցիայի) փվյալ սրացիոնար կետում որոշում է պայմանական էքստրեմումի առկայությունը:

Քննարկենք մի քանի պարզ օրինակներ, որոնցում պայմանական էքստրեմումները հիմնականում կորոնենք անորոշ բազմապարկիչների Լագրանժի մեթոդով:

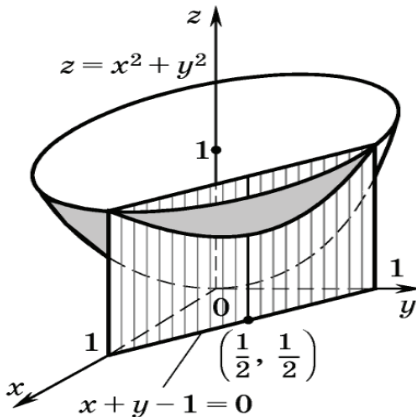
Օրինակ 18. Մենք արդեն Օրինակներ 2 և 7-ում քննարկել էինք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան (էլիպտիկական պարաբոլոիդ) և պարզել, որ $M_{\min} = (0, 0)$ սկզբնականորդ f -ի բացարձակ մինիմումի կետ է:

Այժմ ձևակերպենք բոլորովին այլ՝ պայմանական էքստրեմումի խնդիր $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ կապի հավասարման դեպքում,

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.19)$$



Գծ. 8

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդրի ամենակարճ և հասկանալի եղանակը թերևս $y = 1 - x$ կապի հավասարման անմիջական տեղադրումն է և մեկ փոփոխականի $f(x, 1 - x)$ ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի հետազոտումն է: Թողնում ենք սա ընթերցողին, որպես վարժություն:

Լուծենք (3.19) խնդիրը Լագրանժի մեթոդով, որպեսզի ցույց տանք՝ ինչպես է այն գործում: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ (գործակից) է: Նախ գրենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրագիծնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.20)$$

Նամակարգի 1-ին և 2-րդ հավասարումներից հեշտ է տեսնել, որ $x = y$, ինչից ստանում ենք

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = y = \frac{1}{2} : \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կերը Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրագիծնար կետն է, կամ (3.19) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է: Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Նաշվենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետում,

$$\begin{aligned} L''_{xx}(x, y) &= 2, & L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 2, \\ L''_{xy}(x, y) &= 0, & L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

$$L''_{yy}(x, y) = 2, \quad L''_{yy} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 2,$$

$$\begin{aligned} d^2 L \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) &= L''_{xx} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) dx^2 + 2L''_{xy} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) dx dy + L''_{yy} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) dy^2 = \\ &= 2 dx^2 + 2 dy^2 > 0, \quad \text{երբ } dx^2 + dy^2 \neq 0 : \end{aligned} \quad (3.21)$$

Արդեն ստացանք, որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$, ինչից ըստ Թեորեմ 3.2-ի հետևում է, որ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարման դեպքում:

Նշենք, որ Թեորեմ 3.2-ը պահանջում էր նաև հաշվի առնել կապի (3.18) դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0, \quad \text{կամ} \quad dx + dy = 0,$$

ինչից ստանում ենք

$$d^2 L \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 2 dx^2 + 2 dy^2 = 4 dx^2 > 0 \quad \text{երբ } dx \neq 0,$$

նույն եզրակացությամբ՝ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, կապի $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ հավասարման դեպքում:

Օրինակ 19. Դիտարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը $\overline{\mathbb{D}} := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ փակ միավոր շրջանն է, իսկ գրաֆիկը վերին միավոր կիսասփերան: Այս ֆունկցիան արդեն հետազոտել էինք Օրինակ 1-ում լոկալ էքստրեմումի առումով և Օրինակ 17-ում պայմանական էքստրեմումի առումով $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Վերջին դեպքում անմիջական

տեղադրման և փոփոխականի արտաքսման եղանակով պարզել էինք, որ $M_{\max} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կերպը պայմանական մաքսիմումի կերպ է:

Այժմ նույն պայմանական էքստրեմումի խնդիրը

$$\begin{cases} f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

լուծենք L ագրանժի մեթոդով, որպեսզի ցույց տանք ինչպես է այն գործում: Կազմենք f -ի L ագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \lambda(x + y - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն L ագրանժի անորոշ բազմապարկիչ (գործակից) է: Նախ գրենք L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Համակարգի 1-ին և 2-րդ հավասարումներից հեշտ է տեսնել, որ $x = y$, ինչից ստանում ենք

$$\begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - x^2}} + \lambda = 0 \\ x + x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} :$$

Այսպիսով՝ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կերպը L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրացիոնար կետն է կամ (3.22) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է: Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Հաշվենք L ագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետում.

$$L''_{xx}(x, y) = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$L''_{xy}(x, y) = \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$L''_{yy}(x, y) = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dy^2 = \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} dx^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} dx dy - \frac{3\sqrt{2}}{2} dy^2 = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (3 dx^2 + 2 dx dy + 3 dy^2) : \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ներկենք 3.2-ի պայմաններին՝ պահանջենք, որ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ սրագիծն արդեն կետում կարարվի կապի դիֆերենցիալ $d\varphi(M_0) = 0$ հավասարումը, րեն (3.18),

$$d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0) dx + \varphi'_y(M_0) dy = dx + dy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad dx = -dy :$$

Տեղադրենք աճերի այս կապը 2-րդ կարգի (3.24) դիֆերենցիալի մեջ՝

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (3 dx^2 + 2 dx dy + 3 dy^2) = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (3 dx^2 - 2 dx^2 + 3 dx^2) = -2\sqrt{2} dx^2 < 0, \quad \text{երբ } dx \neq 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ L ազրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է՝ $d^2L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < 0$, երբ $dx \neq 0$, համաձայն Թեորեմ 3.2, 2)-ի՝ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը f -ի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է $M_{\max} = M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարման դեպքում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Դիպոդոլթյուն 3.1. Եթե $M_0(x_0, y_0)$ կետում f ֆունկցիան լոկալ էքստրեմում ունի, և բացի այդ M_0 կետով անցնում է ինչ-որ ուղիղ կամ որևէ անընդհար Γ կոր, ապա միանգամայն պարզ է, որ f ֆունկցիան նույն

M_0 կետում կունենա նաև պայմանական էքստրեմում, երբ կապի հասկացությունը Γ կորով է արտահայտված: Տեսաբանորեն, որ որոշակի իմաստով հսկայաբան պնդումը սխալ է, եթե սահմանափակվենք էքստրեմումի կետով անցնող ուղիղներով միայն: Բերենք համապատասխան օրինակ:

Օրինակ 20. Ապացուցենք, որ սկզբնականում

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (y - x^2)(y - 3x^2)$$

ֆունկցիան էքստրեմում չունի, սակայն նրա նեղացումը ցանկացած $y = kx$ ուղիղ վրա նույն կետում էքստրեմում արդեն ունի: Տաշվենք՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x(y - 3x^2) - 6x(y - x^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (y - 3x^2) + (y - x^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(2y - 3x^2) = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 : \end{cases}$$

Ուրեմն՝ $(0, 0)$ սկզբնական է $f(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրացիոնար կետն է, սակայն էքստրեմումի կետ չէ, այլ կերպ ասած f -ի թամբակներ է: Բսկայեն, $f(0, 0) = 0$, և եթե $(0, 0)$ կետի շրջակայքում վերցնենք $(0, y)$, $y \neq 0$, տեսքի կետեր, ապա ֆունկցիան դրական է՝ $f(0, y) = y^2 > 0$: Բսկ եթե $(0, 0)$ կետի շրջակայքում վերցնենք $(x, 2x^2)$, $x \neq 0$, տեսքի կետեր, ապա ֆունկցիան բացասական է՝

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - x^2)(2x^2 - 3x^2) = -x^4 < 0, \quad \text{երբ } x < 0 :$$

Այսպիսով $(0, 0)$ սկզբնական թամբակներ է, էքստրեմումի կետ չէ:

Մյուս կողմից, եթե դիտարկենք $(0, 0)$ կետով անցնող կամայական $y = kx$, ($k \in \mathbb{R}$) ուղիղ, ապա $f|_{y=kx}$ նեղացումն արդեն էքստրեմում կունենա $(0, 0)$ կետում: Բսկայեն, սկզբում դիտարկելով f -ի նեղացումը x առանցքի վրա՝ համոզվում ենք, որ $(0, 0)$ կետը պայմանական (խիստ) մինիմումի կետ է,

$$f|_{y=0} = f(x, 0) = 4x^2, \quad M_{\min} = (0, 0) :$$

Դիփարկելով f -ի նեղացումը y առանցքի վրա, համոզվում ենք, որ $(0, 0)$ կետը նույնպես պայմանական (խիստ) մինիմումի կետ է,

$$f\Big|_{x=0} = f(0, y) = y^2, \quad M_{\min} = (0, 0) :$$

Այժմ դիփարկենք f -ի նեղացումը $y = kx$, $k \neq 0$, ուղղի վրա: Տեղադրելով ստանում ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$f\Big|_{y=kx} = f(x, kx) = (kx - x^2)(kx - 3x^2) = 3x^4 - 4kx^3 + k^2x^2 :$$

Էքստրեմումի առկայությունը ստուգենք 2-րդ կարգի ածանցյալի միջոցով՝

$$\frac{d}{dx}f(x, kx)\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x, kx)\Big|_{x=0} = 2k^2 > 0,$$

ինչը նշանակում է, որ $x = 0$ կետը $f(x, kx)$ ֆունկցիայի խիստ մինիմումի կետ է, այսինքն՝ $(0, 0)$ կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի կետ է:

Օրինակ 21. Դիփարկենք

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

ֆունկցիան տրված որոշման տիրույթով, այն է՝ կոորդինատական հարթության առաջին քառորդը: Պահանջվում է գտնել f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ էլիպսի վրա, ավելի սրույգ, այդ էլիպսի առաջին քառորդի աղեղի վրա: Առաջանում է պայմանական էքստրեմումի խնդիր կապի $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ հավասարումով,

$$\begin{cases} z = f(x, y) = xy \mapsto \max. & x, y > 0, \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.25)$$

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդիրը կարելի է լուծել ինչպես անմիջական տեղադրման եղանակով, այդ թվում՝ օգտագործելով էլիպսի

պարամետրական հավասարումները, այնպես էլ Լագրանժի ընդհանուր մեթոդով:

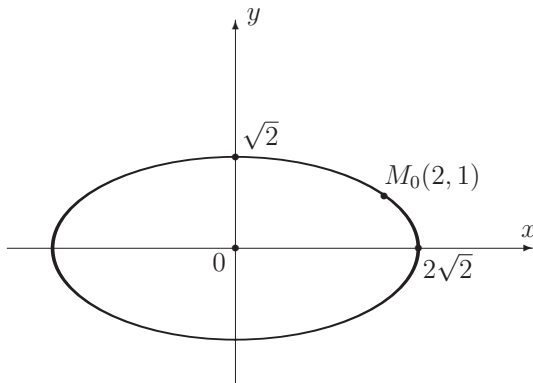
1-ին եղանակ. Օգտվելով այն պայմանից, որ ֆունկցիայի փոփոխականները դրական են, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարումից բացահայտ արտահայտենք y -ը x -ի միջոցով և տեղադրենք f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ, $y = y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{8 - x^2}$,

$$z = z(x) = f(x, y(x)) = \frac{1}{2}x\sqrt{8 - x^2}, \quad \left(0 \leq x \leq 2\sqrt{2}\right):$$

Մասնով խնդիրը հանգեց մեկ փոփոխականի $z(x)$ ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի խնդրին: Էլ ավելի պարզեցնելով մեր գործը՝ $z(x)$ ֆունկցիայի փոխարեն կարելի է քննարկել նրա քառակուսին (հաստատունի ճշգրտությամբ)

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2(8 - x^2) \longmapsto \max. \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{2},$$

որտեղից պարզ է, որ ֆունկցիան մաքսիմում ունի, երբ $x^2 = 4$, այսինքն՝ $x_{\max} = 2$ կերպով: Այն, որ սա իսկապես մաքսիմումի կեր է, երևում է թեկուզ այն փաստից, որ հատվածի ծայրակետերում $g(x)$ ֆունկցիան զրո է, իսկ ներսում՝ դրական է միակ սրագիծնառ $x = 2$ կերով:



