ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս.Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ
Ա.Կ. ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ ՏՆՏԵՍԱԳԵՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՄԱՍ II

$$\sum \int_a^b$$

ԵՐԵՎԱՆ 2013

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս.Մ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ
Ա.Կ. ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ ՏՆՏԵՍԱԳԵՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՄԱՍ II

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2013

ՀՏԴ 517 (076.1)
ԳՄԴ 22.161 ց7
Թ 283

Հրատարակության են երաշխավորել ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի, տնտեսագիտության ֆակուլտետների գիտական խորհուրդները

Խմբագիր՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ Ռ.Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Գրախոս՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ Գ.Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ Ս.Մ., ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ Ա.Կ.

Թ 283 Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք տնտեսագետների համար. Մաս II / Ս.Մ. Հովհաննիսյան, Ա.Կ. Թասլաքյան. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2013. – 212 էջ:

Խնդրագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության ֆակուլտետում դասավանդվող «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի ծրագրին համապատասխան: Նախատեսվում է տնտեսագիտություն մասնագիտության առկա և հեռակա ուսուցման ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517 (076.1)
ԳՄԴ 22.161 ց7

ISBN 978-5-8084-1717-5

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԽՄԲԱԳՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Խնդրագիրքը կազմված է տնտեսագիտության ֆակուլտետում դասավանդվող «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի ծրագրին խիստ համապատասխան: «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի վերաբերյալ այլ խնդրագրքերից այս ձեռնարկը շահեկանորեն տարբերվում է նրանով, որ տեսական նյութի հակիրճ շարադրանքից բացի պարունակում է մեծ թվով խնդիրների լուծումներ:

Հեղինակները օգտագործելով իրենց երկարամյա դասախոսական փորձը, այդ խնդիրների լուծումները ուսանողի համար մատչելի ձևով են շարադրել՝ միաժամանակ հաշվի առնելով նաև ապացույցների խստությունը: Այդ իսկ պատճառով խնդրագիրքը կարող է օգտակար լինել ինչպես ԵՊՀ-ի, այնպես էլ այլ բուհերի այն ուսանողների համար, որոնք սկսում են ուսումնասիրել «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկան:

Ռ.Ա. Ավետիսյան

ԳԼՈՒԽ III

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՏՐՎԱԾ ԿԵՏՈՒՄ

ա) Դիցուք $f(x)$ **ֆունկցիան որոշված է** $(a;b)$ **(վերջավոր կամ անվերջ) միջակայքում և** $x_0 \in (a;b)$

Ցանկացած $x \in (a;b)$ կետի համար $\Delta x = x - x_0$ տարբերությունը կոչվում է արգումենտի աճ, իսկ $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ տարբերությունը Δx աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ:

Սահմանում: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերության սահմանը, երբ $\Delta x \to 0$ (եթե այն գոյություն ունի) կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում: $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում նշանակվում է $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

Այսպիսով, ըստ սահմանման՝

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Եթե (1) սահմանը հավասար է $+\infty$ կամ $-\infty$, ապա ասում են, որ $f(x)$-ը x_0 կետում ունի անվերջ ածանցյալ (համապատասխանաբար հավասար $+\infty$-ի կամ $-\infty$-ի): Եթե (1)-ի մեջ սովորական սահմանը փոխարինենք միակողմանի սահմաններով, ապա ստացվում են միակողմանի ածանցյալների սահմանումները՝ $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան ածանցյալ x_0 կետում կոչվում է

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

սահմանը, իսկ ձախակողմյան ածանցյալ՝

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

սահմանը (եթե դրանք գոյություն ունեն):

Այս բանաձևերը x_0 կետում աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ կորոշեն նաև այն դեպքում, երբ $f(x)$ ֆունկցիան տրված է $[x_0;b)$ (համապատասխանաբար $(a;x_0]$ բազմությունում.

$x_0 \in (a;b)$ կետում սովորական $f'(x_0)$ ածանցյալի գոյությունը համարժեք է $f'_+(x_0)$ և $f'_-(x_0)$ միակողմյան ածանցյալների գոյությանը և հավասարությանը:

բ) *Ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունը:*
Շոշափողի և նորմալի հավասարումները:

$y = f(x)$ ֆունկցիայի $f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալը $x_0 \in (a;b)$ կետում այդ ֆունկցիայի գծապատկերի (գրաֆիկի) x_0 աբսցիսն ունեցող կետում նրան տարված շոշափողի անկյունային գործակիցն է: Նշված շոշափողի հավասարումը կլինի $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$, իսկ երբ $f'(x_0) \neq 0$, $M\left(x_0; f(x_0)\right)$ կետով անցնող և շոշափողին ուղղահայաց նորմալ ուղիղը՝

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0):$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ելնելով ածանցյալի սահմանումից՝ ապացուցել, որ $y = C$, $y = x^p$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$ ֆունկցիաները իրենց որոշման տիրույթների յուրաքանչյուր կետում ունեն ածանցյալներ: Գտնել այդ ածանցյալները:

Օգտվենք II գլխի № 10, № 11 կետերի արդյունքներից

ա) $y = C$, որտեղ C-ն հաստատուն է,

$\Delta - \Delta y = C - C = 0$ և հետևաբար՝ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$:

Այսպիսով՝ $C' = 0$ ∇

բ) $y = x^p$, $(p \in R,\ x > 0)$

$$\Delta - \Delta y = (x + \Delta x)^p - x^p = x^p\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^p - 1\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^p \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^p - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{x^p p \cdot \dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = p \cdot x^{p-1}$$

Այսպիսով՝ $\left(x^{p}\right)' = p\cdot x^{p-1}$, $\forall p\in R$ և $\forall x\in(0;+\infty)$ ∇

գ) $y=\sin x$, $\quad x\in R$

$$\Delta-\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\cos x$$

Այսպիսով՝ $(\sin x)'=\cos x$, $\quad x\in R$ ∇

դ) $y=\cos x$, $\quad x\in R$

$$\Delta-\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\sin x$$

Այսպիսով՝ $(\cos x)'=-\sin x$, $\quad x\in R$ ∇

ե) $y=\operatorname{tg}x$, $\quad x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$$\Delta-\Delta y=\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x=\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Այսպիսով՝ $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ ∇

զ) $y=\operatorname{ctg}x$, $\quad x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$$\Delta-\Delta y=\operatorname{ctg}(x+\Delta x)-\operatorname{ctg}x=-\frac{\sin\Delta x}{\sin(x+\Delta x)\cdot\sin x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\cdot\sin x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Այսպիսով՝ $(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $\quad x\in R,\ x\neq\pi k,\ k\in Z$ ∇

ե) $y = a^x$, $\qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R$

$\Delta -$ $\qquad \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

Այսպիսով՝ $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, $\qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R$ $\qquad \nabla$

Մասնավորապես, երբ $a = e$, ապա

$$\left(e^x\right)' = e^x, \qquad x \in R \qquad \nabla$$

ը) $y = \log_a x$, $\qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

$\Delta - \Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x} \cdot \log_a e}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Այսպիսով՝ $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $\qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$ $\qquad \nabla$

Մասնավորապես, երբ $a = e$, ապա

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad x > 0 \qquad \nabla$$

Ելնելով ածանցյալի սահմանումից, գտնել ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները x_0 կետում:

ա) $y = \left|x^2 - 5x + 6\right|$, $\qquad x_0 = 2$

բ) $y = \left|\sin 3x\right|$, $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

գ) $y = \left|3^x - 9\right|$, $\qquad x_0 = 2$

դ) $y = \left|\ln(1 - 6x)\right|$, $\qquad x_0 = 0$

$\Delta -$ ա) ունենք

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & (-\infty; 2][3; \infty) \\ -(x^2 - 5x + 6), & 2 < x < 3 \end{cases}$$

$\Delta y = (2 + \Delta x)^2 - 5(2 + \Delta x) + 6 - 0 = 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 10 - 5\Delta x + 6 = \Delta x^2 - \Delta x =$
$= \Delta x(\Delta x - 1)$, $\qquad$ երբ $\Delta x < 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{\Delta x}=-1, \qquad y'_-(2)=-1 \qquad \nabla$$

$$\Delta y=-\left((2+\Delta x)^2-5(2+\Delta x)+6\right)-0=\Delta x-\Delta x^2=\Delta x(1-\Delta x),$$

երբ $\Delta x>0$ և $\Delta x<1$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta x(1-\Delta x)}{\Delta x}=1, \qquad y'_+(2)=1 \qquad \nabla$$

Δ – բ) Ունենք

$$\Delta y=\left|\sin 3\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)\right|-\sin\pi=\left|\sin(\pi+3\Delta x)\right|=\left|-\sin 3\Delta x\right|=\left|\sin 3\Delta x\right|$$

հետևաբար՝ $\Delta y=\begin{cases}\sin 3\Delta x, & \text{երբ } \Delta x>0\\ -\sin 3\Delta x, & \text{երբ } \Delta x>0\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\sin 3\Delta x}{\Delta x}=-3, \qquad y'_-\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sin 3\Delta x}{\Delta x}=3, \qquad y'_+\left(\frac{\pi}{3}\right)=3 \qquad \nabla$$

Δ – գ) Ունենք

$$\Delta y=\left|3^{2+\Delta x}-9\right|-0=9\left|3^{\Delta x}-1\right|$$

հետևաբար՝ $\Delta y=\begin{cases}9(3^{\Delta x}-1), & \text{երբ } \Delta x>0\\ -9(3^{\Delta x}-1), & \text{երբ } \Delta x<0\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-9(3^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=-9\cdot\ln 3, \qquad y'_-(2)=-9\ln 3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{9(3^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=9\cdot\ln 3, \qquad y'_+(2)=9\ln 3 \qquad \nabla$$

Δ – դ) Ունենք

$$\Delta y=\left|\ln(1-6\Delta x)\right|-0=\left|\ln(1-6\Delta x)\right|$$

հետևաբար՝ $\Delta y=\begin{cases}-\ln(1-6\Delta x), & \text{երբ } \Delta x>0\\ \ln(1-6\Delta x), & \text{երբ } \Delta x<0\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\ln(1-6\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-6\Delta x)}{\Delta x}=-6, \qquad y'_-(0)=-6$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{-\ln(1-6\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{6\Delta x)}{\Delta x}=6, \qquad y'_+(0)=6 \qquad \nabla$$

Գտնել այն կետերը, որոնցում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողը զուգահեռ է տրված ուղղին:

$$f(x)=8^x-3\cdot 4^x-9\cdot 2^x, \qquad y=4$$

Δ – Քանի որ շոշափողի անկյունային գործակիցը հավասար է ածանցյալի արժեքին տրված կետում, ապա օգտվելով երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանից, կարող ենք գրել

$$f'(x)=8^x\cdot\ln 8-3\cdot 4^x\cdot\ln 4-9\cdot 2^x\ln 2=\ln 2(3\cdot 8^x-6\cdot 4^x-9\cdot 2^x)$$

$f'(x)=0$, որովհետև տրված ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է 0-ի:

$$3\cdot 8^x-6\cdot 4^x-9\cdot 2^x=0$$

$$2^x\cdot(3\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^x-9)=0, \qquad 2^x\neq 0$$

$$3\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^x-9=0,\ 2^{2x}-2\cdot 2^x-3=0,\ \ 2^x=3,\ \ x=\log_2 3,\ \ f\left(\log_2 3\right)=-27$$

Հետևաբար՝ $M_0\left(\log_2 3;\,-27\right)$ կետում $f(x)$-ի գրաֆիկին տարած շոշափողը զուգահեռ է $y=4$ ուղղին:

Գտնել տրված $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նշված $(x_1;y_1)$ կետից տարված շոշափողի հավասարումը.

$$f(x)=3+x-\frac{3}{x}, \qquad x_1=3,\ y_1=9$$

Δ – Որոնելի շոշափողի հավասարումն է՝

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, որտեղ x_0-ն շոշափման կետի աբսցիսն է:

Գտնենք x_0-ն.

$$y=3+x_0-\frac{3}{x_0}+\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$$

Քանի որ $M_1(x_1;y_1)$ կետը գտնվում է շոշափողի վրա, ապա նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն շոշափողի հավասարմանը

$$9=3+x_0-\frac{3}{x_0}+\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(3-x_0)=3+\cancel{x_0}+3-\cancel{x_0}+\frac{9}{x_0^2}-\frac{6}{x_0}$$

$$\frac{9}{x_0^2}-\frac{6}{x_0}-3=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{x_0}-1\right)^2=4 \qquad \frac{3}{x_0}-1=\pm 2,\quad \left(x_0\right)_1=1,\ \left(x_0\right)_2=-3$$

Հետևաբար՝ $M_1(3;9)$ կետից $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին կարելի է տանել երկու շոշափող՝ մեկը գրաֆիկի $A_1(1;1)$ կետով, մյուսը՝ գրաֆիկի $A_2(-3;1)$ կետով:

$$y = 1 + 4(x-1) = 4x - 3 \qquad A_1(1;1)$$

$$y = 1 + \frac{4}{3}(x+3) = \frac{4}{3}x + 5 \qquad A_2(-3;1)$$

a պարամետրի մի որոշ դրական արժեքի դեպքում $y = ax - 4$ ուղիղը շոշափում է $f(x) = x^2 + 2ax - 2a + 1$ պարաբոլը: Գտնել շոշափման կետի կոորդինատները:

Δ – Նշանակենք շոշափման կետը $M_0(x_0; y_0)$:

Քանի որ $M_0(x_0; y_0)$ կետը գտնվում է շոշափողի վրա, ապա

$$y_0 = ax_0 - 4 = x_0^2 + 2ax_0 - 2a + 1$$

$$\text{և } f'(x_0) = 2x_0 + 2a = a$$

տեղադրելով $x_0 = -\frac{a}{2}$ արժեքը վերևի հավասարության մեջ կստանանք

$$-\frac{a^2}{2} - 4 = \frac{a^2}{4} - a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 20 = 0, \qquad a_1 = -10,\ a_2 = 2$$

Քանի որ a-ն դրական է, ապա $a = 2$:

$$x_0 = -1,\ y_0 = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$$

$$M_0(x_0; y_0) = M_0(-1; -6) \qquad \nabla$$

Գտնել a պարամետրի այն փոքրագույն դրական արժեքը, որի դեպքում $y = 8x + a$ ուղիղը շոշափում է $f(x) = 5x + 3\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Δ – Գտնենք շոշափման կետերի կոորդինատները.

$5 + 3\cos x = 8 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, \quad k \in Z$

$16\pi k + a = 10\pi k + 3 \cdot 0, \quad a = -6\pi k, \qquad k \in Z$

Քանի որ, ըստ խնդրի պայմանի $a > 0$, ապա $a = -6\pi k$, $k = -1; -2; \cdots$, որտեղից կհետևի, որ ամենափոքր դրական a-ն կստացվի, երբ $k = -1$, $a = 6\pi$: ∇

2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

ա) Սահմանում: $(a;b)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան $x_0 \in (a;b)$ կետում կոչվում է դիֆերենցելի, եթե գոյություն ունեն A թիվ և x_0-ում անընդհատ $\alpha(x)$, $x \in (a;b)$ անվերջ փոքր ֆունկցիա (երբ $x \to x_0$)

այնպիսիք, որ $\forall x \in (a;b)$ տեղի $f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)$ հավասարությունը: Եթե $f(x)$-ը x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա նրա դիֆերենցիալ x_0 կետում կոչվում է $df(x_0)=A(x-x_0)$ գծային ֆունկցիան:

$x_0 \in (a;b)$ կետում դիֆերենցելի ֆունկցիան այդ կետում անընդհատ է:

բ) Ֆունկցիայի դիֆերենցելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Թեորեմ: Որպեսզի $(a;b)$-ում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան $x_0 \in (a;b)$ կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում ունենա վերջավոր $f'(x_0)$ ածանցյալ: Ընդ որում $df(x_0)$ դիֆերենցիալն ընդունում է $df(x_0)=f'(x_0)dx$ տեսքը, որտեղ $dx=x-x_0=\Delta x$ կոչվում է արգումենտի դիֆերենցիալ:

$x_0 \in (a;b)$ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից հետևում է, որ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, երբ $\Delta x \to 0$:

Այստեղից ստացվում է մոտավոր հաշիվներում երբեմն օգտագործվող $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$ մոտավոր բանաձևը:

$(a;b)$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում դիֆերենցելի ֆունկցիան կոչվում է $(a;b)$-ում դիֆերենցելի ֆունկցիա:

$[a;b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ հատվածում կոչվում է դիֆերենցելի, եթե այն դիֆերենցելի է $(a;b)$-ում և գոյություն ունեն $f'_+(a)$ և $f'_-(b)$ միակողմանի վերջավոր ածանցյալներ:

3. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԵՎ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ

ա) Թեորեմ: Դիցուք $x=\varphi(t)$, $\varphi:(\alpha;\beta)\to(a;b)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $t_0 \in (\alpha;\beta)$ կետում, իսկ $y=f(x)$, $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան $\varphi(t_0)\in(a;b)$ կետում: Այդ դեպքում $y=f\left(\varphi(t)\right)$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է t_0 կետում և՝ $\left(f\left(\varphi(t)\right)\right)'\Big|_{t=t_0}=f'\left(\varphi(t_0)\right)\cdot\varphi'(t_0)$, կամ $y'_t=y'_x\cdot x'_t$:

Վերջին բանաձևից հետևում է, որ $y=f\left(\varphi(t)\right)$ բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը պահպանում է $dy=y'_x dx$ տեսքը, սակայն այստեղ dx-ը ոչ թե x անկախ փոփոխականի Δx աճը, այլ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է:

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան X միջակայքում խիստ մոնոտոն է և անընդհատ: Այդ դեպքում նրա արժեքների բազմության՝ Y միջակայքում գոյություն ունի $x=g(y)$ անընդհատ հակադարձ ֆունկցիան:

բ) Թեորեմ: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան, $x_0 \in X$ կետում ունի $f'(x_0) \neq 0$ վերջավոր ածանցյալ, ապա $x=g(y)$ հակադարձ ֆունկցիան $y_0=f(x_0)$ կետում ունի ածանցյալ և

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}:$$

4. ԴԻՖԵՐԵՆՑՄԱՆ (ԱԾԱՆՑՄԱՆ) ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

Թեորեմ: Դիցուք $u=f(x)$ և $v=g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a;b)$-ում և դիֆերենցելի են $x_0 \in (a;b)$ կետում: Այդ դեպքում $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, իսկ $g(x_0) \neq 0$ դեպքում նաև $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիաները նույնպես դիֆերենցելի են x_0 կետում, ընդ որում՝

ա) $(f+g)'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$

բ) $(f\cdot g)'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0)$

գ) $\left.\left(\frac{f}{g}\right)'\right|_{x=x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$, կամ կարճ՝ $(u+v)'=u'+v'$, $(u\cdot v)'=u'v+v'u$, $\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Գտնել արտահայտության մոտավոր արժեքը.

ա) $\sqrt[4]{80}$

բ) $\arcsin(0,51)$

$\Delta-$ա) Դիտարկենք $f(x)=\sqrt[4]{x}$ ֆունկցիան $x_0=81$ կետի շրջակայքում և օգտվենք $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ մոտավոր բանաձևից: Ունենք $x_0=81$, $x_0+\Delta x=80$, որտեղից հետևում է $\Delta x=80-81=-1$:

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}},\ f'(x_0)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{81^3}}=\frac{1}{108}$$

$$f(x_0)=\sqrt[4]{81}=3,\ \sqrt[4]{80}\approx 3-\frac{1}{108}=2,9907 \qquad \nabla$$

բ) Դիտարկենք $f(x)=\arcsin x$ ֆունկցիան $x_0=0,5$ կետի շրջակայքում՝

$x_0+\Delta x=0,51,\ \Delta x=0,51-0,5=0,01$

$$f(x_0)=\arcsin(0,5)=\frac{\pi}{6}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (-1<x<1),\ f'(x_0)=\frac{1}{\sqrt{1-0,25}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\arcsin(0,51)\approx\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0,01 \qquad \nabla$$

Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը.

ա) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1$

բ) $(\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1$

գ) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}, \qquad x\in R$

դ) $(\operatorname{arcctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}, \qquad x\in R$

Δ – ա) Դիտարկենք $y=\arcsin x$, $x\in(-1;1)$ ֆունկցիան: Այն հանդիսանում է $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում որոշված $x=\sin y$ ֆունկցիայի հակադարձը: Քանի որ այդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ $\cos y$-ը այդ միջակայքի ոչ մի կետում հավասար չէ 0-ի, ապա $y=\arcsin x$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր $x=\sin y$ կետում կունենա ածանցյալ և ըստ հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի հաշվման բանաձևի՝

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(արմատի նշանը վերցրինք + նշանով, քանի որ cos ֆունկցիան $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում դրական է):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1;1) \qquad \nabla$$

բ) $y = \arccos x$, $\quad x \in (-1;1)$

$y = \arccos x$ ֆունկցիան $(0;\pi)$ միջակայքում որոշված $x = \cos y$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է և $(\cos y)' = -\sin y \neq 0$, $y \in (0;\pi)$

Հետևաբար յուրաքանչյուր $x = \cos y$ կետում

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Նույն ձևով արմատի նշանը վերցրինք + նշանով, քանի որ $\sin y > 0$, երբ $y \in (0;\pi)$):

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1;1) \qquad \nabla$$

գ) $y = \operatorname{arctg} x$, $\qquad x \in (-\infty;+\infty)$ $\qquad \nabla$

$y = \operatorname{arctg} x$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում որոշված $x = \operatorname{tg} y$ ֆունկցիայի հակադարձն է և $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

Հետևաբար՝

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty;+\infty) \qquad \nabla$$

դ) $y = \operatorname{arcctg} x$ ֆունկցիան $(0;\pi)$ միջակայքում որոշված $x = \operatorname{ctg} y$ ֆունկցիայի հակադարձն է և $(\operatorname{ctg} y)' = -\frac{1}{\sin^2 y} \neq 0$, երբ $y \in (0;\pi)$:

Հետևաբար՝

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty;+\infty) \qquad \nabla$$

5. ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿ

1) $C' = 0$

2) $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$

3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(e^x)' = e^x$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5) $(\sin x)' = \cos x$

6) $(\cos x)' = -\sin x$

7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

6. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼ: ԱՍՏԻՃԱՆԱՅՈՒՅՑԱՅԻՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՈՒՄԸ

ա) Սահմանում: Դիցուք $f(x)$-ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է $(a;b)$ միջակայքում և $f(x) \neq 0$, երբ $x \in (a;b)$: Այդ դեպքում $\left(\ln|f(x)|\right)'$ ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալ:

Ակնհայտ է, որ

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ կամ } f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln|f(x)|\right)' \qquad (1)$$

բ) Այն դեպքերում, երբ լոգարիթմելը պարզեցնում է ֆունկցիայի տեսքը, $f'(x)$-ը կարելի է հաշվել լոգարիթմական ածանցյալի միջոցով (օգտվելով (1) բանաձևից): Օրինակ, եթե $y = f(x) = (u(x))^{v(x)}$, որտեղ $u(x)$-ը և $v(x)$-ը դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, նշված եղանակով կստանանք՝

$$f'(x) = \left((u(x))^{v(x)}\right)' = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot v(x)\right)$$

7. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆ (ՃԿՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ)

ա) Սահմանում: $y=f(x)$ ֆունկցիայի էլաստիկությունն $x_0\in(a;b)$ կետում կոչվում է

$$E_{yx}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right) \tag{2}$$

սահմանը, եթե այն գոյություն ունի: Ասում են նաև, որ $E_{yx}(x_0)$-ն (կրճատ E_y) y-ի էլաստիկության գործակիցն է x-ի նկատմամբ:

բ) Եթե $x_0\neq 0$ և $f(x_0)\neq 0$, ապա (2) սահմանի գոյությունը համարժեք է $f'(x_0)$ ածանցյալի գոյությանը: Ընդսմին ստացվում է

$$E_{yx}(x_0)=\frac{x_0}{f(x_0)}\cdot f'(x_0) \text{ կամ կրճատ՝ } E_y=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{(\ln|y|)'}{(\ln|x|)'}$$

գ) Թեորեմ: $y_i=f_i(x)$ $(i=1;2;\cdots n)$, $x_0\in(a;b)$ կետում դիֆերենցելի ֆունկցիաների $y=y_1+y_2+\cdots+y_n$ գումարի էլաստիկությունն x_0 կետում բավարարում է $E_{\min}\le E_y\le E_{\max}$ առնչությանը, որտեղ $E_{\min}=\min E_{y_i}(x_0)$, $E_{\max}=\max E_{y_i}(x_0)$:

դ) Թեորեմ: Եթե $u=u(x)$ և $v=v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $x_0\neq 0$ կետում և $u'(x_0)\neq 0$, $v'(x_0)\neq 0$, ապա $E_{uv}=E_u+E_v$; $E_{\frac{u}{v}}=E_u-E_v$:

ե) Որոշ բավարար պայմանների դեպքում $y=f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիայի էլաստիկության համար ճշմարիտ է

$E_{yt}(t_0)=E_{yx}(x_0)\cdot E_{xt}(t_0)$ բանաձևը:

8. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ

Սահմանում: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$-ում, ապա $f'(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն $x_0\in(a;b)$ կետում (եթե այն գոյություն ունի) կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակվում է $f''(x_0)$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$, $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ և այլն:

Յամանման ձևով սահմանվում են նաև $f'''(x_0)=\left(f''(x)\right)'\Big|_{x=x_0}$, $f^4(x_0)=\left(f^3(x)\right)'\Big|_{x=x_0}$ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալներ x_0 կետում:

9. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՅԱՇՎԻ ՅԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

ա) Ռոլլի թեորեմը: Եթե f ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է $[a;b]$ փակ միջակայքում, դիֆերենցելի է առնվազն $(a;b)$ բաց միջակայքում և $f(a)=f(b)$, ապա գոյություն ունի գոնե մեկ $x_0\in(a;b)$ կետ, որի համար $f'(x_0)=0$:

բ) Լագրանժի թեորեմը: Եթե f ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է $[a;b]$ փակ միջակայքում, դիֆերենցելի է առնվազն $(a;b)$ բաց միջակայքում, ապա գոյություն ունի գոնե մեկ $x_0\in(a;b)$ կետ, որի համար $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$:

Վերջին բանաձևը հաճախ օգտագործվում է

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\,,\quad (0<\theta<1)\,,$$

եթե x և $x+\Delta x\in(a;b)$ տեսքով և կոչվում է Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձև:

Յետևանք: Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է $[x_0;x_0+H]$, $([x_0-H;x_0],H>0)$, միջակայքում և ունի վերջավոր ածանցյալ $(x_0;x_0+H)$, $(x_0-H;x_0)$ բաց միջակայքում: Այդ դեպքում, եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)=K\left(\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)=K\right)$ վերջավոր սահմանը, ապա x_0 կետում գոյություն ունի f ֆունկցիայի աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ, որը հավասար է նույն K-ին՝ $f'(x_0+0)=K\left(f'(x_0-0)=K\right)$:

գ) Կոշիի թեորեմը: Եթե f և g ֆունկցիաները անընդհատ են $[a;b]$ հատվածում և դիֆերենցելի են $(a;b)$ բաց միջակայքում, ընդ որում $g'(x)\neq 0$, $x\in(a;b)$, ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$ կետ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}:$$

ա) Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի որևէ շրջակայքում n անգամ դիֆերենցելի է:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

հանրահաշվական բազմանդամը կոչվում է x_0 կետում ֆունկցիայի n-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամ:

Թեյլորի բանաձևը հետևյալն է՝

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

որտեղ $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$-ը կոչվում է մնացորդային անդամ:

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(x_0-\Delta;x_0+\Delta)$ միջակայքում և այդ միջակայքում ունի $(n+1)$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, որտեղ n-ը տրված ոչ բացասական ամբողջ թիվ է, ապա յուրաքանչյուր $x\in(x_0-\Delta;x_0+\Delta)$ կետի համար գոյություն ունի $c\in(x_0;x)$ $\left(c\in(x;x_0)\right)$ կետ այնպիսին, որ $r_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot(x-x_0)^{(n+1)}$: (Մնացորդային անդամի Լագրանժի ներկայացում): Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում n անգամ դիֆերենցելի է, որտեղ n-ը տրված տրված ամբողջ թիվ է, ապա $r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$, (երբ $x\to x_0$) (մնացորդային անդամի Պեանոյի ներկայացում):

Թեյլորի բանաձևն ըստ մնացորդային անդամի ներկայացումների կլինի.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot(x-x_0)^{n+1}, \qquad (1)$$

$$x_0<c<x,\ (x<c<x_0)$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\cdot\left((x-x_0)^n\right), \qquad (2)$$

Երբ $x_o=0$ (2) բանաձևը կընդունի $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}o}{k!}x^k+o\cdot\left((x^n)\right)$ տեսքը. այն կոչվում է Մակլերոնի բանաձև:

բ) Հիմնական տարրական ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերը

1) $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$

2) $\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$

3) $\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$

4) $(1+x)^p=\sum_{k=0}^{n}c_p^k\cdot x^k+o(x^n)$

որտեղ $c_p^k=1$, $c_p^k=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$, $k=1;2;\cdots n$

5) $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^k}{k}+o(x^n)$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիաները իրենց որոշման տիրույթներում անվերջ դիֆերենցելի են: Գտնել այդ ֆունկցիաների n-րդ կարգի (n-ը կամայական բնական թիվ է) ածանցյալների արժեքները $x=0$ կետում:

ա) $f(x)=e^x$, $x\in R$

բ) $f(x)=\sin x$, $x\in R$

գ) $f(x)=\cos x$, $x\in R$

դ) $f(x)=(1+x)^p$, $x>-1$, $p\in R$

ե) $f(x)=\ln(1+x)$, $x>-1$

$\Delta-$ա) $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ...

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտությամբ կարող ենք ապացուցել, որ

$f^{(k)}(x)=e^x$, $k=1;2;\cdots n$, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $n\in N$ ∇

բ) $f(x)=\sin x$, $x\in R$

Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ կարելի է գրել

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

Այսպիսով առաջին կարգի ածանցյալը ստացվում է sin ֆունկցիայից, արգումենտին ավելացնելով $\pi/2$: Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը ցույց տանք, որ $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $k=1;2;\cdots n$ (2)

Իրոք՝ $k=1$-ի դեպքում (2)-ը ճիշտ է: Ենթադրենք այն ճիշտ է որևէ $k\geq 1$ դեպքում և ցույց տանք, որ (2)-ը ճիշտ է հաջորդ՝ $(k+1)$-ի համար:

Ածանցելով $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ հավասարությունը, կունենանք

$$f^{k+1}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

(2)-ը ճիշտ է նաև $(k+1)$-ի համար:

$$f^{n}(0)=\sin\left(0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin n\cdot\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է}\\(-1)^{k-1}, & \text{երբ } n=2k-1,\quad k=1;2;\cdots n\end{cases}\qquad\nabla$$

գ) Տառացիորեն նույն ձևով ցույց կտանք, որ $f(x)=\cos x$ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է իր որոշման տիրույթում և տեղի ունի

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\qquad x\in R,\ k=1;2;\cdots n$$

$$f^{n}(0)=\cos\left(0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է}\\(-1)^{k}, & \text{երբ } n=2k,\quad k=1;2;\cdots n\end{cases}\qquad\nabla$$

դ) $f(x)=(1+x)^{p}$, $x>-1$, $p\in R$

Հաջորդաբար ածանցելով՝ կունենանք.