ԳՃ. 9

Տաշվելով նաև $y(2) = 1$ արժեքը, եզրակացնում ենք, որ $(2, 1)$ կետը $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի միակ կետն է, որտեղ f -ն ընդունում է իր մաքսիմումը և մեծագույն արժեքը,

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2, 1)}, \quad \max f(x, y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2, 1) = 2 :$$

2-րդ եղանակ. Էլիպսը, որը երկրաչափորեն կապի հավասարումն է պալիս, ներկայացնենք պարամետրական տեսքով,

$$\begin{cases} x = x(t) = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) :$$

Պարամետրական այս ֆունկցիաները տեղադրենք $f(x, y)$ -ի մեջ և դրանով խնդիրը կրեքովի մեկ փոփոխականի $z(t) = f(x(t), y(t))$ ֆունկցիայի սովորական մաքսիմումի խնդրին՝

$$z = z(t) = f(x(t), y(t)) = 4 \cos t \sin t = 2 \sin 2t \mapsto \max. \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) :$$

Նեշտրոթյամբ գրենում ենք $z(t)$ ֆունկցիայի միակ մաքսիմումի կետը՝
 $\boxed{t_{\max} = \frac{\pi}{4}}$, ինչից սրանում ենք $x(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի միակ $(2, 1)$ կետը: Եզրակացությունը նույնն է, ինչ նախորդ եղանակի դեպքում՝

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2, 1)}, \quad \max f(x, y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2, 1) = 2 :$$

3-րդ եղանակ. Այժմ պայմանական մաքսիմումի նույն (3.25) խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է: Իմիջիայլոց, Լագրանժի ֆունկցիան կազմելիս, կարելի էր -1 վերջին գումարելին դնել նեյրե,

քանի որ դիֆերենցելու ժամանակ հասարարունը որևէ դերակարարում չունի:

Նախ գրենք L ազդանշի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կերերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = y + \frac{1}{4} \lambda x = 0 \\ L'_y(x, y) = x + \lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{x}{y} \\ x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases} \quad (3.26)$$

Այսպիսով $M_0(2, 1)$ կերը L ազդանշի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրացիոնար կերն է կամ (3.25) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կերն է: Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Տաշվենք L ազդանշի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(2, 1)$ կերում՝ նկարի ունենալով, որ $\lambda = -2$,

$$\begin{aligned} L''_{xx}(x, y) &= \frac{\lambda}{4}, & L''_{xx}(2, 1) &= -\frac{1}{2}, \\ L''_{xy}(x, y) &= 1, & L''_{xy}(2, 1) &= 1, \\ L''_{yy}(x, y) &= \lambda, & L''_{yy}(2, 1) &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dx dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dy^2 = \\ &= -\frac{1}{2} dx^2 + 2 dx dy - 2 dy^2 = -\frac{1}{2} (dx^2 - 4 dx dy + 4 dy^2) = \\ &= -\frac{1}{2} (dx - 2 dy)^2 : \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ներկելով Թեորեմ 3.2-ի պայմաններին՝ պահանջենք, որ $M_0(2, 1)$ սրացիոնար կերում կարարվի կապի դիֆերենցիալ $\boxed{d\varphi(M_0) = 0}$ հավասարումը, րեն (3.18),

$$d\varphi(x, y) = \varphi'_x(x, y) dx + \varphi'_y(x, y) dy = \frac{x}{4} dx + y dy$$

$$d\varphi(2, 1) = \varphi'_x(2, 1) dx + \varphi'_y(2, 1) dy = \frac{1}{2} dx + dy = 0 \iff \boxed{dx = -2dy} :$$

Տեղադրենք աճերի այս կապը 2-րդ կարգի (3.27) դիֆերենցիալի մեջ,

$$d^2L(2, 1) = -\frac{1}{2} (dx - 2dy)^2 = -\frac{1}{2} (2dx)^2 = -2dx^2 < 0, \quad \text{երբ } dx \neq 0 :$$

Քանի որ L ագրանժի ֆունկցիալի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է, $d^2L(2, 1) < 0$, երբ $dx \neq 0$, համաձայն **Թեորեմ 3.2, 2)**-ի՝ $M_0(2, 1)$ կերը f -ի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կեր է $M_{\max} = M_0(2, 1)$, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարման դեպքում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: Ֆունկցիալի մեծագույն արժեքը կլինի

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2, 1)}, \quad \max f(x, y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2, 1) = 2 :$$

Դիպողություն 3.2. Վերջին դեպքում պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը մենք ստուգեցինք շնորհիվ **Թեորեմ 3.2-ի**: Տվյալ ֆունկցիալի համար այդ փաստը բավականին ակնհայտ է առանց նշված թեորեմի: Բակապես, էլիպսի տրված աղեղի $(2\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ ծայրակերտքում (դրանք էլիպսի կիսաառանցքներն են) $f(x, y) = xy$ ֆունկցիան հավասար է զրոյի, իսկ աղեղի ներսում f -ը միայն մեկ ստացիոնար կեր ունի: Քանի որ f -ը դրական է, ուրեմն՝ այդ ստացիոնար կերը վերածվում է մաքսիմումի կերի:

Բերենք մի օրինակ փնտրագիտության բնագավառից:

Օրինակ 22. Նշանակենք x -ով կապիտալի, իսկ y -ով աշխատուժի միավորների քանակները: Կապիտալի արժեքն է 3000 դրամ յուրաքանչյուր միավորի համար, իսկ աշխատուժի արժեքը՝ 5000 դրամ յուրաքանչյուր միավորի համար: Դրանցից կախված թողարկված արտադրանքի քանակը ենթադրենք որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\boxed{f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 120 x^{4/5} y^{1/5}}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 :$$

Տնտեսագիտությունում նման ֆունկցիաներն անվանում են **Քոք-Դուգ-լասի արտադրական ֆունկցիա** և սովորաբար նշանակում են $f(K, L)$ տեսքով:

Արտադրողը մրադիր է ներդնել 600 հազար դրամ: Քանի՞ միավոր աշխատուժ և կապիտալ պետք է տեղաբաշխել, որպեսզի արտադրանքը հասցնել առավելագույնի: Վաշվել արտադրանքի առավելագույն քանակը:

Լուծումը բերվում է պայմանական էքստրեմումի խնդրին: Կապիտալի ընդհանուր արժեքն է 3000 x դրամ, իսկ աշխատուժի ընդհանուր արժեքը 5000 y դրամ: Ըստ պայմանի՝ այդ միջոցների ընդհանուր քանակը 600 հազար դրամ է: Այսպես, սրացվեց կապի հավասարում՝

$$3000x + 5000y = 600\,000 \quad \text{կամ} \quad 3x + 5y = 600,$$

և առաջացավ պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝

$$\begin{cases} z = f(x, y) = 120x^{4/5}y^{1/5} \mapsto \max. & x, y \geq 0, \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 3x + 5y - 600 = 0 : \end{cases} \quad (3.28)$$

Խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով և կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 120x^{4/5}y^{1/5} - \lambda(3x + 5y - 600), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է (λ -ի նշանը էական չէ):

Գտնենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 120 \frac{4}{5} x^{-1/5} y^{1/5} - 3\lambda = 0 \\ L'_y(x, y) = 120 \frac{1}{5} x^{4/5} y^{-4/5} - 5\lambda = 0 \\ \varphi(x, y) = 3x + 5y - 600 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 96x^{-1/5}y^{1/5} = 3\lambda \\ 24x^{4/5}y^{-4/5} = 5\lambda \\ 3x + 5y = 600, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 \cdot 5x^{-1/5}y^{1/5} = 24 \cdot 3x^{4/5}y^{-4/5} \\ 3x + 5y = 600 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, 15x \\ 3x + 5y = 600 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 160 \\ y = 24 : \end{cases}$$

Այսպիսով $M_0(160, 24)$ կերպը L ազդանշանի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ սրագիտնար կերպն է կամ (3.28) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կերպն է:

Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը կարելի է ստուգել L ազդանշանի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի միջոցով, ինչպես նախորդ օրինակներում: Մակայն տվյալ օրինակում կարելի է խուսափել ավելորդ հաշվարկներից և օգտվել սրագիտնար կերպի միակությունից: Բսկայես, պայմանական էքստրեմումի (3.28) խնդրում f ֆունկցիան հեղազոտվում է միայն $3x + 5y = 600$ ուղղի 1-ին քառորդում գտվող հատվածի վրա: Այդ հատվածի ծայրակետերում f ֆունկցիան ակնհայտորեն հավասար է զրոյի, իսկ հատվածի ներսում՝ դրական է՝

$$\begin{aligned} f(200, 0) &= 0, & f(0, 120) &= 0, \\ f(x, y) &> 0, & \text{երբ} & \quad 3x + 5y = 600, \quad x, y > 0 : \end{aligned}$$

Շեղևարար տվյալ հատվածի $M_0(160, 24)$ ներքին սրագիտնար կերպում f ֆունկցիան կարող է միայն մաքսիմում ունենալ, ինչից էլ գտնում ենք f ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի արժեքը՝

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_0(160, 24), \\ f_{\max} &= f(M_0) = f(160, 24) = 120 (160)^{4/5} (24)^{1/5} \approx 13\,138 : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ արտադրողը պետք է տեղաբաշխի 160 միավոր կապիտալ (այսինքն՝ $160 \cdot 3000 = 480\,000$ դրամ) և 24 միավոր աշխատուժ (օրինակ 24 հոգու, որի ծախսը կկազմի $24 \cdot 5000 = 120\,000$ դրամ), որպեսզի արտադրանքը հասցնի առավելագույնի: Այդ առավելագույն քանակը կկազմի մոտավորապես 13 138 միավոր արտադրանք:

3.2 Պայմանական էքստրեմումի խնդիրը երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Երեք և ավելի շար փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրն ավելի բազմազան է և ծավալուն, թեև խնդրի լուծման ընդհանուր սկզբունքները չեն փոխվում: Կարճ նկարագրենք իրավիճակը և բերենք համապարասխան օրինակներ:

Երեք փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կարող է ունենալ մեկ կամ երկու կապի հավասարում: Առավել պարզ օրինակներում դեռևս հնարավոր է անմիջական փեղադրման և փոփոխականների թվի կրճատման եղանակը:

Օրինակ 23. *Դիփարկենք*

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y + z^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան ամբողջ $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության վրա երկու կապի հավասարումների դեպքում

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x + y + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} y - xz - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.29)$$

Նշենք, որ կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումները երկրաչափորեն ներկայացնում են ինչ-որ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ կոր, և միայն այդ կորի վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է Γ կորի վրա f -ի նեղացումը, կգրենք $f(M)|_{M \in \Gamma}$ կամ կարճ՝ $f|_{\Gamma}$: Կապի հավասարումների միջոցով արտաբերենք x փոփոխականը՝

$$\begin{cases} z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 1 \\ y = xz + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 1 \\ y = x^2 + x + 1 : \end{cases}$$

Տեղադրելով f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ սրանում ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա,

$$\begin{aligned} u &= u(x) = f(x, x^2 + x + 1, x + 1) = x + x^2 + x + 1 + (x + 1)^2 = \\ &= 2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2 \longmapsto \text{extr.} \quad x \in \mathbb{R} : \end{aligned}$$

Մրացանք սովորական էքստրեմումի պարզ խնդիր: Առկա է միայն մեկ էքստրեմումի (մինիմումի) կետ՝ $\boxed{x_{\min} = -1}$, $\boxed{u_{\min} = 0}$: Վերաձևակերպելով սկզբնական f ֆունկցիայի համար՝ սրանում ենք, որ f ֆունկցիան միայն մեկ $f_{\min} = 0$ էքստրեմում (մինիմում) ունի $\boxed{M_{\min} = M_0(-1, 1, 0)}$ կետում:

Օրինակ 24. Դիփարկենք

$$\boxed{u = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y^2 + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան ամբողջ $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության վրա միայն մեկ կայի հավասարման դեպքում

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2x - y - 3 = 0 : \end{cases} \quad (3.30)$$

Նշենք, որ կայի $\varphi = 0$ հավասարումը երկրաչափորեն ներկայացնում է որոշակի հարթություն $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, և միայն այդ հարթություն վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է $f|_{\Gamma}$ նեղացումը:

Տեղադրելով կայի $y = 2x - 3$ հավասարումը ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ արտաքսում ենք y փոփոխականը և սրանում երկու փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$\begin{aligned} u &= u(x, z) = f(x, 2x - 3, z) = x^2 - (2x - 3)^2 + z^2 = \\ &= -3x^2 + 12x - 9 + z^2 \longmapsto \text{extr.} \quad x, z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

որի սովորական լոկալ էքստրեմումներն է հարկավոր գրել: Նախ գրենք $u(x, z)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը՝

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -6x + 12 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Ուրեմն՝ $x = 2, z = 0$ կետը $u(x, z)$ ֆունկցիայի հնարավոր (լոկալ) էքստրեմումի միակ կետն է: Այն համապատասխանում է $M_0(2, 1, 0)$ կետին $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի համար:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը կարելի է ստուգել՝ 2-րդ կարգի Δ որոշիչը հաշվելով $x = 2, z = 0$ կետում (տես Թեորեմ 1.7),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xz} \\ u''_{zx} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 :$$

Քանի որ տվյալ սրացիոնար կետում Δ որոշիչը բացասական է, ըստ Թեորեմ 1.7-ի՝ եզրակացնում ենք, որ $x = 2, z = 0$ սրացիոնար կետում $u(x, z)$ ֆունկցիան էքստրեմում չունի: Վերաձևակերպելով, $M_0(2, 1, 0)$ միակ սրացիոնար կետում $f(x, y, z)$ ֆունկցիան պայմանական էքստրեմում չունի, և ուրեմն՝ ֆունկցիան առհասարակ պայմանական էքստրեմում չունի:

Ինչպես տեսանք բերված երկու վերջին օրինակներում, անմիջական տեղադրման և փոփոխականի արտաքսման եղանակը հաջողությամբ գործում է: Սակայն այդ եղանակը որպես կանոն պիտանի չէ, երբ փոփոխականներից մեկը մյուսների միջոցով բացահայտ արտահայտել հնարավոր չէ: Երկու փոփոխականի ֆունկցիաների նման, այժմ նույնպես կարելի է ներմուծել օժանդակ **Լագրանժի ֆունկցիան** և կիրառել **Լագրանժի մեթոդը**, որն արդեն ավելի ծավալուն կլինի: Ընդհանուր դեպքում կապի հավասարումները երկուսն

են (կապի երեք և ավելի հավասարումներ կարող են հանգեցնել խնդրի իմաստազորվման),

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 : \end{cases} \quad (3.31)$$

Կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումները երկրաչափորեն ներկայացնում են ինչ-որ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ կոր, և միայն այդ կորի վրա է f ֆունկցիան հեղափոխվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հեղափոխվում է Γ կորի վրա f -ի նեղացումը՝ $f|_{\Gamma}$, ինչպես րեսանք Օրինակ 23-ում: Կապի միայն մեկ հավասարման առկայությունը երկրաչափորեն ներկայացնում է սովորաբար ինչ-որ $S \subset \mathbb{R}^3$ մակերևույթ, և միայն այդ մակերևույթի վրա է f ֆունկցիան հեղափոխվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հեղափոխվում է S մակերևույթի վրա f -ի նեղացումը՝ $f|_S$, ինչպես րեսանք Օրինակ 24-ում:

Պայմանական էքստրեմումի (3.31) խնդրի Լագրանժի ընդհանուր մեթոդը նկարագրելու համար, սահմանենք f ֆունկցիայի **Լագրանժի ֆունկցիան**՝

$$L(x, y, z) \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z), \quad (3.32)$$

որտեղ $(x, y, z) \in \Omega$ կետը փոփոխվում է իր (որոշման) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ եռաչափ փիրություն, իսկ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ պարամետրերը կոչվում են **Լագրանժի բազմապարկիչներ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակիցներ**: Ինչպես և երկու փոփոխականի դեպքում, վճռական է հետևյալ փաստը՝

$f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:

Ուրեմն՝ $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդրի անհրաժեշտ պայմանը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սրացիոնար կետի պայմանին,

որն էլ հանգում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ L'_{\lambda_2} = 0 : \end{cases} \quad (3.33)$$

Համակարգը հինգ հավասարումներից է բաղկացած և հինգ անհայտ ունի: (3.33) համակարգի լուծումները f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Թեորեմ 3.3. (Պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $f(x, y, z)$, $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ ֆունկցիաները որոշված են և ողորկ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ տիրույթում, $f, \varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ կետը (3.31) խնդրի լուծում է, այսինքն՝ f -ի պայմանական էքստրեմումի կետ է $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ կապի հավասարումների դեպքում:

Բացի այդ, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում φ_1 և φ_2 ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմված հետևյալ (Յակոբիի) մատրիցը

$$J = J(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ունի ոչ զրոյական 2-րդ կարգի միներ: Այլ կերպ ասած՝ J մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի, $\text{rank } J = 2$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ արժեքներ այնպիսիք, որ $(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$ հնգյակը բավարարում է (3.33) համակարգին, այսինքն՝ L ագրանժի L ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է:

Այժմ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը երեք փոփոխականից կախված ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 3.4. (Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $u = f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կապի $\varphi_1(x, y, z) = 0$ և $\varphi_2(x, y, z) = 0$ հավասարումների դեպքում, այսինքն՝

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 : \end{cases} \quad (3.34)$$

Դիցուք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը ինչ-որ λ_1, λ_2 արժեքների դեպքում $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի L ագրանժի

$$L(x, y, z) \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z),$$

ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $dL(M_0) \equiv dL(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$, կամ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(M_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(M_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(M_0) = 0 \\ \varphi_1(M_0) = 0 \\ \varphi_2(M_0) = 0 : \end{cases} \quad (3.35)$$

Կազմենք L ագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում՝

$$\begin{aligned} d^2 L(M_0) &= L''_{xx}(M_0) dx^2 + L''_{yy}(M_0) dy^2 + L''_{zz}(M_0) dz^2 + \\ &+ 2L''_{xy}(M_0) dx dy + 2L''_{xz}(M_0) dx dz + 2L''_{yz}(M_0) dy dz : \end{aligned} \quad (3.36)$$

- 1) Եթե $d^2L(M_0) > 0$ բոլոր $\forall dx, dy, dz$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարումներին՝

$$\begin{cases} d\varphi_1(M_0) = 0 \\ d\varphi_2(M_0) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(M_0) dz = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(M_0) dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(M_0) dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(M_0) dz = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

այս $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մի-նիմումի կետ է՝ $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_{\min}$, կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումների դեպքում:

- 2) Եթե $d^2L(M_0) < 0$ բոլոր $\forall dx, dy, dz$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ (3.37) հավասարումներին, այս $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաք-սիմումի կետ է՝ $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_{\max}$, կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումների դեպքում:

- 3) Եթե $d^2L(M_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդու-նում է դրական և բացասական արժեքներ) dx, dy, dz դիֆերեն-ցիալների (աճերի) նույն (3.37) սահմանափակումների ներքո, այս $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետ չէ:

- 4) Եթե $d^2L(M_0) \geq 0$ կամ $d^2L(M_0) \leq 0$, երբ dx, dy, dz դիֆերենցիալ-ները (աճերը) բավարարում են նույն (3.37) սահմանափակումնե-րին, այս արույզ ոչինչ ասել չենք կարող. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը կարող է լինել ինչպես f -ի պայմանական էքստրեմումի կետ, այն-պես էլ չլինել այդպիսին (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Այսպիսով՝ ինչպես լուրջ էքսպրեմումի դեպքում էր (տես Թեորեմ 1.6), այժմ պայմանական էքսպրեմումի դեպքում ևս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը (Լագրանժի ֆունկցիայի) փվյալ սրացիոնար կետում որոշում է պայմանական էքսպրեմումի առկայությունը:

Քննարկենք մի քանի օրինակներ, որոնցում պայմանական էքսպրեմումները հիմնականում կորոնենք անորոշ բազմապարկիչների Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 25. *Դիտարկենք Օրինակ 23-ում արդեն հետազոտված*

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x + y + z^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան երկու կապի հավասարումների դեպքում

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x + y + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} y - xz - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.38)$$

Պայմանական էքսպրեմումի այս խնդիրը Օրինակ 23-ում մենք լուծեցինք անմիջական տեղադրման և փոփոխականների արտաքսման եղանակով: Այժմ նույն (3.38) խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով ցույց տալու համար ինչպես է այն գործում երեք փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան

$$\begin{aligned} L \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z) = \\ &= x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1) \end{aligned}$$

և գրենք նրա սրացիոնար կետերը, լուծելով (3.33), համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ L'_y = 1 + \lambda_2 = 0 \\ L'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ \varphi_1 = z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = z + 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x + 3z = -1 \\ z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Այսպիսով $M_0(-1, 1, 0)$ կետը L ազրանժի ֆունկցիայի միակ սրագիտնար կերն է և ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի միակ հնարավոր կետը:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք L ազրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{aligned} L''_{xx} &= 0, & L''_{xy} &= 0, \\ L''_{yy} &= 0, & L''_{xz} &= -\lambda_2 = 1, \\ L''_{zz} &= 2, & L''_{yz} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2L(M_0) &= L''_{xx}(M_0) dx^2 + L''_{yy}(M_0) dy^2 + L''_{zz}(M_0) dz^2 + \\ &+ 2L''_{xy}(M_0) dx dy + 2L''_{xz}(M_0) dx dz + 2L''_{yz}(M_0) dy dz = \\ &= 2 dz^2 + 2 dx dz = 2 dz(dz + dx) : \end{aligned}$$

Բացի այդ, պահանջենք, որ M_0 կետում կարարվեն կապի դիֆերենցիալ (3.37) հավասարումները՝

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx - dz = 0 \\ z dx - dy + x dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx - dz = 0 \\ -dy - dz = 0 \end{cases}$$

կամ $\boxed{dx = dz = -dy}$: Տեղադրենք աճերի այս կապը L ազրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի մեջ՝

$$d^2L(M_0) = 2 dz(dz + dx) = 2 dz(dz + dz) = 4 dz^2 > 0, \quad \text{եթե} \quad dz \neq 0 :$$

Քանի որ $d^2L(M_0) > 0$, երբ dx, dy, dz աճերը միաժամանակ զրո չեն, $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0$ հավասարումներին, ապա համաձայն Թեորեմ 3.4, 1)-ի՝ M_0 կետում f ֆունկցիան պայմանական մինիմում ունի $\boxed{M_{\min} = M_0(-1, 1, 0)}$ և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$:

Օրինակ 26. Դիֆուզիոն

$$u = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - y^2 + z^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ֆունկցիան, որն արդեն հետազոտել էինք Օրինակ 24-ում: Տրված է միայն մեկ կապի հավասարում,

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} 2x - y - 3 = 0 : \end{cases} \quad (3.39)$$

Տեղադրման եղանակի փոխարեն այժմ կիրառենք Լագրանժի մեթոդը: Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L \equiv L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + \lambda(2x - y - 3)$$

և գրենք նրա ստացիոնար կետերը, լուծելով (3.33), համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda = 0 \\ L'_y = -2y - \lambda = 0 \\ L'_z = 2z = 0 \\ \varphi = 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \lambda = 0 \\ \lambda = -2y \\ z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Այսպիսով $M_0(2, 1, 0)$ կետը Լագրանժի ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է և ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի միակ հնարավոր կետը:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{aligned} L''_{xx} &= 2, & L''_{xy} &= 0, \\ L''_{yy} &= -2, & L''_{xz} &= 0, \\ L''_{zz} &= 2, & L''_{yz} &= 0, \end{aligned}$$

$$d^2 L(M_0) = L''_{xx}(M_0) dx^2 + L''_{yy}(M_0) dy^2 + L''_{zz}(M_0) dz^2 +$$

$$+ 2L''_{xy}(M_0) dx dy + 2L''_{xz}(M_0) dx dz + 2L''_{yz}(M_0) dy dz = \\ = 2 dx^2 - 2 dy^2 + 2 dz^2 :$$

Բացի այդ, պահանջենք, որ M_0 կետում կարարվեն կապի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 dx - dy = 0 :$$