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1},\ f^{(2)}(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2},$$

$$f^{(3)}(x)=p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3},\ \ldots$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ

$$f^{k}(x)=p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)\cdot(1+x)^{p-k},\ k=1;2;\cdots$$

$$f^{k}(0)=p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1),\ k=1;2;\cdots\qquad\nabla$$

$\Delta-$ե) $f(x)=\ln(1+x)$, $x>-1$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

Հետևավաբար $f^{k}(x)$-ը հավասար է $(1+x)^{-1}$ ֆունկցիայի $(k-1)$ կարգի ածանցյալին:

Օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից՝ կունենանք.

$$f^k(x)=\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdots(-(k-1))}{(1+x)^k}=\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$$f^k(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\ k=1;2;\cdots \qquad \nabla$$

Բերել ֆունկցիայի օրինակ, որը թվային ուղղի բոլոր կետերում, բացի մեկ կետից, խզվող է և այդ կետում ունի ածանցյալ.

$$\Delta-\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է,}\\ x^2, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է:}\end{cases}$$

Թվային ուղղի ցանկացած $x_0\neq 0$ կետում ֆունկցիան խզվող է; Իրոք, վերցնենք կամայական $\{x_n\}$ հաջորդականություն, որը ձգտում է x_0-ին:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$, եթե $\{x_n\}$-ը կազմված է միայն իռացիոնալ կետերից և $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=x_0^2\neq 0$, եթե $\{x_n\}$-ը կազմված է միայն ռացիոնալ կետերից: Ֆունկցիան x_0 կետում սահման չունի:

$x_0=0$ կետում ֆունկցիան անընդհատ է: Իրոք ինչպիսին էլ լինի $\{x_n\}$ հաջորդականությունը, որը ձգտում է 0-ի $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$ և $f(0)=0$: Ցույց տանք, որ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում ունի ածանցյալ:

Ունենք

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\begin{cases}\Delta x^2, & \text{եթե } \Delta x\text{-ը ռացիոնալ է,}\\ 0, & \text{եթե } \Delta x\text{-ը իռացիոնալ է:}\end{cases}$$

Ուստի $0\le\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\le\left|\frac{\Delta x^2}{\Delta x}\right|\le|\Delta x|$, որտեղից (ըստ հայտնի թեորեմի) կհետևի

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

Ապացուցել, որ թվային ուղղի վրա որոշված դիֆերենցելի զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ ֆունկցիա է:

$\Delta-$Ունենք $f(x)=f(-x)$, $x\in R$: Ցույց տանք, որ $f'(x)=-f'(-x)$, $x\in R$:

Իրոք՝ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=-f'(-x):$$

Նույն արդյունքը կարելի է ստանալ, ածանցելով $f(x)=f(-x)$, $x\in R$ նույնությունը՝ դիտարկելով $f(-x)$-ը որպես բարդ ֆունկցիա: ∇

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x)$:

Ապացուցել, որ գոյություն ունի առնվազն մեկ $c\in(a;b)$ կետ այնպիսին, որ $f'(c)=0$:

Δ – Նշանակենք՝ $A=\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)$ և դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝ $F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{եթե } x\in(a;b), \\ A, & \text{եթե } x=a \text{ և } x=b: \end{cases}$

Դեշտ է տեսնել, որ $F(x)$-ը $[a;b]$ հատվածում բավարարում է Ռոլլի թեորեմի բոլոր երեք պայմաններին՝

1) $F(x)$-ը անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում
2) $\exists F'(x)$-ը $F'(x)=f'(x)$, $x\in(a;b)$
3) $F(a)=F(b)=A$

Դետևավաբար ըստ այդ թեորեմի՝ գոյություն ունի առնվազն մեկ $c\in(a;b)$ կետ այնպիսին, որ $F'(c)=0$: Սակայն $F'(c)=f'(c)$:

Դետևաբար՝ $f'(c)=0$ ∇

Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է $[a;b]$ հատվածում և այդ հատվածին պատկանող $(n+1)$ հատ կետերում հավասարվում է 0-ի, ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$ կետ այնպիսին, որ $f^{(n)}(c)=0$:

Δ – Կետերը, որոնցում $f(x)$-ը հավասար է 0-ի նշանակենք $\{x_k\}$-ով, $k=1;2;\cdots n$ և դասավորենք աճման կարգով՝

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n, \qquad f(x_k)=0,\ k=0;1;2;\cdots n$$

Այդ կետերով կառաջանան n հատ հատվածներ՝ $[x_{k-1};x_k]$, $k=1;2;\cdots n$:

Յուրաքանչյուր $[x_{k-1};x_k]$, $k=1;2;\cdots n$ հատվածում $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմի բոլոր երեք պայմաններին; Դետևավաբար՝ գոյություն կունենան $c_1^{(1)};c_2^{(1)};\cdots;c_n^{(1)}$ կետեր այնպիսին, որ $f'\left(c_k^{(1)}\right)=0$, $k=1;2;\cdots n$:

Այդ կետերով կառաջանան $(n-1)$ հատ՝ $\left[c_{k-1}^{(1)};c_k^{(1)}\right]$, $\left(k=1;2;\cdots(n-1)\right)$ հատվածներ, որոնցից յուրաքանչյուրում $f'(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմի բոլոր երեք պայմաններին:

Հետևաբար՝ գոյություն կունենան $c_1^{(2)};c_2^{(2)};\cdots;c_{n-1}^{(2)}$ կետեր այնպիսին, որ $f^2\left(c_k^{(2)}\right)=0$, $k=1;2;\cdots n-1$:

Եվ այսպես շարունակ: $(n-1)$-րդ քայլում կգտնենք $n-(n-2)$ կետեր՝ $c_1^{(n-1)}$ և $c_2^{(n-1)}$ այնպիսին, որ $f^{(n-1)}\left(c_1^{(n-1)}\right)=f^{(n-1)}\left(c_2^{(n-1)}\right)=0$:

Կիրառելով $\left[c_1^{(n-1)};c_2^{(n-1)}\right]$ հատվածում $f^{(n-1)}(x)$ ֆունկցիայի համար Ռոլլի թեորեմը՝ կգտնենք c կետ, $\left(c\in\left(c_1^{(n-1)};c_2^{(n-1)}\right)\subset(a;b)\right)$, այնպիսին, որ $f^{(n)}(c)=0$

Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում $f'(x)\equiv g'(x)$ ապա այդ միջակայքում f և g ֆունկցիաների տարբերությունը հաստատուն է:

Δ – Դիտարկենք $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, $x\in(a;b)$ օժանդակ ֆունկցիան: Ունենք՝ $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv 0$, $x\in(a;b)$:

Վերցնենք որևէ $x_0\in(a;b)$ կետ և հաստատագրենք: Թող x-ը լինի կամայական կետ $(a;b)$ միջակայքից: x_0 և x ծայրակետեր ունեցող հատվածում կիրառելով Լագրանժի թեորեմը $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար, կստանանք՝

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(c)(x-x_0)$$

որտեղ c-ն ընկած է $(x_0;x)$ $\left((x;x_0)\right)$ ինտերվալում: Քանի որ $c\in(a;b)$, ապա $\varphi'(c)=0$ և հետևաբար $\varphi(x)-\varphi(x_0)=0$

Որտեղից կհետևի, որ $\forall x\in(a;b)$-ի համար $\varphi(x)=\varphi(x_0)$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\varphi(x)\equiv C$, $x\in(a;b)$:

$$f(x)-g(x)\equiv C\Rightarrow f(x)=g(x)+C,\ x\in(a;b) \qquad \nabla$$

Գտնել $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները $x_0=1$ կետում:

Δ – ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային ուղղի վրա

$$\left(|2x|\le 1+x^2,\ x\in R\right):$$

Հաշվենք $f'(x)$-ը $x\neq\pm1$ կետերում:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$$

Հետևաբար՝ $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & \text{երբ } |x|<1,\\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{երբ } |x|>1 :\end{cases}$

Օգտվելով 9 կետի հետևանքից՝ կունենանք.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0} f'(x)=\lim_{x\to 1+0} -\frac{2}{1+x^2}=-1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0} f'(x)=\lim_{x\to 1-0} \frac{2}{1+x^2}=1 \qquad \nabla$$

11. ԼՈՊԻՏԱԼԻ ԿԱՆՈՆԸ

Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված և դիֆերենցելի են $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ կամ

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty \text{ և } g'(x)\neq 0,\ x\in(a;b)):$$

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (վերջավոր $-\infty$ կամ $+\infty$) սահմանը, ապա $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$:

12. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄՈՆՈՏՈՆՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված և դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում:

ա) Որպեսզի f ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում լինի հաստատուն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x)\equiv 0$, $x\in(a;b)$:

բ) Որպեսզի f ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում լինի չնվազող (չաճող) անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x)\geq 0$, $(f'(x)\leq 0)$, $x\in(a;b)$:

Խիստ մոնոտոն լինելու բավարար պայմանը:

Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում և դիֆերենցելի է $(a;b)$ ինտերվալում: Որպեսզի f-ը $[a;b]$-ում լինի խիստ աճող (խիստ նվազող) բավարար է $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, բոլոր $x\in(a;b)$ կետերում, բացի վերջավոր թվով կետերից:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ հաշվել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-3\operatorname{tg}x}{\sin 3x-3\sin x}$

$$\Delta-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x-3\operatorname{tg}x}{\sin 3x-3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{\cos^2 3x}-\dfrac{3}{\cos^2 x}}{3\cos 3x-3\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 3x)(\cos x+\cos 3x)}{(\cos 3x-\cos x)\cdot\cos^2 3x\cdot\cos^2 x}=-2 \qquad \nabla$$

բ) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg}x}$

$\Delta -$ Ունենք ∞/∞ տեսքի անորոշություն

$$\Delta-\lim_{x\to +0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)\cos x}{1-\cos x}=2 \qquad \nabla$$

Բացի $0/0$ և ∞/∞ տեսքի անորոշություններից, հաճախ հանդիպում են նաև հետևյալ տեսքի անորոշություններ $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0: Բոլոր այս տեսքի անորոշությունները հանրահաշվական ձևափոխությունների միջոցով բերվում են արդեն ուսումնասիրված $0/0$ և ∞/∞ տեսքի անորոշություններին:

Օրինակ՝ ենթադրենք $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, այդ դեպքում $f(x)\cdot g(x)$ արտադրյալը կարելի է ներկայացնել կամ $\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$, կամ $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ (եթե $f(x)\neq 0$, $x\in \dot{U}_\Delta(a)$) տեսքով, որոնք իրենցից ներկայացնում են $\dfrac{0}{0}$ և $\dfrac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություններ:

Օրինակ՝ հաշվենք $\lim\limits_{x\to +0}x^p\cdot\ln x$, $(p>0)$ սահմանը:

$$\lim_{x\to +0}x^p\cdot\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^p}}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{p}{x^{p+1}}}=-\frac{1}{p}\lim_{x\to +0}x^p=0$$

Ենթադրենք և $f(x)$, և $g(x)$ ֆունկցիաները, երբ x-ը ձգտում է a-ին, ձգտում են միևնույն նշանի անվերջության:

Այդ դեպքում $f(x)-g(x)$-ը, երբ $x \to a$-ին իրենից ներկայացնում է $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն:

Այսպիսի դեպքերում հարմար է կատարել հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

որն իրենից ներկայացնում է $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն:

Օրինակ՝ հաշվել $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$ սահմանը

$$\Delta - \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x\cos x)(\sin x + x\cos x)}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x\cos x)\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)}{x\cdot\sin^2 x}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x + x\sin x}{\sin^2 x + 2x\cdot\sin x\cdot\cos x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x + 2x\cos x}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=\frac{2}{3} \qquad \nabla$$

0^0, 1^∞, ∞^0 անորոշությունները ուսումնասիրելիս հարկավոր է օգտվել հետևյալ նույնությունից $\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$:

Օրինակներ՝ հաշվել սահմանները.

ա) $\lim\limits_{x\to +0} x^x$

բ) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\cos(x-2)\right)^{\frac{1}{(x-2)^2}}$

գ) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}$

$$\Delta - \text{ա)}\ \lim_{x\to +0} x^x=\lim_{x\to +0} e^{x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to +0} x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to +0}(-x)}=1 \qquad \nabla$$

$$\Delta - բ)\ \lim_{x\to 2}\left(\cos(x-2)\right)^{\frac{1}{(x-2)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(\cos(x-2))}{(x-2)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-\mathrm{tg}(x-2)}{2(x-2)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \nabla$$

$$\Delta - գ)\ \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2}{x-1}\right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)\cdot\ln\frac{2}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln\frac{2}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{-\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)} = 1 \ \nabla$$

Ապացուցել նույնությունը

ա) $2\,\mathrm{arctg}\,x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi\cdot\mathrm{sgn}\,x\,,\qquad |x|\ge 1$

բ) $3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = \pi\,,\qquad 0\le x\le\dfrac{1}{2}$

$\Delta -$ ա) Նշանակենք՝ $f(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\,,\qquad |x|\ge 1$

Հաշվենք $f'(x)$-ը $|x|>1$ x-երի համար

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|\cdot(1+x^2)}\equiv 0\,,|x|>1$$

Հետևաբար ըստ ֆունկցիայի հաստատունության բավարար պայմանի՝

$$f(x)=\begin{cases} c_1, & \text{երբ } x\ge 1\\ c_2, & \text{երբ } x\le -1\end{cases}$$

Հաշվենք $f(-1)$-ը և $f(1)$-ը.

$$f(-1) = 2\,\mathrm{arctg}(-1) + \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$f(1) = 2\,\mathrm{arctg}(1) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

Հետևաբար՝ $2\,\mathrm{arctg}\,x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi\cdot\mathrm{sgn}\,x\,,\qquad |x|\ge 1 \qquad \nabla$

$\Delta -$ բ) Նշանակենք՝ $f(x) = 3\arccos x - \arccos(3x-4x^3)\,,\qquad 0\le x\le\dfrac{1}{2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\,,\qquad 0\le x<\frac{1}{2}$$

Ունենք՝

$$1-(3x-4x^3)^2 = 1-9x^2+24x^4-16x^6 = 1-x^2-8x^2+8x^4+$$
$$+16x^4-16x^6 = (1-x^2)(1-4x^2)^2$$

Հետևաբար՝

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{|1-4x^2|\sqrt{1-x^2}}=0, \qquad 0\le x<\frac{1}{2}$$

Ըստ հաստատունության պայմանի՝

$$f(x)\equiv C, \qquad x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$$

Հաշվելով $f(0)$-ն կստանանք

$$f(0)=3\cdot\arccos 0-\arccos 0=\pi$$

$$3\cdot\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi, \quad 0\le x\le\frac{1}{2}$$ ∇

Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$, $\qquad x>0$

բ) $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x$, $\qquad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$

գ) $2x^3-44<3x^2+36x<2x^3+81$, $\qquad x\in(-2;3)$

Δ – ա) Դիտարկենք $\varphi(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$, $x\in[0;+\infty)$ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է $[0;+\infty)$ միջակայքում, ունի ածանցյալ $(0;+\infty)$ միջակայքում

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0, \qquad x\in(0;+\infty)$$

Հետևաբար, ըստ մոնոտոնության բավարար պայմանի, $\varphi(x)$-ը խիստ աճող է $[0;+\infty)$ միջակայքում, որտեղից կհետևի $\varphi(x)>\varphi(0)=0$, երբ $x>0$:

Δ – բ) Դիտարկենք $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{երբ } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \text{երբ } x=0\end{cases}$ ֆունկցիան:

Այն անընդհատ է $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ հատվածում: Ունի ածանցյալ $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ինտերվալում՝

$$f'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^2}, \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Քանի որ $\cos x > 0$ և $x < \operatorname{tg} x$, երբ x-ը պատկանում է $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$-ին, ապա $f'(x) < 0$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

Հետևաբար, ըստ մոնոտոնության բավարար պայմանի, $f(x)$-ը խիստ նվազող է $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում և հետևաբար՝ $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ կամ $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ որտեղից կհետևի $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

Քանի որ $x = 0$ և $x = \frac{\pi}{2}$ կետերում անհավասարությունը վերածվում է հավասարության, ապա վերջնականապես կարող ենք գրել

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, \quad x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \nabla$$

Δ – գ) Դիտարկենք $f(x) = 3x^2 + 36x - 2x^3$ ֆունկցիան $[-2;3]$ հատվածում: Այն անընդհատ է այդ հատվածում, ունի ածանցյալ $(-2;3)$ ինտերվալում՝

$$f'(x) = 6x + 36 - 6x^2 = -6(x^2 - x - 6), \qquad x \in (-2;3)$$

Քանի որ $x_1 = -2$ և $x_2 = 3$ կետերը $x^2 - x - 6$ եռանդամի արմատներն են և ավագ անդամի գործակիցը բացասական է, ապա $f'(x) > 0$, $x \in (-2;3)$:

Հետևաբար, ըստ մոնոտոնության բավարար պայմանի, $f(x)$-ը խիստ աճող է $[-2;3]$ հատվածում: Իսկ դա նշանակում է $f(-2) < f(x) < f(3)$, $x \in (-2;3)$:

Սակայն՝ $f(-2) = 12 - 72 + 16 = -44$, $f(3) = 27 + 108 - 54 = 81$:

Ստացվեց՝ $-44 < 3x^2 + 36x - 2x^3 < 81$, $x \in (-2;3)$:

Այն ինչ պետք է ապացուցեինք $\qquad \nabla$

Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց համար ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային ուղղի վրա:

$$y = ax + 3\sin x + 4\cos x$$

$$\Delta - \ y' = a + 3\cos x - 4\sin x = a + 5\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right) = a + 5\cos(x + \varphi),$$

որտեղ $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$: Ֆունկցիան կլինի աճող ամբողջ թվային ուղղի վրա, եթե $a+5\cos x(x+\varphi)\geq 0$, $x\in R$, կամ որ նույնն է, եթե $\cos(x+\varphi)\geq -\frac{a}{5}$, $x\in R$:

Իսկ այս անհավասարությունը տեղի կունենա բոլոր x-երի համար, եթե $-\frac{a}{5}\leq -1$, որը համարժեք է $a\geq 5$ անհավասարությանը: Կոնկրետ այս խնդրում հավասարության նշանը կարելի է թույլ տալ, որովհետև $a=5$-ի համար $\cos(x+\varphi)=-1$ հավասարությունը տեղի ունի $x_k+\varphi=\pi+2\pi k$, $k\in Z$ կետերում, որոնք չեն ազդում խիստ մոնոտոնության վրա:

Պատ՝. $a\geq 5$

Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում

$$f(x)=(a^2+4)\operatorname{tg}x+3a\cos x+ax-2$$

ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է:

$\Delta-$Ցամոզվենք, որ $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ և $\forall a\in R$-ի համար.

$$f'(x)=(a^2+4)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-3a\sin x+a=(a^2+4)(1+\operatorname{tg}^2 x)-3a\sin x+a\geq$$

$$\geq a^2+4-3|a|-|a|=\left(|a|-2\right)^2\geq 0,\qquad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

Ընդ որում հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ $a=-2$ և $a=2$ արժեքների համար անհավասարության ձախ մասը բոլոր $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-ի համար դրական է:

$f'(x)>0$ պայմանից հետևում է, որ $f(x)$-ը աճող է $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում:

Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում

$$f(x)=2(x-a-1)e^x-(x^2-2ax)e^a$$

ֆունկցիան ամբողջ թվային ուղղի վրա աճող է:

$$\Delta-f'(x)=2\left[e^x+(x-a-1)e^x\right]-2(x-a)e^a=2(x-a)(e^x-e^a)$$

Քանի որ e^x ֆունկցիան աճող ֆունկցիա է, ապա $f'(x) \geq 0$, $x \in R$: Ընդ որում $f'(x)$-ը միայն $x=a$ կետում է 0, մնացած բոլոր կետերում $f'(x)>0$: Իրոք, դիցուք a-ն կամայական կետ է:

Ածանցյալի արտահայտությունից հետևում է, որ $f'(x)>0$ ինչպես $x>a$, այնպես էլ $x<a$-ի համար: $x=a$ կետում ածանցյալը հավասար է 0-ի, որը չի խանգարի որպեսզի ֆունկցիան ամբողջ թվային ուղղի վրա լինի խիստ աճող: Իրոք՝ $f'(x)>0$, $x\in(-\infty;a)$ պայմանից կհետևի $f(x)$-ի խիստ աճող լինելը $(-\infty;a]$ միջակայքում: Նույն ձևով $f'(x)>0$, $x\in(a;+\infty)$ պայմանից կհետևի $f(x)$-ի խիստ աճող լինելը $[a;+\infty)$ միջակայքում: Քանի որ $(-\infty;a]$ և $[a;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան աճող է, ապա այն աճող կլինի ամբողջ թվային ուղղի վրա:

13. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԵՎ ԳՈԳԱՎՈՐ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

X միջակայքում որոշված և անընդհատ f ֆունկցիան կոչվում է ուռուցիկ, կամ ներքևից ուռուցիկ (գոգավոր կամ վերևից ուռուցիկ), եթե կամայական x_1 և x_2 կետերի համար x միջակայքից և կամայական q_1 և q_2 ոչ բացասական թվերի համար, որոնց գումարը հավասար է 1-ի, տեղի ունի

$f(q_1x_1+q_2x_2) \leq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$, $\left(f(q_1x_1+q_2x_2) \geq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)\right)$ (1)

անհավասարությունը: Եթե (1)-ում $x_1 \neq x_2$ $q_1>0$, $q_2>0$ և անհավասարությունը խիստ է, ապա f-ը կոչվում է խիստ ուռուցիկ (խիստ գոգավոր):

ա) Որպեսզի x միջակայքում դիֆերենցելի f ֆունկցիան լինի ուռուցիկ (գոգավոր), անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ միջակայքում $f'(x)$ ֆունկցիան լինի չնվազող (չաճող):

բ) Որպեսզի x միջակայքում որոշված և երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիան լինի ուռուցիկ (գոգավոր), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f''(x)\geq 0$, $\left(f''(x)\leq 0\right)$, $x\in X$:

14. ՇՐՋՄԱՆ ԿԵՏ

ա) Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է x_0 կետի $(x_0-\Delta;x_0+\Delta)$ շրջակայքում: Եթե $(x_0-\Delta;x_0)$ և $(x_0;x_0+\Delta)$ միջակայքերից մեկում f ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, իսկ մյուսում՝ խիստ գոգավոր, ապա x_0-ն անվանում են շրջման կետ:

բ) Եթե x_0 շրջման կետում f-ը կրկնակի դիֆերենցելի է, ապա $f''(x_0)=0$:

գ) Եթե f-ը կրկնակի դիֆերենցելի է $(x_0-\Delta;x_0+\Delta)$ միջակայքում, $(x_0-\Delta;x_0)$ և $(x_0;x_0+\Delta)$ միջակայքերում $f''(x_0)$-ը ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա x_0 շրջման կետ է:

դ) Եթե x_0 կետում f-ն ունի երրորդ կարգի ածանցյալ, ընդ որում $f''(x_0)=0$ և $f'''(x_0)\neq 0$, ապա x_0 շրջման կետ է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Գտնել ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը

ա) $y=x^a$, $\qquad a>1$, $x>0$

բ) $y=x\cdot\ln x$, $\qquad x>0$

$\Delta-$ա) Հաշվենք y''-ը

$$y'=a\cdot x^{a-1},\ y''=a\cdot(a-1)x^{a-2}$$

Քանի որ $a>1$, ապա $y''>0$: Հետևաբար $y=x^a$ ֆունկցիան ըստ խիստ ուռուցիկության բավարար պայմանի կլինի խիստ ուռուցիկ $(0;+\infty)$ միջակայքում:

$\Delta-$բ) $y=x\cdot\ln x$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(0;+\infty)$:

$$y'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1,\qquad y''=\frac{1}{x}$$

Հետևաբար $y=x\cdot\ln x$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթում խիստ ուռուցիկ է:

Ապացուցել անհավասարությունը

ա) $\frac{1}{2}(x^a+y^a)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^a$, $\qquad (x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ a>1)$

բ) $x\cdot\ln x+y\cdot\ln y>(x+y)\cdot\ln\frac{x+y}{2}$, $\qquad (x>0, y>0, x\neq y)$

$\Delta-$ա) Դիտարկենք $z=t^a$ $(t>0,\ a>1)$

Քանի որ այն խիստ ուռուցիկ է $(0;+\infty)$ միջակայքում, ապա ուռուցիկության պայմանում վերցնելով $q_1=q_2=\frac{1}{2}$ $(0;+\infty)$ միջակայքին պատկանող կամայական x և y, $x\neq y$ կետերի համար կունենանք

$$\frac{1}{2}(x^a+y^a)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^a \qquad \nabla$$

Δ – բ) Դիտարկենք $z=t\cdot\ln t$ $(t>0)$ ֆունկցիան: Քանի որ այն ուռուցիկ է $(0;+\infty)$ միջակայքում, ապա ուռուցիկության պայմանում վերցնելով $q_1=q_2=1/2$, $(0;+\infty)$ միջակայքի կամայական x և y կետերի համար $(x\neq y)$ կունենանք.

$$\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

որտեղից՝ $x\ln x+y\ln y>(x+y)\cdot\ln\frac{x+y}{2}$ ∇

a **պարամետրի ո՞ր արժեքների համար**

$$f(x)=\frac{a^2-1}{12}x^4+\frac{a}{3}x^3+x^2+x+1$$

ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ ամբողջ թվային ուղղի վրա:

Δ – Հաշվենք $f''(x)$-ը

$$f''(x)=(a^2-1)x^2+2ax+2$$

Հնարավոր է երկու դեպք:

1. $a^2-1=0\Leftrightarrow a_1=1,\ a_2=-1$: Այդպիսի a-երի համար $f''(x)=2x+2$, $f''(x)=-2x+2$:

Երկու դեպքում էլ խնդրի պահանջը չի կարող կատարվել, որովհետև $f''(x)$-ը չի կարող մեծ կամ հավասար լինել 0-ից բոլոր x-երի համար թվային ուղղից:

2. $a^2-1\neq 0$: Այդ դեպքում f-ը կլինի ուռուցիկ ամբողջ թվային ուղղի վրա, եթե a-երը բավարարեն հետևյալ պայմանին

$$\begin{cases}a^2-1>0\\ D\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-1>0\\ a^2-2a^2+2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow |a|\ge\sqrt{2} \qquad \nabla$$

15. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

ա) $x_0\in(a;b)$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի x_0 կետի $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ շրջակայք այնպիսին, որ $f(x)\ge f(x_0)$, $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$:

Եթե այս անհավասարությունը խիստ է, երբ $x \neq x_0$, ապա x_0-ն անվանում են խիստ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ: Լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերը միասին կոչվում են ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետեր:

բ) Ֆերմայի թեորեմը (էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)

Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ է և այդ կետում f-ն ունի ածանցյալ, ապա $f'(x_0)=0$:

Դիցուք f-ը որոշված է $[a;b]$ հատվածում: $x_0 \in [a;b]$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ, եթե $f'(x_0)=0$, կամ f-ը այդ կետում չունի ածանցյալ: $x_0 \in (a;b)$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի ստացիոնար կետ, եթե $f'(x_0)=0$:

գ) էքստրեմումի բավարար պայմանը:

Դիցուք f-ը x_0 կետի $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ շրջակայքում անընդհատ է և ամենուրեք (բացի գուցե x_0 կետից) ունի վերջավոր ածանցյալ: Եթե $f'(x)>0$, $x\in(x_0-\delta;x_0)$ և $f'(x)<0$, $x\in(x_0;x_0+\delta)$, ապա x_0-ն խիստ մաքսիմումի կետ է: Եթե $f'(x)<0$, $x\in(x_0-\delta;x_0)$ և $f'(x)>0$, $x\in(x_0;x_0+\delta)$, ապա x_0-ն խիստ մինիմումի կետ է:

դ) Դիցուք f-ը x_0 կետի $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ շրջակայքում կրկնակի դիֆերենցելի է, ընդ որում $f'(x_0)=0$: Եթե $f''(x_0)>0$, ապա x_0-ն խիստ մինիմումի կետ է, եթե $f''(x_0)<0$, ապա x_0-ն խիստ մաքսիմումի կետ է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և պարզել՝ էքստրեմումի կետեր են դրանք, թե ոչ

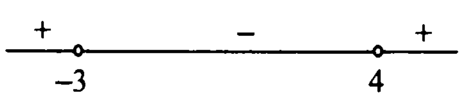
ա) $f(x)=2x^3-3x^2-72x+5$

բ) $f(x)=|3x-4|$

գ) $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\le 2\\ 5x-2, & x>2\end{cases}$

$\Delta -$ ա) $f'(x)=6x^2-6x-72=6(x^2-x-12)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-12=0$, $\quad x_1=-3$; $x_2=4$



$x_1=-3$; $x_2=4$ կետերը կրիտիկական կետ են:

Քանի որ ածանցյալը -3 կետի վրայով անցնելիս փոխում է նշանը «+»-ից «–», ապա $x_1 = -3$ կետը խիստ լոկալ մաքսիմումի կետ է: Նույն ձևով կհամոզվենք $x_2 = 4$ կետը խիստ լոկալ մինիմումի կետ է:

Δ – բ) Քանի որ $f(x) > 0$, երբ $x \neq \dfrac{4}{3}$ և $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 0$, ապա $x_0 = \dfrac{4}{3}$ խիստ լոկալ մինիմումի կետ է: Նկատենք, որ այդ կետում ֆունկցիան ածանցյալ չունի:

$$\left(f'_-\left(\frac{4}{3}\right) = -3,\ f'_+\left(\frac{4}{3}\right) = 3\right) \qquad \nabla$$

Δ – գ) Ֆունկցիան $x_0 = 2$ կետում անընդհատ է, սակայն ածանցյալ չունի՝ $f'_-(2) = 3$, $f'_+(2) = 5$: Քանի որ $3x+2$ և $5x-2$ ֆունկցիաները աճող ֆունկցիաներ են, ապա $x_0 = 2$ կետը լոկալ էքստրեմումի կետ չէ:

Վերջին երկու օրինակները ասում են այն մասին, որ ֆունկցիան կարող է կետում ածանցյալ չունենալ, սակայն այդ կետը կարող է ինչպես լինել, այնպես էլ չլինել էքստրեմումի կետ:

Գտնել a պարամետրի այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում $f(x) = 2x^4 + 2ax^3 + 9x^2 - a$ ֆունկցիան կունենա ճիշտ մեկ կրիտիկական կետ:

Δ – Հաշվենք ածանցյալը

$$f'(x) = 8x^3 + 6ax^2 + 18x = 2x(4x^2 + 3ax + 9), \qquad x \in R$$

$x = 0$ կետը ֆունկցիայի համար կրիտիկական կետ է $(f'(0) = 0)$: Քանի որ այն պետք է լինի միակը, ապա $4x^2 + 3ax + 9$ եռանդամը պետք է արմատներ չունենա, այսինքն՝

$$D = 9a^2 - 9 \cdot 16 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow |a| < 4 \qquad \nabla$$

Ցույց տալ, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում

$$f(x) = 2x^3 - 3(2a+1)x^2 + 6a(a+1)x - 2a^3$$

ֆունկցիան ունի ճիշտ երկու կրիտիկական կետեր, որոնք էքստրեմումի կետեր են: Պարզել, թե դրանցից ո՞րն է մաքսիմումի կետը և ո՞րը մինիմումի:

Δ – Հաշվենք $f'(x)$-ը:

$$f'(x) = 6x^2 - 6(2a+1)x + 6a(a+1) = 6(x^2 - (2a+1)x + a(a+1))$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a(a+1) = 0$$

Քանի որ $D=(2a+1)^2-4a(a+1)=4a^2+4a+1-4a^2-4a=1$ ցանկացած a-ի համար, ապա f ֆունկցիան ցանկացած a-ի համար ունի ճիշտ երկու կրիտիկական կետեր, ընդ որում՝ $x_1=a$ և $x_2=a+1$:

Քանի որ ցանկացած a-ի դեպքում $a+1>a$ և ածանցյալը a-ի և $a+1$ կետի վրայով անցնելիս իր նշանը փոխում է համապատասխանաբար պլյուսից մինուս և մինուսից պլյուս, ապա ըստ էքստրեմումի գոյության առաջին բավարար պայմանի $x_1=a$ կետը լոկալ մաքսիմումի կետ է, $x_2=a+1$ կետը լոկալ մինիմումի կետ է: ∇

16. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ

Դիցուք f-ը անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում և դիֆերենցելի $(a;b)$ ինտերվալի բոլոր կետերում, բացի վերջավոր քանակությամբ կետերից: Այդ դեպքում այն, ըստ Վայերշտրասի թեորեմի, այդ հատվածում ընդունում է իր փոքրագույն և մեծագույն արժեքները: Այդ արժեքները ստանալու համար բավական է գտնել f ֆունկցիայի բոլոր կրիտիկական կետերը, որոնք պատկանում են $[a;b]$ հատվածին, հաշվել ֆունկցիայի արժեքներն այդ կետերում, ինչպես նաև a և b կետերում, և ընտրել այդ արժեքներից ամենափոքրը և ամենամեծը: Ենթադրվում է, որ $[a;b]$ հատվածին պատկանող կրիտիկական կետերի քանակը վերջավոր է:

Գործնական խնդիրներում, երբ պահանջվում է գտնել ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները հատվածում կամ $(a;b)$ ինտերվալում, հաճախ հանդիպում են դեպքեր, երբ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$-ում և դիֆերենցելի է $(a;b)$-ում, իսկ $f'(x)=0$ հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ՝ $x_0\in(a;b)$ այնպիսին, որ $(a;x_0)$ և $(x_0;b)$ միջակայքերում ածանցյալն ունի տարբեր նշաններ: Այդպիսի դեպքերում $f(x_0)$ արժեքը կհանդիսանա ոչ միայն լոկալ էքստրեմում արժեք, այլև ֆունկցիայի ամենամեծ (ամենափոքր) արժեք $[a;b]$ հատվածում կամ $(a;b)$ ինտերվալում:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները տրված միջակայքում

ա) $f(x)=(3-x^2)e^x$, $\quad x\in\left[-4;\sqrt{3}\right]$

բ) $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos x$, $\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

ա) Δ – Ֆունկցիան դիֆերենցելի է $\left(-4;\sqrt{3}\right)$ միջակայքի բոլոր կետերում, հետևաբար նրա բոլոր էքստրեմումի կետերը ընկած են ստացիոնար կետերի բազմության մեջ: Գտնենք ստացիոնար կետերը և նրանցից վերցնենք այն կետերը, որոնք պատկանում են $\left[-4;\sqrt{3}\right]$ հատվածին:

$f'(x)=e^x(3-x^2)-2xe^x=-e^x(x^2+2x-3)$

$f'(x)=0$, $e^x\neq 0$, $x^2+2x-3=0$, $x_1=-3$, $x_2=1$

x_1 և x_2 կետերը պատկանում են $\left[-4;\sqrt{3}\right]$ հատվածին:

$f(-4)=-13\cdot e^{-4}$, $\qquad f(-3)=-6\cdot e^{-3}$

$f(1)=2e$, $\qquad f(\sqrt{3})=0$

բաղդատելով $-13e^{-4}$ և $-6e^{-3}$ թվերը, հեշտությամբ կհամոզվենք, որ $-6e^{-3}<-13e^{-4}$: Հետևաբար $f_{\text{փոքր}}=-6e^{-3}$, $f_{\text{մեծ}}=2e$ $\qquad\nabla$

բ) Δ – ունենք

$$f(x)=\sin^3 x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin^2 x\cdot\sin 2x=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)\sin 2x=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)=\sin x\cdot\sin 3x$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0\text{, կամ }\sin 3x=0:$$

Ստացիոնար կետերից միայն $x_0=\frac{\pi}{3}$ կետն է պատկանում $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքին: $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Հետևաբար $f_{\text{փոքր}}=0$, $f_{\text{մեծ}}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ $\qquad\nabla$

Գտնել հաջորդականության մեծագույն անդամը՝

$x_n=\frac{n^2}{n^3+200}$, $\qquad n=1;2;\cdots$

Δ – Դիտարկենք $[0;+\infty)$ միջակայքում $f(x)=\frac{x^2}{x^3+200}$ ֆունկցիան:

Դժվար չէ տեսնել, որ $f(n)=x_n$, $n=1;2;\cdots$: Հետազոտենք $f(x)$ ֆունկցիան էքստրեմումի տեսանկյունից:

$$f'(x)=\frac{2x(x^3+200)-3x^4}{(x^3+200)^2}=-\frac{x(x^3-400)}{(x^3+200)^2}$$

Միակ ստացիոնար կետը, որը պատկանում է $(0;+\infty)$ միջակայքին, դա $x_0=\sqrt[3]{400}$ կետն է, ընդ որում $f'(x)>0$, երբ $x<x_0$, $f'(x)<0$ երբ $x>x_0$: Քանի որ $\left[0;\sqrt[3]{400}\right]$ միջակայքում $f(x)$-ը խիստ աճող է, իսկ $\left[\sqrt[3]{400};\ +\infty\right)$ միջակայքում խիստ նվազող, ապա $\sqrt[3]{400}$ կետում ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը: Քանի որ $f(n)=x_n$-ի, ապա հաջորդականության մեծագույն անդամը հարկավոր է փնտրել այն n բնական թվերի մեջ, որոնք ձախից և աջից ամենամոտն են $\sqrt[3]{400}$ թվին: Իսկ դրանք $n=7$ և $n=8$ թվերն են $x_7=\dfrac{49}{543}$, $x_8=\dfrac{64}{712}$:

Բաղդատելով այդ երկու թվերը, կստանանք, որ հաջորդականության ամենամեծ անդամը x_7-ն է:

Ելնելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը x_0 կետում

975. $y=x^2-5x+6$, $x_0=-1$

976. $y=\sqrt{x^2-3x+2}$, $x_0=3$

977. $y=\sqrt{x^2-3x+7}$, $x_0=6$

978. $y=\sqrt[3]{9x+10}$, $x_0=6$

979. $y=\sqrt[3]{x^2+x-3}$, $x_0=-2$

980. $y=\sin(2x+3)$, $x_0=-2$

981. $y=\cos(2x+1)$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$

982. $y=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

983. $y=\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $x_0=-\dfrac{\pi}{12}$

984. $y=\operatorname{tg}(x^2+2x)$, $x_0=-1$

985. $y=\sin^2 x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$

986. $y=\cos^2 x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

987. $y=\operatorname{tg}^2 4x$, $x_0=\dfrac{\pi}{16}$

988. $y=\sin\sqrt{x^2+5}$, $x_0=2$

989. $y=\dfrac{3x+5}{5x-3}$, $x_0=1$

990. $y=\dfrac{4-3x}{2x+9}$, $x_0=-2$

991. $y=\dfrac{8}{x^3}$, $x_0=3$

992. $y=\dfrac{5}{x^4}$, $x_0=2$

993. $y=3x^9-2x^7$, $x_0=2$

994. $y=2x^8-5x^4$, $x_0=1$

995. $y=\ln(5x+4)$, $x_0=1$

996. $y=\ln(3x+5)$, $x_0=e$

997. $y=e^{2x-5}$, $x_0=3$

998. $y=e^{x^2}$, $x_0=2$

999. $y=(x-2)|x-2|$, $x_0=2$

1000. $y=e^x\cdot\sin x$, $x_0=1$

1001. $y=4^x\cdot\cos 2x$, $x_0=2$

1002. $y=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$

1003. $y=4^x(x^2+4)$, $x_0=2$

1004. $y=x^2\ln x$, $x_0=e$

1005. $y=x^2\ln(5+7x)$, $x_0=2$

1006. $y=x^2\sin(x^2)$, $x_0=1$

1007. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)=f'(x_0)$$

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե նշված սահմանը գոյություն ունի, ապա $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ածանցելի է:

1008. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան $x=0$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ և $f(0)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$:

1009. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ունեն վերջավոր ածանցյալ $x=0$ կետում և $f(0)=g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$ ապա $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$:

Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները $x=x_0$ կետում չունեն վերջավոր ածանցյալ

1010. $y=\sqrt{x}$, $x_0=0$

1011. $y=|x-1|$, $x_0=1$

1012. $y=\sqrt[3]{x-5}$, $x_0=5$

1013. $y=|\ln x|$, $x_0=1$

1014. $y=\ln|x-2|$, $x_0=3$

1015. $y=|\sin x|$, $x=\pi$

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը

1016. $y=x^3(x^2-1)$

1017. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

1018. $y=\dfrac{2x-3}{3x+4}$

1019. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

1020. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

1021. $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

1022. $y=\dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$

1023. $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$

1024. $y=x\cdot\sin x-x^2\cos x$

1025. $y=x\cdot\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$

1026. $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

1027. $y=\dfrac{x\cdot\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$

1028. $y=e^x(x^2+x-1)$

1029. $y=e^x\cdot\sin x+x\ln x$

1030. $y=\sqrt{2-3x}$

1031. $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$

1032. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

1033. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

1034. $y=\cos^4 4x$

1035. $y=\sin 3x\cdot\cos 5x$

1036. $y=(3-x^2)\sin^3 x$

1037. $y=\sin\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

1038. $y=\operatorname{tg}(x^2+1)+\operatorname{tg}2$

1039. $y=\cos^2\sqrt[3]{x^2-1}$

1040. $y=x^4+2^{x^2}+2^{2^x}$

1041. $y=e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$

1042. $y=\ln(\ln(\ln x))$

1043. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$

1044. $y=e^{\cos x}\cdot\sin x^2$

1045. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

1046. $y=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1047. $y=\arccos\dfrac{1}{x}$

1048. $y=\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)}\right)$

1049. $y=\sin^2(\arcsin 2x)$

1050. $y=\cos^2(2\arccos x^2)$

1051. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1052. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

1053. $y=\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}-\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}$

1054. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

1055. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\cdot\arcsin\dfrac{x}{|a|}$

1056. $y=\sqrt{\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\ln^3 x}}$

1057. $y=x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\operatorname{arctg}e^x$

1058. $y=x^x$

1059. $y=x^{e^x}$

1060. $y=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

1061. $y=(\sin x)^{\cos x}$

$y=f(x)$ ֆունկցիայի մոդուլի լոգարիթմի ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալ՝

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}:$$

Գտնել ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալը

1062. $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1063. $y=\dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$

1064. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$

1065. $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{\alpha_n}$

1066. $y=\left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^{x+1}$

1067. $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

Գտնել ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները x_0 կետում

1068. $y=|x^2+x-6|,\ x_0=-3$

1069. $y=|x^2-x-12|,\ x_0=-3$

1070. $y=|\sin 2x|,\ x_0=\frac{\pi}{2}$

1071. $y=|x^2\cos 2x|,\ x_0=\frac{3}{4}\pi$

1072. $y=|x^2\sin 2x|,\ x_0=2\pi$

1073. $y=(5-x^2)|x+2|,\ x_0=-2$

1074. $y=|\cos 3x|,\ x_0=\frac{\pi}{6}$

1075. $y=(2-x^2)|4+x|,\ x_0=-4$

1076. $y=|2^x-2|,\ x_0=1$

1077. $y=|x\cdot\ln(2x+5)|,\ x_0=-2$

1078. $y=|\ln 4x|,\ x_0=\frac{1}{4}$

1079. $y=|\ln(1-5x)|,\ x_0=0$

1080. $y=\sin x|\cos x|+\cos x|\sin x|,\qquad x_0=\frac{\pi}{2}$

1081. $y=\sin x|\cos 2x|+\cos x|\sin 2x|,\qquad x_0=\frac{\pi}{2}$

1082. $y=\begin{cases}x^2-3x+3, & x\le 1\\ 2-x, & x>1\end{cases},\qquad x_0=1$

1083. $y=\begin{cases}\cos 2(x-3), & x<3\\ x^3-7x-5, & x\ge 3\end{cases},\qquad x_0=3$

1084. $y=\begin{cases}x^3-8x+2, & x<2\\ x^2+5x-20, & x\ge 2\end{cases},\qquad x_0=2$

1085. $y=\begin{cases}4^x, & x\le 2\\ x^2+8x-4, & x>2\end{cases},\qquad x_0=2$

1086. $y=\begin{cases}e^{x-2}, & x\le 2\\ x^2-5x+7, & x>2\end{cases},\qquad x_0=2$

1087. $y=\sqrt{\sin x^2},\qquad x_0=0$

1088. $y=\arccos\frac{1}{x}$, $x_0=-1$, $x_0=1$

1089. $y=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ \sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}, & x\geq 0\end{cases}$, $x_0=0$

1090. $y=\begin{cases}(x-4)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}, & x\neq 4\\ 0, & x=4\end{cases}$, $x_0=4$

1091. $y=\begin{cases}1-x, & x<1\\ (1-x)(2-x), & 1\leq x\leq 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$, ա) $x_0=1$; բ) $x_0=2$

Գտնել $(x_0;f(x_0))$ կետում կորին տարված շոշափողի և նորմալի հավասարումները

1092. $f(x)=\sqrt{5-x^2}$, $x_0=1$

1093. $f(x)=\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, $x_0=0$

1094. $f(x)=\operatorname{arctg}2x$, $x_0=0$

1095. $f(x)=4\operatorname{ctg}x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$

1096. $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$, $x_0=-2$

1097. $f(x)=\cos 2x-2\sin x$, $x_0=\pi$

1098. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x_0=1$

1099. $f(x)=x^2\cdot\arccos\frac{x}{2}$, $x_0=\sqrt{3}$

1100. $f(x)=2^{-x^2}\sin\pi x$, $x_0=1$

1101. $f(x)=x^3\operatorname{ctg}\pi x$, $x_0=\frac{1}{2}$

Գտնել այն կետերը, որոնցում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողը զուգահեռ է տրված ուղղին:

1102. $f(x)=3x^4-28x^3-6x^2+84x+1$, $y=-2$

1103. $f(x)=x+\sin^2 x$, $y=x$

1104. $f(x)=x^4-x^3+2$, $y=x+1$

1105. $f(x)=2x^3-15x^2+24x+3$, $y=7-12x$

1106. $f(x)=\sin x\cdot\cos x-2x+3$, $y=-x+5$

1107. $f(x)=8^x-3\cdot 4^x-9\cdot 2^x$, $\quad y=4$

1108. $f(x)=x^4-3x+9$, $\quad y=x+3$

1109. $f(x)=|x-5|(x-3)^3$, $\quad y=0$

Գտնել $f(x)$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկին*** $(x_0;y_0)$ ***կետից տարված շոշափողի հավասարումը***

1110. $f(x)=x^2-3x+4$, $\quad x_0=3,\ y_0=0$

1111. $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}$, $\quad x_0=3,\ y_0=7$

1112. $f(x)=2+x-\dfrac{2}{x}$, $\quad x_0=2,\ y_0=3$

1113. $f(x)=x^2+4x+1$, $\quad x_0=1,\ y_0=5$

1114. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $\quad x_0=1,\ y_0=1$

1115. $f(x)=(x-2)(3x+1)$, $\quad x_0=1,\ y_0=-7$

1116. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x}$, $\quad x_0=3,\ y_0=-4$

1117. $f(x)=\sqrt{6-2x-x^3}$, $\quad x_0=-1,\ y_0=3$

1118. Գտնել a պարամետրի այն դրական արժեքը, որի դեպքում $y=x+3$ ուղիղը կշոշափի $f(x)=x^2+ax-a+5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1119. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում $y=x+3$ ուղիղը կշոշափի $f(x)=ax^2-(a-1)x+a$ պարաբոլին:

1120. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում $y=ax+1$ ուղիղը կշոշափի $f(x)=3x^2+5x+1$ պարաբոլին:

1121. Գտնել a պարամետրի այն դրական արժեքը, որի դեպքում $y=2x-12$ ուղիղը կհանդիսանա $f(x)=x^2+ax-a+5$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:

1122. a պարամետրի ո՞ր արժեքի դեպքում $y=ax+1$ ուղիղը կշոշափի $f(x)=3x+\dfrac{1}{x}-1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1123. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում $y=4-x$ ուղիղը կհանդիսանա $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողը:

1124. a պարամետրի մի որոշ արժեքի դեպքում $y=2x-4$ ուղիղը շոշափում է $f(x)=4x+\dfrac{a}{x-3}-14$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտնել շոշափման կետի աբսցիսը:

1125. a պարամետրի մի որոշ դրական արժեքի դեպքում $y=ax-4$ ուղիղը շոշափում է $f(x)=x^2+2ax-2a+1$ պարաբոլը: Գտնել շոշափման կետի կոորդինատները:

1126. Գտնել a պարամետրի այն փոքրագույն դրական արժեքը, որի դեպքում $y=8x+a$ ուղիղը շոշափում է $f(x)=5x+3\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1127. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում $y=ax^2-3ax+1$ պարաբոլին $x=a$ աբսցիսն ունեցող կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է $y=ax$ ուղղին:

1128. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում $y=ax^2-7ax+1$ պարաբոլին $x=a$ աբսցիսն ունեցող կետում տարված շոշափողը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով:

1129. Ապացուցել, որ $y=a/x$ հիպերբոլին նրա կամայական կետում տարված շոշափողի այն հատվածը, որի ծայրակետերը գտնվում են կոորդինատական առանցքների վրա, շոշափման կետով բաժանվում է հավասար մասերի:

1130. Ապացուցել, որ $y=ax^2$ պարաբոլի կամայական x_0 աբսցիսն ունեցող կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է $2x_0$ աբսցիս ունեցող կետը գագաթի հետ միացնող ուղղին:

1131. Դիցուք $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլը հատվում է ox առանցքի հետ երկու կետերում: Ապացուցել, որ այդ կետերում պարաբոլին տարված շոշափողների անկյունային գործակիցները հակադիր թվեր են:

1132. Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր $x_0 \neq 0$ թվի համար $y=ax+\dfrac{b}{x}$, $(b \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին x_0 և $-x_0$ աբսցիսներն ունեցող կետերում տարված շոշափողները զուգահեռ են:

a և b թվերի ի՞նչ արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կունենա ածանցյալ նշված x_0 կետում

1133. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3}, & x \geq 1 \\ ax^2+b, & x<1 \end{cases};$ $\qquad x_0=1$

1134. $f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & x\le 3 \\ x^2+ax+b, & x>3 \end{cases};$ $\qquad x_0=3$

1135. $f(x)=\begin{cases} e^{2x^2+3}, & x\le 2 \\ x^3+ax^2+b, & x>2 \end{cases};$ $\qquad x_0=2$

1136. $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\le 1 \\ x^2+ax+b, & x>1 \end{cases};$ $\qquad x_0=1$

1137. $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & x\ge 2 \\ ax^2+4x+b, & x<2 \end{cases};$ $\qquad x_0=2$

1138. $f(x)=\begin{cases} e^{\sin 2x}, & x\ge \dfrac{\pi}{2} \\ ax^2+bx+2, & x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases};$ $\qquad x_0=\dfrac{\pi}{2}$

1139. $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & x\le -1 \\ ax^2+b, & x>-1 \end{cases};$ $\qquad x_0=-1$

1140. $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, & x\le -1 \\ ax^2+3x+b, & x>-1 \end{cases};$ $\qquad x_0=-1$

1141. $f(x)=\begin{cases} (x+a)e^{-bx}, & x<0 \\ ax^2+bx+1, & x\ge 0 \end{cases};$ $\qquad x_0=0$

1142. $f(x)=\begin{cases} e^{ax^2+1}, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases};$ $\qquad x_0=0$

1143. $f(x)=\begin{cases} (3x-a)e^{-bx}, & x<0 \\ ax^2+bx+3, & x\ge 0 \end{cases};$ $\qquad x_0=0$

1144. $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & x\le 1 \\ x^2+ax+b, & x>1 \end{cases};$ $\qquad x_0=1$

1145. $f(x)=\begin{cases} \ln(1+3x^2), & x\le -1 \\ ax^3+bx+2, & x>-1 \end{cases};$ $\qquad x_0=-1$

1146. $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x^2), & x\le -2 \\ ax^2+bx, & x>-2 \end{cases};$ $\qquad x_0=-2$

1147. $f(x)=\begin{cases}\ln(e+x^2), & x\le -e\\ -\dfrac{2b}{e+1}x+a, & x>-e\end{cases};\qquad x_0=-e$

1148. $f(x)=\begin{cases} arctg2x, & x\ge \dfrac{1}{2}\\ ax^2+bx+3, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases};\qquad x_0=\dfrac{1}{2}$

1149. $f(x)=\begin{cases}3\sin 4x+\cos 4x, & x\le -\pi\\ ax^2+bx+4, & x>-\pi\end{cases};\qquad x_0=-\pi$

1150. $f(x)=\begin{cases} e^{\sin 2x}, & x\ge \dfrac{\pi}{2}\\ a\cos 2x+b\sin 2x, & x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases};\qquad x_0=\dfrac{\pi}{2}$

1151. $f(x)=\begin{cases}\sin 2x+\cos 2x, & x\le -\pi\\ ax+b, & x>-\pi\end{cases};\qquad x_0=-\pi$

1152. $f(x)=\begin{cases}3x^2+4\sin x^2, & x\le \sqrt{\pi}\\ ax^2+bx+3, & x>\sqrt{\pi}\end{cases};\qquad x_0=\sqrt{\pi}$

Գտնել ֆունկցիայի դիֆերենցիալը

1153. $y=3^{\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}$

1154. $y=x\sqrt{64-x^2}+64\arcsin\dfrac{x}{8}$

1155. $y=\arccos x+2^{-x}$

1156. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1157. $y=x^{x^2}$

1158. $y=2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}+\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}$

1159. Դիցուք $u=u(x)$, $v=v(x)$ և $g=g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Գտնել ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, եթե ա) $y=uvg$; բ) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$; գ) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$; դ) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$:

Փոխարինելով ֆունկցիայի աճը դիֆերենցիալի արժեքով, գտնել արտահայտության մոտավոր արժեքը

1160. $\sqrt[3]{3,98}$ **1161.** $\sqrt[3]{1,02}$ **1162.** $\sqrt[4]{14}$

1163. $\sqrt[5]{33}$ **1164.** $\operatorname{tg} 44^{\circ}$ **1165.** $\cos 151^{\circ}$

1166. $\lg 11$ **1167.** $e^{0,2}$ **1168.** $\operatorname{arctg} 1,05$

Գտնել $f(x)$ ***ֆունկցիայի մոտավոր արժեքը նշված կետում***

1169. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$, $x=-0,98$

1170. $f(x)=\sqrt[3]{22-4x-x^2}$, $x=2,97$

1171. $f(x)=\sqrt{16+4x-x^2}$, $x=-1,97$

1172. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-13}$, $x=2,96$

1173. $f(x)=\arcsin\dfrac{\sqrt{7x-31}}{4}$, $x=4,99$

1174. $f(x)=\arccos\sqrt{\dfrac{5x-13}{8}}$, $x=3,03$

1175. $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-8x+15)$, $x=3,98$

1176. $f(x)=\operatorname{arcctg}(x^2+10x+24)$, $x=-4,96$

Գտնել y^{n} ***-ը***

1177. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ **1178.** $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1179. $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **1180.** $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

1181. $y=2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}-\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}$ **1182.** $y=\dfrac{x\left(1+3\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$

Պարզել բավարարո՞ւմ է արդյոք $y=y(x)$ ***ֆունկցիան տրված հավասարմանը***

1183. $y=3\cos 4x+5\sin 4x$, $y''+16y=0$

1184. $y=A\cdot e^{ax}+B\cdot e^{-ax}$, $y''-a^2y=0$

1185. $y = A\cdot e^{x} + B\cdot e^{-x} - \dfrac{1}{x}$, $\quad y'' - y = \dfrac{x^2-2}{x^3}$

1186. $y = 1+\cos e^{x} + \sin e^{x}$, $\quad y'' - y' + e^{2x}\cdot y = 0$

1187. $y = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}$, $\quad \left(1+x^2\right)y'' + xy' - 100y = 0$

1188. $y = e^{10\arcsin x}$, $\quad \left(1-x^2\right)y'' - xy' - 100y = 0$

1189. $y = \cos(10\arccos x)$, $\quad \left(1-x^2\right)y'' - xy' + 100y = 0$

1190. $y = \dfrac{1}{\sin x}$, $\quad y\cdot y'' = y^4 + (y')^2$

1191. $y = \dfrac{1}{\cos x}$, $\quad y\cdot y'' = y^4 + (y')^2$

1192. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\quad 1 + y\cdot y'' = y^4 + (y')^2$

1193. $y = \operatorname{arctg} x$, $\quad \left(1+x^2\right)y'' + 2xy' = 0$

1194. Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը

ա) $(e^{x})^{(n)} = e^{x}$; $\quad$ բ) $(a^{x})^{(n)} = a^{x}\cdot \ln^{n} a$;

գ) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\quad$ դ) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

ե) $(x^{m})^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\cdot x^{m-n}$;

զ) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}$;

1195. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի n-րդ կարգի ածանցյալ, ապա

$$\left(f(ax+b)\right)^{(n)} = a^{n}\cdot f^{(n)}(ax+b)$$

Գտնել ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը

1196. $y = \dfrac{1}{2x+3}$ $\quad$ **1197.** $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$

1198. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ $\quad$ **1199.** $y = \sin^3 x$

1200. $y = \cos^4 x$ $\quad$ **1201.** $y = \cos ax\cdot\cos bx$

1202. $y = \sin x \cdot \cos^2 2x$

1203. $y = \ln\frac{1-x}{1+x}$

Ապացուցել կամ հերքել հետևյալ պնդումը

1204. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան չունի, ապա

ա) $f(x)+g(x)$ ֆունկցիան չունի ածանցյալ x_0 կետում:

բ) $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիան չունի ածանցյալ x_0 կետում:

1205. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները չունեն ածանցյալ x_0 կետում, ապա

ա) $f(x)+g(x)$ ֆունկցիան չունի ածանցյալ x_0 կետում:

բ) $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիան չունի ածանցյալ x_0 կետում:

1206. Բերել ֆունկցիայի օրինակ, որը թվային ուղղի ոչ մի կետում չունի ածանցյալ, բայց ֆունկցիայի քառակուսին թվային ուղղի բոլոր կետերում ունի ածանցյալ:

1207. Բերել ֆունկցիայի օրինակ, որը թվային ուղղի բոլոր կետերում խզվող է բացի մի կետից և այդ կետում ունի ածանցյալ:

1208. Ապացուցել, որ թվային ուղղի վրա որոշված դիֆերենցելի զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ է, իսկ կենտինը՝ զույգ:

1209. Ապացուցել, որ դիֆերենցելի պարբերական ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական ֆունկցիա է:

1210. $[-1;1]$ և $[0;1]$ հատվածներում ստուգել $f(x)=x(x^2-1)$ ֆունկցիայի համար Ռոլլի թեորեմի ճշմարիտ լինելը:

1211. $(-1;1)$ և $(1;2)$ միջակայքում գտնել այնպիսի կետեր, որ

$$f(x)=(x^2-1)(x-2)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկի համապատասխան կետերում տարած շոշափողները լինեն զուգահեռ x-երի առանցքին:

1212. $(0;1)$ միջակայքում գտնել այնպիսի c կետ, որ $f(x)=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկին $(c;f(c))$ կետում տարած շոշափողը զուգահեռ լինի $(0;0)$ և $(1;1)$ կետերը միացնող լարին:

1213. Ապացուցել, որ ցանկացած $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի երկու արմատների միջև կգտնվի $P'(x)$ ածանցյալի արմատ:

1214. Դիցուք $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$: Ապացուցել, որ $f'(x)=0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են և ընկած են $(0;4)$ միջակայքում:

1215. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և գոյություն ունեն $\lim_{x\to a+0} f(x)$ և $\lim_{x\to b-0} f(x)$ վերջավոր սահմանները, ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$ կետ այնպիսին, որ $f'(c)=0$:

1216. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է $[a;b]$ հատվածում և այդ հատվածին պատկանող $(n+1)$ հատ կետերում հավասարվում է 0-ի, ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$ կետ այնպիսին, որ $f^{(n)}(c)=0$:

1217. Տրված է $y=x^2$ ֆունկցիան: Համոզվելով, որ ցանկացած $[a;b]$ հատվածի համար Լագրանժի թեորեմում առկա x_0 կետը միակն է՝ գտնել այն:

1218. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր թե անվերջ միջակայքում և այդ միջակայքին պատկանող x_0 կետում $f(x_0)=0$: Ապացուցել, որ եթե $f'(x)>0$, $x\in(a;b)$, ապա $f(x)>0$, երբ $x>x_0$ և $f(x)<0$, երբ $x<x_0$:

1219. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր թե անվերջ միջակայքում և այդ միջակայքին պատկանող x_0 կետում $f(x_0)=f'(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$: Ապացուցել, որ եթե $f^{(n)}(x)>0$, $x\in(a;b)$, ապա $f(x)>0$, երբ $x>x_0$ և $f(x)<0$, երբ $x<x_0$:

1220. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները n անգամ դիֆերենցելի են $(a;b)$ վերջավոր թե անվերջ միջակայքում և այդ միջակայքին պատկանող x_0 կետում $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0)=g'(x_0)$, $f^{(n-1)}(x_0)=g^{(n-1)}(x_0)$: Ապացուցել, որ եթե $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$, $x\in(a;b)$, ապա $f(x)>g(x)$, երբ $x>x_0$ և $f(x)<g(x)$, երբ $x<x_0$:

1221. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[x_0;x_0+\Delta)$ $((x_0-\Delta;x_0])$ միջակայքում, դիֆերենցելի է $(x_0;x_0+\Delta)$ $((x_0-\Delta;x_0))$ ինտերվալում և գոյություն ունի $\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=k$ $\left(\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=k\right)$ վերջավոր սահմանը, ապա գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ x_0 կետում, ընդ որում՝ $f'(x_0+0)=k$ $\left(f'(x_0-0)=k\right)$:

1222. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար վերջավոր աճերի բանաձևը ներկայացված է $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ $(0<\theta<1)$ տեսքով: Գտնել θ-ի կախումն x-ից և Δx-ից, եթե

ա) $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$; բ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; գ) $f(x)=e^x$:

1223. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում $f'(x)=g'(x)$, ապա այդ միջակայքում $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների տարբերությունը հաստատուն է:

1224. Ապացուցել, որ եթե $f'(x)\equiv k$, $x\in(a;b)$, ապա $f(x)=kx+c$, $x\in(a;b)$, որտեղ c-ն հաստատուն է:

1225. Դիցուք $f(x)$-ը R-ի վրա երկու անգամ դիֆերենցելի է և ցանկացած x-ի ու h-ի համար

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot f'\left(x+\frac{h}{2}\right):$$

Ապացուցել, որ $f(x)$-ը քառակուսային ֆունկցիա է՝

$$f(x)=ax^2+bx+c:$$

Ապացուցել նույնությունը

1226. $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$

1227. $2\,\mathrm{arctg}\,x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$, $\quad x\geq 1$

1228. $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $\quad x>0$

1229. $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{\pi}{4}$, $\quad x>-1$

1230. $\mathrm{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}-2\,\mathrm{arctg}\,x=0$, $\quad -1<x<1$

1231. $\mathrm{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}-2\,\mathrm{arctg}\,x=\pi$, $\quad -\infty<x<-1$

1232. $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=-\dfrac{3\pi}{4}$, $\quad -\infty<x<-1$

1233. $\mathrm{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}-2\,\mathrm{arctg}\,x=-\pi$, $\quad 1<x<+\infty$

1234. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-2\operatorname{arctg}x=0$, $\qquad |x|\le 1$

1235. $\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$, $\qquad |x|\le 1$

1236. $\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}-2\operatorname{arctg}x=\dfrac{3\pi}{2}$, $\qquad x\le -1$

1237. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x=-\pi$, $\qquad x\le -1$

1238. $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$, $\qquad 0\le x\le \dfrac{1}{2}$

1239. Ապացուցել, որ $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ և $g(x)=\operatorname{arctg}x$ ֆունկցիաները $(-\infty;1)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում տարբերվում են հաստատուն գումարելիով, գտնել այդ հաստատունները:

Օգտվելով Լագրանժի թեորեմի հետևանքից՝ գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան և աջակողմյան ածանցյալները նշված x_0 կետում:

1240. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$, $\qquad x_0=0$

1241. $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $\qquad x_0=0$

1242. $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $\qquad x_0=0$

1243. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\qquad x_0=-1;\ x_0=1$

1244. $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\qquad x_0=-1;\ x_0=1$

1245. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & -1\le x<1\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=1\end{cases}$, $\quad x_0=1$

1246. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$, $\quad x_0=0$

1247. Օգտվելով Լագրանժի թեորեմից ապացուցել, որ N^2 $(N>0)$ թիվը գերազանցող և իրար հաջորդող երկու բնական թվերի քառակուսի արմատների տարբերության մոդուլը փոքր է քան $\dfrac{1}{2N}$ թիվը:

1248. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a;b]$ հատվածում և $|f'(x)|\le M$, $x\in(a;b)$, ապա $[a;b]$ հատվածի ցանկացած x_1 և x_2 կետերի համար ճիշտ է $|f(x_1)-f(x_2)|\le M\cdot|x_1-x_2|$ անհավասարությունը:

Ապացուցել անհավասարությունը

1249. $p(x-y)\cdot y^{p-1}<x^p-y^p<p(x-y)\cdot x^{p-1}$, $\quad 0<y<x,\ p>1$

1250. $x^p\ge 1+p\cdot\ln x$, $\quad x>0,\ p>0$

1251. $e^x\ge 1+x$, $-\infty<x<\infty$

1252. $e^x>e\cdot x$, $x>1$

1253. $e^x>1+\ln(1+x)$, $x>0$

1254. $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $x>0$

1255. $1+2\ln x\le x^2$, $x>0$

1256. $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$

1257. $1-2\ln x\le\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$

1258. $\dfrac{x-y}{x}<\ln\dfrac{x}{y}<\dfrac{x-y}{y}$, $0<y<x$

1259. $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$

1260. $\cos x\ge 1-\dfrac{x^2}{2}$, $-\infty<x<\infty$

1261. $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$, $x>0$

1262. $1+\dfrac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$

1263. $\operatorname{tg}x>x+\dfrac{x^3}{3}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

1264. $\sin x+\operatorname{tg}x>2x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

1265. $\operatorname{tg}2x>2x+\dfrac{8}{3}x^3$, $\quad 0<x<\dfrac{\pi}{4}$

1266. $x-\dfrac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\dfrac{x^3}{6}$, $\quad 0\le x\le 1$