Տեղադրենք աճերի այս $dy = 2 dx$ կապը Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի մեջ՝

$$d^2 L(M_0) = 2(dx^2 - dy^2 + dz^2) = 2(dz^2 - 3 dx^2) :$$

Նշելով է տեսնել, որ $d^2 L(M_0)$ դիֆերենցիալը կարող է ընդունել տարբեր նշանների արժեքներ, օրինակ՝

$$d^2 L(M_0) = -4 dx^2 < 0, \quad \text{եթե } dz = dx \neq 0, \\ d^2 L(M_0) = 2 dx^2 > 0, \quad \text{եթե } dz = 2 dx \neq 0 :$$

Քանի որ $d^2 L(M_0)$ դիֆերենցիալը նշանափոխ է, երբ dx, dy, dz աճերը միաժամանակ զրո չեն, $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ $d\varphi = 0$ հավասարմանը, ապա համաձայն Թեորեմ 3.4, 3)–ի՝ $M_0(2, 1, 0)$ սրացիոնար կետում f ֆունկցիան պայմանական էքստրեմում չունի, և ուրեմն՝ ֆունկցիան առհասարակ պայմանական էքստրեմում չունի:

Օրինակ 27. Վերագործենք էքստրեմումի առումով

$$u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ֆունկցիան միայն մեկ կապի $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ հավասարման դեպքում ($0 < a < b < c$): Երկրաչափորեն սա նշանակում է հեղաձուլվել f

Ֆունկցիան ոչ թե ամբողջ որոշման տիրույթում, այլ միայն $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ էլիպսոիդի վրա,

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.40)$$

Կազմենք f ֆունկցիայի Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

և գրենք նրա ստացիոնար կետերը, լուծելով (3.33), համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ L'_y = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ L'_z = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ L'_\lambda \equiv \varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) = 0 \\ y \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) = 0 \\ z \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \end{cases}$$

Փոփոխականների համաչափությունը և $0 < a < b < c$ պայմանը հաշվի առնելով՝ դժվար չէ գրելու համակարգի բոլոր լուծումները՝

$$\text{երբ } \lambda = -a^2, \quad M = M_{1,2}(\pm a, 0, 0),$$

$$\text{երբ } \lambda = -b^2, \quad M = M_{3,4}(0, \pm b, 0),$$

$$\text{երբ } \lambda = -c^2, \quad M = M_{5,6}(0, 0, \pm c) :$$

Ստացանք, որ Լագրանժի ֆունկցիան վեց ստացիոնար կետ ունի: Դրանք $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը՝

$$L''_{xx} = 2 + \frac{2\lambda}{a^2}, \quad L''_{xy} = 0,$$

$$\begin{aligned} L''_{yy} &= 2 + \frac{2\lambda}{b^2}, & L''_{xz} &= 0, \\ L''_{zz} &= 2 + \frac{2\lambda}{c^2}, & L''_{yz} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 L(M, \lambda) &= L''_{xx}(M) dx^2 + L''_{yy}(M) dy^2 + L''_{zz}(M) dz^2 + \\ &+ 2L''_{xy}(M) dx dy + 2L''_{xz}(M) dx dz + 2L''_{yz}(M) dy dz = \\ &= 2 \left[\left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) dx^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) dy^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) dz^2 \right] : \end{aligned}$$

Նկարենք, որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի $d^2 L(M, \lambda)$ դիֆերենցիալը x, y, z փոփոխականներից և ոչ մեկը չի պարունակում, այնուամենայնիվ ամեն մի սրացիոնար կետ բնարկելիս պետք է փնդադրել λ -ի համապատասխան արժեքը: Բացի այդ, պահանջենք, որ M_i ($i = \overline{1, 6}$) սրացիոնար կետում կարարվի կապի դիֆերենցիալ $d\varphi = 0$ հավասարումը՝

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy + \frac{z}{c^2} dz = 0 : \quad (3.41)$$

Առանձին բնարկենք M_i ($i = \overline{1, 6}$) սրացիոնար կետերի ամեն մի զույգ: Մեզ հետաքրքրում է $d^2 L(M, \lambda)$ դիֆերենցիալի նշանը յուրաքանչյուր սրացիոնար կետում:

Երբ $\lambda = -a^2$ և $M = M_{1,2}(\pm a, 0, 0)$, սրանում ենք

$$d^2 L(M_{1,2}, -a^2) = 2 \left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) dy^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) dz^2 \right] > 0,$$

քանի որ $0 < a < b < c$: Տեսարարար ըստ Թեորեմ 3.4, 1)-ի՝ $M_{\min} = M_{1,2}(\pm a, 0, 0)$ կետերը $f(M)$ -ի պայմանական մինիմումի կետեր են: Մինիմումի արժեքը կլինի $\boxed{f_{\min} = f(M_{1,2}) = a^2}$:

Երբ $\lambda = -b^2$ և $M = M_{3,4}(0, \pm b, 0)$, սրանում ենք

$$d^2 L(M_{3,4}, -b^2) = 2 \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) dx^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) dz^2 \right] :$$

Տաշվի առնելով $0 < a < b < c$ պայմանը՝ կարելի է տեսնել, որ $d^2 L(M_{3,4}, -b^2)$ դիֆերենցիալը նշանափոխ է, իսկապես,

$$d^2 L(M_{3,4}, -b^2) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) dz^2 > 0, \quad \text{եթե } dx = 0, dz \neq 0,$$

$$d^2 L(M_{3,4}, -b^2) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) dx^2 < 0, \quad \text{եթե } dz = 0, dx \neq 0 :$$

Տեղադրար ըստ Թեորեմ 3.4, 3)-ի՝ $M_{3,4}(0, \pm b, 0)$ կետերը $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետեր չեն:

Երբ $\lambda = -c^2$ և $M = M_{5,6}(0, 0, \pm c)$, ստանում ենք

$$d^2 L(M_{5,6}, -c^2) = 2 \left[\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) dx^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) dy^2 \right] < 0,$$

քանի որ $0 < a < b < c$: Տեղադրար ըստ Թեորեմ 3.4, 2)-ի՝ $M_{\max} = M_{5,6}(0, 0, \pm c)$ կետերը $f(M)$ -ի պայմանական մաքսիմումի կետեր են: Մաքսիմումի արժեքը կլինի $f_{\max} = f(M_{5,6}) = c^2$:

Խնդիրը լուծված է: Տեղադրքիր է, որ սնհրաժեշտ չեղավ օգտագործել կապի դիֆերենցիալ $d\varphi = 0$, (3.41) հավասարումը:

Դիփոդություն 3.3. Ինչպես տեսանք Թեորեմ 3.4-ում ներկայացված պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը որոշվում է փոխալ $f(M)$ ֆունկցիայի Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի $d^2 L(M)$ դիֆերենցիալի նշանով՝ կապի դիֆերենցիալ հավասարումները հաշվի առնելով: Բանալության $d^2 L(M)$ ձևի նշանապահական հատկությունները կարելի է ստուգել նաև հանրահաշվական մեթոդներով, որոնք ներկայացված են Բաժին 2.3-ում:

3.3 Պայմանական էքստրեմումի խնդիրն ավելի շարփոփոխականի ֆունկցիաների համար

Երեքից ավելի շարփոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրն էլ ավելի բազմազան է և ծավալուն, թեև խնդրի լուծման ընդհանուր սկզբունքները

չեն փոխվում: Կարճ նկարագրենք իրավիճակը և բերենք համապատասխան օրինակներ:

n հար փոփոխականից կախված ֆունկցիաների պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կարող է մինչև $(n-1)$ կապի հավասարում ունենալ, ընդհանուր դեպքում՝ m հար $(1 \leq m \leq n-1)$ կապի հավասարում: Ավելի շար կապի հավասարումների առկայությունը կարող է հանգեցնել խնդրի իմաստագրկման: Պայմանական էքստրեմումի խնդիրը ձևականորեն կներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_i(M) = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \quad (3.42)$$

Լուծման **Լագրանժի մեթոդը** կիրառելու համար ներմուծենք օժանդակ **Լագրանժի ֆունկցիան**,

$$L \equiv L(M, \lambda_i) \equiv L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad M \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (3.43)$$

$$L \stackrel{\text{def}}{=} f(M) + \lambda_1 \varphi_1(M) + \lambda_2 \varphi_2(M) + \dots + \lambda_m \varphi_m(M),$$

որտեղ $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$) պարամետրերը կոչվում են **Լագրանժի բազմապարկիչներ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակիցներ**: Նկատենք, որ Լագրանժի λ_i բազմապարկիչների քանակը համընկնում է կապի հավասարումների թվի հետ և փոքր է անկախ փոփոխականների քանակից, այսինքն՝ $m < n$: Ինչպես երկու կամ երեք փոփոխականի դեպքում էր, վճռական է հետևյալ փաստը՝

$f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:

Ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդրի անհրաժեշտ պայմանը համարժեք է f -ի Լագրանժի ֆունկցիայի սրացիոնար կետի պայմանին, որն էլ հանգում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \\ \varphi_i(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \quad (3.44)$$

Նամակարգը $n+m$ հավասարումից է բաղկացած և $n+m$ հինգ անհայտ ունի: (3.44) համակարգի լուծումները f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Թեորեմ 3.5. (Պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\varphi_i(M) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq m < n$, ֆունկցիաները ողորկ են $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում՝ $f, \varphi_i \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ կետը

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_i(M) = 0 \quad (1 \leq i \leq m) \end{cases} \quad (3.45)$$

խնդրի լուծում է, այսինքն՝ f -ի պայմանական էքստրեմումի կետ է $\varphi_i = 0$ կապի հավասարումների դեպքում:

Բացի այդ, M_0 կետում φ_i ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմված հետևյալ (Յակոբիի) մատրիցը ($m \times n$ չափերով)

$$J = J(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \varphi_i(M_0)}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ունի ոչ զրոյական m -րդ կարգի միևնույն: Այլ կերպ ասած՝ J մատրիցի ռանկը հավասար է m -ի՝ $\text{rank } J = m$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$) արժեքներ այնպիսի u -ի, որ $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ կետը բավարարում է

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \\ \varphi_i(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \quad (3.46)$$

համակարգին, այսինքն՝ այդ կետը L ագրանժի L ֆունկցիայի սրացիոնար կետ է:

Այս թեորեմը Ֆերմայի հայտնի թեորեմի հեռավոր նմանակն է պայմանական էքստրեմումի դեպքում: Թեորեմը կարելի է կարճ ձևակերպել այսպես. f

Ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կերպը f -ի Լագրանժի Ֆունկցիայի սրագիտնար կերպ է:

Այժմ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը շար փոփոխականից կախված Ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 3.6. (Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի ինդիքը կապի $\varphi_i = 0$ հավասարումների դեպքում, այսինքն՝

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \text{extr.} \\ \varphi_i(M) = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \quad (3.47)$$

Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կերպը ինչ-որ λ_i ($1 \leq i \leq m$) արժեքների դեպքում $f(M)$ Ֆունկցիայի Լագրանժի

$$L \equiv L(M) \equiv L(M, \lambda_i) = f(M) + \lambda_1 \varphi_1(M) + \dots + \lambda_m \varphi_m(M)$$

Ֆունկցիայի սրագիտնար կերպ է, այսինքն՝ $dL(M_0) \equiv 0$, կամ

$$\begin{cases} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \\ \varphi_i(M_0) = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \quad (3.48)$$

Կազմենք Լագրանժի Ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կերպում՝

$$\begin{aligned} d^2 L(M_0) &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n : \end{aligned}$$

1) Եթե $d^2 L(M_0) > 0$ բոլոր $\forall dx_j$ ($1 \leq j \leq n$) դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարումներին՝

$$d\varphi_i(M_0) = 0 \quad (1 \leq i \leq m), \quad (3.49)$$

սպա M_0 կերը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական միևիմուծի
կեր է՝ $M_0 = M_{\min}$ կապի $\varphi_i = 0$ հավասարումների դեպքում:

- 2) Եթե $d^2L(M_0) < 0$ բոլոր $\forall dx_j (1 \leq j \leq n)$ դիֆերենցիալների
(աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0$,
և բավարարում են կապի դիֆերենցիալ հավասարումներին՝

$$d\varphi_i(M_0) = 0 \quad (1 \leq i \leq m), \quad (3.50)$$

սպա M_0 կերը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի
կեր է՝ $M_0 = M_{\max}$ կապի $\varphi_i = 0$ հավասարումների դեպքում:

- 3) Եթե $d^2L(M_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդու-
նում է դրական և բացասական արժեքներ) dx_j դիֆերենցիալների
(աճերի) նույն (3.50) սահմանափակումների ներքո, սպա M_0 կերը
 f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կեր չէ:

- 4) Եթե $d^2L(M_0) \geq 0$ կամ $d^2L(M_0) \leq 0$, երբ dx_j դիֆերենցիալները
(աճերը) բավարարում են նույն (3.50) սահմանափակումներին,
սպա սրույգ ոչինչ ասել հնարավոր չէ. M_0 կերը կարող է ինչպես
 f -ի պայմանական էքստրեմումի կեր լինել, այնպես էլ չլինել (և
ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):

Քննարկենք n փոփոխականից կախված ֆունկցիաների մի քանի օրինակներ,
որոնցում պայմանական էքստրեմումները կորոնենք անորոշ բազմապարկիչների
Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 28. Լուծենք պայմանական էքստրեմումի հերկյալ խնդիրը, որը
պարունակում է ընդամենը մեկ կապի հավասարում,

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2 + \dots + x_n \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(M) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0 : \end{cases} \quad (3.51)$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ տրված f գծային ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է գտնվի $\mathbb{R}^n$ տարածության

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

միավոր սֆերայի վրա: Այսինքն՝ պահանջվում է հետազոտել $f|_S$ ֆունկցիան:

Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան ընդամենը մեկ λ անորոշ բազմապարկիչով,

$$\begin{aligned} L \equiv L(M) &\equiv L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(M) + \lambda \varphi(M) = \\ &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1) \end{aligned}$$

Սկզբում գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը (հնարավոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 1 + 2\lambda x_j = 0 & (1 \leq j \leq n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_j = \frac{-1}{2\lambda} & (1 \leq j \leq n) \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x_j = \frac{-1}{2\lambda} & (1 \leq j \leq n) \\ n \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = \pm \frac{\sqrt{n}}{2} \\ x_j = \mp \frac{1}{\sqrt{n}} & (1 \leq j \leq n) : \end{cases} \end{aligned}$$

Ստացանք երկու ստացիոնար կետ (S միավոր սֆերայի վրա),

$$\text{երբ } \lambda = \frac{\sqrt{n}}{2}, \quad M = M_1 \left(\frac{-1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{-1}{\sqrt{n}} \right) \in S,$$

$$\text{երբ } \lambda = -\frac{\sqrt{n}}{2}, \quad M = M_2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \in S :$$

Էքստրեմումի բավարար սայմանը ստուգելու համար գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2\lambda \quad (1 \leq j \leq n), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$\begin{aligned}
d^2 L(M) &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(M)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n = \\
&= 2\lambda (dx_1^2 + \cdots + dx_n^2) :
\end{aligned}$$

Նամանայն *Թեորեմ 3.6*-ի՝ պահանջենք նաև, որ սրահիոնար կերերում կարարվեն կապի դիֆերենցված հավասարումները՝

$$\begin{aligned}
d\varphi(M_{1,2}) &= \frac{\partial \varphi(M_{1,2})}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi(M_{1,2})}{\partial x_n} dx_n = 0, \\
2x_1 dx_1 + \cdots + 2x_n dx_n &= \frac{-1}{\lambda} dx_1 + \cdots + \frac{-1}{\lambda} dx_n = 0, \\
\boxed{dx_1 + \cdots + dx_n = 0} :
\end{aligned}$$

Ծիշոր է $d^2 L$ դիֆերենցիալը այնքան պարզ րենք ունի, որ կապի դիֆերենցված հավասարումն այլևս չի կարող ազդել $d^2 L$ դիֆերենցիալի նշանի վրա:

Երբ $M = M_1$, $\lambda = \frac{\sqrt{n}}{2}$, սրանում ենք $d^2 L(M_1) > 0$ և ուրեմն՝ M_1 կերը Լագրանժի ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կեր է և միաժամանակ f ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի կեր, իսկ մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = f(M_1) = -\sqrt{n}$:

Երբ $M = M_2$, $\lambda = -\frac{\sqrt{n}}{2}$, սրանում ենք $d^2 L(M_2) < 0$ և ուրեմն՝ M_2 կերը Լագրանժի ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կեր է և միաժամանակ f ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի կեր, իսկ մաքսիմումի արժեքն է $f_{\max} = f(M_2) = \sqrt{n}$:

Օրինակ 29. Լուծենք պայմանական էքստրեմումի հերկյալ խնդիրը ընդամենը մեկ կապի հավասարումով,

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \mapsto \text{extr.} \\ \varphi(M) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1 = 0 : \end{cases}$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ տրված f քառակուսային ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է գտնել $\mathbb{R}^n$ տարածության $x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1 = 0$ հիպերհարթության վրա:

Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան ընդամենը մեկ λ անորոշ բազմապարկիչով,

$$\begin{aligned} L \equiv L(M) &\equiv L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(M) + \lambda \varphi(M) = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1) \end{aligned}$$

Սկզբում գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի սրագիտնար կետերը (հնարավոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 2x_j + \lambda = 0 & (1 \leq j \leq n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_j = \frac{-\lambda}{2} & (1 \leq j \leq n) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x_j = \frac{-\lambda}{2} & (1 \leq j \leq n) \\ \frac{-\lambda n}{2} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = \frac{-2}{n} \\ x_j = \frac{1}{n} & (1 \leq j \leq n) \end{cases} : \end{aligned}$$

Սրացանք միայն մեկ սրագիտնար կետ,

$$\text{երբ } \lambda = \frac{-2}{n}, \quad M = M_0 \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) :$$

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2 \quad (1 \leq j \leq n), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$d^2 L(M) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(M)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} dx_n^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n = \\
& = 2 \left(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \right) > 0, \quad \text{երբ} \quad dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0 :
\end{aligned}$$

Նամանայն Θ -երեն 3.6-ի՝ M_0 կերը L ագրանժի ֆունկցիայի լոկալ մի-
նիմումի կեր է և միաժամանակ f ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի
կեր, իսկ մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = f(M_0) = \frac{1}{n}$:

Ստացիոնար կերում կապի դիֆերենցիալ՝ $d\varphi(M_0) = 0$ հավասա-
րումը հաշվի առնելու կարիք այլևս չկա:

Օրինակ 30. Լուծենք պայմանական էքստրեմումի հեղույալ խնդիրը ըն-
դամենը մեկ կապի հավասարումով,

$$\begin{cases} u = f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 \mapsto \text{extr.} & (0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n) \\ \varphi(M) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0 : \end{cases}$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ տրված f քառակուսային ֆունկ-
ցիայի էքստրեմումները պետք է գտնել $\mathbb{R}^n$ տարածության

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$$

միավոր սֆերայի վրա: Այսինքն՝ պահանջվում է հետազոտել $f|_S$ ֆունկ-
ցիան:

Կազմենք f -ի L ագրանժի ֆունկցիան ընդամենը մեկ λ անորոշ բա-
զմապարկիչով (տեխնիկական նկարագրումներով λ -ի փոխարեն այս
անգամ վերցնենք $-\lambda$),

$$\begin{aligned}
L & \equiv L(M) \equiv L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(M) - \lambda \varphi(M) = \\
& = \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 - \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1) = \sum_{k=1}^n (a_k - \lambda) x_k^2 + \lambda :
\end{aligned}$$

Սկզբում գտնենք L ագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը (հնարա-
վոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք և լուծենք հեղույալ

համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 2(a_j - \lambda)x_j = 0 & (1 \leq j \leq n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a_j & \text{կամ } x_j = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 : \end{cases}$$

Պարզ է, որ անհնար են երկու ծայրահեղ դեպքերը, երբ λ -ն հավասար է a_k գործակիցներից միաժամանակ երկուսին $\lambda = a_j = a_k$ ($j \neq k$), ինչը կհակասեր $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ պայմանին, կամ $\lambda \neq a_j$ ($j = \overline{1, n}$), այսինքն՝ $x_j = 0$ բոլոր j ($j = \overline{1, n}$) ինդեքսների համար, ինչը կհակասեր կապի $\varphi = 0$ հավասարմանը, այն է՝ $M(x_1, \dots, x_n)$ կերի պարկանելիությանը S սֆերային:

Ներկայացնենք $\lambda = a_k$ որևէ մեկ $k \in [1, n]$ ինդեքսի համար: Այդ դեպքում անհրաժեշտությամբ $\lambda \neq a_j$ և $x_j = 0$ մնացած բոլոր j ($j \neq k$) ինդեքսների համար, և վերջին համակարգը կհանգի հետևյալին՝ $\exists k \in [1, n]$ այնպիսին, որ

$$\begin{cases} \lambda = a_k \\ x_j = 0 & \forall j \neq k \\ x_k^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = a_k \\ x_j = 0 & \forall j \neq k \\ x_k = \pm 1 : \end{cases}$$

Այսպիսով ստացանք $2n$ հասարակական կերի (բնականաբար բոլորը S միավոր սֆերայի վրա),

$$\text{երբ } \lambda = a_k, \quad M = M_k^{(\pm)}(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0) \in S, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

որտեղ 1 կամ -1 թիվը M_k ստացիոնար կերի k -րդ կոորդինատն է:

Նկատենք, որ S սֆերան կոմպակտ է (փակ սահմանափակ բազմություն) $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ, ուստի՝ համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի՝ $f \in C(S)$ անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին այդ սֆերայի վրա: Եթե ինդիքը կայանա $f|_S$ ֆունկցիայի միայն մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ստանալու մեջ, ֆունկցիայի

դասից և $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ պայմանից մենք անմիջապես կարող ենք եզրակացնել, որ $M_n^{(\pm)}$ կետերը $f|_S$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետեր են, որոնցում $f|_S$ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին,

$$M_{\max} = M_n^{(\pm)}(0, \dots, 0, \pm 1) \in S,$$

$$\max_{M \in S} f(M) = f(M_n^{(\pm)}) = a_n :$$

Նմանապես գտնում ենք $f|_S$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը՝

$$M_{\min} = M_1^{(\pm)}(\pm 1, 0, \dots, 0) \in S,$$

$$\min_{M \in S} f(M) = f(M_1^{(\pm)}) = a_1 :$$

Մնացած $M_k^{(\pm)}$ ($1 < k < n$) կետերը առհասարակ $f|_S$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չեն։ Այդ փաստը ստուգելու համար դիմենք նույն թեորեմ 3.6-ին և գտնենք L ազդանշանի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը՝

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2(a_j - \lambda) \quad (1 \leq j \leq n), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$\begin{aligned} d^2 L(M) &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(M)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n = \\ &= 2(a_1 - \lambda) dx_1^2 + \dots + 2(a_k - \lambda) dx_k^2 + \dots + 2(a_n - \lambda) dx_n^2 : \end{aligned}$$

Երբ $M = M_k^{(\pm)}(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$, λ բազմապարկիչի արժեքն ունենինք՝ $\lambda = a_k$, հետևաբար

$$\begin{aligned} d^2 L(M_k^{(\pm)}) &= 2(a_1 - a_k) dx_1^2 + \dots + 2(a_{k-1} - a_k) dx_{k-1}^2 + \\ &+ 2(a_{k+1} - a_k) dx_{k+1}^2 + \dots + 2(a_n - a_k) dx_n^2 : \end{aligned} \quad (3.52)$$

Նշենք, որ ստացիոնար $M = M_k^{(\pm)}(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ կետերում կապի դիֆերենցիալ ածանցյալները $d^2 L(M_k^{(\pm)})$ դիֆերենցիալի

տեսքը որևէ կերպ չի փոխում: Իսկապես,

$$\begin{aligned} d\varphi(M_k) &= \frac{\partial\varphi(M_k)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial\varphi(M_k)}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ 2x_1 dx_1 + \dots + 2x_n dx_n &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{dx_k = 0} : \end{aligned}$$