1267. $9x^2-112<24x-2x^3<9x^2+13$, $\quad x\in(-4;1)$

1268. $15x-100<x^3-6x^2<15x+8$, $\quad x\in(-1;5)$

1269. $2x^3-11<15x^2-24x<2x^3+16$, $\quad x\in(1;4)$

1270. $3x^2-27<9x-x^3<3x^2+5$, $x\in(-3;1)$

1271. $2x^3-48<3x^2+36x<2x^3+81$, $x\in(-2;3)$

1272. $3x^2-425<2x^3-120x<3x^2+304$, $x\in(-4;5)$

1273. $9x-5<x^3+3x^2<9x+27$, $x\in(-3;1)$

1274. $24x-28<x^3+3x^2<24x+80$, $x\in(-4;2)$

1275. $x^3-5<3x^2+9x<x^3+27$, $x\in(-1;3)$

1276. $15x^2-16<2x^3+24x<15x^2+11$, $x\in(1;4)$

1277. $3x^2-94<45x-x^3<3x^2+70$, $x\in(-2;2)$

1278. $12x^2-44<x^3+21x<12x^2+2$, $x\in(2;4)$

1279. $x^3-20<-9x^2-15x<x^3+2$, $x\in(-4;-2)$

1280. $72x-162<x^3+3x^2<72x+216$, $x\in(-3;3)$

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ հաշվել սահմանը

1281. $\lim\limits_{x\to-0,5}\dfrac{4x^3-3x-1}{4x^2+4x+1}$

1282. $\lim\limits_{x\to0.5}\dfrac{8x^3-4x+1}{2x^3+x^2+x-1}$

1283. $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{x-8\sqrt{x}+15}$

1284. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$

1285. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+2}$

1286. $\lim\limits_{x\to-0,8}\dfrac{5x+3\sqrt{5+5x}+1}{5x-4\sqrt{5+5x}+8}$

1287. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{9x-9}+\sqrt{7-x}}{x^2+3x+2}$

1288. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x}+\sqrt[3]{3x-1}}{x^2+x}$

1289. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[4]{5x+1}-\sqrt[3]{3x-1}}{\sqrt{2x+3}-x}$

1290. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x+\sin 4x}{5x^2+4x}$

1291. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$

1292. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-\cos 9x}{\cos 5x-\cos 11x}$

1293. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 9x}{\sin^2 3x}$

1294. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(4x^2)}{1-\cos(3x^2)}$

1295. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{ctg}5x$

1296. $\lim\limits_{x\to0}(\sin 5x-\operatorname{tg}5x)\cdot\operatorname{ctg}^3 2x$

1297. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin 2x-2\operatorname{tg}x)\cdot\operatorname{ctg}3x}{x^2}$

1298. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

1299. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$

1300. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)\cdot\operatorname{ctg}(x-1)$

1301. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x-4\operatorname{tg}x}{\sin 4x-4\sin x}$

1302. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$

1303. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$

1304. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$

1305. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

1306. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

1307. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$

1308. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$

1309. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$

1310. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

1311. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$

1312. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\ln^3(1+x)}$

1313. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\cdot\sin x^2}$

1314. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$

1315. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$

1316. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{\ln(1+x^3)}$

1317. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\cdot\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

1319. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}3x-6\operatorname{tg}x}{3\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}3x}$

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$

1321. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1}$

1322. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha\cdot x^{\alpha+2}-(\alpha+1)x^{\alpha+1}+x}{(x-1)^2}$

1323. $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\ln\operatorname{ctg}x$

1324. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(1-x^{\beta})-\beta(1-x^{\alpha})}{(1-x^{\alpha})\cdot(1-x^{\beta})}\,\alpha\cdot\beta\neq 0$

1325. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+x}{3x+5}$

1326. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$, $(k\in N)$

1327. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}$, $(p>0)$

1328. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$

1329. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-\sqrt{x}}{2-x^{p}}$, $(p>0)$

1330. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$

1331. $\lim\limits_{x\to0+}x^{2}\cdot\ln x$

1332. $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x$

1333. $\lim\limits_{x\to0+}x^{x}$

1334. $\lim\limits_{x\to0+}(\sin x)^{x}$

1335. $\lim\limits_{x\to0+}(\sin x)^{\sin x}$

1336. $\lim\limits_{x\to0+}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$

1337. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$

1338. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$

1339. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$

1340. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$

1341. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

1342. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2}\right)^{\operatorname{ctg}(x-2)}$

1343. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$

1344. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$

1345. $\lim\limits_{x\to0}(3x^{2}+3^{x})^{\frac{1}{x}}$

1346. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$

Գտնել ֆունկցիայի նշված n***-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը*** $x_0=0$ ***կետի շրջակայքում***

1347. $f(x)=\left(1-x+x^{2}\right)^{3}$, $n=2$

1348. $f(x)=e^{\operatorname{tg}x}$, $n=2$

1349. $f(x)=\dfrac{1-x+x^{2}}{1+x+x^{2}}$, $n=3$

1350. $f(x)=e^{\sin x}$, $n=3$

1351. $f(x)=\ln(1+\sin x)$, $n=5$

1352. $f(x)=\ln\cos x$, $n=6$

1353. $f(x)=\sin(\sin x)$, $n=3$

1354. $f(x)=\sin^{2}x-x^{2}\cdot e^{-x}$, $n=4$

1355. $f(x)=e^{2x-x^{2}}$, $n=5$

1356. $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $n=10$

1357. $f(x)=x\cdot\ln(1-x)$, $n=5$

1358. $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$, $n=4$

Գտնել ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը

1359. $y=2x^{2}-x+5$

1360. $y=5+7x-x^{2}$

1361. $y=x^{3}+3x^{2}+7$

1362. $y=4x^{3}-21x^{2}+18x+7$

1363. $y=8x^3-x^4+3$

1364. $y=x^4+2x^3+x^2+9$

1365. $y=\dfrac{3x-7}{(x^2-1)^2}$

1366. $y=(4-x)^5(2x+1)^4$

1367. $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

1368. $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$

1369. $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6}$

1370. $y=x+\sin 2x$, $x\in[-2\pi;-\pi]$

1371. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

1372. $y=2\cos\dfrac{x}{2}-\cos x$, $x\in[-2\pi;0]$

1373. $y=x\cdot e^{x-x^2}$

1374. $y=x\cdot e^{-3x}$

1375. $y=x^2\cdot e^{-x^2}$

1376. $y=x^2-10\ln x$

1377. $y=x^2\cdot\ln x$

1378. $y=\ln(1-x)+x(x-1)$

1379. $y=\dfrac{x}{\ln x}$

1380. $y=\operatorname{arctg}x-\ln x$

1381. $y=x\sqrt{4x-x^2}$

1382. $y=\sqrt{8x^2-x^4}$

1383. $y=\sqrt{2x^3+9x^2}$

1384. $y=(x+1)\sqrt{x^2-1}$

a պարամետրի ո՞ր արժեքների համար ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային ուղղի վրա

1385. $y=x^3-ax$

1386. $y=\dfrac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$

1387. $y=x^3-2(a^2-9)x+5$

1388. $y=\dfrac{a^2-9}{3}x^3+(a+3)x^2+4$

1389. $y=2x^5+3(a^2-4)x^3-6$

1390. $y=\dfrac{a^2-4}{3}x^3+(a+2)x^2-3x+4$

1391. $y=3x^7-(a^2-9)x^5+8$

1392. $y=2x^{11}+(a^2-16)x^7-3$

1393. $y=ax-\sin x$

1394. $y=ax+\cos x$

1395. $y=(10-a^2)x-\sin x+2$

1396. $y=(17-a^2)x-\cos x-1$

1397. $y=(15-a^2)x+\sin x-3$

1398. $y=(26-a^2)x+\cos x-7$

1399. $y=ax+3\sin x+4\cos x$

1400. $y=ax+5\sin x+12\cos x$

1401. $y=(8-a^2)x+\operatorname{tg}x-2$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

1402. $y=(24-a^2)x-\operatorname{ctg}x+3$, $\quad x\in(0;\pi)$

1403. $y=(8a-7)x-a\sin 6x-\sin 5x$

Ցույց տալ, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային ուղղի վրա

1404. $y=x^3-(a-2)x^2+(a^2+3)x+5$

1405. $y=x^3+(a+2)x^2+(a^2+5)x+9$

1406. $y=(a^2+25)x-10a\cos x-4a+3$

1407. $y=(1+a^2)x^3-3ax^2+3x-a$

a պարամետրի ո՞ր արժեքների համար ֆունկցիան նվազող է ամբողջ թվային ուղղի վրա

1408. $y=(5-a^2)x-\sin x-3$

1409. $y=(8-a^2)x+\cos x-4$

1410. $y=(a^2-8)x-\sin x+5$

1411. $y=(a^2-17)x+\cos x-1$

1412. $y=(37-a^2)x-\operatorname{tg}x-2$, $\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

1413. $y=\operatorname{ctg}x-(15-a^2)x-4$, $\quad x\in(2\pi;3\pi)$

1414. $y=(a^2-24)x-\operatorname{tg}x-3$, $\quad x\in\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$

1415. $y=(a^2-35)x+\operatorname{ctg}x+5$, $\quad x\in(0;\pi)$

Ցույց տալ, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում ֆունկցիան նվազող է ամբողջ թվային ուղղի վրա

1416. $y=(a+1)x^2-(a^2+2)x-x^3+5$

1417. $y=(a-4)x^2-(2a^2+7)x-x^3-6$

1418. $y=6a\cos x-(a^2+9)x+3a-2$

1419. $y=2a\sin x-(a^2+1)x-2a+1$

1420. Գտնել a պարամետրի այն ամենափոքր արժեքը, որի դեպքում $f(x)=2ax^3-3(2a-1)x^2+6ax-7$ ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա աճող է:

1421. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=(a^2+4)\operatorname{tg}x+3a\cos x+a-2$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է:

1422. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=(a^2+9)\operatorname{ctg}x+5a\cos x-ax-3$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում նվազող է:

1423. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=4^x-4a\cdot 2^x+a^2\ln 4\cdot x-2\ln 2$ ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա աճող է:

1424. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=2(x-a-1)e^x-(x^2-2ax)e^a$ ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա աճող է:

1425. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=(3x^2-6ax)e^a-6(x-a-1)e^x$ ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա նվազող է:

1426. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=(1+a^2)x^2-4ax+3$ ֆունկցիան $[1;+\infty)$ միջակայքում աճող է: Պարամետրի ո՞ր արժեքի դեպքում ֆունկցիայի աճման միջակայքը կլինի ամենալայնը:

1427. Ապացուցել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում $f(x)=6ax-(9+a^2)x^2+7$ ֆունկցիան $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ միջակայքում նվազող է: Պարամետրի ո՞ր արժեքի դեպքում ֆունկցիայի նվազման միջակայքը կլինի ամենալայնը:

1428. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a;b)$ միջակայքում և $f'(x)>0$ $(a;b)$-ի բոլոր կետերում, բացի վերջավոր քանակությամբ կետերից, ապա $f(x)$-ը խիստ աճող է $(a;b)$ միջակայքում:

1429. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$-ը դիֆերենցելի և խիստ աճող է $(a;b)$ միջակայքում, ապա ցանկացած $x_1;x_2\in(a;b)$, $(x_1<x_2)$ կետերի համար գոյություն ունի $c\in(x_1;x_2)$ կետ այնպիսին, որ $f'(c)>0$:

1430. Դիցուք f-ը աճող է $(a;b)$ միջակայքում: Հետևո՞ւմ է, արդյոք, որ $f'(x)$-ը ևս աճող է:

1431. $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը աճող է $(a;b)$ միջակայքում: Հետևո՞ւմ է, արդյոք, որ f-ը ևս աճող է $(a;b)$ միջակայքում:

1432. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է աճող x_0 կետում, եթե գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ այնպիսին, որ $f(x)<f(x_0)$ երբ $x\in(x_0-\delta;x_0)$ և $f(x)>f(x_0)$, երբ $x\in(x_0;x_0+\delta)$: Ապացուցել, որ եթե f-ը աճող է $(a;b)$-ի յուրաքանչյուր x կետում, ապա այն աճող է $(a;b)$ միջակայքում:

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և պարզել՝ էքստրեմումի կետեր են դրանք, թե՞ ոչ

1433. $y=2+x-x^2$

1434. $y=x^3-4x^2$

1435. $y=(x-1)^3$

1436. $y=x^m\cdot(1-x)^n$, $(m,n\in N)$

1437. $y=\sin x$

1438. $y=2\sin x+\cos 2x$

1439. $y=(x+1)^{10}\cdot e^{-x}$

1440. $y=|4x+5|$

1441. $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

1442. $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$

1443. $y=\dfrac{1}{x^3-2x^2-x+2}$

1444. $y=\sqrt{\ln^2 x-1}$

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և հաշվել էքստրեմալ արժեքները

1445. $y=x^2-x+3$

1446. $y=3x-x^2$

1447. $y=x^3-6x^2+9x-4$

1448. $y=x^3-3x^2+3x+4$

1449. $y=(x+2)^2(x-0,5)^2$

1450. $y=(x^3-10)(x+5)^2$

1451. $y=(x+2)^2(x-3)^3$

1452. $y=3x^4+8x^3+6x^2+5$

1453. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$

1454. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

1455. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

1456. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

1457. $y=\sqrt[3]{x+1}$

1458. $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$

1459. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$

1460. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-7}$

1461. $y = x + \frac{1}{x}$

1462. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$

1463. $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

1464. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

1465. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$

1466. $y = \ln(1 + x^2) - 2\operatorname{arctg} x$

1467. $y = e^{\frac{1}{x}}(x + 2)$

1468. $y = \ln(2 - \cos x)$

Գտնել a պարամետրի այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում ֆունկցիան կրիտիկական կետեր չունի

1469. $y = x^3 - 3ax^2 + 3(2a + 3)x - a^3$

1470. $y = x^3 + 12ax^2 - 48(a - 12)x - a^3$

1471. $y = x^3 + 6ax^2 + 12(6 - a)x + a^3$

1472. $y = x^3 + 6ax^2 + 12(4a + 5)x - a^3$

1473. $y = x^3 - 3x^2 - 3a(a - 2)x + a^3$

Գտնել a պարամետրի այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում ֆունկցիան կունենա ճիշտ մեկ կրիտիկական կետ

1474. $y = 2x^4 + 2ax^3 + 9x^2 - a$

1475. $y = x^4 + 2ax^3 + 18x^2 + a$

1476. $y = x^4 + 4ax^3 + 72x^2 - a$

1477. $y = x^4 - 8ax^3 + 162x^2 + a$

1478. Գտնել a պարամետրի այն դրական արժեքը, որի դեպքում $x_0 = -1$ կետը $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1+a}{2}x^2 - (2a^2 - 5a + 2)x + a$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

1479. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում

$$f(x) = 2x^3 - 3a(a + 1)x^2 + 6a^3x - a$$

ֆունկցիան կունենա երկու միմյանց հակադիր կրիտիկական կետեր:

1480. Գտնել a պարամետրի այն դրական արժեքը, որի դեպքում

$$f(x) = 2x^3 - 3(a - 1)x^2 - 6ax + a^3 + 12$$

ֆունկցիան կրիտիկական կետում ընդունում է 0 արժեք:

1481. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում

$$f(x) = 2(a - 1)x^2 + (a^2 - 4a + 1)x + 3$$

ֆունկցիան $x = 1$ կետում կընդունի իր մեծագույն արժեքը:

1482. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում

$$f(x)=ax^2-2(a+2)x+1$$

ֆունկցիան $x=a$ կետում կընդունի իր փոքրագույն արժեքը:

1483. Ցույց տալ, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում

$$f(x)=2x^3-3(2a+1)x^2+6a(a+1)x-2a^3$$

ֆունկցիան ունի ճիշտ երկու կրիտիկական կետեր, որոնք էքստրեմումի կետեր են: Պարզել դրանց բնույթը:

1484. Գտնել a պարամետրի այն դրական արժեքը, որի դեպքում $x=a$ կետը $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax+a^3$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:

1485. Գտնել a պարամետրի այն ամենամեծ ամբողջ արժեքը, որի դեպքում $x=a$ կետը $f(x)=2x^3-9(a-1)x^2+6a(2a-3)x+1$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

1486. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում

$$f(x)=(a^2-1)x^3-3ax^2+3x-1$$

ֆունկցիան կունենա ճիշտ մեկ կրիտիկական կետ և այդ կետը կլինի մաքսիմումի կետ:

1487. Գտնել a պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում

$$f(x)=x^3-3x^2-3a(a-2)x+1$$

ֆունկցիան էքստրեմում չունի:

Գտնել նշված միջակայքում ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները:

1488. $y=x^3-6x^2+9x-1$, ա) $x\in[4;5]$, բ) $x\in[-1;4]$

1489. $y=4+6x-3x^2$, $x\in[-2;2]$

1490. $y=\sqrt{5x-x^2}$, $x\in[1;3]$

1491. $y=x^3-6x^2+9x-12$, $x\in[-1;1]$

1492. $y=x^2-3x+5$, $x\in[-1;2]$

1493. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x\in[0;1]$

1494. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $x\in R$

1495. $y=x^4-2x^2+3$, $x\in[-1;1]$

1496. $y=(x-3)e^{|x+1|}$, $x\in[-2;4]$

1497. $y=x^5-5x^4+5x^3+3$, $x\in[-2;2]$

1498. $y=(3-x^2)e^x$, $x\in[-4;1]$

1499. $y=\sqrt{x^3+3x^2+5}$, $x\in\left[-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

1500. $y=|x|+\dfrac{x^3}{3}$, $x\in[-1;1]$

1501. $y=\cos x+2\sin\frac{x}{2}$, $x\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

1502. $y=x-2\ln x$, $x\in\left[\frac{3}{2};e\right]$

1503. $y=\sin x+2\cos\frac{x}{2}$, $x\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

1504. $y=\frac{1}{2}x+\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

1505. $y=\sqrt[3]{2x^3-3x^2-12x+1}$, $x\in[-2;2]$

1506. $y=2\cos^2 x-\sin 2x$, $x\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

1507. $y=\cos 2x-2\sin x+1$, $x\in[0;2\pi]$

1508. $y=2\sin x\sin 3x-3\cos 2x$, $x\in[0;\pi]$

1509. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$, $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

1510. $y=\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x$, $x\in\left[0;\sqrt{3}\right]$

1511. $y=2\sin x+\sin 2x$, $x\in\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$

1512. $y=\sin^3 x\cdot\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

1513. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$, $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

1514. $y=(x^2-12)e^{-2x}$, $x\in[3;5]$

1515. $y=(x^2-8)e^{-x}$, $x\in\left[-\frac{5}{2};5\right]$

1516. $y=2\operatorname{arctg} x-x$, $x\in\left[0;\sqrt{3}\right]$

Ապացուցել անհավասարությունը

1517. $-4e^2\le(x^2-8)e^{-x}\le 8e^{-4}$, $x\in\left[-\frac{5}{2};5\right]$

1518. $0\le\frac{\ln^2 x}{x}\le 4\cdot e^{-2}$, $x\in\left[1;e^3\right]$

1519. $-6e^{-3}\le(3-x^2)e^x\le 2e$, $x\in[-4;1]$

1520. $\ln 2-\frac{\pi}{2}\le \ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x\le 0$, $x\in\left[0;\sqrt{3}\right]$

1521. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}\le \sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\le \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

1522. $\frac{\pi}{2}\le \frac{1}{2}x+\sin x\le \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

1523. $-2\le 2\sin x+\sin 2x\le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x\in\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$

1524. $0\le \sin^3 x\cdot\cos x\le \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

1525. $\frac{\sqrt{2}}{2}\le \sin^3 x+\cos^3 x\le \frac{1}{8}\left(1+3\sqrt{3}\right)$, $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

1526. $0\le 2\operatorname{arctg} x-x\le \frac{\pi-2}{2}$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

Գտնել հաջորդականության մեծագույն անդամը

1527. $x_n=105n+3n^2-n^3$, $n\in N$

1528. $x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1900}$, $n\in N$

1529. $x_n=20+216n+15n^2-2n^3$, $n\in N$

1530. $x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+100}$, $n\in N$

1531. $x_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{n+20}$, $n\in N$

1532. $x_n=\frac{n^2}{n^3+200}$, $n\in N$

1533. $x_n=\frac{n^{12}}{e^n}$, $n\in N$

1534. $x_n=\frac{n^{10}}{2^n}$, $n\in N$

Գտնել հաջորդականության փոքրագույն անդամը

1535. $x_n=n^3-15n^2-33n+5$, $n\in N$

1536. $x_n=2n+\frac{125}{n^2}$, $n\in N$

1537. $x_n=n^3-9n^2-48n+25$, $n\in N$

1538. $x_n=3n+\frac{324}{n^2}$, $n\in N$

1539. $x_n=n^2+\frac{1250}{n}$, $n\in N$

1540. $x_n=2n^2+\frac{864}{n}$, $n\in N$

1541. $x_n=\frac{n+50}{\sqrt[3]{n}}$, $n\in N$

1542. $x_n=\frac{3n+42}{\sqrt[3]{n}}$, $n\in N$

Գտնել ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը, նշել շրջման կետերը

1543. $y = x^p$, $p > 1$, $x > 0$

1544. $y = x^p$, $0 < p < 1$, $x > 0$

1545. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

1546. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

1547. $y = e^{-x^2}$

1548. $y = \dfrac{10}{x}\ln\dfrac{x}{10}$

1549. $y = \sqrt[3]{x+3}$

1550. $y = x + \sin x$

1551. $y = \ln(1+x^2)$

1552. $y = x \cdot \sin(\ln x)$

Ապացուցել անհավասարությունը

1553. $\dfrac{1}{2}(x^p + y^p) > \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^p$, $(x > 0,\ y > 0,\ x \neq y,\ p > 1)$

1554. $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$, $x \neq y$

1555. $x\ln x + y\ln y > (x+y)\cdot\ln\dfrac{x+y}{2}$, $(x > 0,\ y > 0,\ x \neq y)$

1556. a պարամետրի ո՞ր արժեքների համար $f(x) = x^4 + ax^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 1$ ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ ամբողջ թվային ուղղի վրա:

1557. a պարամետրի ո՞ր արժեքների համար

$$f(x) = \frac{a^2-1}{12}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + x^2 + 3x + 1$$

ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ ամբողջ թվային ուղղի վրա:

1558. a պարամետրի ո՞ր արժեքների համար

$$f(x) = (a^2-16)x^4 - 4ax^3 - 6x^2 + 5x + 3$$

ֆունկցիան կլինի գոգավոր ամբողջ թվային ուղղի վրա:

Գտնել ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտները

1559. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$

1560. $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+1}$

1561. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

1562. $y = 3x - \dfrac{2}{x^2}$

1563. $y=\dfrac{x^2}{x+4}$

1564. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2+x-12}$

1565. $y=\dfrac{2+x^2}{8-x^2}$

1566. $y=\dfrac{5x^5}{2+x^4}$

1567. $y=\dfrac{5x^2-7x+4}{x+2}$

1568. $y=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{4-x^2}$

1569. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$

1570. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$

1571. $y=\sqrt[3]{8-x^3}$

1572. $y=2x-xe^x$

1573. $y=3x-xe^x$

1574. $y=\operatorname{arctg} x$

1575. $y=x\cdot\operatorname{arctg} x$

1576. $y=\sqrt{x^2-4}$

1577. $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$

1578. $y=\dfrac{1-\cos x}{x^3}$

1579. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար $x=x_1$ և $x=x_2$ կետերը երկու անմիջական հարևան կրիտիկական կետեր են, ապա $f(x_1)\neq f(x_2)$:

1580. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում ունի $f'(x)$ անընդհատ ածանցյալ: Ապացուցել, որ եթե $x=x_1$ և $x=x_2$ կետերը երկու անմիջական հարևան կրիտիկական կետեր են $(x_1<x_2)$, ապա $(x_1;x_2)$ միջակայքում $f(x)$-ը մոնոտոն է:

1581. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ ցանկացած երկու անմիջական հարևան լոկալ մաքսիմումի կետերի միջև գոյություն ունի լոկալ մինիմումի կետ:

1582. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ միջակայքում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $|f(x_1)-f(x_2)|\leq M|x_1-x_2|^p$ պայմանին, որտեղ M-ը հաստատուն է, $p>1$, իսկ x_1-ը և x_2-ը ցանկացած կետեր են $[a;b]$ միջակայքից, ապա $f(x)$-ը նույնաբար հաստատուն է:

1583. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$-ը կրկնակի դիֆերենցելի է $[a;b]$ միջակայքում, ընդ որում $f(a)=f'(a)=0$ և $f''(x)>0$, $x\in(a;b)$ ապա $f(x)>0$, $x\in(a;b]$:

1584. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները կրկնակի դիֆերենցելի են $(a;b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ եթե $f''(x)=g''(x)$, $x\in(a;b)$ ապա $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները իրարից տարբերվում են գծային ֆունկցիայով:

1585. Ապացուցել, որ ցանկացած երրորդ աստիճանի բազմանդամն ունի զրոնե մեկ շրջման կետ:

1586. Եռանկյան երկու կողմերի գումարը հավասար է a-ի, իսկ նրանցով կազմված անկյունը α-ի: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդ կողմերի երկարությունները, որպեսզի եռանկյան մակերեսը լինի մեծագույն:

1587. Տրված S մակերեսն ունեցող ուղղանկյուններից գտնել այն, որի պարագիծը փոքրագույնն է:

1588. Ուղղանկյուն եռանկյան էջի և ներքնաձիգի գումարը հաստատուն է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդպիսի եռանկյան սուր անկյունները, որպեսզի այն ունենա մեծագույն մակերես:

1589. Գտնել ամենամեծ մակերես ունեցող ուղղանկյունը, որի երկու գագաթները ընկած են ox և oy առանցքների վրա, երրորդը՝ $(0;0)$ կետում, իսկ չորրորդը՝ $y=3-x^2$ պարաբոլայի վրա:

1590. Գտնել ամենափոքր երկարություն ունեցող հատվածը, որ a կողմով հավասարակողմ եռանկյունը բաժանում է հավասարամեծ պատկերների:

1591. b հիմք և h բարձրություն ունեցող սուրանկյուն եռանկյունը ներգծված է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները գտնվում են եռանկյան հիմքի վրա: Գտնել այդպիսի ուղղանկյան առավելագույն մակերեսը:

1592. Տրված ℓ ծնիչն ունեցող կոներից գտնել այն, որի ծավալը մեծագույնն է:

1593. R շառավղով գնդին ներգծել գլան, որի լրիվ մակերևույթի մակերեսը լինի մեծագույնը:

1594. R շառավղով գնդին ներգծել գլան, որի ծավալը մեծագույնն է:

1595. Գտնել ամենամեծ ծավալ ունեցող կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի բարձրությունը, որը ներգծած է R շառավղով գնդին:

1596. S լրիվ մակերևույթի մակերեսն ունեցող գլաններից հաշվել մեծագույն ծավալը:

1597. R հիմքի շառավիղ և H բարձրություն ունեցող կոնին ներգծված է կանոնավոր քառանկյուն պրիզմա: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի պրիզմայի բարձրությունը, որպեսզի նրա ծավալը լինի մեծագույնը:

1598. R հիմքի շառավիղ և H բարձրություն ունեցող կոնին ներգծված է մեծագույն ծավալ ունեցող գլան: Գտնել գլանի հիմքի շառավիղը և բարձրությունը:

1599. Կոնի առանցքային հատույթի պարագիծը հավասար է $2P$-ի: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի կոնի բարձրությունը, որպեսզի նրա ծավալը լինի մեծագույնը:

1600. Տրված են m և n դրական թվերը: Գտնել $x^m + y^n$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ $x>0$, $y>0$ և $x \cdot y = a$ $(a = const)$:

1601. Տրված են m և n դրական թվերը: Գտնել $x^m \cdot y^n$ արտահայտության մեծագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ $x>0$, $y>0$ և $x+y=a$ $(a = const)$:

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը

1602. $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$

1603. $y = 3x - x^3$

1604. $y = e^{2x-x^2}$

1605. $y = x + e^{-x}$

1606. $y = \sin x + \cos^2 x$

1607. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

1608. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1609. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

1610. $y = x + \operatorname{arctg} x$

1611. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$

ԳԼՈՒԽ IV

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ, ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ, ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ

Սահմանում: $F(x)$-ը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական X վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, եթե $F(x)$-ը X-ում դիֆերենցելի է և $\forall x \in X \Rightarrow F'(x) = f(x)$: Եթե F-ն X-ում f-ի նախնականն է, ապա f-ի բոլոր նախնականների բազմությունը $\{F(x)+C;\, C \in R\}$ բազմությունն է:

Սահմանում: Եթե F-ն X-ում f-ի որևէ նախնականն է, ապա f-ի բոլոր նախնականների ընդհանուր տեսքն արտահայտող $F(x)+C$ արտահայտությունը, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է, կոչվում է f-ի անորոշ ինտեգրալ X միջակայքում և նշանակվում $\int f(x)dx$ սիմվոլով: Այս նշանակման մեջ $f(x)$-ը կոչվում է ընդինտեգրալ ֆունկցիա, իսկ $f(x)dx$-ը՝ ընդինտեգրալ արտահայտություն:

Թեորեմ: Վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում որոշված ցանկացած անընդհատ ֆունկցիա ունի նախնական:

2. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՇՎՄԱՆ (ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ) ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

ա) Որոշ տարրական ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալների աղյուսակ

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $(p \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0,\ a \neq 1)$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_2,$ $(a \neq 0)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C_1 = -\arccos \frac{x}{a} + C_2,$ $(a > 0)$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C,$ $(a \neq 0)$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C,$ $(a \neq 0)$

13. $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right) + C,$ $(a \neq 0)$

բ) Ինտեգրալի գծայնությունը

Թեորեմ: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները տրված միջակայքում ունեն նախնականներ, ապա ցանկացած α և β հաստատունների համար $\alpha f(x) + \beta g(x)$ համար ֆունկցիան այդ միջակայքում նույնպես կունենա նախնական և

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx:$$

գ) Փոփոխականի փոխարինում

Թեորեմ: Եթե $G(t)$-ն և $(\alpha;\beta)$ միջակայքում $g(t)$ ֆունկցիայի նախնականն է, իսկ $\varphi:(a;b) \to (\alpha;\beta)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում, ապա $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ ֆունկցիան ունի նախնական $(a;b)$-ում և

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C, \; x \in (a;b) \tag{1}$$

դ) Մասերով ինտեգրում

Թեորեմ: Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են տրված միջակայքում և $u'(x) \cdot v(x)$ ֆունկցիան ունի նախնական այդ միջակայքում, ապա $u(x) \cdot v'(x)$ ֆունկցիան նույնպես ունի նախնական և

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Հաճախ մասերով ինտեգրման բանաձևը գրում են հետևյալ տեսքով՝

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \qquad (2)$$

3. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ

Եթե $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(n \in N)$ թվերը բավարարում են $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ պայմանին, ապա կասենք, որ տրված է $[a;b]$ հատվածի տրոհում և կնշանակենք այդ տրոհումը $T(x_0, x_1, \cdots, x_n)$-ով: $[x_i; x_{i+1}]$ $(i = 0;1;\cdots n-1)$ հատվածները կանվանենք տրոհման հատվածներ, իսկ $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$-ն, որտեղ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ տրոհման տրամագիծ: Դիցուք f-ը $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիա է, $T(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$-ը՝ $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում, իսկ $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$-ը՝ $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ $(i = 0;1;2;\cdots;n-1)$ պայմանին բավարարող կետերի որևէ համախմբություն: Կազմենք $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ գումարը: Այն կանվանենք f ֆունկցիայի՝ T տրոհմանը և ξ համախբությանը համապատասխանող ինտեգրալային գումար:

Սահմանում: J թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ (Ռիմանի ինտեգրալ) $[a;b]$ հատվածում, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ $\lambda(T) < \delta$ պայմանին բավարարող ցանկացած տրոհման և դրան համապատասխանող ցանկացած ξ համախմբության համար ճիշտ է $|\sigma - J| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Այդպիսի J թվի գոյության դեպքում f-ը կոչվում է $[a;b]$ հատվածում ինտեգրելի (Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի), իսկ J-ն՝ $f(x)$-ի որոշյալ ինտեգրալ և նշանակում է՝

$$\int_a^b f(x)dx = J = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma$$

4. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

ա) Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ: $[a;b]$ հատվածում ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է:

բ) Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Դիցուք f-ը $[a;b]$ հատվածում որոշված սահմանափակ ֆունկցիա է, իսկ $T(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$-ը $[a;b]$ հատվածի տրոհում: Նշանակենք՝

$$m_i = \inf_{x\in[x_i;x_{i+1}]}\{f(x)\},\ M_i = \sup_{x\in[x_i;x_{i+1}]}\{f(x)\},\ \omega_i = M_i - m_i,\ (i = 0;1;\cdots n-1):$$

Թեորեմ: Որպեսզի $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ f ֆունկցիան լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$ պայմանը, այսինքն՝ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ այնպիսին, որ $\forall T(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ տրոհման համար

$$\lambda(T) < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon$$

գ) Տրված T տրոհման դեպքում $\underline{s}_T = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$ և $\overline{S}_T = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$ գումարները կոչվում են f ֆունկցիայի Դարբուի համապատասխանաբար ստորին և վերին գումարներ: Այս նշանակումով ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարելի է գրել նաև $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\left(\overline{S}_T - \underline{s}_T\right) = 0$ ձևով:

դ) $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ ֆունկցիայի համար $\underline{J} = \sup\limits_{\{T\}}\underline{s}_T$ և $\overline{J} = \inf\limits_{\{T\}}\{\overline{S}_T\}$ թվերը վերջավոր են և կոչվում են այդ ֆունկցիայի համապատասխանաբար Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալներ: $\underline{J} = \overline{J}$ հավասարությունը համարժեք է ինտեգրալի գոյությանը:

5. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ

ա) **Թեորեմ.** $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է:

բ) **Թեորեմ.** $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ և միայն վերջավոր թվով խզումներ ունեցող ֆունկցիան ինտեգրելի է:

գ) **Թեորեմ.** $[a;b]$ հատվածում մոնոտոն ֆունկցիան ինտեգրելի է:

6. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ա) Եթե f-ն ինտեգրելի է $[a;b]$-ում և $\alpha\in R$, ապա $\alpha\cdot f$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է $[a;b]$-ում և՝

$$\int_a^b \alpha\cdot f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

բ) Եթե f-ն ու g-ն ինտեգրելի են $[a;b]$-ում, ապա $(f+g)$-ն նույնպես ինտեգրելի է $[a;b]$-ում և

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Սահմանում: Կասենք, որ $[a;b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, եթե գոյություն ունի $M>0$ թիվ այնպիսին, որ ցանկացած $x_1, x_2 \in [a;b]$ կետերի համար տեղի ունի

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le M\,|x_1-x_2|$$

անհավասարությունը:

գ) **Թեորեմ.** Դիցուք $f(x)$-ը ինտեգրելի է $[a;b]$-ում, իսկ m-ը և M-ը նրա ճշգրիտ եզրերն են $[a;b]$-ում: Եթե $g(y)$-ը որոշված է $[m;M]$ միջակայքում և այդ միջակայքում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, ապա $g(f(x))$ բարդ ֆունկցիան ինտգրելի է $[a;b]$ միջակայքում: Մասնավորապես $|f|$-ը և f^2-ին ինտեգրելի կլինեն $[a;b]$ հատվածում:

դ) Եթե f-ն ու g-ն ինտեգրելի են $[a;b]$ հատվածում, ապա $f\cdot g$-ն նույնպես ինտեգրելի է $[a;b]$-ում:

ե) Եթե f-ն ինտեգրելի է $[a;b]$-ում և $[c;d]\subset[a;b]$, ապա f-ն ինտեգրելի է $[c;d]$-ում:

7. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Եթե c-ն $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի կետ է, ապա ընդունված է համարել $\int_c^c f(x)dx = 0$

Եթե f-ը ինտեգրելի է $[a;b]$-ում, ապա $\left(-\int_a^b f(x)dx\right)$-ի փոխարեն ընդունված է նաև գրել $\int_b^a f(x)dx$՝

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

ա) Ինտեգրալի ադիտիվությունը: Եթե f-ն ինտեգրելի է $[a;b]$ հատվածում, ապա $[a;b]$ հատվածի ցանկացած α,β,γ կետերի համար՝

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$$

բ) Ինտեգրալի մոնոտոնությունը: Եթե f-ն ու g-ն ինտեգրելի են $[a;b]$-ում, $a \le b$ և $f(x) \le g(x)$, $\left(x \in [a;b]\right)$, ապա՝

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$$

գ) Միջին արժեքի թեորեմը: Եթե f-ն ինտեգրելի է $[a;b]$-ում և $m \le f(x) \le M$, $\left(x \in [a;b]\right)$, ապա $\exists \mu$ թիվ այնպիսին, որ $m \le \mu \le M$ և

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \mu(b-a)$$

Մասնավորապես, եթե f-ն անընդհատ է $[a;b]$-ում, ապա գոյություն ունի $c \in [a;b]$ կետ այնպիսին, որ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$$

դ) Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը:

Եթե f-ն ու g-ն ինտեգրելի են $[a;b]$ հատվածում, $g(x) \ge 0$, $(g(x) \le 0)$, $\left(x \in [a;b]\right)$, $m \le f(x) \le M$ $\left(x \in [a;b]\right)$, ապա գոյություն ունի μ թիվ այնպիսին, որ $m \le \mu \le M$ և

$$\int_{a}^{b} f(x)\cdot g(x)dx = \mu\int_{a}^{b} g(x)dx$$

Մասնավորապես, եթե f -ն անընդհատ է $[a;b]$ -ում, ապա $\exists c \in [a;b]$, որ

$$\int_{a}^{b} f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_{a}^{b} g(x)dx :$$

8. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ ՈՐՊԵՍ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՀԱՏՎԱԾԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՎԵՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Դիցուք f-ն ինտեգրելի է $[a;b]$-ում, և $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \ \left(x\in[a;b]\right)$: Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները

ա) $\Phi(x)$-ը անընդհատ է $[a;b]$-ում,

բ) եթե f-ն անընդհատ է $x_0\in[a;b]$ կետում, ապա $\Phi(x)$-ը դիֆերենցելի է այդ կետում և $\Phi'(x_0)=f(x_0)$

գ) եթե f-ն անընդհատ է $[a;b]$-ում, ապա $\Phi(x)$-ը $f(x)$-ի նախնական է $[a;b]$-ում:

9. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՇՎՄԱՆ (ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ) ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

ա) Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը: եթե f-ն անընդհատ է $[a;b]$-ում, իսկ $F(x)$-ը նրա նախնականն է՝ $F'(x)=f(x) \ \left(x\in[a;b]\right)$, ապա

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

բ) Մասերով ինտեգրում: եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածում ունեն $u'(x)$ և $v'(x)$ անընդհատ ածանցյալներ, ապա

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

գ) Փոփոխականի փոխարինում: եթե $\varphi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ ֆունկցիան $[\alpha,\beta]$ հատվածում ունի $\varphi'(t)$ անընդհատ ածանցյալ, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, ապա $[a;b]$-ում անընդհատ ցանկացած f ֆունկցիայի համար՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Դիտողություն. տարրական ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալների աղյուսակը ստացանք հիմք ընդունելով պարզագույն տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակը: Յուրաքանչյուր բանաձև այդ աղյուսակից ըստ անորոշ ինտեգրալի սահմանման հնարավորություն է տալիս ստանալու համապատասխան բանաձևը անորոշ ինտեգրալի: Սակայն անորոշ ինտեգրալների աղյուսակի № 3, №№ 9-13 բանաձևերի անալոգը չկա պարզագույն տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակում: Դիմնավորենք նաև այդ բանաձևերի ճշմարտացիությունը՝

№ 3 բանաձևը ճիշտ է ցանկացած ինտերվալի համար, որը չի պարունակում $x=0$ կետը: Իրոք, եթե $x>0$, ապա $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ բանաձևից հետևում է $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$: Եթե $x<0$, ապա $\left(\ln(-x)\right)'=\frac{1}{x}$ բանաձևից հետևում է, որ $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$: Այնպես, որ № 3 բանաձևը ճիշտ է ցանկացած $x\neq 0$ համար:

№ 9 - $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0)$

$\Delta-$ կատարենք $x=at$ փոփոխականի փոխարինում $dx=adt$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{a\cdot dt}{a^2(1+t^2)}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \qquad \nabla$$

№ 10 - $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$

$\Delta-$ կատարենք $x=at$ փոփոխականի փոխարինում $dx=adt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cdot dt}{\sqrt{a^2(1-t^2)}}=\int\frac{a}{a\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C \qquad \nabla$$

№ 11 - $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq 0)$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{d(x+a)}{x+a}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad \nabla$$

№ 12 - $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$

$\Delta -$ Նշանակենք $t(x) = x + \sqrt{x^2+a}$ ։ Այդ դեպքում

$$d\left(t(x)\right) = t'(x)dx = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{t(x)dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

որտեղից կստանանք $\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{d\left(t(x)\right)}{t(x)}$

Հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{d\left(t(x)\right)}{t(x)} = \ln|t(x)| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \qquad \nabla$$

Օգտվելով փոփոխականի փոխարինման և մասերով ինտեգրման բանաձևերից, գտնել ինտեգրալները

1) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{499}}{1+x^2} dx$

$\Delta -$ Նշանակենք $t = \operatorname{arctg} x$, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{499}}{1+x^2} dx = \int t^{499} dt = \frac{t^{500}}{500} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{500}}{500} + C \qquad \nabla$$

2) $\int (7x-6)^{2000} dx$

$\Delta -$ Նշանակենք $t = 7x - 6$, $dt = 7dx$

$$\int (7x-6)^{2000} dx = \frac{1}{7}\int t^{2000} dt = \frac{1}{7 \cdot 2001} t^{2001} + C = \frac{(7x-6)^{2001}}{14007} + C \qquad \nabla$$

3) $\int \frac{x^6 dx}{4x^{14}+9}$

$\Delta -$ Ունենք $\int \frac{x^6 dx}{4x^{14}+9} = \frac{1}{4}\int \frac{x^6 dx}{x^{14} + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$ ։ Այս ինտեգրալում կատարենք $t = x^7$ տեղադրությունը։ $dt = 7 \cdot x^6 dx$, $\Rightarrow x^6 dx = \frac{1}{7} dt$ ։ Հետևաբար

$$\frac{1}{4}\int \frac{x^6 dx}{x^{14} + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{28}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{42}\operatorname{arctg}\frac{2t}{3} + C = \frac{1}{42}\operatorname{arctg}\frac{2x^7}{3} + C$$

(Օգտվեցինք աղյուսակային ինտեգրալների № 9 բանաձևից) ∇

4) $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^6}$

Δ – Քանի որ $x^3 = (x-1)^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$,

ապա $\frac{x^3}{(x-1)^6} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-1)^4} + \frac{3}{(x-1)^5} + \frac{1}{(x-1)^6}$: Հետևաբար

$$\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^6} = \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^5} + \int \frac{dx}{(x-1)^6} =$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{5 \cdot (x-1)^5} + C \qquad \nabla$$

5) $\int \frac{dx}{x^4(4+x^2)}$

Δ – Քանի որ $\frac{1}{x^4(4+x^2)} = \frac{1}{16}\left(\frac{16 - x^4 + x^4}{x^4(4+x^2)}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{4-x^2}{x^4} + \frac{1}{4+x^2}\right)$,

ապա

$$\int \frac{dx}{x^4(4+x^2)} = \frac{1}{16}\int \frac{4-x^2}{x^4}dx + \frac{1}{16}\int \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^4} - \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x^2} +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \frac{1}{4+x^2} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{32}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C \qquad \nabla$$

6) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Δ – Ունենք $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$, նշանակենք $x - \frac{1}{x} = t$: Կունենանք

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dt \text{ և } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$$

և հետևաբար

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C \qquad \nabla$$

7) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

Δ – Քանի որ $4x-x^2=-(x^2-4x)=-(x-2)^2+4$, ապա

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

(օգտվեցինք աղյուսակային ինտեգրալների № 10 բանաձևից) ∇

8) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

Δ – Քանի որ $x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$, ապա ըստ աղյուսակային ինտեգրալների № 12 բանաձևի

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}}=\ln\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2-3x+4}\right|+C \quad \nabla$$

9) $\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}$

Δ – Քանի որ $4x^2-4x+17=4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\right]$, ապա

$$\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C \quad \nabla$$

10) $\int\operatorname{tg}x\,dx$

Δ – $\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$ ∇

11) $\int\sin^2 x\,dx$

Δ – Օգտվելով կեսանկյան բանաձևերից կարող ենք գրել

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}:$$

Հետևաբար

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \qquad \nabla$$

12) $\int \sin^4 x dx$

$\Delta -$ Ունենք

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x + \cos^2 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

հետևաբար՝

$$\int \sin^4 x dx = \int \frac{3}{8}dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x dx + \int \frac{1}{8}\cos 4x dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \qquad \nabla$$

13) $\int \sin 5x \cdot \cos 7x dx$

$\Delta -$ Օգտվենք $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ բանաձևից

$$\sin 5x \cdot \cos 7x = \frac{\sin 12x - \sin 2x}{2}$$

հետևաբար՝

$$\int \sin 5x \cdot \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 12x - \sin 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{24}\int \sin 12x d(12x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C \qquad \nabla$$

14) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

$$\Delta - \int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\int d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C \qquad \nabla$$

15) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{45 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}}$

$\Delta -$ Նշանակենք $\sin^2 x = t$, $2 \sin x \cdot \cos x dx = dt$, $\sin 2x dx = dt$ և հետևաբար՝

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{45 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}} = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{36 \sin^2 x + 9}} = \int \frac{dt}{\sqrt{36t + 9}} =$$

$$= \frac{1}{18} \sqrt{36t + 9} = \frac{1}{18} \sqrt{45 \sin^2 x + 9 \cos^2 x} + C \qquad \nabla$$

16) $J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$

$\Delta -$ Ընդինտեգրալ ֆունկցիան որոշված է $[-a; a]$ հատվածում: Կատարենք $x = a \sin t$, $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ տեղադրությունը:

Կունենանք $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$, (քանի որ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), $dx = a \cos t dt$: Հետևաբար՝

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C$$

Քանի որ $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, ապա

$\frac{1}{2} \sin 2t = \sin t \cdot \cos t = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$ և $t = \arcsin \frac{x}{a}$: Տեղադրելով t-ի և $\frac{\sin 2t}{2}$-ի արտահայտությունները, վերջնականապես կստանանք՝

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C \qquad \nabla$$

Յաշվել ինտեգրալը

1) $J = \int x^n \cdot \ln x dx \quad (n \neq -1)$

$\Delta -$ ընդունենք $u = \ln x$, $dv = x^n dx$: Օգտվելով (2) բանաձևից կստանանք $du = \dfrac{1}{x} dx$, $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$J = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C \qquad \nabla$$

2) $J = \int x \cdot \arcsin x dx$

$\Delta -$ ընդունենք $u = \arcsin x$, $dv = x dx$ և օգտվենք (2) բանաձևից՝

$du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$,

$$J = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} -$$

$$-\frac{1}{2} \arcsin x + C = \frac{1}{4}\left(2x^2 \arcsin x - \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C \qquad \nabla$$

3) $J = \int x^2 \cdot \cos x dx$

$\Delta -$ ընդունենք $u = x^2$, $dv = \cos x dx$ և օգտվենք (2) բանաձևից՝

$du = 2x dx$, $v = \sin x$, $J = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx$:

Վերջին ինտեգրալը հաշվելու համար ևս մեկ անգամ օգտվենք (2) բանաձևից, ընդունելով $u = x$, $dv = \sin x dx$: Կստանանք $du = dx$, $v = -\cos x$, $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$:

Ի մի բերելով ստացված արդյունքները, վերջնականապես կստանանք՝

$$J = \left(x^2 - 2 \right) \cdot \sin x + 2x \cos x + C \qquad \nabla$$

4) $J = \int e^{ax} \cdot \cos bx dx$, $a, b \neq 0$

Ընդունենք $u=e^{ax}$, $dv=\cos bxdx$: Կունենանք $du=a\cdot e^{ax}$, $v=\frac{\sin bx}{b}$ և $J=\frac{e^{ax}\cdot\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$ ևս մեկ անգամ կիրառենք (2) բանաձևը՝ հաշվելու $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$ ինտեգրալը: $u=e^{ax}$, $dv=\sin bxdx$, որտեղից $du=a\cdot e^{ax}$, $v=-\frac{\cos bx}{b}$ և $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx=-\frac{e^{ax}\cdot\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$:

Վերջնականապես կունենանք.

$$J=\frac{e^{ax}\cdot\sin bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cdot\cos bx-\frac{a^2}{b^2}J$$

Լուծելով այս հավասարումը J-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$J=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}+C \qquad \nabla$$

5) $J=\int\sqrt{x^2+a}dx$, $a\neq 0$

$\Delta-$ ընդունենք $u=\sqrt{x^2+a}$, $dv=dx$ և կիրառենք (2) բանաձևը՝

$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx$, $v=x$ և

$$J=x\cdot\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\cdot\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=$$

$$=x\cdot\sqrt{x^2+a}-J+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=x\cdot\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|-J+C$$

որտեղից, լուծելով J-ի նկատմամբ վերջին հավասարումը, կստանանք՝

$$J=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+a}}{2}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \qquad \nabla$$

Տրոհելով տրված հատվածը n հավասար մասերի, գտնել Դարբուի ստորին և վերին գումարները.

ա) $f(x)=4x-3$, $x\in[-2;4]$

բ) $f(x)=\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

ա) $\Delta-$ Քանի որ f-ը աճող և անընդհատ ֆունկցիա է $[-2;4]$ հատվածում, $\left(f'(x)=4>0,\ x\in(-2;4)\right)$, ապա ինչպիսին էլ լինի $x_0=-2<$ $<x_1<x_2<\cdots<x_n=4$ տրոհումը, ֆունկցիան յուրաքանչյուր $[x_{k-1};x_k]$ $(k=1;2;\cdots n)$ տրոհման հատվածում իր ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները կընդունի համապատասխանաբար այդ հատվածի ձախ և աջ ծայրակետերում:

$\Delta-$ Ունենք ըստ խնդրի պայմանի $\Delta x_k=\dfrac{6}{n}$, $x_k=-2+\dfrac{6k}{n}$, $k=0;1;2;\cdots n$ և հետևաբար՝

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\frac{6}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[4\left(-2+\frac{6k}{n}\right)-3\right]=-\frac{66}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1+\frac{144}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k=$$

$$=-\frac{66}{n}n+\frac{144}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=-66+72-\frac{72}{n}=6-\frac{72}{n}$$

$$S_T=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k=\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(-2+\frac{6k}{n}\right)-3\right]=-\frac{66}{n}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{144}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=-\frac{66}{n}n+\frac{144}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=-66+72+\frac{72}{n}=6+\frac{72}{n}\qquad\nabla$$

բ) $\Delta-\cos x$ ֆունկցիան նվազող և անընդհատ ֆունկցիա է $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ հատվածում: Հետևաբար ցանկացած $x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\dfrac{\pi}{2}$ տրոհման համար կոսինուսը տրոհման յուրաքանչյուր $[x_{k-1};x_k]$ $(k=1;2;\cdots n)$ հատվածում իր ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները կընդունի համապատասխանաբար այդ հատվածի աջ և ձախ ծայրակետերում:

Ունենք $\Delta x_k=\dfrac{\pi}{2n}$, $x_k=\dfrac{\pi k}{2n}$, $k=0;1;2;\cdots n$

$$s_T=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{2n}=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}=$$

$$=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(օգտվեցինք $\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\dfrac{\sin\frac{n\cdot\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ բանաձևից)

$$S_T=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\pi k}{2n}=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}=$$

$$=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{\pi}{4n}} \qquad \nabla$$

Ընդունելով ինտեգրալի գոյությունը՝ հաշվել ինտեգրալը՝ դիտարկելով այն որպես հարմար ձևով ընտրված ինտեգրալային գումարների սահման

ա) $\int_0^{\pi}\sin xdx$

բ) $\int_1^4\frac{dx}{x^2}$

ա) $\Delta-[0;\pi]$ հատվածը տրոհենք n հատ հավասար մասերի և որպես $\xi_k(k=1;2;\cdots n)$ կետեր վերցնենք տրոհման $x_k=\pi k/n$ $(k=1;2;\cdots n)$ կետերը: Կազմենք ինտեգրալային գումարը՝

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{2n}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

(օգտվեցինք $\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\dfrac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ բանաձևից) $(\alpha\neq 0)$

Քանի որ $f(x)=\sin x$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0;\pi]$ հատվածում, ապա անկախ տրոհման եղանակից և $\{\xi_k\}$ համախմբության ընտրությունից. ինտեգրալային գումարները, երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է 0-ի, ձգտում են $\int_0^{\pi}\sin xdx$ ինտեգրալին: Մասնավորապես՝

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_0^{\pi}\sin x dx$$

Յաշվենք $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$-ը

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n} = \lim\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\lim\frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{2n}} = 2$$

Յետևաբար $\int\limits_0^{\pi}\sin x dx = 2$

բ) $\Delta-$ Վերցնենք $[1;4]$ հատվածի կամայական T տրոհում և որպես $\{\xi_k\}$ համախմբություն վերցնենք $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}\cdot x_k}$ $(k=1;2;\cdots n)$, որտեղ $x_k(k=0;1;2;\cdots n)$ տրոհման կետերն են: (Դա հնարավոր է, քանի որ $1\le p<q$ դեպքում $p<\sqrt{pq}<q$):

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k-1}\cdot x_k}(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}}-\frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1}-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Քանի որ ենթադրել էինք ինտեգրալի գոյությունը, ապա $\lim\limits_{\lambda_T\to 0}\sigma = \int\limits_1^4\frac{dx}{x^2}$:

Սակայն $\lim\limits_{\lambda_T\to 0}\sigma = \frac{3}{4}$: Յետևաբար $\int\limits_1^4\frac{dx}{x^2} = \frac{3}{4}$:

Յաջորդականության անդամները ներկայացնելով որպես որոշակի ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարներ՝ գտնել հաջորդականության սահմանը

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3+4k^3}$

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{5n-2k}}$

ա) Δ− Նշանակենք $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3+4k^3}$, $n=1;2;\cdots$: Ունենք

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{3+4\left(\frac{k}{n}\right)^3}\cdot\frac{1}{n},\ n=1;2;\cdots$$

Դեշտ է տեսնել, որ σ_n-ը իրենից ներկայացնում է $f(x)=\frac{x^2}{3+4x^3}$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը $[0;1]$ հատվածում, երբ այդ հատվածը տրոհված է n հատ հավասար մասերի և որպես ξ_k $(k=1;2;\cdots n)$ կետեր վերցված են տրոհման $x_k=\frac{k}{n}$, $(k=1;2;\cdots n)$ կետերը: Քանի որ f-ը անընդհատ է $[0;1]$ հատվածում, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_0^1 \frac{x^2}{3+4x^3}dx$$

Հաշվենք ինտեգրալը

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{3+4x^3} = \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{d(3+4x^3)}{3+4x^3} = \frac{1}{12}\ln|3+4x^3|\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\ln\frac{7}{3}$$

Հետևաբար $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{12}\ln\frac{7}{3}$ ∇

բ) Δ− Նշանակենք $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k\cdot n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{5n-2k}}$, $n=1;2;\cdots$: Ձևափոխենք σ_n-ը:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^{\frac{3}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\sqrt{5-2\frac{k}{n}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{5-2\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n},\quad n=1;2;\cdots$$

Նկատենք, որ σ_n-ը իրենից ներկայացնում է $f(x)=\frac{x}{\sqrt{5-2x}}$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը $[0;1]$ հատվածում այն տրոհման համար, երբ $[0;1]$ հատվածը տրոհված է n հատ հավասար մասերի, իսկ որպես ξ_k $(k=1;2;\cdots n)$ կետեր ընտրված են տրոհման $x_k=\frac{k}{n}$, $(k=1;2;\cdots n)$ կետերը: Քանի որ f-ը անընդհատ է $[0;1]$ հատվածում, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5-2x}}dx$$

Հաշվենք ինտեգրալը

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5-2x}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{5-2x-5}{\sqrt{5-2x}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{5-2x}\,dx + \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5-2x}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(5-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{5-2x}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{3}$$

Հետևաբար $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \dfrac{5\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{3}$ ∇

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ գտնել սահմանը

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (\text{arctgt})^2\, dt}{x^3}$$

$\Delta -$ Ունենք $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x (\text{arctgt})^2 dt = 0$: Իրոք, քանի որ $(\text{arctgt})^2$ ֆունկցիան անընդհատ է $t(-\infty;+\infty)$, ապա ըստ միջին արժեքի թեորեմի $\int_0^x (\text{arctgt})^2 dt = (\text{arctg}\, c(x))^2\cdot x$, որտեղ $c(x)$-ը պատկանում է 0 և x ծայրակետեր ունեցող հատվածին և քանի որ $(\text{arctgt})^2$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա $\lim\limits_{x\to 0}(\text{arctg}\, c(x))^2\cdot x = 0$:

Այնպես որ Լոպիտալի կանոնը կիրառելի է: Կիրառելով այն և հաշվի առնելով, որ $\left(\int_0^x (\text{arctgt})^2 dt\right)' = (\text{arctg}\, x)^2$ կստանանք՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (\text{arctgt})^2\, dt}{x^3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{arctg}\, x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3} \qquad \nabla$$

Ապացուցել, որ եթե ոչ բացասական $y = f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b]$ միջակայքում և $x_0\in[a;b]$ անընդհատության կետում $f(x_0) > 0$, ապա

$$\int_a^b f(x) > 0$$

Δ– Քանի որ x_0 կետում ֆունկցիան անընդհատ է և $f(x_0)=\alpha>0$, ապա ըստ անընդհատ ֆունկցիայի համապատասխան հատկության՝ գոյություն ունի $[x_0-\delta;x_0+\delta]\subset[a;b]$ միջակայք այնպիսին, որ $f(x)>\dfrac{\alpha}{2}$, $x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]$: Օգտվելով ինտեգրալի ադիտիվության հատկությունից՝ տրոհենք $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալը երեք ինտեգրալների գումարի՝

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx$$

Առաջին և երրորդ գումարելիները շնորհիվ $f(x)\geq 0$, $x\in[a;b]$ պայմանի, ոչ բացասական են: Քանի որ $f(x)>\dfrac{\alpha}{2}$, $x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]$, ապա ըստ ինտեգրալի համապատասխան հատկության՝

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx\geq\frac{\alpha}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx=\alpha\cdot\delta>0$$

և հետևաբար $\int_a^b f(x)dx>0$: ∇

Տրված երկու ինտեգրալներից ո՞րն է մեծ

$$\eta_1=\int_0^{\pi}x\sin xdx,\ \eta_2=\int_{2\pi}^{\pi}x\sin xdx$$

Δ– Ձևափոխենք η_2-ը

$$\eta_2=\int_{2\pi}^{\pi}x\sin xdx=-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx$$

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ $x=\pi+t$, կստանանք

$$\eta_2=-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx=\int_0^{\pi}(\pi+t)\sin tdt=\int_0^{\pi}(\pi+x)\sin xdx$$

Հետևաբար՝

$$\eta_2-\eta_1=\int_0^{\pi}(\pi+x)\sin xdx-\int_0^{\pi}x\sin xdx=\pi\int_0^{\pi}\sin xdx=2\pi>0$$

$$\eta_2>\eta_1 \qquad \nabla$$

Որոշել արտահայտության նշանը

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}x^2\cos xdx$$

$$\Delta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}x^2\cos xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}x^2\cos xdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}x^2\cos xdx$$

Ձևափոխենք $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}x^2\cos xdx$ ինտեգրալը՝ կատարելով $x+\pi=t$ փոփոխականի փոխարինում: Կստանանք՝

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}x^2\cos xdx=-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}(t-\pi)^2\cos tdt=-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}(x-\pi)^2\cos xdx$$

Հետևաբար՝

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}x^2\cos xdx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\left[x^2-(x-\pi)^2\right]\cos xdx$$

Քանի որ $x^2-(x-\pi)^2=\pi(2x-\pi)>0$, $x\in\left[\frac{3}{2}\pi;\frac{5}{2}\pi\right]$ և $\cos x\geq0$, $x\in\left[\frac{3}{2}\pi;\frac{5}{2}\pi\right]$, ապա տրված արտահայտությունը դրական է $\qquad \nabla$

Ապացուցել անհավասարությունը

$$0\leq\int_1^4\frac{x^2-16}{x-5}\sin\frac{\pi}{4}xdx\leq\frac{8(2+\sqrt{2})}{\pi}$$

Δ – Նշանակենք $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-5}$, $x\in[1;4]$ և գտնենք նրա փոքրագույն և մեծագույն արժեքները այդ հատվածում:

$$f'(x)=\frac{2x(x-5)-x^2+16}{(x-5)^2}=\frac{x^2-10x+16}{(x-5)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=8;\ \ x_2=8\notin[1;4]$$

$$f(1)=\frac{15}{4},\ f(2)=4,\ f(4)=0$$

$$f_{\text{փոքր}}=0,\ f_{\text{մեծ}}=4;\ 0\le f(x)\le 4;\ x\in[1;4]$$

Քանի որ $\sin\frac{\pi}{4}x\ge 0$, $x\in[1;4]$, ապա $0\le f(x)\cdot\sin\frac{\pi}{4}x\le 4\cdot\sin\frac{\pi}{4}x$, $x\in[1;4]$: Ինտեգրելով անհավասարությունը $[1;4]$ հատվածում, կստանանք

$$0\le\int_1^4\frac{x^2-16}{x-5}\sin\frac{\pi}{4}x\,dx\le 4\int_1^4\sin\frac{\pi}{4}x\,dx$$

Հաշվենք $\int_1^4\sin\frac{\pi}{4}x\,dx$ ինտեգրալը

$$\int_1^4\sin\frac{\pi}{4}x\,dx=-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x\Big|_1^4=\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{\pi}(2+\sqrt{2})$$

Վերջնականապես կունենանք.

$$0\le\int_1^4\frac{x^2-16}{x-5}\sin\frac{\pi}{4}x\,dx\le\frac{8}{\pi}(2+\sqrt{2}):\qquad\nabla$$

Դիցուք $f(x)$-ը դրական և անընդհատ ֆունկցիա է $[0;+\infty)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $y(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ ֆունկցիան աճող է այդ միջակայքում:

Δ – Բավական է ցույց տալ, որ $y'(x)>0$, $x\in(0;+\infty)$

$$y'(x)=\frac{x\cdot f(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

Քանի որ $(x-t)\geq 0$ (ընդհամենը $t=x$ կետում է դառնում 0, որը չի ազդի ինտեգրալի նշանի վրա) $t\in[0;x]$ և $f(x)>0$ $x\in(0;+\infty)$, ապա $y'(x)$-ը խիստ դրական է $(0;+\infty)$ միջակայքում, հետևաբար $y(x)$-ը խիստ աճող է այդ միջակայքում: ∇

Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ պարբերական (T պարբերությամբ) ֆունկցիա է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքում, ապա ցանկացած a թվի համար տեղի ունի $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$ հավասարությունը:

$\Delta-$ Օգտվելով ինտեգրալի համապատասխան հատկությունից՝ ներկայացնենք $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ինտեգրալը երեք ինտեգրալների գումարի տեսքով

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ձևափոխենք $\int_T^{a+T} f(x)dx$ ինտեգրալը կատարելով $x=T+t$ փոփոխականի փոխարինումը և օգտվելով ֆունկցիայի պարբերականությունից: Կստանանք

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$$

Քանի որ ըստ պայմանավորվածության $\int_a^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$, ապա վերջնականապես կունենանք

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

∇

Գտնել նախնականը

1612. $\int(1-2x)dx$

1613. $\int\sqrt{3x+1}dx$

1614. $\int x(x+1)(x-2)dx$

1615. $\int(3-x^2)^3dx$

1616. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

1617. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

1618. $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$

1619. $\int\frac{x^2dx}{1-x^2}$

1620. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

1621. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

1622. $\int a^{x+1}\cdot e^{x+1}dx$

1623. $\int\frac{dx}{3+4x^2}$

1624. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$

1625. $\int\frac{dx}{(3x-4)^7}$

1626. $\int x(1+x^2)^9dx$

1627. $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$

1628. $\int\frac{5+x}{5-x}dx$

1629. $\int\frac{\cos 2xdx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}$

1630. $\int\frac{e^xdx}{2+e^x}$

1631. $\int xe^{-x^2}dx$

1632. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

1633. $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

1634. $\int\frac{\sin xdx}{1+2\cos x}$

1635. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

1636. $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$

1637. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{2x^4+1}}$

1638. $\int\sqrt[4]{1-3x}dx$

1639. $\int\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$

1640. $\int\frac{xdx}{x+4}$

1641. $\int\frac{x^2dx}{1-3x^2}$

1642. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$

1643. $\int\frac{dx}{x(x-1)}$

1644. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$

1645. $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$

1646. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}dx$

1647. $\int \frac{3x-2}{2-3x+5x^2}dx$

1648. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$

1649. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$

1650. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

1651. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$

1652. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

1653. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{5+3x-x^2}}dx$

1654. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+7x^2}}$

1655. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

1656. $\int \frac{xdx}{(1-x^2)^2}$

1657. $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$

1658. $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}dx$

1659. $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$

1660. $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$

1661. $\int x\sqrt{1+x}dx$

1662. $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$

1663. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$

1664. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

1665. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

1666. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

1667. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

1668. $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx$

1669. $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}$

1670. $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$

1671. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

1672. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$

1673. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$

1674. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$

1675. $\int e^x\sqrt{e^x+1}dx$

1676. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$

1677. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

1678. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $(a^2 \neq b^2)$

1679. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$, $(a \neq b)$

1680. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

1681. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln 3x}$

1682. $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$

1683. $\int \frac{\ln 2x dx}{x \ln 4x}$

1684. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

1685. $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(1+\ln x)}$

1686. $\int \operatorname{tg} x dx$

1687. $\int \operatorname{ctg} x dx$

1688. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$

1689. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$, $|x| < \frac{\pi}{2}$