Վերջապես, մեզ մնում է պարզել $d^2L(M_k^{(\pm)})$, (3.52) դիֆերենցիալի նշանը: Բավական է նկատել, (3.52) դիֆերենցիալի առաջին $k-1$ գործակիցները բացասական են, իսկ վերջին $n-k$ գործակիցները դրական են,

$$a_j - a_k < 0, \quad \text{եթե } 1 \leq j \leq k-1, \quad \text{և} \quad a_j - a_k > 0, \quad \text{եթե } k+1 \leq j \leq n :$$

Սա նշանակում է, որ (3.52) դիֆերենցիալն ընդունում է թե՛ դրական, թե՛ բացասական արժեքներ տարբեր $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, $dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0$, աճերի համար:

Նամանայն Թեորեմ 3.6 3)-ի՝ $M_k^{(\pm)}$ ($1 < k < n$) կետերից և ոչ մեկը $f|_S$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, այսինքն՝ f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետ չէ:

Նաջորդ օրինակում մենք էլ ավելի ընդհանուր քառակուսային ձև ենք հետազոտելու:

Օրինակ 31. Գրենք հետևյալ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \longmapsto \max.\min. & (a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}) \\ \varphi(M) = \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0 : \end{cases}$$

Տրված ֆունկցիան կամայական քառակուսային ձև է, որոնց մասին որոշ տեղեկություններ կարելի է գրնել Բաժին 2.3-ում: Երկրաչափորեն խնդիրը նշանակում է, որ տրված f քառակուսային ձևի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները պետք է գրնել $\mathbb{R}^n$ տարածության S միավոր սֆերայի վրա, այսինքն՝ պահանջվում է հետազոտել $f|_S$ ֆունկցիան:

Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան λ անորոշ բազմապարկիչով (տեխնիկական նկարագրումներով λ -ի փոխարեն այս անգամ վերցնենք $-\lambda$),

$$L \equiv L(x) \equiv L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x) - \lambda \varphi(x) = \\ = \sum_{k=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1) :$$

Սկզբում գրենք Լագրանժի ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը (հնարավոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք n հավասարումներից բաղկացած հեռկյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x_1} = (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x_2} = a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x_n} = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n - \lambda x_n = 0, \end{cases} \quad (3.53)$$

որին կավելացնենք $(n+1)$ -րդ (կապի) հավասարումը՝

$$\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0 :$$

Նամասեն q ծային (3.53) համակարգի պարզունակ $(0, 0, \dots, 0)$ լուծումը չի բավարարում կապի հավասարմանը: Q ծային հանրահաշվի դասընթացից հայրնի է, որ ոչ զրոյական լուծում (3.53) համակարգը ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հիմնական մատրիցի որոշիչը զրո է՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.54)$$

այսինքն՝ երբ λ թիվը այս բնութագրիչ (3.54) հավասարման արմար է: Կարելի է (3.53) համակարգը արտագրել $A = (a_{ij})$ սիմետրիկ մատրիցի միջոցով՝

$$\boxed{Ax = \lambda x}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$$

Այլ կերպ ասած, A մատրիցի համար λ -ն սեփական արժեք է, իսկ x -ը՝ սեփական վեկտոր: Օգտվենք այն փաստից, որ սիմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքները միշտ իրական են (այսինքն՝ կոմպլեքս չեն): Դիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ իրական թվերն $A = (a_{ij})$ մատրիցի բոլոր սեփական արժեքներն են, այսինքն՝ (3.54) բնութագրիչ բազմանդամի արմարները: Յուրաքանչյուր λ_j սեփական արժեքին (3.53) համակարգից համապատասխանում է այնպիսի

$$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \in S, \quad Ax^{(j)} = \lambda_j x^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

սեփական վեկտոր, որն ունի միավոր երկարություն, այսինքն՝ բավարարում է կապի $\varphi = 0$ հավասարմանը: Միավոր սֆերայի այս $x^{(j)}$ կետերը կլինեն $f|_S$ ֆունկցիայի հնարավոր էքստրեմումի կետեր, որոնց բացահայտ րեւքը մեզ ամենևին էլ պետք չէ: Մեզ պետք է գտնել $f|_S$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, որոնց գոյությունը ապահովված է S սֆերայի կոմպակտ լինելով, $f|_S$ ֆունկցիայի անընդհարությամբ և Վայերշտրասի թեորեմի շնորհիվ:

Կարարենք (3.53) համակարգի մի ձևափոխություն: Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարում բազմապարկենք $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ով, համապատասխանաբար, և սրացված բոլոր հավասարումները գումարենք իրար: Դժվար չէ նկատել, որ արդյունքում կարացվի

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda \sum_{j=1}^n x_j^2 = 0,$$

որն էլ, հաշվի առնելով կապի հավասարումը՝ համարժեք է

$$f(x) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \lambda$$

հավասարմանը: Սա նշանակում է, որ եթե λ -ն բավարարում է (3.53) համակարգին, այսինքն՝ A մատրիցի սեփական արժեք է, այսպես $Ax = \lambda x$ հավասարումից նրան համապատասխանող x սեփական վեկտորը վերցնելով որպես $f(x)$ ֆունկցիայի արգումենտ, կտրանանք հենց λ արժեքը՝ $\boxed{f(x) = \lambda}$: Մասնավորապես, λ_j սեփական արժեքին համապատասխանող $x^{(j)}$ սեփական վեկտորի համար կտրանանք

$$\boxed{f(x^{(j)}) = \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq n} :$$

Քանի $x^{(j)}$ կետերը $f|_S$ ֆունկցիայի բոլոր սրացիոնար կետերն են, այսպես

$$\begin{aligned} \max_{x \in S} f(x) &= \max_{1 \leq j \leq n} f(x^{(j)}) = \max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j, \\ \min_{x \in S} f(x) &= \min_{1 \leq j \leq n} f(x^{(j)}) = \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j : \end{aligned}$$

Այս օրինակով մենք փաստորեն ապացուցեցինք հեպլեյալ գեղեցիկ արդյունքը.

Նեյմանի 3.1. (Քառակուսային ձևի մաքսիմումի և մինիմումի մասին)

$\mathbb{R}^n$ տարածության $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ միավոր սֆերայի վրա սահմանված կամայական

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad x \in S, \quad (a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R})$$

քառակուսային ձևի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը հավասար է $A = (a_{ij})$ մատրիցի սեփական արժեքներին մեծագույնին (փոքրագույնին) :

3.4 Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն

արժեքները փակ և սահմանափակ տիրույթում

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները սահմանվում են այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար:

Չպետք է շփոթել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները այդ ֆունկցիայի մաքսիմումների և մինիմումների հետ:

Ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը միշտ միակն է (եթե իհարկե գոյություն ունի), մինչդեռ ֆունկցիայի մաքսիմումները (մինիմումները) կարող են մի քանիսը լինել. անգամ՝ անվերջ քանակով: Ավելին՝ ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը կարող է չհամընկնել այդ ֆունկցիայի որևէ մաքսիմումի (մինիմումի) հետ: Այդ առումով իրավիճակը չի փարբերվում մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից: Եթե ֆունկցիան խզվող է կամ անընդհատ ոչ փակ կամ անսահմանափակ տիրույթում, ապա ֆունկցիան մեծագույն (փոքրագույն) արժեք կարող է չունենալ: Մինչդեռ ըստ Վայերշտրասի հայտնի թեորեմի՝ անընդհատ ֆունկցիան փակ և սահմանափակ տիրույթում (կոմպակտում) միշտ ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները: Այդ երկու արժեքները ֆունկցիան ընդունում է կամ տիրույթի եզրի վրա, կամ ներքին սրագիծնար կետերում:

Դիցուք $f(M)$ ֆունկցիան որոշված է և ողորկ $D \subset \mathbb{R}^n$ կոմպակտում, $f \in C^1(D)$: Որպեսզի գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D կոմպակտում, կարելի է կատարել հետևյալ քայլերը.

Քայլ 1. Գտնել f ֆունկցիայի սրագիծնար կետերը D կոմպակտի ներսում: Նշանակենք այդ կետերը՝ $M_1, M_2, \dots, M_k$: Պարտադիր չէ պարզել, այդ սրագիծնար կետերը կլինեն (լոկալ) էքստրեմումի կետեր թե ոչ:

Քայլ 2. Նաշվել f ֆունկցիայի արժեքները գտնված սրագիծնար կետերում, ենթադրենք

$$f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k):$$

Քայլ 3. Գտնել f ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D կոմպակտի ∂D եզրի վրա, $\max_{M \in \partial D} f(M)$, $\min_{M \in \partial D} f(M)$: Այսպեղ առաջանում է պայմանական էքստրեմումի խնդիր, քանի որ ∂D եզրը փալու է որոշման տիրույթի նոր սահմանափակումներ: Այդ խնդիրը հնարավոր է լուծել ինչպես անմիջական տեղադրման, այնպես էլ Լագրանժի մեթոդով:

Քայլ 4. Նամենաբերել բոլոր սրացված $(k + 2)$ արժեքները՝

$$f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k), \max_{M \in \partial D} f(M), \min_{M \in \partial D} f(M) :$$

Սրանցից մեծագույնը կլինի f -ի մեծագույն արժեքը D -ում, կգրենք $\max_{M \in D} f(M)$, իսկ փոքրագույնը կլինի f -ի փոքրագույն արժեքը D -ում, կգրենք $\min_{M \in D} f(M)$:

Ներկայացնենք մի քանի համապարասխան օրինակներ:

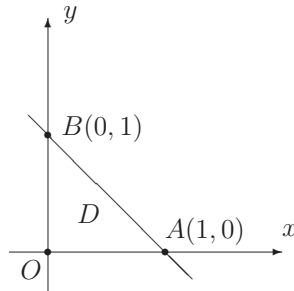
Օրինակ 32. $\mathbb{R}^2$ հարթության վրա տրված է

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1 - x \quad (3.55)$$

ուղիղներով սահմանափակված փակ բազմությունը (կոնվակսորը), որը նշանակենք D -ով: Այդ կոնվակսորում որոշված է

$$z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy - y^2 + 3x + 4y \mapsto \max.\min., \quad (x, y) \in D,$$

Ֆունկցիան և պահանջվում է հաշվել նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D կոնվակսորում:



Գծ. 10

Լուծումն սկսենք ներքին տրացիոնար կետերից,

$$\begin{cases} f'_x = y + 3 = 0 \\ f'_y = x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3 \\ x = -10 \end{cases} \quad M_0(-10, -3) :$$

Քանի որ միակ սրագիտնար կետը գտնվում է D կոմպակտից դուրս, $M_0(-10, -3) \notin D$, մեզ չպետք է հետաքրքրի $f(M_0)$ արժեքը: Տեսակարար f -ի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D կոմպակտում հասանելի են D կոմպակտի ∂D եզրի վրա: Այդ եզրագիծը կազմված է երեք ուղղագիծ հարվածներից՝ OA , OB , AB , որոնք կքննարկենք հաջորդաբար:

1) Եթե $(x, y) \in OA$, ապա $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, և f ֆունկցիան ընդունում է $f(x, 0) = 3x$ րեսքը: Պարզ է, որ $f'_x(x, 0) = 3$ և սրագիտնար կետեր OA հարվածի վրա չկան, ուրեմն՝

$$\begin{aligned}\max_{(x,y) \in OA} f(x, y) &= f(A) = f(1, 0) = 3, \\ \min_{(x,y) \in OA} f(x, y) &= f(O) = f(0, 0) = 0:\end{aligned}$$

2) Եթե $(x, y) \in OB$, ապա $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$, և f ֆունկցիան ընդունում է $f(0, y) = 4y - y^2$ րեսքը: Այսպես $f'_y(0, y) = 4 - 2y = 0$, f -ի սրագիտնար կետը $(0, 2) \notin D$ չի պատկանում D կոմպակտին, ուրեմն՝ այն անընդունելի է: Տաշվի առնենք f -ի արժեքները OB հարվածի ծայրակետերում՝

$$f(O) = f(0, 0) = 0, \quad f(B) = f(0, 1) = 3:$$

3) Եթե $(x, y) \in AB$, ապա $y = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$, և րեդադրեկուց հետո f ֆունկցիան ընդունում է հետևյալ րեսքը՝

$$f(x, 1 - x) = x(1 - x) - (1 - x)^2 + 3x + 4(1 - x) = -2x^2 + 2x + 3:$$

Ածանցումը ցույց է տալիս, որ

$$f'(x, 1 - x) = -4x + 2 = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = M_{\max}$$

մաքսիմումի կետ է եզրի վրա: Տաշվենք մաքսիմումի արժեքը՝

$$f_{\max} = f(M_0) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}:$$

Եզրի վրա բոլոր սրագլի առժեքները համեմատելով՝ ստանում ենք

$$\begin{aligned}\max_{M \in D} f(M) &= \max_{M \in \partial D} f(M) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}, \\ \min_{M \in D} f(M) &= \min_{M \in \partial D} f(M) = f(0, 0) = 0 : \end{aligned}$$

Նաջորդ օրինակում փիրույթի եզրի վրա ոչ թե պարզ փեղադրում ենք կապարում, այլ լուծում ենք Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 33. $\mathbb{R}^2$ հարթության վրա տրված է 5 շառավղով փակ շրջան

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \right\},$$

որում պահանջվում է գտնել տրված ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝

$$\boxed{z = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 12x + 16y} \longmapsto \max.\min., \quad (x, y) \in D :$$

Սկզբում գտնենք f ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը D փիրույթի ներսում,

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 = 0 \\ f'_y = 2y + 16 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -8 \end{cases} \quad M_0(6, -8) :$$

Սրացանք ընդամենը մեկ սրացիոնար կետ, որն էլ չի պարկանում դիրարկվող փիրույթին՝ $M_0(6, -8) \notin D$ և ուրեմն՝ պետք է անտեսվի: Ներկայացնում f -ի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D շրջանում հասնելի են D կոմպակտի

$$\partial D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25 \right\}$$

եզրի (շրջանագծի) վրա: Առաջացավ պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝

$$\begin{cases} z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \longmapsto \max.\min. \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 25 - x^2 - y^2 = 0 : \end{cases}$$

Կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(25 - x^2 - y^2),$$

որտեղ λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապարկիչ է:

Նախ գրենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը:

Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2x - 12 - 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 2y + 16 - 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 25 - x^2 - y^2 = 0 : \end{cases} \quad \begin{cases} x(1 - \lambda) = 6 \\ y(1 - \lambda) = -8 \\ x^2 + y^2 = 25 : \end{cases}$$

Նամակարգն ունի երկու լուծում՝

$$M_1(3, -4), \quad \text{երբ} \quad \lambda = -1,$$

$$M_2(-3, 4), \quad \text{երբ} \quad \lambda = 3 :$$

Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանն ստուգելու կարիք չկա:

Ընդամենը պետք է հաշվել f ֆունկցիայի արժեքները M_1 և M_2 կետերում և ընտրություն կատարել.

$$\max_{(x,y) \in D} f(x, y) = \max_{(x,y) \in \partial D} f(x, y) = f(-3, 4) = 125,$$

$$\min_{(x,y) \in D} f(x, y) = \min_{(x,y) \in \partial D} f(x, y) = f(3, -4) = -75,$$

ինչը և պահանջվում էր գրել:

Օրինակ 34. $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության մեջ տրված է 2 շառավղով փակ կիսագունդ

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0 \right\},$$

որում պահանջվում է գրել տրված ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, $(x, y, z) \in D$,

$$\boxed{u = f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z} \longmapsto \max.\min. :$$

Սկզբում գրենք f ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը D տիրույթի ներսում,

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2y - 2 = 0 \\ f'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \boxed{M_1(1, 1, 1)} \in D :$$

Սրացանք ընդամենը մեկ սրացիոնար կետ, որը պարկանում է դիֆարկվող տիրույթին՝ $M_1(1, 1, 1) \in D$: Քանի որ մեր առջև էքստրեմումի խնդիր դրված չէ, կարիք չկա որոշելու M_1 հնարավոր էքստրեմումի կետի բնույթը:

Շարունակենք մաքսիմումի և մինիմումի որոնումները, այժմ, եզրի վրա: Տվյալ D կիսագնդի եզրը բաղկացած է

$$S^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0 \right\}$$

կիսասֆերայից և

$$D_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 0 \right\}$$

փակ շրջանից, $\boxed{\partial D = S^+ \cup D_0}$: Կիսասֆերայի վրա ձևակերպենք սրացմանական էքստրեմումի խնդիր կապի մեկ հավասարումով՝

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \mapsto \max.\min. \\ \varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 : \end{cases}$$

Այս խնդիրը լուծելու համար կազմենք f -ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned} L &= L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4), \end{aligned}$$

որպես λ -ն Լագրանժի անորոշ բազմապարկիչ է:

Գտնենք L ազդանշանի L ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2z - 2 + 2\lambda z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1 + \lambda) = 1 \\ y(1 + \lambda) = 1 \\ z(1 + \lambda) = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 : \end{cases}$$

Պարզ է, որ $x = y = z > 0$, և համակարգն ունի մեկ լուծում

$$M_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \in S^+, \quad \text{երբ } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 :$$

Դարձյալ պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանն ստուգելու և M_2 հնարավոր էքստրեմումի կետի բնույթը պարզելու կարիք չկա:

Այժմ հետազոտենք f ֆունկցիան D_0 շրջանի վրա, երբ $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$: Տեղադրումից հետո f ֆունկցիան պարզ տեսք է ընդունում՝

$$u(x, y) = f(x, y, 0) = x^2 + y^2 - 2x - 2y :$$

D_0 շրջանի ներսում $f(x, y, 0)$ ֆունկցիան միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2 = 0 \\ u'_y = 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{M_3(1, 1, 0)} \in D_0 :$$

Վերջապես D_0 շրջանի եզրի վրա, $\partial D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$ շրջանագծի վրա դարձյալ ստանում ենք պայմանական էքստրեմումի խնդիր կապի մեկ հավասարումով՝

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x, y, 0) = x^2 + y^2 - 2x - 2y \mapsto \max.\min. \\ \varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - 4 : \end{cases}$$

Այս խնդիրը լուծելու համար կրկին կազմենք f -ի L ազդանշանի ֆունկցիան՝

$$L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4),$$

որպես λ -ն *Լագրանժի անորոշ բազմապարկի* է: Գրենք *Լագրանժի*
L ֆունկցիայի սրացիոնար կետերը՝ կազմելով հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1 + \lambda) = 1 \\ y(1 + \lambda) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 : \end{cases}$$

Քանի որ, որ $x = y$, համակարգն ունի երկու լուծում՝

$$\begin{aligned} \boxed{M_4 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)} &\in D_0, & \text{երբ } \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \\ \boxed{M_5 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)} &\in D_0, & \text{երբ } \lambda &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 : \end{aligned}$$

Լուծումն ավարտելու համար մնում է հաշվել f ֆունկցիայի արժեքները
 $M_{1,2,3,4,5}$ կետերում և ընտրություն կատարել,

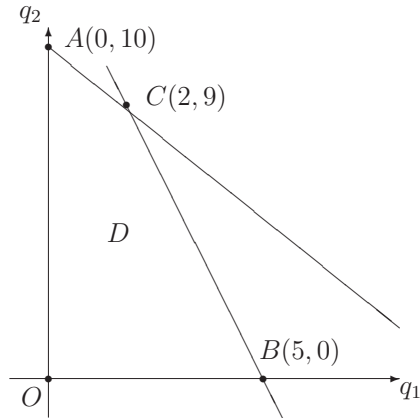
$$\begin{aligned} f(M_1) &= f(1, 1, 1) = -3, \\ f(M_2) &= f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -4(\sqrt{3} - 1), \\ f(M_3) &= f(1, 1, 0) = -2, \\ f(M_4) &= f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = -4(\sqrt{2} - 1), \\ f(M_5) &= f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 4(\sqrt{2} + 1), \\ \max_{M \in D} f(M) &= f(M_5) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 4(\sqrt{2} + 1), \\ \min_{M \in D} f(M) &= f(M_1) = f(1, 1, 1) = -3, \end{aligned}$$

ինչը և պահանջվում էր գրել:

Օրինակ 35. Ձեռնարկությունն արտադրում է երկու տեսակի ապրանք, որոնց վաճառքի (հասարակուն) գներն են $p_1 = 3$ և $p_2 = 2$ միավոր (օրինակ, հազար դրամ), համապատասխանաբար յուրաքանչյուր միավոր ապրանքի համար: Արտադրության համար օգտագործվում է երկու տեսակի հումք: Առաջին ապրանքարեսակի մեկ միավորի համար ծախսվում է 2 միավոր 1-ին հումքից և 3 միավոր 2-րդ հումքից: Երկրորդ

սպրանքատեսակի մեկ միավորի համար ծախսվում է 4 միավոր 1-ին հումքից և 1 միավոր 2-րդ հումքից: Տումբի օրական պաշարն է 40 միավոր 1-ին տեսակի հումքից և 15 միավոր 2-րդ տեսակի հումքից:

Որքա՞ն պետք է արտադրել 1-ին և 2-րդ սպրանքատեսակներից, որպեսզի օրական հասույթը լինի առավելագույնը:



ԳՃ. 11

Լուծենք խնդիրը՝ բերելով այն մաթեմատիկական խնդիրին: Ենթադրենք 1-ին սպրանքատեսակից արտադրում են q_1 հատ, իսկ 2-րդ սպրանքատեսակից՝ q_2 հատ: Այդ դեպքում հասույթի ֆունկցիան կլինի՝

$$R(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 3 q_1 + 2 q_2 :$$

Ըստ պայմանի՝ 1-ին տեսակի հումքից ծախսվում է 2 միավոր՝ 1-ին սպրանքատեսակի համար և 4 միավոր՝ 2-րդ սպրանքատեսակի համար, ընդամենը $2 q_1 + 4 q_2$ միավոր հումք: Իսկ 2-րդ տեսակի հումքից ծախսվում է 3 միավոր՝ 1-ին սպրանքատեսակի համար և 1 միավոր՝ 2-րդ սպրանքատեսակի համար, ընդամենը $3 q_1 + q_2$ միավոր հումք: Ըստ պայմանի՝ այդ քանակները սահմանափակված են՝

$$2 q_1 + 4 q_2 \leq 40, \quad 3 q_1 + q_2 \leq 15 :$$

Արդյունքում ձևավորվեց մաքսիմումի խնդիր որոշակի տիրույթում՝

$$\begin{cases} z = \boxed{R(q_1, q_2) = 3q_1 + 2q_2} \mapsto \max. \\ 2q_1 + 4q_2 \leq 40, \quad 3q_1 + q_2 \leq 15, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0 : \end{cases}$$

Երկրաչափորեն R ֆունկցիայի սրագված որոշման տիրույթը իրենից ներկայացնում է փակ քառանկյուն (կոմպակտ)՝ $\boxed{D \stackrel{\text{def}}{=} OACB}$, որն զծագիրը : Մեզ անհրաժեշտ կլինեն D քառանկյան գագաթների կոորդինատները՝

$$O(0, 0), \quad A(0, 10), \quad C(2, 9), \quad B(5, 0) :$$

D տիրույթի ներսում R ֆունկցիան սրացիոնալ կետ չունի, քանի որ R -ը զծային ֆունկցիա է (R -ի գրաֆիկը հարթություն է) և $\frac{\partial R}{\partial q_1} = 3$, $\frac{\partial R}{\partial q_2} = 2$: Ներևաբար, R ֆունկցիան հասնում է իր մաքսիմումին D քառանկյան եզրի վրա:

Ավելին՝ R ֆունկցիայի նեղացումը D քառանկյան յուրաքանչյուր կողմի վրա նույնպես զծային է (ուրեմն՝ մոնոտոն) և ցանկության դեպքում դրանք կարելի է բացահայտ գրել, R -ի մեջ տեղադրելով D քառանկյան կողմերի հավասարումները՝

$$R(q_1, q_2) = \begin{cases} 3q_1, & \text{եթե } (q_1, q_2) \in OB, \\ 2q_2, & \text{եթե } (q_1, q_2) \in OA, \\ 30 - 3q_1, & \text{եթե } (q_1, q_2) \in BC, \\ 2q_1 + 20, & \text{եթե } (q_1, q_2) \in CA, \end{cases}$$

թեև դրանում մեծ անհրաժեշտություն չկար: Ներևաբար, R ֆունկցիան հասնում է իր մաքսիմումին (ևսև մինիմումին) միայն D քառանկյան գագաթներում: Մեզ մնում է հաշվել R ֆունկցիայի արժեքները O, A, B, C գագաթներում և ընտրություն կատարել,

$$R(O) = R(0, 0) = 0,$$

$$R(A) = R(0, 10) = 20,$$

$$R(B) = R(5, 0) = 15,$$

$$R(C) = R(2, 9) = 24,$$

$$\max_{(q_1, q_2) \in D} R(q_1, q_2) = R(C) = R(2, 9) = 24 :$$

Այսպիսով՝ օրական հասույթի առավելագույն չափը 24 միավոր է (այսինքն՝ 24 հազար դրամ), և այն հասանելի է, եթե օրական արտադրվի 2 հար 1-ին սպրանքարեսակից և 9 հար 2-րդ սպրանքարեսակից:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

Գտեք րվյալ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(1, 0) = 0$

2. $f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2$

Պարասխան՝ էքստրեմում չկա, $(1, 0)$ կետը թամբակետ է

3. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(0, 0) = 0$

4. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$

Պարասխան՝ էքստրեմում չկա, $(0, 0)$ կետը թամբակետ է

5. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(-2, -1) = -2$

6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(0, 0) = 0$, $f_{\min} = f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$

7. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(-1, 1) = 6$, $f_{\min} = f(1, -1) = -6$,

$(1, 1)$, $(-1, -1)$ կետերը թամբակետեր են

8. $f(x, y) = 4x + 2y - x^2 - y^2$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(2, 1) = 5$

9. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(5, 5) = -125$, $(0, 0)$ կետը թամբակետ է

$$10. \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\min} = f(0, 3) = -9$$

$$11. \quad f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\min} = f(0, 0) = 4$$

$$12. \quad f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\min} = f(1, 1) = 3$$

$$13. \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\min} = f(1, 0) = -1$$

$$14. \quad f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y), \quad x, y > 0$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\max} = f(3, 2) = 108$$

$$15. \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8,$$

$(0, 0)$ -ն թամբակետ է

$$16. \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\min} = f(2, 1) = -28, \quad f_{\max} = f(-2, -1) = 28,$$

$(1, 2), (-1, -2)$ կետերը թամբակետեր են

$$17. \quad f(x, y) = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}}$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\max} = f(1, 1) = f(-1, -1) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$f_{\min} = f(-1, 1) = f(1, -1) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$18. \quad f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$$

$$\text{Պարասխան՝ } f_{\max} = f(0, 0) = 1$$

$$19. \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(0, 0) = 0$ և ոչ խիստ $f_{\max} = f|_{\mathbb{T}} = \frac{1}{e}$,
որովհետ $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ միավոր շրջանագիծ է

$$20. \quad f(x, y) = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(1, -1) = \sqrt{3}$

$$21. \quad f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \quad x, y > 0$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(4, 2) = 6$

$$22. \quad f(x, y) = (x^2 - 2y^2) e^{x-y}$$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(-4, -2) = \frac{8}{e^2}$, $(0, 0)$ -ն թամբակետ է

$$23. \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{4}{3}$

$$24. \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x, y, z > 0$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$

$$25. \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(1, -1, 3) = -11$

$$26. \quad f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right) = -\frac{17}{4}$

$$27. \quad f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 2z^2 + xy - 2xz + 3y - 1$$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f\left(1, -2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$

28. $f(x, y, z) = xyz(1 - x - y - z)$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$

29. $f(x, y, z) = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

30. $f(x, y, z) = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{3}{e}}$
 $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{e}}$

31. $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 2xy + 6yz - 6z$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(-1, -1, 1) = -3$

32. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

Պարասխան՝ էքստրեմում չկա, $(0, 0, 0)$ -ն թամբակետ է

33. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

Պարասխան՝ էքստրեմում չկա, $(2, 1, 7)$ կետը թամբակետ է

34. $f(x, y, z) = 3 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(6, 4, 10) = 3 \ln 6 + 2 \ln 4 + 5 \ln 10 + \ln 2$

Գրեք րվյալ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

35. $f(x, y) = xy$, երբ $x + y = 1$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

36. $f(x, y) = x + 2y$, երբ $x^2 + y^2 = 5$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f(1, 2) = 5$ և $f_{\min} = f(-1, -2) = -5$

37. $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$, երբ $x^2 + y^2 = 1$

Պարասխան՝ $f_{\max} = f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11$,

$$f_{\min} = f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$$

38. $f(x, y) = x^2 + y^2$, երբ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$

39. $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, երբ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(-1, 2, -2) = -9$ և $f_{\max} = f(1, -2, 2) = 9$

40. $f(x, y, z) = x y^2 z^3$, երբ $x + y + z = 12$ ($x, y, z > 0$)

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(2, 4, 6) = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3 = 6912$

41. $f(x, y, z) = x y z$, երբ $x + y + z = 5$ և $xy + yz + zx = 8$

Պարասխան՝ $f_{\min} = f(2, 2, 1) = f(2, 1, 2) = f(1, 2, 2) = 4$

$$f_{\max} = f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 4\frac{4}{27}$$

42. Ապացուցեք անհավասարությունը՝

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}, \quad x, y, z \geq 0 :$$

Ցուցում. Փնտրեք $f = xyz$ ֆունկցիայի մաքսիմումը, երբ $x + y + z = S$:

43. Ձեռնարկության արտադրական ֆունկցիան որոշվում է

$$f(K, L) = K^{3/4} L^{1/4}$$

քանաձևով, որպես K -ով նշանակված է կապիտալի, իսկ L -ով աշխատուժի միավորների քանակները: Կապիտալի 1 միավորի արժեքն է 40 միավոր, իսկ 1 միավոր աշխատուժի արժեքն է՝ 20 միավոր: Արտադրության համար հարկացված է 24 000 միավոր դրամական միջոց:

Գտեք արտադրանքի հնարավոր առավելագույն քանակը:

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(450, 300) \approx 406,62$

Ստորև բերված խնդիրներում գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները տրված տիրույթում.

44. $f(x, y) = 1 + x + 2y$, հետևյալ տիրույթներում՝

ա) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$;

Պատասխան՝ $\max f = f(0, 1) = 3, \quad \min f = f(0, 0) = 1$

բ) $x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 1$:

Պատասխան՝ $\max f = f(1, 0) = 2, \quad \min f = f(0, -1) = -1$

45. $f(x, y) = x^2y, \quad x^2 + y^2 \leq 1$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $\max f = f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}},$

$\min f = f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

46. $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $\max f = f(\pm 1, 0) = 1, \quad \min f = f(0, \pm 1) = -1$

47. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geq -3$

տիրույթում:

Պատասխան՝ $\max f = f(0, -3) = f(-3, 0) = 6,$

$\min f = f(-1, -1) = -1$

$$48. \quad f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

տիրույթում:

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \min f = f(0, 0) = 0$$

$$49. \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 2 \quad \text{տիրույթում:}$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(2, -1) = 13,$$

$$\min f = f(1, 1) = f(0, -1) = -1$$

Գրեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները տրված կորերով սահմանափակված տիրույթում.

$$50. \quad f(x, y) = 3x + y - xy, \quad y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(2, 2) = 4, \quad \min f = f(0, 0) = f(4, 4) = 0$$

$$51. \quad f(x, y) = xy - x - 2y, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 3$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(0, 0) = f(3, 3) = 0, \quad \min f = f(3, 0) = -3$$

$$52. \quad f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(1, 2) = 17, \quad \min f = f(1, 0) = -3$$

$$53. \quad f(x, y) = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(1, 0) = 5, \quad \min f = f(0, 0) = 0$$

$$54. \quad f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad y = x + 1, \quad x = 3, \quad y = 0$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(3, 3) = 6, \quad \min f = f(2, 0) = -4$$

$$55. \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(0, 0) = 8, \quad \min f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$$

$$56. \quad f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(0, 6) = 36, \quad \min f = f(0, 0) = 0$$

$$57. \quad f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(1, 1) = 6, \quad \min f = f(0, 0) = 0$$

$$58. \quad f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad y = 8, y = 2x^2$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(-2, 8) = 18, \quad \min f = f(2, 8) = -14$$

$$59. \quad f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad y = 0, y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(0, 3) = 28, \quad \min f = f(0, 0) = 1$$

$$60. \quad f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2, \quad y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{Պարասխան՝} \quad \max f = f(0, 0) = 4, \quad \min f = f(-1, 0) = f(1, 0) = 2$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

- [1] Գ.Մ. Ֆիխտենգոլց, «Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ»,
Նախորդ 1, Լույս, Երևան, 1970
Г.М. Фихтенгольц, "Основы математического анализа", Части 1,2,
изд. 10, 9-е, Лань, С-Петербург, Москва, 2015, 2008
- [2] Գ.Մ. Ֆիխտենգոլց, «Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց»,
Նախորդ 1, ԵՊՏ, Երևան, 1949
Г.М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления",
Часть 1, изд. 8-е, Физматлит, Москва, 2003
- [3] Л.Д. Кудрявцев, "Краткий курс математического анализа", Том 2,
изд. 3-е, Физматлит, Москва, 2005
- [4] Л.Д. Кудрявцев, "Курс математического анализа", Том 2,
Высшее Образование, Дрофа, Москва, 2004
- [5] С.М. Никольский, "Курс математического анализа", изд. 6-е,
Физматлит, Москва, 2001
- [6] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, "Основы математического анализа",
Часть 1, изд. 7-е, Физматлит, Москва, 2003
- [7] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б. Сендов, "Математический анализ",
Часть 1, МГУ, Москва, 1985
- [8] Վ.Խ. Մուսոյան, «Մաթեմատիկական անալիզ», Մաս 1,2, Զանգակ, Երևան,
2009, 2012

- [9] W.F. Trench, "The Method of Lagrange multipliers", Trinity Univ., San Antonio, Texas, 2012
- [10] Մ.Ն. Մուրադյան, «Բարձրագույն մաթեմատիկա փոփոխականների համար: Շարք փոփոխականի ֆունկցիաներ» , Տնտեսագետ, Երևան, 2002
- [11] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, "Контрпримеры в анализе", Мир, Москва, 1967
- [12] Б.П. Демидович, "Сборник задач и упражнений по математическому анализу", изд. 18-е, МГУ, Москва, 1997
- [13] И.И. Ляшко и др., "Математический анализ в примерах и задачах", Часть 2, Вища школа, Киев, 1977
- [14] Գ. Գևորգյան, Լ. Գալստյան, Ա. Թապալբյան, Գ. Միքայելյան, Կ. Նավասարդյան, «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք» , Մաս 2, ԵՊՏ, Երևան, 2014
- [15] В.Ф. Бутузов и др., "Математический анализ в вопросах и задачах", Физматлит, Москва, 2002
- [16] И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий, "Задачи и упражнения по математическому анализу", МГУ, Москва, 1988

Բովանդակություն

Նախաբան	3
Նաճախ օգտագործվող նշանակումներ	5
1 Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները	9
1.1 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Թամբակերի գաղափարը:	9
1.2 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար	22
1.3 Բարձր կարգի դիֆերենցիալներով լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը	32
2 Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները	35
2.1 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար	36
2.2 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար	41
2.3 Որոշ տեղեկություններ հանրահաշվից քառակուսային ձևերի մասին	47

2.4	Լոկալ էքսպրեմումի բավարար պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար (շարունակություն)	53
3	Փունկցիայի պայմանական (հարաբերական) էքսպրեմումները:	
	Լագրանժի մեթոդը	59
3.1	Խնդրի դրվածքը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար	59
3.2	Պայմանական էքսպրեմումի խնդիրը երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար	80
3.3	Պայմանական էքսպրեմումի խնդիրն ավելի շատ փոփոխականի ֆունկցիաների համար	93
3.4	Փունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները փակ և սահմանափակ տիրույթում	107
	Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար	119
	Գրականության ցանկ	127

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԿԱՐԵՆ ԼԱՐԻԿԻ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

**ԼՈԿԱԼ ԵՎ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ
ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ**

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի

Տպագրված է «Արման Ամանգույան» ԱԶ-ում:
ք. Երևան, Հր. Ներսիսյան 1/125

Ստորագրված է տպագրության՝ 27.04.2018:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 8.25:
Տպաքանակը՝ 150:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am



ՎԻԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2018
publishing.ysu.am