1690. $\int \frac{dx}{\sin x}$

1691. $\int \frac{dx}{\cos x}$

1692. $\int \sin^2 x dx$

1693. $\int \cos^2 x dx$

1694. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

1695. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

1696. $\int \sin^4 x dx$

1697. $\int \cos^4 x dx$

1698. $\int \sin 4x \cdot \cos 5x dx$

1699. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$

1700. $\int \sin^2 3x \cdot \sin^2 5x dx$

1701. $\int \sin^2 4x \cdot \cos^2 5x dx$

1702. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos^5 x dx$

1703. $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$

1704. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

1705. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$

1706. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$

1707. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{25\sin^2 x + 9\cos^2 x}}$

1708. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$

1709. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}}$

1710. $\int \frac{\sqrt[4]{tgx}dx}{\sin^2 x}$

1711. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

1712. $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin 2x} dx$

1713. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{e^{\sin x} - 1}}$

1714. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{ctg} x}{\cos^2 x} dx$

1715. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x} + \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} dx$

1716. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$

1717. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

1718. $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

1719. $\int \frac{\ln(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$

1720. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2} dx$

1721. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

1722. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

1723. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

1724. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

1725. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

1726. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$

1727. $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Կիրառելով մասերով ինտեգրման մեթոդը՝ գտնել նախնականը

1728. $\int \ln x dx$

1729. $\int \ln^2 x dx$

1730. $\int \ln(x^2+1) dx$

1731. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$

1732. $\int (x+1) e^x dx$

1733. $\int x \cdot e^{-x} dx$

1734. $\int x^3 \ln x dx$

1735. $\int x^n \ln x dx$, $(n \neq -1)$

1736. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

1737. $\int x \sin x dx$

1738. $\int x \cos x dx$

1739. $\int x \sin(3x+4) dx$

1740. $\int x \cos^2 x dx$

1741. $\int x \sin^2 x dx$

1742. $\int \arcsin x dx$

1743. $\int \arccos(5x-3) dx$

1744. $\int \operatorname{arctg} x dx$

1745. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

1746. $\int x^2 \arcsin 2x dx$

1747. $\int \cos(\ln x) dx$

1748. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

1749. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1750. $\int \sin(\ln x)dx$

1751. $\int \cos^2 \sqrt{x}dx$

1752. $\int \sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x}dx$

1753. $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)dx$

1754. $\int e^{ax} \cdot \sin bxdx$, $a^2 + b^2 \neq 0$

1755. $\int e^{ax} \cdot \cos bxdx$, $a^2 + b^2 \neq 0$

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի այն նախնականը, որի գրաֆիկն անցնում է տրված կետով

1756. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$, $\quad M\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$

1757. $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$, $\quad M\left(0; \dfrac{9\pi}{4}\right)$

1758. $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $\quad M(1;-2)$

1759. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$, $\quad M(1;-1)$

1760. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $\quad M\left(1; \dfrac{2}{3}\right)$

1761. $f(x) = x^2 \ln x$, $\quad M(e;4)$

1762. $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$, $\quad M\left(\dfrac{1}{4}; 1\right)$

1763. $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{40-3x-x^2}}$, $\quad M(1;2)$

1764. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$, $\quad M\left(0; \dfrac{2}{5}\right)$

1765. $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $\quad M\left(\dfrac{\pi}{3};1\right)$

Տրոհելով տրված հատվածը n հավասար մասերի, գտնել Դարբուի ստորին և վերին գումարները

1766. $f(x) = 3x - 2$, $\quad x \in [-3;4]$

1767. $f(x) = x^2 + 4x - 5$, $\quad x \in [-6;-2]$

1768. $f(x) = \sin x$, $\quad x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

1769. $f(x) = \cos x$, $\quad x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

1770. $f(x)=x^3$, $x\in[-2;3]$

1771. $f(x)=3^x$, $x\in[0;9]$

1772. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան գծային է $[a;b]$ հատվածում, ապա այդ հատվածի յուրաքանչյուր տրոհման համար այն ինտեգրալային գումարը, որի համար որպես c_k $(k=1;2;\cdots n)$ կետեր ծառայում են տրոհման հատվածների միջնակետերը, $\left(c_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\ k=1;2;\cdots n\right)$, հավասար է ինտեգրալի թվային արժեքին

Ընդունելով ինտեգրալի գոյությունը՝ հաշվել ինտեգրալը՝ դիտարկելով այն որպես հարմար ձևով ընտրված ինտեգրալային գումարների սահման:

1773. $\int_{-2}^{6}(7-3x)dx$

1774. $\int_{-5}^{3}(4-3x)dx$

1775. $\int_{-5}^{2}(9-5x)dx$

1776. $\int_{-4}^{1}(7x-4)dx$

1777. $\int_{-3}^{4}x^2dx$

Ցուցում. օգտվել $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ բանաձևից

1778. $\int_{0}^{\pi}\sin x dx$

Ցուցում. օգտվել $\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ բանաձևից

1779. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$

Ցուցում. օգտվել $\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ բանաձևից

1780. $\int_{0}^{1}2^x dx$

1781. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

Ցուցում. տրոհման կետերը ընտրել այնպես, որ կետերը կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

1782. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$

Ցուցում. վերցնել $C_k = \sqrt{x_{k-1} \cdot x_k}$, $k = 1; 2; \cdots; n$

1783. $\int_1^2 x^3 dx$

Ցուցում. տրոհման կետերը ընտրել այնպես, որ կետերը կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

Հաշվել ինտեգրալը

1784. $\int_{-0,5}^{0} (1+2x)^9 dx$

1785. $\int_1^{4,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}$

1786. $\int_{-18}^{3} \sqrt[3]{2-\frac{x}{3}} dx$

1787. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

1788. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$

1789. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

1790. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

1791. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx$

1792. $\int_{-2\pi}^{0} \sin 3x \sin 5x dx$

1793. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx$

1794. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1} dx$

1795. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx$

1796. $\int_{-2,5}^{-1} \frac{8x^2+4x+1}{2x+1} dx$

1797. $\int_{-1}^{1} x(1-x)^3 dx$

1798. $\int_{-1,5}^{-1} \frac{x}{(2x+1)^3} dx$

1799. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

1800. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1801. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$

1802. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$

1803. $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$

1804. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

1805. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

1806. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

1807. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

1808. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

1809. $\int\limits_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

1810. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

1811. $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1812. $\int\limits_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$

1813. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$

1814. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

1815. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$

1816. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\,dx$

1817. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 x\,dx$

1818. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

1819. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$

1820. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$

1821. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$

1822. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\sin 2x}$

1823. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2-\cos^4 x}}$

1824. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

1825. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

1826. $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

1827. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$

1828. $\int_1^3 \ln xdx$

1829. $\int_1^2 x\ln xdx$

1830. $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx$

1831. $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$

1832. $\int_0^{\pi} x^2\sin xdx$

1833. $\int_1^3 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}dx$

1834. $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 xdx$

1835. $\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+1}dx$

1836. $\int_0^{e-1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{2+\ln(x+1)}}$

1837. $\int_1^{\ln 6}\sqrt{e^x-2}dx$

1838. $\int_0^2 |1-x|dx$

1839. $\int_{\frac{1}{2}}^{e}|\ln x|dx$

1840. $\int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

1841. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$

Ապացուցել, որ ցանկացած m ***և*** n ***ամբողջ թվերի համար տեղի ունի հավասարությունը***

1842. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$

1843. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$

1844. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=0$

Հաջորդականության անդամները ներկայացնելով որպես որոշակի ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարներ՝ գտնել հաջորդականության սահմանը

1845. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

1846. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

1847. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn+n^2}}$

1848. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}$

1849. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$

1850. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^2k}{(n^2+k^2)^2}$

1851. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3}{\sqrt{9n^2-4k^2}}$

1852. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{5n^2-3k^2}$

1853. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{n+3k}}$

1854. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n^{-\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{2n+k}}$

1855. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2n}{16n^2-9k^2}$

1856. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{5n-2k}}$

1857. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3+4k^3}$

1858. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^7}{(n^4+k^4)^2}$

1859. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{5k}{7n^2+4k^2}$

1860. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{6n}{5n^2+4k^2}$

1861. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n^{-\frac{9}{5}}}{\sqrt[5]{3n-k}}$

1862. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(\ln(n+k)-\ln n)$

1863. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k\pi}{n}$

1864. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$

Գտնել ածանցյալը

1865. $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b\sin t^2dt$

1866. $\frac{d}{dx}\int\limits_x^b\sin t^2dt$

1867. $\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt$

1868. $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

1869. $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

1870. $\frac{d}{dx}\int\limits_e^{x^4}e^{t^2}dt$

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ գտնել սահմանը

1871. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x^2+x}$

1872. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{x^3}$

1873. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2} dt}$

1874. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\, dt}$

1875. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

1876. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{2x} \ln(1+t) dt}{\int\limits_{x^4}^{x^2} \dfrac{\sin t}{t} dt}$

Տրված երկու ինտեգրալներից ո՞րն է մեծ

1877. $\eta_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$, $\quad \eta_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx$

1878. $\eta_1 = \int\limits_0^1 e^{-x} dx$, $\quad \eta_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$

1879. $\eta_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$, $\quad \eta_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$

1880. $\eta_1 = \int\limits_0^{\pi} x \sin x dx$, $\quad \eta_2 = \int\limits_{2\pi}^{\pi} x \sin x dx$

Որոշել արտահայտության նշանը

1881. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx$

1882. $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx$

1883. $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx$

1884. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} x^2 \cos x dx$

1885. $\int\limits_0^1\left(e^{-x}-e^{-x^2}\right)dx$

1886. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{x+1}dx$

1887. $\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{10}\right)dx$

1888. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

Ապացուցել անհավասարությունը

1889. $\frac{4}{9}(e-1)\le\int\limits_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)}\le\frac{1}{2}(e-1)$

1890. $\frac{1}{\pi}\le\int\limits_0^2\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{(x+1)(3-x)}dx\le\frac{4}{3\pi}$

1891. $\frac{1}{2\pi}\le\int\limits_0^1\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{(2x+1)(3-2x)}dx\le\frac{2}{3\pi}$

1892. $-\frac{9}{4}\le\frac{1}{\pi^3}\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi}(2\sin x+\sin 2x)x^2dx\le\frac{27\sqrt{3}}{16}$

1893. $0\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\cos x\cdot e^{\frac{2}{\pi}x}dx\le\frac{\pi 3\sqrt{3}(e-1)}{32}$

1894. $\frac{9}{4}\left(\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\le\int\limits_0^{\sqrt{3}}(\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x)x^3dx\le 0$

1895. $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}\le\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)dx\le\frac{\pi}{48}(1+3\sqrt{3})$

1896. $\frac{7}{6}e(e^3-1)\le\int\limits_1^4\frac{x^2+5}{x^2+2}e^x dx\le 2e(e^3-1)$

1897. $\frac{2}{9}(e-1)\le\int\limits_0^2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(x+2)(4-x)}dx\le\frac{1}{4}(e-1)$

1898. $4e(e^3-1)\le\int\limits_1^4\frac{x^2+16}{x+3}e^x dx\le\frac{32}{7}e(e^3-1)$

1899. $0\le\int\limits_1^4\frac{x^2-16}{x-5}\sin\frac{\pi}{4}x dx\le\frac{8(2+\sqrt{2})}{\pi}$

1900. $-\frac{3}{\pi}\le\int\limits_0^3\frac{x^2-8}{2x-9}\sin\frac{\pi}{3}x dx\le\frac{36}{5\pi}$

1901. $\frac{96}{7\pi}\le\int\limits_0^3\frac{x^2-16}{2x-7}\sin\frac{\pi}{3}x dx\le\frac{42}{\pi}$

1902. Դիցուք $f(x)$-ը դրական և անընդհատ ֆունկցիա է $[0;+\infty)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $\varphi(x)=\frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$ ֆունկցիան աճող է այդ միջակայքում:

1903. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ և դրական է $[0;1]$ հատվածում, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int\limits_0^1 \ln f(x)dx}$

1904. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ինտեգրելի են $[a;b]$ միջակայքում, անընդհատ են x_0 կետում, $f(x)\le g(x)$, $x\in[a;b]$ և $f(x_0)<g(x_0)$, ապա $\int\limits_a^b f(x)dx<\int\limits_a^b g(x)dx$

1905. Ապացուցել, որ եթե ոչ դրական $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b]$ միջակայքում և $x_0\in[a;b]$ անընդհատության կետում $f(x_0)<0$, ապա գոյություն ունի m դրական թիվ այնպես, որ $\int\limits_a^b f(x)dx<-m$:

1906. Ապացուցել, որ եթե ոչ բացասական $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b]$ միջակայքում և $x_0\in[a;b]$ անընդհատության կետում $f(x_0)>0$, ապա գոյություն ունի M դրական թիվ այնպես, որ $\int\limits_a^b f(x)dx>M$:

1907. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $\int_a^b f^2(x)dx=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x)\equiv 0$, $x\in[a;b]$:

1908. Դիցուք թվային ուղղի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան զույգ է: Ապացուցել, որ եթե այն ինտեգրելի է յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում, ապա $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ֆունկցիան կենտ է:

1909. Դիցուք թվային ուղղի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կենտ է: Ապացուցել, որ եթե այն ինտեգրելի է յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում, ապա $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ֆունկցիան զույգ է:

1910. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և դրական $[a;b]$ հատվածում: Օգտվելով $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից, ապացուցել, որ գոյություն ունի $\alpha>0$ թիվ այնպիսին, որ $\int_a^b f(x)dx>\alpha$:

1911. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և բացասական $[a;b]$ հատվածում: Օգտվելով $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից, ապացուցել, որ գոյություն ունի $\alpha>0$ թիվ այնպիսին, որ $\int_a^b f(x)dx<-\alpha$:

1912. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b]$ հատվածում, ապա գոյություն ունի c կետ $(a\le c\le b)$ այնպիսին, որ

$$\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx$$

1913. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b]$ հատվածում և c_1,c_2,c_3 կետերը կամայական կետեր են այդ միջակայքից, ապա անկախ նրանց փոխադարձ դասավորությունից տեղի ունի

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx=\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx$$

1914. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան $\frac{a+b}{2}$ կետի նկատմամբ սիմետրիկ կետերում ընդունում է հավասար արժեքներ՝ $f(x)=f(a+b-x)$, $x\in[a;b]$, ապա

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$$

1915. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^b f(a+b-x)dx$$

1916. Ապացուցել, որ եթե $[0;1]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի

ա) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

բ) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

1917. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ, պարբերական (T պարբերությամբ) ֆունկցիա է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքում, ապա ցանկացած a թվի համար տեղի ունի $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ հավասարությունը

1918. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է $[a;b]$ հատվածում և

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\Delta_n$:

1919. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a;b]$ հատվածում, ապա կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ կամայական $\alpha\in[a;b]$ և $\beta\in[a;b]$, $0<\beta-\alpha<\delta$ թվերի համար տեղի ունի $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx<\varepsilon$ անհավասարությունը:

ԳԼՈՒԽ V

ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ: ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

ա) Եթե տարածական կորը տրված է $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t \in [t_0;T])$ պարամետրական հավասարումներով և գոյություն ունեն $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ անընդհատ ածանցյալներ, երբ $t \in [t_0;T]$, ապա կորի երկարությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\ell = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt \tag{1}$$

Եթե $z(t) \equiv 0$ $(t \in [t_0;T])$, ապա կորը հարթ է, և նրա երկարության բանաձևը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\ell = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \tag{2}$$

ա) Եթե հարթ կորը տրված է $y = y(x)$ $(x \in [a;b])$, անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայով, ապա կորի երկարությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \tag{3}$$

2. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

ա) Դիցուք $f(x)$-ը և $g(x)$-ը $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաներ են և $g(x) \le f(x)$ $(x \in [a;b])$:

Հարթության վրա

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le f(x) \end{cases}$$

անհավասարությունների համակարգին բավարարող $(x;y)$ կետերի բազմության (սեղանակերպի, կորագիծ սեղանի) մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx \qquad (4)$$

բ) Եթե տրված հարթ պատկերը սահմանափակող կորը (պատկերի եզրագիծը) որոշված է $x=x(t)$, $y=y(t)$, $(t\in[t_0;T])$ պարամետրական հավասարումներով $y(t)$-ն անընդհատ է, իսկ $x(t)$-ն՝ անընդհատ դիֆերենցելի $[t_0;T]$ հատվածում, ապա տրված պատկերի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=\int_{t_0}^{T}y(t)\cdot x'(t)dt \qquad (5)$$

3. ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼԸ

$[a;b]$ հատվածում անընդհատ $f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $x=a$, $x=b$, $y=0$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերն ox առանցքի շուրջ պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (6)$$

4. ՊՏՏՄԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

$[a;b]$ հատվածում անընդհատ $f'(x)$ ածանցյալ ունեցող $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ox առանցքի շուրջ պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \qquad (7)$$

5. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Սահմանում: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a;+\infty)$ միջակայքում և $\forall A>a$ թվի համար ինտեգրելի է $[a;A]$ հատվածում: $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ սիմվոլը կոչվում է անիսկական ինտեգրալ: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ սահմանը (վերջավոր, $+\infty$ կամ $-\infty$), ապա այն համարվում է $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի արժեք: Եթե նշված սահմանը վերջավոր է, ապա անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, իսկ եթե այդ սահմանն անվերջ է, կամ գոյություն չունի, ապա անիսկական ինտեգրալը համարվում է տարամետ: Համանման ձևով սահմանվում է անիսկական ինտեգրալը $(-\infty;a]$ միջակայքում:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքում և ինտեգրելի է ցանկացած $[a;b]$ հատվածում, ապա $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, եթե որևէ C թվի համար միաժամանակ զուգամետ են $\int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx$ և $\int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները, հակառակ դեպքում՝ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը համարվում է տարամետ: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$-ի արժեք կոչվում է $\left(\int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx+\int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx\right)$ գումարը, եթե վերջինս իմաստ ունի:

բ) Անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ:

Սահմանում: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անսահմանափակ է $[a;b]$ հատվածում $(a<b)$ և ինտեգրելի ցանկացած $[a;A]$ միջակայքում, որտեղ $A<b$: $\int\limits_a^b f(x)dx$ սիմվոլը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ $[a;b]$ հատվածում: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{A\to b-0}\int\limits_a^A f(x)dx$ սահմանը (վերջավոր, $+\infty$ կամ $-\infty$), ապա այն համարվում է $\int\limits_a^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի արժեք: Եթե նշված սահմանը վերջավոր է, ապա անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, իսկ եթե այդ սահմանն անվերջ է, կամ գոյություն չունի՝ անիսկական ինտեգրալը համարվում է տարամետ:

Համանման ձևով սահմանվում է նաև $\int_a^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալ, երբ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[a;b]$-ում, բայց ինտեգրելի է ցանկացած $[A;b]$ միջակայքում, որտեղ $A>a$: Կարելի է դիտարկել նաև այն դեպքը, երբ $[a;b]$-ում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է ինչպես b-ի այնպես էլ a-ի շրջակայքում, բայց ինտեգրելի է ցանկացած $[A;B]$ միջակայքում, որտեղ $A>a$, $B<b$: Այդ դեպքում անիսկական ինտեգրալը համարվում է զուգամետ, եթե որևէ $c\in(a;b)$ դեպքում միաժամանակ զուգամետ են $\int_a^c f(x)dx$ և $\int_c^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները, ընդ որում ընդունվում է, որ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

6. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

ա) Կոշիի սկզբունքը:

Թեորեմ: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[a;b]$-ում և ինտեգրելի ցանկացած $[A;b]\subset(a;b]$ հատվածում, որտեղ $(A>a)$ ապա $\int_a^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի դեպքում գոյություն ունենա $A_0=A_0(\varepsilon)$ թիվ այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $[A_1;A_2]\subset(a;A_0)$ հատվածի համար բավարարվի $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$ անհավասարությունը:

Համանման ձևով ձևակերպվում են Կոշիի սկզբունքի տարբերակները մյուս անիսկական ինտեգրալների դեպքում:

բ) Բաղդատման առաջին հայտանիշը:

Թեորեմ: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a;+\infty)$-ում և ցանկացած $A>a$ դեպքում ինտեգրելի են $[a;A]$ հատվածում $0\le f(x)\le g(x)$, $(x\in[a;+\infty))$, ապա $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է $\int_a^{+\infty} f(x)dx$-ի զուգամիտությունը:

գ) Բաղդատման երկրորդ հայտանիշը:

Թեորեմ: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ոչ բացասական են $[a;+\infty)$ միջակայքում, ցանկացած $A>a$ դեպքում ինտեգրելի են $[a;A]$ հատվածում և գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ վերջավոր և 0-ից տարբեր սահմանը, ապա $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ և $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալները կզուգամիտեն կամ կտարամիտեն միաժամանակ: Նման ձևով ձևակերպվում են նաև բաղդատման հայտանիշների տարբերակները մյուս անիսկական ինտեգրալների համար:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

ա) Գտնել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=6x-x^2$ պարաբոլով և $y=x+4$ ուղղով:

$\Delta-$ Գտնենք պարաբոլի և ուղղի հատման կետերի աբսցիսները՝ նկատի ունենալով, որ այդ կետերում պարաբոլի և ուղղի օրդինատները իրար հավասար են:

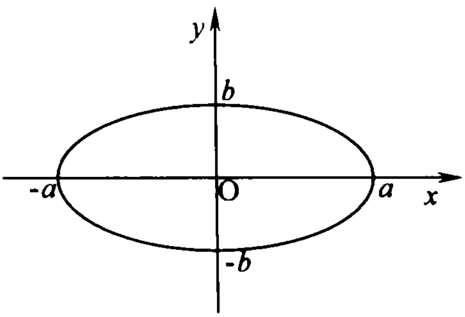
$$6x-x^2=x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0\,, \qquad x_1=1\,,\ x_2=4$$

Համաձայն (4) բանաձևի.

$$S=\int_1^4(6x-x^2-x-4)dx=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=\frac{5}{2}x^2\Big|_1^4-\frac{x^3}{3}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4=\frac{9}{2} \quad \nabla$$

բ) Գտնել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0)\ \text{(էլիպս)}$$



$\Delta-$ Կորի հավասարումից հետևում է, որ եթե $(x;y)$ կետը պատկանում է կորին, ապա $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$ կետերը ևս պատկանում են այդ կորին: Այնպես, որ կոորդինատների առանցքները կհանդիսանան այդ կորի սիմետրիայի առանցքներ և հետևաբար պատկերը, որի մակերեսը պահանջվում է հաշվել, այդ առանցքներով տրոհվում է 4 հատ հավասարամեծ պատկերների (տե՛ս գծագիրը):

Նշանակենք S_1-ով այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է ox, oy առանցքներով և $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ կորով, որտեղ x արգումենտը փոխվում է $[0;a]$ հատվածում:

$$S_1=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Կատարելով $v=a\sin t$, $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ տեղադրությունը կունենանք՝

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi a^2}{4}$$

Հետևաբար $S_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi ab}{4}$

Քանի որ $S=4S_1$, ապա պատկերի S մակերեսը հավասար է πab-ի ∇

գ) Հաշվել $y=4x-x^2+5$ պարաբոլով և $x_1=0$, $x_2=3$ աբսցիսներ ունեցող կետերում պարաբոլին տարված շոշափողներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

$\Delta-$Նախ գտնենք $x_1=0$ և $x_2=3$ կետերում պարաբոլին տարված շոշափողների հավասարումները, օգտվելով f ֆունկցիայի գրաֆիկի $M_0(x_0;y_0)$ կետով տարված շոշափողի՝ $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ հավասարումից:

$y=4x+5$ $\quad$ $x_1=0$ կետում տարած շոշափողի հավասարումը

$y=14-2x$ $\quad$ $x_2=3$ կետում տարած շոշափողի հավասարումը

Գտնենք շոշափողների հատման կետի աբսցիսը՝ լուծելով

$$4x+5=14-2x\,,\ x=\frac{3}{2}$$

Պատկերը, որի մակերեսը ցանկանում ենք գտնել, իրենից ներկայացնում է երկու սեղանակերպ պատկերների միավորում: Առաջինը սահմանափակված է վերևից՝ $y=4x+5$ ուղղով, ներքևից՝ $y=4x-x^2+5$ պարաբոլով, կողքերից՝ $x=0$ և $x=\frac{3}{2}$ ուղիղներով: Երկրորդը՝ սահմանափակված է վերևից՝ $y=14-2x$ ուղղով, ներքևից՝ $y=4x-x^2+5$ պարաբոլով, կողքերից՝ $x=\frac{3}{2}$ և $x=3$ ուղիղներով: Հետևաբար

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}(4x+5-4x+x^2-5)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(14-2x-4x+x^2-5)dx=\frac{9}{4}\qquad\nabla$$

Հետազոտելով ինտեգրալների զուգամիտությունը կախված p պարամետրից

ա) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

բ) $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$

$\Delta-$ա) $\frac{1}{x^p}$ ֆունկցիան ցանկացած $A>1$ համար ինտեգրելի է $[1;A]$ հատվածում, ընդ որում

$$F(A)=\int_1^A\frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^A=\frac{A^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p},\ p\neq1$$

եթե $p>1$, ապա $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=\frac{1}{p-1}$, եթե $p<1$ $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)$ գոյություն չունի:

Հետևաբար, եթե $p>1$, ինտեգրալը զուգամետ է, եթե $p<1$, ինտեգրալը տարամետ է: Ինտեգրալը տարամետ է նաև $p=1$ դեպքում: Իրոք

$$F(A)=\int_1^A\frac{dx}{x}=\ln A\to+\infty\text{-ի, երբ } A\to+\infty:$$

Այսպիսով $p>1$ դեպքում ինտեգրալը զուգամետ է, $p\leq1$ դեպքում՝ տարամետ: ∇

բ) $\Delta-$ Նշանակենք $F(\alpha)=\int_\alpha^1\frac{dx}{x^p}$, $(0<\alpha\leq1)$

Ունենք $F(\alpha)=\int_\alpha^1\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}(1-\alpha^{1-p}), & \text{եթե } p\neq1\\ -\ln\alpha, & \text{եթե } p=1\end{cases}$

Հետևաբար $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha)=\dfrac{1}{1-p}$, եթե $p<1$ և $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha)=+\infty$ եթե $p\geq 1$:

Այսպիսով ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $p<1$ և տարամետ է, երբ $p\geq 1$:

Հաշվել անիսկական ինտեգրալը

ա) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

Δ – ըստ սահմանման

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}=\lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}=\lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0} 2\int_\alpha^4 \frac{d\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to+0} 2\left(\ln 3-\ln(1+\sqrt{\alpha})\right)=2\ln 3 \qquad \nabla$$

բ) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Δ – Նշանակենք $F(A)=\displaystyle\int_1^A \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$, $A\geq 1$

$$F(A)=\int_1^A \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_1^A \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^A \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{A-\frac{1}{A}}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{A-\frac{1}{A}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad \nabla$$

գ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Δ – Նշանակենք $\sigma(A)=\displaystyle\int_A^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $A\leq -2$

$$\sigma(A)=\int_A^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_A^{-2} \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\int_A^{-2} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{1}{A}$$

$$\lim_{A\to-\infty}\sigma(A)=\lim_{A\to-\infty}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{1}{A}\right)=-\frac{\pi}{6} \qquad \nabla$$

Անիսկական ինտեգրալը հետազոտել զուգամիտության տեսակետից

ա) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{2x+3}}{1+\sqrt[6]{x^7+4}}$

բ) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3\sqrt[4]{x}\cdot\sin^2 3x}{4x\sqrt[3]{x}+7x}$

ա) Նշանակենք $f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{2x+3}}{1+\sqrt[6]{x^7+4}}$, $x\in[1;+\infty)$: Ունենք՝

$$f(x)=\frac{x^{\frac{1}{5}}\sqrt[5]{2+\frac{3}{x}}}{x^{\frac{7}{6}}\left(\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}+\sqrt[6]{1+\frac{4}{x^7}}\right)}=\frac{1}{x^{\frac{29}{30}}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2+\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}+\sqrt[6]{1+\frac{4}{x^7}}}$$

որտեղից կհետևի, որ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{29}{30}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2+\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}+\sqrt[6]{1+\frac{4}{x^7}}}=\sqrt[5]{2}:$$

Քանի որ $g(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{29}{30}}}$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը տարամետ է $\left(p=\dfrac{29}{30}<1\right)$, ապա ըստ բաղդատման երկրորդ հայտանիշի մեր ինտեգրալը ևս տարամետ է: ∇

բ) $\Delta-$ Նշանակենք $f(x)=\dfrac{3\sqrt[4]{x}\cdot\sin^2 3x}{4x\sqrt[3]{x}+7x}$, $x\in[1;+\infty)$ և օգտվենք բաղդատման առաջին հայտանիշից:

$$f(x)=\frac{3\sqrt[4]{x}\cdot\sin^2 3x}{4x\sqrt[3]{x}+7x}\le\frac{3\sqrt[4]{x}}{x\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{x^{\frac{13}{12}}},\ x\in[1;+\infty)$$

Ունենք

Քանի որ $g(x)=\dfrac{3}{x^{\frac{13}{12}}}$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է

$\left(p=\dfrac{13}{12}>1\right)$, ապա մեր ինտեգրալը ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի և զուգամետ է: ∇

p և q պարամետրերից կախված հետազոտել ինտեգրալի զուգամիտությունը:

$$J=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$$

Δ – Դիտարկենք p պարամետրի բոլոր հնարավոր արժեքները:

ա) $p>1$: Այս դեպքում p-ն կարելի է ներկայացնել $p=1+2\alpha$ տեսքով, որտեղ $\alpha>0$: Ընդինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$f(x)=\frac{1}{x^{1+\alpha}}\cdot g(x),\ \text{որտեղ}\ g(x)=\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}$$

Ցույց տանք, որ ցանկացած q-ի համար

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}=0 \qquad (1)$$

Իրոք՝ եթե $q\geq 0$-ը (1)-ը ակնհայտ է: Ենթադրենք $q<0$: Այդ դեպքում $g(x)$-ը կընդունի հետևյալ տեսքը:

$$g(x)=\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha},\ \text{որտեղ}\ \beta=-q>0$$

Նշանակենք $\ln x=\dfrac{t}{\alpha}$: Երբ $x\to+\infty$, $t\to+\infty$ և հետևաբար՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\beta}{\alpha^\beta\cdot e^t}=\frac{1}{\alpha^\beta}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\beta}{e^t}$$

Կիրառելով k անգամ Լոպիտալի կանոնը, որտեղ $k=[\beta]+1$ և նկատի ունենալով, որ $\beta-k<0$ կստանանք՝

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\beta}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\beta\cdot t^{\beta-1}}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)\cdot t^{\beta-k}}{e^t}=0$$

Այսպիսով $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\alpha>0$, $q\in R$

Հետևաբար գոյություն ունի $x_0>2$ այնպիսի թիվ, որ

$$0<g(x)<1,\ x\in[x_0;+\infty)$$

Որտեղից կհետևի

$$f(x)=\frac{1}{x^{1+\alpha}}g(x)<\frac{1}{x^{1+\alpha}},\ x\in[x_0;+\infty) \tag{2}$$

Ըստ բաղդատման առաջին հայտանիշի կհետևի $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի

զուգամիտությունը և հետևաբար $\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Վերջնականապես ստացանք, որ եթե $p>1$, ապա ինտեգրալը ցանկացած $q\in R$ -ի համար զուգամետ է:

բ) $p=1$

Կատարելով $\ln x=t$ փոփոխականի փոխարինում, կստանանք

$$J=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^q x}=\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}$$

Ինտեգրալը կլինի զուգամետ, եթե $q>1$ և տարամետ, եթե $q\le 1$

գ) $p<1$

Այս դեպքում p-ն կարելի է ներկայացնել $p=1-2\alpha$ տեսքով, որտեղ $\alpha>0$: Ներկայացնենք ընդինտեգրալ $f(x)$ ֆունկցիան հետևյալ տեսքով՝ $f(x)=\frac{g(x)}{x^{1-\alpha}}$, որտեղ $g(x)=x^{\alpha}(\ln x)^{-q}$ նույն ձևով, ինչպես ա) դեպքում կարող ենք ցույց տալ, որ

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}(\ln x)^{-q}=+\infty,\ \alpha>0,\ q\in R$$

Հետևաբար գոյություն ունի $x_0>2$ այնպիսին, որ $g(x)>1$, $x>x_0$: Այնպես, որ $f(x)>\frac{1}{x^{1-\alpha}}$ $x\in[x_0;+\infty)$: Քանի որ $\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ ինտեգրալը տարամետ

է $(1-\alpha<1)$, ապա տարամետ կլինի $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը և հետևաբար տարամետ կլինի $\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը: Այսպիսով վերջնականապես ստացանք:

եթե $p>1$, ապա ցանկացած $q\in R$ համար ինտեգրալը կլինի զուգամետ:

Եթե $p=1$, ապա ինտեգրալը զուգամետ է, եթե $q>1$ և տարամետ է, եթե $q\le 1$: Եթե $p<1$, ապա ինտեգրալը ցանկացած $q\in R$ համար կլինի տարամետ:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը

1920. $y=2x+3$, $y=0$, $x=-1$, $x=0$

1921. $y=3-4x$, $y=0$, $x=-2$, $x=-1$

1922. $y=2-2x-x^2$, $y=-1$

1923. $y=x^2+x$, $y=2$

1924. $y=-x^2$, $y+x+2=0$

1925. $y=x^2+4x$, $y=x+4$

1926. $4y=8x-x^2$, $4y=x+6$

1927. $y=8+2x-x^2$, $2x-y+4=0$

1928. $y=8+2x-x^2$, $2x-y+4=0$, $y=0$

1929. $x^2-6x-4y+13=0$, $x-2y-1=0$

1930. $4x^2-8x-y+5=0$, $2x-y+1=0$

1931. $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=3x$

1932. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$

1933. $y=x^2+1$, $y=4x^2-2$

1934. $y=x^2+x+1$, $y=2-x^2$

1935. $y=x-2x^2$, $y=-6$, $x=0$, $(x\le 0)$

1936. $y=3x^2-x-9$, $y=x-1$, $x=-1$, $(x\ge -1)$

1937. $y=3-x-x^2$, $y=-x^2$, $x=5$

1938. $y=x^2+1$, $y=2x$, $x=-2$

1939. $y=-x^2$, $y=2x+1$, $x=-4$

1940. $y=3x^2+x+1$, $y=-x$, $x=-2$, $x=3$

1941. $y=1-x^2$, $y=2+x^2$, $x=-3$, $x=-1{,}5$

1942. $y^2=1-x$, $y=2x-1$, $x=0$

1943. $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$

1944. $x=-y^2$, $x=9-2y^2$

1945. $y=(x-4)^2$, $y=16-x^2$, $y=0$

1946. $3y^2-16x+32=0$, $4x-3y-8=0$

1947. $y=e^{-x}$, $y=2x+1$, $x=-2$

1948. $y=e^{x}$, $y=e^{-x}$, $x=\ln 2$

1949. $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{x}$, $x=\ln(0,25)$

1950. $y=2e^{\frac{x}{2}}$, $y=-3x^{2}$, $x=0$, $x=2$

1951. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=3-2x$

1952. $y=\dfrac{1}{x-1}$, $y+4x+1=0$

1953. $y=\dfrac{2}{2-x}$, $4y-x-4=0$

1954. $y=\dfrac{3}{x-1}$, $y=x^{2}+x-3$

1955. $y=\dfrac{3}{1-x}$, $y=3-5x-3x^{2}$

1956. $y=\dfrac{4}{x^{2}}$, $y=x-1$, $x=1$

1957. $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $y=0$

1958. $y=\sqrt{1-x}$, $y=2x+1$, $x=-3$

1959. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^{2}$

1960. $y=\sqrt[3]{x-1}$, $y=x-1$, $x\geq 1$

1961. $y=x^{3}$, $y=\sqrt{x}$

1962. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$

1963. $y=x^{2}$, $x\cdot y=8$, $x=6$

1964. $y=x^{3}$, $y=2x$

1965. $y=x+1$, $y=\cos x$, $y=0$

1966. $y=x-\dfrac{\pi}{2}$, $y=\cos x$, $x=0$

1967. $y=\dfrac{1}{1+x^{2}}$, $y=\dfrac{x^{2}}{2}$

1968. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$

1969. $y=\sin x$, $y=2-\sin x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$

1970. $y=|x|$, $y=2$

1971. $y=|x-1|$, $y=1+6x-3x^2$

1972. $y^2=2x$, $x=\sqrt{8-y^2}$

1973. $y=\dfrac{6}{x+5}$, $y=|x|$, $x\geq -2$

1974. $y=|\ln x|$, $y=0$, $x=\dfrac{1}{e}$, $x=e$

1975. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

1976. $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$, $(0\leq x\leq \pi)$

1977. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$, $y=0$, $\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

1978. $y=2^{x-3}+1$, $y=2^{3-x}+1$, $y=1{,}5$

1979. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=x^2-2x+3$ պարաբոլով, $M(3;6)$ կետում նրա շոշափողով և կոորդինատական առանցքներով:

1980. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=x^2-2x+2$ պարաբոլով, $M(3;5)$ կետում նրա շոշափողով և oy առանցքով:

1981. Հաշվել այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=\ln x$ կորով և $M(e;1)$ կետում նրա շոշափողով և ox առանցքով:

1982. Գտնել $y=\dfrac{1}{x}$ կորով, այդ կորի $M(1;1)$ կետից տարած շոշափողով և $y=x-6$ ուղղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1983. Գտնել $y=x^2-2x+2$ կորով, կորի oy առանցքի հետ հատման կետում տարված շոշափողով և $x=1$ ուղղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1984. Գտնել $y=x^2-2x+2$ կորով և $x=1$ աբսցիս ունեցող կետից $y=\ln x+3$ կորին տարված շոշափողով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1985. Հաշվել $y=\sqrt{x}$ կորով և $M(2;1{,}5)$ կետից այդ կորին տարված շոշափողներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1986. Հաշվել $y=x^2$, $y=6x+27$, $y=32-4x$, $(-3\le x\le 4)$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1987. Հաշվել $y=x^2+4$, $y=3x+32$, $y=14-3x$, $(-4\le x\le 2)$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1988. Հաշվել $y=x^2+5$, $y=x+17$, $y=29-2x$, $(-3\le x\le 4)$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1989. Հաշվել $y=x^2+4x+9$ պարաբոլով և $x_1=-3$, $x_2=0$ աբսցիսներ ունեցող կետերում պարաբոլին տարված շոշափողով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1990. Հաշվել $y=4x-x^2+1$ պարաբոլով և $x_1=0$, $x_2=3$ աբսցիսներ ունեցող կետերում պարաբոլին տարված շոշափողներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

1991. Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում $y=kx+9$ ուղղով և $y=x^2+7x+5$ պարաբոլով սահմանափակված պատկերն ունի փոքրագույն մակերեսը:

Հաշվել կորի երկարությունը

1992. Հաշվել $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=3$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1993. Հաշվել $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=1$ և $x=4$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1994. Հաշվել $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=1$ և $x=e$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1995. Հաշվել $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=1$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1996. Հաշվել $y=\sqrt{2x-x^2}-1$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=\frac{1}{4}$ և $x=1$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1997. Հաշվել $y=\ln(x^2-1)$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=2$ և $x=5$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1998. Հաշվել $y=\ln\sin x$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=\frac{\pi}{3}$ և $x=\frac{\pi}{2}$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

1999. Հաշվել $y=1-\ln\cos x$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=\frac{\pi}{6}$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2000. Հաշվել $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=\frac{9}{16}$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2001. Հաշվել $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=\frac{8}{9}$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2002. Հաշվել $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=3/4$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2003. Հաշվել $y=-x^{\frac{2}{3}}-1$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=5\sqrt{5}$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2004. Հաշվել $y=\sqrt{\frac{x}{3}}(1-x)$ պարաբոլի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=x_0>0$ և $x=1$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2005. Հաշվել $y=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=9$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2006. Հաշվել $y=\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3}{4x}\right)$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=1$ և $x=4$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2007. Հաշվել $y=\arcsin e^x$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=-\ln 7$ և $x=-\ln 2$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2008. Հաշվել $y=\frac{x}{4}\sqrt{2-x^2}$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=0$ և $x=1$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

2009. Հաշվել $y=2\sqrt{1+e^{\frac{x}{2}}}$ կորի աղեղի երկարությունը, որը սահմանափակված է $x=\ln 9$ և $x=\ln 64$ աբսցիսներ ունեցող կետերով:

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորի երկարությունը

2010. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$

2011. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$

2012. $x=t\sin t+\cos t$, $y=\sin t-t\cos t$, $0\le t\le 2$

2013. $x=6-3t^2$, $y=4t^3$, $(x\ge 0)$

2014. $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$, $0\le t\le 2\pi$

2015. $x=8at^3$, $y=3a(2t^2-t^4)$, $(y\ge 0)$

2016. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\le t\le \pi$

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերն ox ***առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը:***

2017. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=x^2-4$ և $y=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2018. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\dfrac{4}{x}$, $x=1$ և $x=4$ գծերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2019. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\sqrt{x}$, $x=1$ և $y=0$ գծերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2020. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\sqrt{x}$ և $y=x^2$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2021. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $2y=x^2$ և $2x+2y-3=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2022. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=e^{2x}$, $x=1$ և $y=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2023. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=x\cdot e^x$, $x=1$ և $y=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2024. Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\sqrt{x}\cdot e^x$, $x=1$ և $y=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2025. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=x^3$, $y=0$ և $x=2$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2026. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=x^{\frac{2}{3}}$, $y=0$, $x=1$, $x\geq 0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2027. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y^2=2x$, $y=2$, $x=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2028. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$, $(0\leq x\leq \pi)$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2029. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\sin 2x$, $y=0$, $\left(0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right)$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2030. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\sqrt{x}e^{-x}$, $y=0$, $x=a$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2031. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=\frac{\ln x}{x}$, $x=e$, $y=0$, $1\leq x\leq e$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

2032. Յաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ կորով սահմանափակված պատկերի պտտումից ox առանցքի շուրջը:

Յաշվել տրված կորն ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը:

2033. $y=\sqrt{x}$, $2\leq x\leq 6$

2034. $y=\frac{1}{x}$, $1\leq x\leq 2$

2035. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $0\leq x\leq \ln 2$

2036. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$, $1\leq x\leq 2$

2037. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

2038. $y = \dfrac{a^2 + x^2}{2a}$, $0 \le x \le a$

Հաշվել տրված կորն oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը:

2039. $y = \dfrac{x^2}{6}$, $\quad 0 \le x \le 4$

2040. $3x = 4\cos y$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \le y \le 0$

2041. $x = \sqrt{y}\left(\dfrac{1}{3}y - 1\right)$, $\quad 3 \le y \le 4$

2042. $x = \sin y$, $\quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

Հաշվել անիսկական ինտեգրալը

2043. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

2044. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

2045. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-3x}dx$

2046. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

2047. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4}{(x^5+1)^3}dx$

2048. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

2049. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

2050. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

2051. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2}dx$

2052. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}dx$

2053. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{x}dx$

2054. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

2055. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos 3x dx$

2056. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{2-5x^2}$

2057. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

2058. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

2059. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$

2060. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

2061. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+3}}$

2062. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$

2063. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$

2064. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

2065. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$

2066. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$

2067. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$

2068. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

2069. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$

2070. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

2071. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

2072. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

2073. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

2074. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

2075. $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$

2076. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$

2077. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$

2078. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$

2079. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

2080. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Անիսկական ինտեգրալը հետազոտել զուգամիտության տեսակետից

2081. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$

2082. $\int\limits_0^a \frac{dx}{(a-x)^p}$, $(a>0)$

2083. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+2}}$

2084. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $(a>0)$

2085. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$

2086. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx$

2087. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(2+x^2)\sqrt{1+x}}dx$

2088. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{2x+3}{x^3-3\sin^2 x}dx$

2089. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin^2 x}{\sqrt[3]{2+x^7}}dx$

2090. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2\sqrt[3]{x}\cos^2 x}{3x\sqrt{x}+1}dx$

2091. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2-\sin 2x}{\sqrt{1+x}}dx$

2092. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x\ln^2 x}dx$

2093. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

2094. $\int\limits_0^2 \frac{x\sin x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

2095. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

2096. $\int\limits_2^{+\infty} \left(\cos\frac{2}{x}-1\right)dx$

2097. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$

2098. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+2}}dx$

ԳԼՈՒԽ VI

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ R^m ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

$\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_m):x_1\in R,x_2\in R,\cdots,x_m\in R\}$ բազմությունը, որի տարրերի գումարման և իրական թվով բազմապատկման գործողությունները ներմուծված են $(x_1,x_2,\cdots,x_m)+(y_1,y_2,\cdots,y_m)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_m+y_m)$ և $\alpha\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_m)$ բանաձևերով՝ m չափանի գծային տարածություն է և նշանակվում է R^m: $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$ բանաձևով սահմանվում է R^m-ի տարրի նորմը: Ցանկացած $x,y\in R^m$ կետերի (տարրերի) համար $|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_m-y_m)^2}$ թիվը կոչվում է այդ կետերի **հեռավորություն:**

Սահմանում:

Տրված $a\in R^m$ կետի և $\varepsilon>0$ թվի համար $S(a;\varepsilon)=\{x\in R^m;|x-a|<\varepsilon\}$ բազմությունը կոչվում է a կենտրոնով և ε շառավղով բաց գունդ, այն անվանում են նաև a կետի $\varepsilon-$շրջակայք, կամ պարզապես՝ a կետի գնդային շրջակայք:

Սահմանում: Տրված $a\in R^m$ կետի և $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $\ldots\varepsilon_m>0$ թվերի համախմբության համար

$$S(a;\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)=\{x\in R^m;|x_1-a_1|<\varepsilon_1,|x_2-a_2|<\varepsilon_2,\cdots,|x_m-a_m|<\varepsilon_m\}$$

բազմությունը կոչվում է a կետի ուղղանկյուն շրջակայք:

Թեորեմ: Տրված $a\in R^m$ կետի ցանկացած գնդային շրջակայք պարունակում է այդ կետի ուղղանկյուն զուգահեռանիստ շրջակայք և հակառակը՝ a կետի ցանկացած ուղղանկյուն զուգահեռանիստ շրջակայք պարունակում է այդ կետի գնդային շրջակայք:

$x\in R^m$ բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե $\exists M$ այնպիսին, որ $\forall x\in X \Rightarrow |x|<M$, կամ որ նույնն է $\exists M>0$, որ $x\in S(0;M)$:

Դիցուք $X\subset R^m$ որևէ բազմություն է, այդ դեպքում ա) $x_0 \in X$ կետը կոչվում է X բազմության ներքին կետ, եթե X-ը պարունակում է x_0 կետի որևէ շրջակայք (գնդային կամ ուղղանկյուն),

բ) $a \in R^m$ կետը կոչվում է X բազմության խտացման կետ (կուտակման կետ, սահմանային կետ), եթե a կետի ցանկացած շրջակայք պարունակում է X բազմության կետ, որը տարբեր է a-ից,

գ) X-ը կոչվում է բաց բազմություն, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են,

դ) X-ը կոչվում է փակ բազմություն, եթե այն պարունակում է իր բոլոր խտացման կետերը:

Տրված $X \subset R^m$ բազմության համար $R^m \setminus X$ բազմությունը կոչվում է X-ի լրացում:

2. R^m-Ի ԿԵՏԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆ

Սահմանում: $a \in R^m$ կետը կոչվում է $\{x_n = \left(x_1^n, x_2^n, \cdots, x_m^n\right), n = 1; 2; \cdots\}$ հաջորդականության սահման և գրվում է $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, եթե $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$: Այդ դեպքում ասում են նաև, որ x_n-ը զուգամիտում է a-ին, կամ x_n-ը ձգտում է a-ին:

Թեորեմ: Որպեսզի R^m-ի $\{x_n\}$ կետային հաջորդականությունը զուգամիտի a-ին, անհրաժեշտ է և բավարար $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = a_i$, $(i = 1; 2; \cdots m)$ պայմանը:

Թեորեմ: R^m-ի ցանկացած $\{x_n\}$ սահմանափակ կետային հաջորդականությունից կարելի է անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Սահմանում: R^m-ի $\{x_n\}$ կետային հաջորդականությունը կոչվում է ֆունդամենտալ (ինքն իր մեջ զուգամետ), եթե $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ այնպիսին, որ $\forall n > N$, $\forall k > N \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon$:

Թեորեմ: Որպեսզի R^m-ի $\{x_n\}$ կետային հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

3. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

Դիցուք $X \subset R^m$, $Y \subset R$: Եթե $\forall x \in X$ կետին համապատասխանության մեջ է դրված որոշակի $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in Y$ թիվ, ապա ասում են, որ

X բազմության վրա տրված է m փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիա՝ $f: X \to Y$: X-ը կոչվում է f-ի որոշման տիրույթ, իսկ $Y_1 = \{f(x) : x \in X\}$ բազմությունը՝ f-ի արժեքների բազմություն:

Սահմանում (Կոշի): Դիցուք $X \subset R^m$, $Y \subset R$, $f: X \to Y$ և $a \in R^m$ կետը X բազմության խտացման կետ է: b թիվը կանվանենք $f(x)$-ի սահման, երբ $x \to a$ և կգրենք $\lim_{x \to a} f(x) = b$, եթե $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ այնպիսին, որ $\forall x \in X$ $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ գրառումը երբեմն կգրենք $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = b$ տեսքով, որտեղ $a(a_1, a_2, \cdots, a_m)$-ը X բազմության խտացման կետ է:

Սահմանում (Հայնե): Դիցուք $X \subset R^m$, $Y \subset R$, $f: X \to Y$ և $a \in R^m$ կետը X բազմության խտացման կետ է: b թիվը կանվանենք $f(x)$-ի սահման, երբ $x \to a$ և կգրենք $\lim_{x \to a} f(x) = b$, եթե $\forall \{x_n\} \subset X$, $x_n \neq a$ և $x_n \to a$, $(n = 1; 2; \cdots) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$:

Թեորեմ: Կոշիի և Հայնեի սահմանումները համարժեք են:

Սահմանում: Տրված $f: X \to R$ $(X \subset R^2)$ ֆունկցիայի և $a = (a_1, a_2)$ կետի համար $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$ և $\lim\limits_{x_2 \to a_2} \lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2)$ սահմանները կոչվում են հաջորդական սահմաններ:

Հաջորդական սահմանի գաղափարը հեշտությամբ ընդհանրացվում է ցանկացած $F: X \to R^m$ $(X \subset R^m)$ ֆունկցիայի համար:

4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում: Դիցուք $X \subset R^m$, $Y \subset R$, $f: X \to Y$, $x_0 \in X$: $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում կոչվում է անընդհատ, եթե $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ այնպիսին, որ $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$: Մասնավորապես, եթե x_0-ն X բազմության խտացման կետ է, ապա x_0 կետում անընդհատությունը համարժեք է $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ հավասարությանը:

Եթե ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ չէ, ապա այն x_0-ում կոչվում է խզվող, իսկ x_0-ն կոչվում է խզման կետ:

Ֆունկցիան, որն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում կանվանենք անընդհատ ֆունկցիա:

Մեկ փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիաներին վերաբերող տեղային (լոկալ) և համապարփակ (գլոբալ) բնույթի շատ հատկություններ, որոնք ձևակերպված են սույն խնդրագրքի համապատասխան բաժնում՝ գրեթե անփոփոխ պահպանվում են նաև մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Այդ շարքից նշենք բարդ ֆունկցիայի անընդհատության մասին թեորեմը:

Թեորեմ: Դիցուք $f: X \to R$, $\left(x \subset R^m\right)$, $\varphi_k: T \to R$, $(T \subset R^p$, $k = 1;2;\cdots;m)$ և $t \in T \Rightarrow \left(\varphi_1(t);\varphi_2(t);\cdots;\varphi_m(t)\right) \in X$: Այդ դեպքում, եթե $\varphi_k(t)$ $(k = 1;2;\cdots;m)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է T բազմության $t_0 = \left(t_1^0, t_2^0, \cdots, t_p^0\right)$ կետում, իսկ $f(x)$-ը անընդհատ է $\left(\varphi_1(t_0);\varphi_2(t_0);\cdots;\varphi_m(t_0)\right)$ կետում, ապա $f\left(\varphi_1(t);\varphi_2(t);\cdots;\varphi_m(t)\right)$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է t_0 կետում:

5. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ

Դիցուք $X \subset R^m$ բազմությունը բաց է $f: X \to R$, $\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_p^0\right) = x_0$, $x_0 \in X$, $\delta > 0$, $S(x_0;\delta) \subset X$ և $\varphi(x_i) = f\left(x_1^0, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_m^0\right)$, $\left(x_i \in \left(x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta\right)\right)$, $1 \le i \le m$:

Սահմանում: $\varphi(x_i)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի $\varphi'(x_i^0)$ $1 \le i \le m$ վերջավոր ածանցյալը, եթե այն գոյություն ունի, կոչվում է $u = f(x)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ x_0 կետում՝ ըստ x_i փոփոխականի և նշանակվում է՝ $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \cdots x_m^0)}{\partial x_i}$, $f'_{x_i}(x_0)$, $f'_i(x_0)$ և այլն:

Եթե $u = f(x)$ ֆունկցիան ըստ x_i $(1 \le i \le m)$ փոփոխականի մասնակի ածանցյալ ունի X բազմության բոլոր կետերում, ապա $f'_{x_i}: X \to R$ m փոփոխականի ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն x_0 կետում ըստ x_j փոփոխականի $(1 \le j \le m)$ կոչվում է $f(x)$-ի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ x_0 կետում՝ ըստ x_i, x_j փոփոխականների և նշանակվում է՝ $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0, \cdots x_m^0)}{\partial x_i \partial x_j}$, $f''_{x_i x_j}(x_0)$, $f''_{ij}(x_0)$ և այլն: Եթե մասնավորապես $j = i$, ապա օգտագործվում են նաև $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $f''_{x_i^2}(x_0)$ և այլ նշանակումներ:

Նման ձևով սահմանվում են նաև ավելի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները: Տրված կետում բարձր կարգի մասնակի ածանցյալի արժեքը կախված չէ տարբեր փոփոխականների նկատմամբ ածանցման հերթականությունից, եթե օրինակ, ստացված խառն ածանցյալները անընդհատ են այդ կետում:

6. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ: ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

Սահմանում: Դիցուք $f: X \to R$ $X \subset R^m$, X-ը բաց բազմություն է, $x_0 \in X$ և $(x_1^0, x_2^0, \cdots x_m^0) = x_0$: Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, եթե գոյություն ունեն $A_1, A_2, \cdots, A_m$ թվեր և x_0-ում անընդհատ $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \cdots, \alpha_m(x)$ $(x \in X)$ անվերջ փոքր ֆունկցիաներ (երբ $x \to x_0$) այնպիսիք, որ $\forall x \in X \Rightarrow$:

$$f(x) - f(x_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \cdots + A_m(x_m - x_m^0) +$$
$$+ \alpha_1(x)(x_1 - x_1^0) + \alpha_2(x)(x_2 - x_2^0) + \cdots + \alpha_m(x)(x_m - x_m^0)$$

կամ որ միևնույնն է

$$f(x) - f(x_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \cdots + A_m(x_m - x_m^0) + 0(P),$$

որտեղ $P = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2}$

Եթե $f(x)$-ը x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա նրա դիֆերենցիալ (լրիվ դիֆերենցիալ, առաջին կարգի դիֆերենցիալ) x_0 կետում կոչվում է $df(x_0) = A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \cdots + A_m(x_m - x_m^0)$ գծային ֆունկցիան:

ա) Ֆունկցիայի դիֆերենցելիության անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ: Եթե $f: X \to R$ $\left(x \subset R^m\right)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է X բաց բազմության x_0 կետում, ապա այդ կետում գոյություն ունեն $f_i'(x_0)$,

$(i=1,2,\cdots m)$ մասնակի ածանցյալները, իսկ $df(x_0)$ դիֆերենցիալն ընդունում է $df(x_0)=f'_{x_1}(x_0)dx_1+f'_{x_2}(x_0)dx_2+\cdots+f'_{x_m}(x_0)dx_m$ տեսքը, որտեղ dx_1, dx_2, dx_m մեծությունները կոչվում են արգումենտների դիֆերենցիալներ և որոշվում են $dx_i=x_i-x_i^0$ $(i=1,2,\cdots m)$ հավասարություններով:

բ) Ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանը:

Թեորեմ: Եթե $f:X\to R$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան X բաց բազմության x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում ունի $f'_i(x_0)$, $(i=1,2,\cdots m)$ մասնակի ածանցյալներ, որոնք անընդհատ են x_0 կետում, ապա ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է:

գ) $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը x_0 կետում սահմանվում է որպես նրա $df(x)$ առաջին կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալ x_0 կետում, $df(x)$-ն ընդունելով որպես $x_1,x_2,\cdots,x_m$ փոփոխականների ֆունկցիա, հաստատագրելով (ֆիքսելով) $dx_1,dx_2,\cdots,dx_m$ մեծությունները: Համանման ձևով սահմանվում են ֆունկցիայի ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալները:

7. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

Թեորեմ: Եթե $u=f(x)$ ֆունկցիան ունի $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\cdots m)$ անընդհատ մասնակի ածանցյալներ $X\subset R^m$ բաց բազմության բոլոր կետերում, իսկ $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots m)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն ունի $\dfrac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_k}$ $(k=1,2,\cdots p)$ մասնակի ածանցյալներ $T\subset R^p$ բաց բազմության բոլոր կետերում, ընդ որում՝

$$t\in T\Rightarrow\left(\varphi_1(t_1,t_2,\cdots,t_p),\varphi_2(t_1,t_2,\cdots,t_p),\cdots,\varphi_m(t_1,t_2,\cdots,t_p)\right)\in X$$

ապա T բազմության բոլոր կետերում գոյություն ունեն

$$u=f\left(\varphi_1(t_1,t_2,\cdots,t_p),\varphi_2(t_1,t_2,\cdots,t_p),\cdots,\varphi_m(t_1,t_2,\cdots,t_p)\right)$$

բարդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները, որոնք որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$\frac{\partial u}{\partial t_k}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\ \ (k=1,2,\cdots p):$$

Եթե, բացի թեորեմում նշված պայմաններից $\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_k}$ $(k=1,2,\cdots p$, $i=1,2,\cdots m)$ մասնակի ածանցյալները նաև անընդհատ են T-ում, ապա բարդ ֆունկցիան T-ում դիֆերենցելի է, և նրա դիֆերենցիալը պահպանում է $du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$ տեսքը, սակայն այստեղ:

8. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՏՐՎԱԾ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՄԲ: ԳՐԱԴԻԵՆՏ

Դիցուք $z=f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $D\subset R^2$ բազմության վրա, $P_0=(x_0;y_0)$ կետը D-ի ներքին կետ է, իսկ $\vec{a}=(a_1;a_2)$-ը միավոր վեկտոր է: R^2 հարթության մեջ P_0 սկիզբ և $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությունն ունեցող ճառագայթը կարելի է տալ $x=x_0+t\cdot a_1$, $y=y_0+t\cdot a_2$ $t\in([0;+\infty))$ պարամետրական հավասարումների միջոցով:

Սահմանում: $f(x,y)$ ֆունկցիայի $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությամբ ածանցյալ $P_0=(x_0;y_0)$ կետում կոչվում է հետևյալ սահմանը, եթե այն գոյություն ունի՝

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial\vec{a}}=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+ta_1;y_0+ta_2)-f(x_0;y_0)}{t}:$$

Ասում են նաև, թե $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial\vec{a}}$-ն $\vec{a}$-ի ուղղությամբ f ֆունկցիայի փոփոխության արագությունն է P_0 կետում:

Եթե $\vec{a}$ միավոր վեկտորն ունի տրված ℓ ճառագայթի ուղղությունը, ապա «$\vec{a}$ վեկտորի ուղղությամբ ածանցյալ»-ի փոխարեն ընդունված է նաև ասել «ℓ ճառագայթի ուղղությամբ ածանցյալ»:

Թեորեմ: Եթե $z=f(x,y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $P_0=(x_0;y_0)$ ներքին կետում, ապա այդ կետում ցանկացած $\vec{a}$ միավոր վեկտորի ուղղությամբ f-ն ունի ածանցյալ և

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial\vec{a}}=f'_x(x_0;y_0)\cdot a_1+f'_y(x_0;y_0)\cdot a_2:$$

Ընդունված է $\vec{g}=\left(f'_x(x_0;y_0);f'_y(x_0;y_0)\right)$ վեկտորն անվանել f ֆունկցիայի գրադիենտ $(x_0;y_0)$ կետում $\left(\operatorname{grad}f(x_0;y_0)\right)$: Օգտագործելով գրադիենտի սահմանումը, կարելի է գրել՝

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial \vec{a}} = \vec{g}\cdot\vec{a} = |\vec{g}|\cdot\cos(\widehat{\vec{g},\vec{a}}):$$

Այս հավասարությունից հետևում է, որ $\vec{a}$-ի ուղղությամբ ածանցյալը կընդունի մեծագույն արժեք, եթե $\vec{a}$-ն ունենա գրադիենտի ուղղությունը: Ասվածը հեշտությամբ տարածվում է նաև m փոփոխականի ֆունկցիաների վրա, երբ $m > 2$:

9. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Դիցուք $z = f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $D \subset R^2$ բազմության վրա, իսկ $P_0 = (x_0;y_0)$-ն D-ի ներքին կետ է:

Սահմանում: $P_0 = (x_0;y_0)$ կետը կոչվում է $f(x,y) = f(P)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե $\exists\delta > 0$ այնպիսին, որ $\forall P \in S(P_0;\delta) \Rightarrow f(P) \le f(P_0)$ (համապատասխանաբար $f(P) \ge f(P_0)$): Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը կոչվում են **էքստրեմումի կետեր** (տեղային էքստրեմումի կետեր):

Սահմանում: $P_0 = (x_0;y_0)$ կետը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի **ստացիոնար** կետ, եթե այդ կետում f-ը դիֆերենցելի է և

$$f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0:$$

ա) էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան $P_0 = (x_0;y_0)$ էքստրեմումի կետում ունի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներ, ապա P_0-ն ստացիոնար կետ է՝ $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$:

բ) էքստրեմումի բավարար պայմանը:

Թեորեմ: Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան $P_0 = (x_0;y_0)$ ստացիոնար կետի ինչ-որ շրջակայքում ունի երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Նշանակենք $\Delta = f''_{x^2}(P_0)\cdot f''_{y^2}(P_0) - \left(f''_{xy}(P_0)\right)^2$:

Այդ դեպքում

1) Եթե $\Delta > 0$, ապա P_0 կետում f-ն ունի տեղային էքստրեմում, ընդ որում, մաքսիմում՝ $f''_{x^2}(P_0) < 0$ դեպքում և մինիմում՝ $f''_{x^2}(P_0) > 0$ դեպքում:

2) Եթե $\Delta < 0$, ապա P_0-ն էքստրեմումի կետ չէ:

Բերված սահմանումները և պնդումները ընդհանրացվում են նաև R^m տարածություններում, երբ $m > 2$:

10. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Դիցուք տրված են $f : X \to R$ $(X \subset R^m)$ ֆունկցիան,

$$\Phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \quad k = 1, 2, \cdots, n \quad (n < m)$$

հավասարումների (կապի հավասարումներ) համակարգը և X բազմության $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0\right)$ ներքին կետը, որը բավարարում է կապի հավասարումներին:

Սահմանում: Կասենք, որ x_0-ն f ֆունկցիայի հարաբերական (պայմանական) մինիմումի կետ է, եթե x_0 կետի որևէ շրջակայքի բոլոր այն x կետերի համար, որոնք բավարարում են կապի հավասարումներին, ճշմարիտ է $f(x) \geq f(x_0)$ անհավասարումը: Նման ձևով սահմանվում է նաև հարաբերական մաքսիմումի գաղափարը:

Հարաբերական էքստրեմումի լուծման խնդիրը հաճախ հանգեցվում է

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի հետազոտմանը:

λ_k փոփոխականները կոչվում են **Լագրանժի բազմապատկիչներ:**

ա) Հարաբերական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները արտահայտվում են

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x)}{\partial x_i} = 0, & i = 1, 2, \cdots, m \\ \Phi_k(x) = 0, & k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

հավասարումների համակարգով, որոնցից որոշվում են $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ անհայտները և հարաբերական էքստրեմումի հավակնող $x_1, x_2, \cdots, x_m$ կետերը:

բ) Հարաբերական էքստրեմումի բավարար պայմանները:

Ենթադրենք x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի համար հարաբերական էքստրեմումի հավակնող կետ է և այդ կետի ինչ-որ շրջակայքում $f(x)$ և $\Phi_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots n)$ ֆունկցիաները ունեն երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ, որոնք անընդհատ են x_0 կետում: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի հարաբերական մաքսիմում (մինիմում), եթե L-ի երկրորդ դիֆերենցիալը՝ $d^2L(x_0)<0$ $\left(d^2L(x_0)>0\right)$ $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ փոփոխականների յուրաքանչյուր համախմբության համար, որը բավարարում է

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_k(x_0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \ \ (k=1,2,\cdots n), \quad \sum_{j=1}^{m} \left|dx_j\right| \neq 0$$

պայմաններին:

11. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆ

Դիցուք $z=f(x,y)$ ֆունկցիան տրված է $D\subset R^2$ բազմությունում, $p_0=(x_0;y_0)$ կետը D-ի ներքին կետ է, իսկ $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0;y_0)$-ն և $\Delta_y z = f(x_0; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$-ն $f(x,y)$ ֆունկցիայի մասնակի աճերն են:

Սահմանում: $f(x,y)$ ֆունկցիայի էլաստիկության p_0 կետում x-ի նկատմամբ՝ կոչվում է

$$E_{zx}(x_0;y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}\right)$$

սահմանը, իսկ f-ի էլաստիկության նույն կետում y-ի նկատմամբ՝

$$E_{zy}(x_0;y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y}\right)$$

սահմանը:

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի էլաստիկությանը վերաբերող բ), գ) և դ) հատկությունները այստեղ պահպանվում են անփոփոխ, իսկ գ) հատկության գրելաձևը բարդանում է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Բոլոր պնդումները կձևակերպենք և կապացուցենք R^2 տարածության համար:

1. Ապացուցել, որ $M_n(x_n;y_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ զուգամետ կետային հաջորդականությունը սահմանափակ է: Հակառակը ճիշտ չէ: Բերել համապատասխան օրինակ:

$\Delta -$ ենթադրենք $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$: Ըստ սահմանման դա նշանակում է, որ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(M_n;M_0\right)=0$, որտեղ $\rho\left(M_n;M_0\right)$-ով նշանակել ենք M_n և M_0 կետերի միջև եղած հեռավորությունը: Որպես զուգամետ թվային հաջորդականության $\rho\left(M_n;M_0\right)$-ն $(n=1,2,\cdots)$ սահմանափակ է: Նշանակում է գոյություն ունի $c_1 > 0$ այնպիսին, որ $\rho(M_n;M_0) \le c_1$, $(n=1,2,\cdots)$: Մյուս կողմից, ըստ եռանկյան անհավասարության՝

$$\rho(0;M_n) \le \rho(0;M_0) + \rho(M_n;M_0), \qquad (n=1,2,\cdots)$$

Նշանակելով $c = c_1 + \rho(0;M_0)$, կունենանք $\rho(0;M_n) \le c$, $(n=1,2,\cdots)$ $\{M_n\}$-ը սահմանափակ է:

Յակառակը ճիշտ չէ: Օրինակը բերելու համար ապացուցենք հետևյալ պնդումը՝

Որպեսզի $M_n(x_n;y_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականությունը զուգամիտի $M_0(x_0;y_0)$ կետին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0:$$

Անհրաժեշտությունը բխում է հետևյալ անհավասարություններից և երեք հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմից:

$$\begin{aligned} 0 \le |x_n - x_0| \le \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} = p(M_n;M_0) \\ 0 \le |y_n - y_0| \le \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} = p(M_n;M_0) \end{aligned} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

Բավարարությունը հետևում է հետևյալ անհավասարությունից

$$0 \le p(M_n;M_0) = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \quad (n=1,2,\cdots)$$

(անհավասարությունը հիմնավորելու համար, բավական է երկու մասն էլ քառակուսի բարձրացնել):

Պնդումն ապացուցվեց:

Ապացուցենք ևս մեկ օժանդակ պնդում, որի հիմնավորումը բխում է վերը բերված անհավասարություններից՝ :

Որպեսզի $\{M_n(x_n;y_n)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականությունը լինի սահմանափակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ սահմանափակ լինեն $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$, $(n=1,2,\cdots)$ թվային հաջորդականությունները:

Իրոք՝ անհրաժեշտությունը հետևում է

$$0 \le |x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \ 0 \le |y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

անհավասարություններից, բավարարությունը

$$p(M_n;0) = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \le |x_n| + |y_n|, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

անհավասարությունից:

Այժմ բերենք հակառակ օրինակը: Վերցնենք $M_n\left(\frac{1}{n};(-1)^n\right)$, $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականությունը: Այն սահմանափակ հաջորդականություն է, որովհետև այդպիսին են $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ և $\left\{(-1)^n\right\}$, $(n=1,2,\cdots)$ թվային հաջորդականությունները: Սակայն $\left\{M_n\right\}$-ը զուգամետ չէ, որովհետև տարամետ չէ $y_n=(-1)^n$, $(n=1,2,\cdots)$ թվային հաջորդականությունը: ∇

2. Ցույց տալ, որ $S(M_0;\varepsilon)=\left\{M\in R^2:\rho(M_0;M)<\varepsilon\right\}$ բազմությունը բաց բազմություն է:

$\Delta-$Ցույց տանք, որ $S(M_0;\varepsilon)$ բազմության բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Վերցնենք որևէ $M'\in S(M_0;\varepsilon)$: Նշանակենք $\varepsilon'=\varepsilon-\rho(M_0;M')$ և ցույց տանք, որ $S(M';\varepsilon')\subset S(M_0;\varepsilon)$: Դիցուք M-ը կամայական կետ է և $S(M';\varepsilon')$: Օգտվելով եռանկյան անհավասարությունից կստանանք

$$\begin{aligned}&\rho(M_0;M)\le\rho(M_0;M')+\rho(M';M)<\rho(M_0;M')+\varepsilon'=\\&=\rho(M_0;M')+\varepsilon-\rho(M_0;M')=\varepsilon\end{aligned}$$

Այնպես, որ $p(M_0;M)<\varepsilon$, որտեղից հետևում է, որ $M\in S(M_0;\varepsilon)$: Արդյունքում ստացվեց, որ $S(M_0;\varepsilon)$ բազմության ցանկացած M' կետի համար գոյություն ունի այդ կետի $S(M';\varepsilon')$ շրջակայք այնպիսին, որ $S(M';\varepsilon')\subset S(M_0;\varepsilon)$: Իսկ դա նշանակում է, որ $S(M_0;\varepsilon)$-ը բաց բազմություն է:

3. Դիցուք $G_\alpha(\alpha\in A)$ բաց բազմություն է R^2-ում: Ապացուցել, որ $G=\bigcup\limits_{\alpha\in A}G_\alpha$ բաց բազմություն է:

$\Delta-$Վերցնենք որևէ $M_0\in G$: Գոյություն ունի $\alpha_0\in A$ այնպիսին, որ $M_0\in G_{\alpha_0}$: Քանի որ G_{α_0}-ն բաց բազմություն է, գոյություն ունի M_0 կետի $S(M_0;\varepsilon)$ շրջակայք այնպիսին, որ $S(M_0;\varepsilon)\subset G_{\alpha_0}$: Առավել ևս $S(M_0;\varepsilon)\subset G$: Այսպիսով ստացանք, որ G բազմության յուրաքանչյուր M կետ ներքին կետ է: Հետևաբար G բազմությունը բաց բազմություն է:

4. Ապացուցել, որ ցանկացած բազմությամբ փակ բազմությունների հատումը փակ բազմություն է R^2-ում:

Δ – **Դիտողություն:** Եթե $A \subset B$, ապա սահմանային կետի սահմանումից հետևում է, որ A-ի յուրաքանչյուր սահմանային կետ սահմանային կետ է նաև B-ի համար:

Նշանակենք $F = \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$, որտեղ F_α-երը փակ բազմություններ են R^2-ում:

Դիցուք M_0-ն սահմանային կետ է F-ի համար: Քանի որ $F \subset F_\alpha$, $\alpha \in A$ ապա M_0-ն սահմանային կետ է յուրաքանչյուր F_α-ի համար և քանի որ F_α $(\alpha \in A)$ փակ բազմություններ են, ապա $M_0 \in F_\alpha$ $(\alpha \in A)$: Հետևաբար $M_0 \in F$:

Այս նույն խնդիրը կարելի է լուծել մեկ այլ եղանակով, օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից և երկակիության բանաձևից՝

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha',$$

(որտեղ F_α'-ը F_α-ի լրացումն է մինչև R^2 տարածությունը) և հետևյալ պնդումից:

Որպեսզի F բազմությունը R^2-ում լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա լրացումը լինի բաց:

Նախ ապացուցենք երկակիության բանաձևը: Նշանակենք $F = \left(\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha\right)'$ և $G = \bigcup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha'$: Ենթադրենք $M_0 \in F$: Այստեղից հետևում է, որ M_0-ն չի պատկանում $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ բազմությանը, որտեղից էլ կհետևի, որ M_0-ն չի պատկանի որևէ F_{α_0} բազմությանը և հետևաբար այն կպատկանի F_{α_0}' բազմությանը, առավել ևս այն կպատկանի G-ին: Հակառակը: Ենթադրենք $M_0 \in G$: Հետևում է, որ $M_0 \in F_{\alpha_0}'$ որևէ $\alpha_0 \in A$-ի համար: Հետևաբար $M_0 \notin F_{\alpha_0}$: Որտեղից կհետևի, որ $M_0 \notin \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ և հետևաբար այն կպատկանի $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ բազմության լրացմանը, այսինքն՝ կպատկանի F-ին: Ստացվեց $F \subset G$ և $G \subset F$, որտեղից կհետևի $F = G$: Այժմ ապացուցենք պնդումը:

Անհրաժեշտությունը: Ենթադրենք F-ը փակ է R^2-ում: Ցույց տանք, որ $G = R^2 \setminus F = F'$ բազմությունը բաց է:

Դիցուք $M_0 \in G$: F-ի փակությունից կհետևի, որ M_0-ն չի կարող F-ի համար սահմանային կետ լինել և հետևաբար սահմանային կետ չլինելու հատկությունից կհետևի, որ գոյություն ունի M_0 կետի $S(M_0;\varepsilon_0)$ շրջակայք այնպիսին, որը բացի գուցե M_0 կետից ոչ մի կետ չի պարունակում F բազմությունից: Եվ քանի որ M_0-ն էլ չի պատկանում F-ին, ապա ստացվեց, որ M_0-ն G-ի ներքին կետ է: Հետևաբար G-ն բաց բազմություն է:

Բավարարությունը: Ենթադրենք G-ն բաց է: Ցույց տանք, որ F-ը փակ է:

Դիցուք M_0-ն որևէ սահմանային կետ է F-ի համար: Քանի որ G-ն բաց է, ապա M_0-ն G-ի համար ներքին կետ լինել չէր կարող, հակառակ դեպքում այն չէր լինի F-ի համար սահմանային կետ: Հետևաբար $M_0 \notin G$: Որտեղից կհետևի, որ $M_0 \in F$: F-ը փակ է: ∇

Այժմ հեշտությամբ կարող ենք լուծել № 4 խնդիրը:

Նշանակենք $F = \bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$, որտեղ F_α $(\alpha \in A)$ բազմությունները փակ են R^2-ում: Ըստ երկակիության բանաձևի՝ $F' = \left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha\right)' = \bigcup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha'$: Քանի որ F_α $(\alpha \in A)$ փակ բազմություններ են, ապա ըստ վերը ապացուցված պնդմանը F_α' $(\alpha \in A)$ կլինեն բաց բազմություններ $R^{(2)}$-ում և հետևաբար ըստ երրորդ խնդրի՝ բաց կլինի նրանց միավորում $\bigcup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha' = F'$ բազմությունը: Որտեղից էլ, ըստ պնդման, կհետևի, որ F-ը փակ է: ∇

5. Ապացուցել, F որ փակ բազմությանը պատկանող M_n, $(n = 1, 2, \cdots)$ կետային հաջորդականության սահմանը ևս պատկանում է F-ին:

Δ – Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$: Ենթադրենք հակառակը՝ $M_0 \notin F$: Քանի որ M_0-ն $\{M_n\}$-ի սահմանն է, ապա $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$ համար այնպիսին, որ $M_n \in S(M_0;\varepsilon)$ $n \ge n_0$ համար: (1) Ընդ որում $M_n \ne M_0$, $(n \ge n_0)$: (1)-ից հետևում է, որ M_0-ն F-ի համար սահմանային կետ է՝ իրեն չպատկանող: Եկանք հակասության: Նշանակում է M_0-ն պատկանում է F-ին: ∇

6. Օգտվելով սահմանի սահմանումից, պարզել՝ գոյություն ունի՞ արդյոք տրված սահմանը:

ա) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x^2-2y^2}{x^2+4y^2}$

բ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{2x^4+3y^2}$

ա) Δ – օգտվենք սահմանի Հայնեի սահմանումից: Վերցնենք $\left\{M_n'\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$ և $\left\{M_n''\left(\frac{1}{n};0\right)\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականություններ: Ըստ կետային և կոորդինատային զուգամիտությունների համարժեքության ունենք

$$\lim_{n\to\infty} M_n'\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=O(0;0), \qquad \lim_{n\to\infty} M_n'\left(\frac{1}{n};0\right)=O(0;0)$$

Սակայն

$$f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{5},\ (n=1,2,\cdots),\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}$$

$$f\left(\frac{1}{n};0\right)=\frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=3,\ (n=1,2,\cdots),\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};0\right)=3$$

Քանի որ $\frac{1}{5}\neq 3$, ապա ֆունկցիան սահման չունի $0(0;0)$ կետում:

բ) Δ – Վերցնենք $M_n'\left(\frac{1}{n};0\right)$ և $M_n''\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n^2}\right)$, $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականությունները: Երկու հաջորդականություններն էլ ձգտում են $0(0;0)$ կետին, սակայն

$$f\left(\frac{1}{n};0\right)=\frac{\frac{1}{n^2}+0}{\frac{2}{n^4}+0}=0,\ (n=1,2,\cdots),\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};0\right)=0$$

$$f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^4}}=\frac{1}{5},\ (n=1,2,\cdots),\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{5}$$

$0 \neq \frac{1}{5}$ ֆունկցիան $O(0;0)$ կետում սահման չունի:

7. Հաշվել սահմանը

ա) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin(3xy)}{x}$; **բ)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$; **գ)** $\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

ա) Եթե $x\to 0$, $y\to 3$-ի, ապա $z=3x\cdot y\to 0$: Մյուս կողմից $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$: Հետևաբար

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin 3xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{3xy}{3xy}\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} 3y = 9 \qquad \nabla$$

բ) Δ – օգտվենք $\frac{|a||b|}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}$, $\left(\forall a;b\in R \quad a^2+b^2\neq 0\right)$ անհավասարությունից: Ունենք

$$0\le\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\cdot|x|\le\frac{1}{2}|x|, \quad x^2+y^2\neq 0$$

Որտեղից կհետևի, որ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \nabla$$

գ) Δ – ունենք

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Քանի որ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}-1\right)=0$, ապա ունենք 1^∞ տեսքի անորոշություն, երբ $x\to 0$, $y\to 0$:

Օգտվելով մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների սահմաններին վերաբերվող համապատասխան հատկություններից, կունենանք

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}} = e^{-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Սահմանը հաշվելիս $\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)$ անվերջ փոքրը փոխարինեցինք իրեն համարժեք $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ անվերջ փոքրով: ∇

Հաշվել հաջորդական սահմանները

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to0}0=0$$

Հետազոտել հաջորդական և կրկնակի սահմանների գոյության տեսակետից

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to0}(x+y)\sin\frac{1}{y}$$

Քանի որ $\lim\limits_{y\to0}\sin\frac{1}{y}$ գոյություն չունի, հետևաբար հաջորդական սահման գոյություն չունի: Նման դատողություններով կտեսնենք, որ գոյություն չունի $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ հաջորդական սահմանը: Հիմա հաշվենք կրկնակի սահմանը՝ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$, որովհետև $(x+y)$-ը անվերջ փոքր է, իսկ $\sin\frac{1}{x}$-ը և $\sin\frac{1}{y}$-ը սահմանափակ են, հետևաբար արտադրյալը անվերջ փոքր է: Այսինքն հաջորդական սահմանները գոյություն չունեն, բայց կրկնակի սահման գոյություն ունի:

8. Ելնելով անընդհատության Կոշիի սահմանումից, ապացուցել $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2}{3x+4y}$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $M_0(4;3)$ կետում:

Δ – Բավական է ցույց տալ, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta(\varepsilon)>0$ թիվ այնպիսին, որ $|x-4|<\delta$, $|y-3|<\delta$ պայմանից հետևի $\left|\dfrac{x^2+y^2}{3x+4y}-\dfrac{25}{24}\right|<\varepsilon$ անհավասարությունը, որտեղ $f(4;3)=\dfrac{25}{24}$:

Դիտարկենք մեր ֆունկցիան $M_0(4;3)$ կետի

$$S(M_0,1,1)=\{(x;y):|x-4|<1,|x-3|<1\}$$

քառակուսի շրջակայքում և այդ շրջակայքի բոլոր $M(x,y)$ կետերի համար փորձենք գնահատել $\left|\dfrac{x^2+y^2}{3x+4y}-\dfrac{25}{24}\right|$ արտահայտությունը:

Ունենք

$$\left|\frac{x^2+y^2}{3x+4y}-\frac{25}{24}\right|=\frac{\left|24x^2+24y^2-75x-100y\right|}{24\left|3x+4y\right|}=$$

$$=\frac{\left|(24x^2-24\cdot 16)+(24y^2-24\cdot 9)-(75x-75\cdot 4)-(100y-100\cdot 3)\right|}{24\left|3x+4y\right|}\le$$

$$\le\left|x-4\right|\cdot\frac{\left|x+4\right|}{\left|3x+4y\right|}+\left|y-3\right|\cdot\frac{\left|y+3\right|}{\left|3x+4y\right|}+\frac{75}{24}\cdot\frac{\left|x-4\right|}{\left|3x+4y\right|}+\frac{100}{24}\cdot\frac{\left|y-3\right|}{\left|3x+4y\right|}$$

Երբ $M(x,y)$ կետը պատկանում է $S\left(M_0,1,1\right)$-ին

$$\frac{\left|x+4\right|}{\left|3x+4y\right|}\le\frac{5+4}{3\cdot 3+4\cdot 2}=\frac{9}{17}$$

$$\frac{\left|y+3\right|}{\left|3x+4y\right|}\le\frac{4+3}{3\cdot 3+4\cdot 2}=\frac{7}{17} \text{ և } \frac{1}{\left|3x+4y\right|}\le\frac{1}{3\cdot 3+4\cdot 2}=\frac{1}{17}$$

Հետևաբար

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2+y^2}{3x+4y}-\frac{25}{24}\right|&\le\frac{9}{17}\left|x-4\right|+\frac{75}{408}\left|x-4\right|+\frac{7}{17}\left|y-3\right|+\\&+\frac{100}{408}\left|y-3\right|<\left|x-4\right|+\left|y-3\right|;\quad (x;y)\in S\left(M_0,1,1\right)\end{aligned}\qquad(1)$$

Վերցնենք որևէ $\varepsilon>0$ թիվ և որպես $\delta(\varepsilon)>0$ թիվ վերցնենք $\delta(\varepsilon)=\min\left\{1;\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ թիվը: Հենց որ $\left|x-4\right|<\delta$, $\left|x-3\right|<\delta$ (1)-ից կհետևի

$$\left|\frac{x^2+y^2}{3x+4y}-\frac{25}{24}\right|<\varepsilon$$

անհավասարությունը:

Իսկ սա նշանակում է, որ $f(x;y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $M_0(4;3)$ կետում: ∇

9. Հետազոտել

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y^3)}{1-\cos(x^2+y^2)}, & \text{եթե } 0<x^2+y^2<2\pi\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատության տեսակետից $0(0;0)$ **կետում:**

Δ – Դրա համար բավական է պարզել.

ա) գոյություն ունի՞ ֆունկցիայի վերջավոր սահման $(0;0)$ կետում:

բ) եթե գոյություն ունի, արդյո՞ք այն հավասար է ֆունկցիայի արժեքին այդ կետում:

Փոխարինելով $\sin(x^2y^3)$ և $1-\cos(x^2+y^2)$ անվերջ փոքր ֆունկցիաները իրենց համարժեք՝ x^2y^3 և $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2$ անվերջ փոքրերով, կստանանք

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\sin(x^2y^3)}{1-\cos(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2\cdot y=0$$

(օգտվեցինք $0\le\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2\le1$, $\forall x,y\in R$, $x^2+y^2\ne0$ անհավասարությունից):

Քանի որ ֆունկցիայի սահմանը $(0;0)$ կետում հավասար է ֆունկցիայի արժեքին այդ կետում, ապա ֆունկցիան անընդհատ է այդ կետում: ∇

10. Ստուգել, որ

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\ne0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$$

ֆունկցիան ցանկացած $y=kx$ ուղղի վրա անընդհատ է $(0;0)$ կետում, սակայն որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա այն $(0;0)$ կետում անընդհատ չէ:

Δ – Վերցնենք $(0;0)$ կետով անցնող որևէ՝ $y=kx$, $(x\in(-\infty;+\infty)$; $k\ne0)$ ուղիղ և ցույց տանք, որ ինչպիսին էլ լինի այդ ուղղի վրա գտնվող $M_n\left(x_n;kx_n\right)$, $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականությունը, որը ձգտում է $0(0;0)$ կետին, ֆունկցիայի արժեքների համապատասխան հաջորդականությունը ձգտում է 0 թվին: Եթե այս պայմանը տեղի ունի, ապա կասենք, որ $f(x;y)$ ֆունկցիան $y=kx$ ուղղի վրա անընդհատ է $0(0;0)$ կետում: Իրոք՝

Վերցնենք $\forall\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 0-ի ձգտող հաջորդականություն:

$$M_n\left(x_n;kx_n\right)\to0(0;0);\qquad f\left(x_n;kx_n\right)=\frac{x_n^2\cdot kx_n}{x_n^4+k^2x_n^2}=\frac{kx_n}{x_n^2+k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n;kx_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{kx_n}{x_n^2+k^2}=0$$

x-երի և y-երի առանցքների վրայով ֆունկցիան $(0;0)$ կետում ունի 0-ին հավասար սահման, որովհետև $f(x;0)=f(0;y)\equiv 0$: Հետևաբար ֆունկցիան ցանկացած $y=kx$ ուղղի վրա $(0;0)$ կետում անընդհատ է: Սակայն այն որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա $(0;0)$ կետում անընդհատ չէ, որովհետև այդ կետում այն սահման չունի: Իրոք՝

$$M_n'\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right) \text{ և } M_n''\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n^2}\right),\ (n=1,2,\cdots)$$

երկու կետային հաջորդականությունները ձգտում են $(0;0)$ կետին, սակայն

$$f\left(M_n'\right)=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\to 0,\quad f\left(M_n''\right)=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}:$$

Քանի որ $0\neq\frac{1}{2}$ ֆունկցիան $(0;0)$ կետում սահման չունի: Հետևաբար այն այդ կետում անընդհատ չէ:

11. Գտնել $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները:**

$$\Delta-\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad \nabla$$

12. Ապացուցել, որ

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{4x^2+9y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$$

ֆունկցիան $(0;0)$ **կետում դիֆերենցելի չէ:**

Δ – Ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ հարթության վրա: $(0;0)$ կետում անընդհատությունը հետևում է հետևյալ անհավասարությունից և երկու միլիցիոներների ընդհանրացված կանոնից՝

$$0 \leq \left|\frac{x^2 y}{4x^2+9y^2}\right| \leq \frac{1}{12}\left|\frac{2\cdot(2x)\cdot(3y)}{(2x)^2+(3y)^2}\right|\cdot|x| \leq \frac{1}{12}|x|$$

Մնացած կետերում ֆունկցիան անընդհատ է, որպես երկու անընդհատ ֆունկցիաների հարաբերություն, որի հայտարարը 0 չէ: Ամբողջ հարթության վրա գոյություն ունեն ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ըստ ըստ x-ի -և ըստ y-ի:- Իրոք, եթե $x^2+y^2>0$, ապա

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(4x^2+9y^2)-x^2y\cdot 8x}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} = \frac{18xy^3}{\left(4x^2+9y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(4x^2+9y^2)-18y\cdot x^2y}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} = \frac{x^2(4x^2-9y^2)}{\left(4x^2+9y^2\right)^2}$$

Քանի որ $f(x;0)=f(0;y)\equiv 0$, ապա ըստ մասնակի ածանցյալի սահմանման՝

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$$

Նկատենք, որ մասնակի ածանցյալները որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիաներ անընդհատ չեն $(0;0)$ կետում: Իրոք $\frac{\partial f}{\partial x}$-ը սահման չունի $(0;0)$ կետում: Դրանում համոզվելու համար, բավական է վերցնել $M_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)$ և $M_n'\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)$, $(n=1,2,\cdots)$ կետային հաջորդականությունները, որոնք ձգտում են $(0;0)$ կետին, սակայն

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_n) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right) = \frac{18\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^3}}{\left(\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^2}\right)^2} = \frac{18}{169} \to \frac{18}{169}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(M_n'\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right) = \frac{36\frac{1}{n^4}}{\left(\frac{16}{n^2}+\frac{9}{n^2}\right)^2} = \frac{36}{625} \to \frac{36}{625}$$

Օգտվելով դիֆերենցելիության պայմանի հետևյալ գրելաձևից՝

$$\Delta f(x_0;y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\Delta y+\alpha\rho$$

որտեղ $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, իսկ $\alpha(\Delta x;\Delta y)\to 0$ երբ $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, կունենանք՝

$$\Delta f(0;0)=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{4\Delta x^2+9\Delta y^2}=\alpha(\Delta x;\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

ցանկացած $\Delta x,\Delta y$ աճերի համար: Մասնավորապես, եթե վերևի հավասարությունում վերցնենք $\Delta y=\Delta x>0$, ապա կունենանք

$$\frac{\Delta x^2\cdot\Delta x}{4\Delta x^2+9\Delta x^2}=\frac{1}{13}\Delta x=\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x\sqrt{2}$$

որտեղից՝ $\alpha(\Delta x;\Delta x)=\dfrac{1}{13\sqrt{2}}$, որը չի ձգտում 0-ի, երբ Δx-ը ձգտում է 0-ի:

Եկանք հակասության: Նշանակում է ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ $(0;0)$ կետում: Բերված օրինակը ասում է այն մասին, որ ֆունկցիան դիֆերենցելիության բավարար պայմանում մասնակի ածանցյալների անընդհատության պայմանը $M_0(x_0;y_0)$ կետում էական պայման է: ∇

13. Ստուգել, որ u ֆունկցիան բավարարում է նշված հավասարմանը

ա) $u=\mathrm{tg}^3(x^2+y^2)$, $\qquad y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

բ) $u=e^{\frac{x}{y}}$, $\qquad y\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

ա) $\Delta-\dfrac{\partial u}{\partial x}=3\,\mathrm{tg}^2(x^2+y^2)\cdot\dfrac{1}{\cos^2(x^2+y^2)}\cdot 2x$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3\,\mathrm{tg}^2(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x^2+y^2)}\cdot 2y$$

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{6xy\cdot\mathrm{tg}^2(x^2+y^2)}{\cos^2(x^2+y^2)}-\frac{6xy\cdot\mathrm{tg}^2(x^2+y^2)}{\cos^2(x^2+y^2)}\equiv 0 \qquad \nabla$$

բ) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}-\dfrac{1}{y^3}\cdot e^{\frac{x}{y}}$

$$y\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\equiv 0 \qquad \nabla$$

14. Դիցուք f-ը և g-ն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Ստուգել, որ $u=f\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)\cdot x$ ֆունկցիան բավարարում է

$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ հավասարմանը:

$$\Delta-\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)x+g\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=-\frac{y}{x^2}\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\cancel{\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)-\cancel{\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)}=$$

$$=\frac{y}{x^2}\left(\frac{2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\cancel{\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\left[f'\left(\frac{y}{x}\right)+f''\left(\frac{y}{x}\right)+y\cdot g''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=y\left[\frac{2}{x}\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right]-$$

$$-2\frac{y}{x}\left[f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)+y\cdot g''\left(\frac{y}{x}\right)\right]+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\cancel{\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)}-\cancel{\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)}-\cancel{\frac{2y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)}-$$

$$-\cancel{\frac{2y^2}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)}\equiv 0 \qquad \nabla$$

15. Հետազոտել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները

$$u = x^3 + y^3 - 3xy$$

Δ – Գտնենք ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x\,; \qquad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը՝ կստանանք, որ $M_1(0;0)$ և $M_2(1;1)$ կետերը ստացիոնար կետեր են: Հետազոտենք այդ կետերը էքստրեմումի տեսանկյունից: Ունենք՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x\,;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3 \text{ և } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

Հաշվենք $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M) \right)^2$ ֆունկցիայի արժեքները M_1 և M_2 կետերում:

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0;0) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0;0) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0;0) \right)^2 = -9 < 0$$

$M_1(0;0)$ կետը էքստրեմումի կետ չէ:

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1;1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1;1) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1;1) \right)^2 = 6 \cdot 6 - 9 = 27 > 0$$

$M_2(1;1)$ կետը էքստրեմումի կետ է: Եվ քանի որ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1;1) = 6 > 0$, ապա $M_2(1;1)$ կետը լոկալ մինիմումի կետ է: $u_{\min} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$:

16. Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները տրված տիրույթում $u = x^2 y + xy^2 - 2xy$, $D = [-3;3] \times [-3;3]$:

Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D փակ, սահմանափակ տիրույթում գտնելու համար վարվում ենք հետևյալ կերպ:

ա) Գտնենք u ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը:

բ) Հաշվենք u ֆունկցիայի արժեքները այն ստացիոնար կետերում, որոնք պատկանում են D տիրույթին:

գ) Հաշվենք u ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D տիրույթի եզրագծի վրա:

դ) Բաղդատենք ստացված բոլոր թվերը: Այդ թվերից փոքրը կլինի u ֆունկցիայի փոքրագույն, մեծը՝ մեծագույն արժեքները D տիրույթում:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+y^2-2y\,;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy+x^2-2x$$

$$\begin{cases}2xy+y^2-2y=0\\ 2xy+x^2-2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(2x+y-2)=0\\ x(2y+x-2)=0\end{cases}$$

Լուծելով համակարգը, կստանանք, որ $M_1(0;0)$, $M_2(2;0)$ և $M_3(0;2)$ և $M_4\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ կետերը ստացիոնար կետեր են, ընդ որում բոլոր կետերը պատկանում են D տիրույթին:

$$u(0;0)=0,\ u(2;0)=0,\ u(0;2)=0 \text{ և } u\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}$$

Այժմ հաշվենք u ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները D տիրույթի եզրագծի վրա: Դրա համար գտնենք $u(x;-3)$, $x\in[-3;3]$, $u(x;3)$, $x\in[-3;3]$, $u(-3;y)$, $y\in[-3;3]$, $u(3;y)$, $y\in[-3;3]$ ֆունկցիաների (որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ) փոքրագույն և մեծագույն արժեքները համապատասխան միջակայքերում:

$u(x;-3)=-3x^2+9x+6x=15x-3x^2$, $\quad x\in[-3;3]$

$u'(x;-3)=15-6x$, $\quad u'=0,\ x=\frac{5}{2}$

$u(-3;-3)=-45-27=-72$, $\quad u(3;-3)=45-27=-18$,

$u\left(\frac{5}{2};-3\right)=\frac{75}{2}-\frac{75}{4}=\frac{75}{4}=18{,}75$,

$u(x;3)=3x^2+9x-6x=3x^2+3x$, $\quad x\in[-3;3]$

$u'=6x+3$, $\quad u'=0,\ x=\frac{1}{2}$

$u(-3;3)=27-9=18$, $\quad u(3;3)=27+9=36$,

$u\left(-\frac{1}{2};3\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$,

$u(-3;y)=9y-3y^2+6y=15y-3y^2$, $\quad y\in[-3;3]$,

$u'(-3;y)=15-6y$, $\quad u'=0,\ y=\frac{5}{2}$

$u(-3;-3) = -45 - 27 = -72$, $\quad u(-3;3) = 27 - 9 = 18$,

$$u\left(-3;\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{2} - \frac{75}{4} = \frac{75}{4} = 18,75,$$

$u(3;y) = 9y + 3y^2 - 6y = 3y^2 + 3y$, $\quad y \in [-3;3]$,

$u'(3;y) = 6y + 3$, $\quad u' = 0$, $y = -\frac{1}{2}$

$u(3;-3) = 27 - 9 = 18$, $\quad u(3;3) = 27 + 9 = 36$,

$$u\left(3;-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4},$$

Այսպիսով $u(x;-3)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[-3;3]$ հատվածում՝ համապատասխանաբար -72 և $18,75$ թվերն են, $u(x;3)$-ինը՝ $-\frac{3}{4}$ և 36, $u(-3;y)$-ինը՝ -72 և $18,75$, և վերջապես՝ $u(3;y)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[-3;3]$ հատվածում՝ $-\frac{3}{4}$ և 36 թվերն են: Բաղդատելով u-ի այս արժեքները ստացինար կետերում u ֆունկցիայի ընդունած արժեքների հետ, վերջնականապես կստանանք.

$$u_{\min} = -72 \quad : \; u_{\max} = 36$$

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը

2099. $u = x + \sqrt{y}$

2100. $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

2101. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

2102. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

2103. $u = \ln(-x - y)$

2104. $u = \arcsin \dfrac{y}{x}$

2105. $u = \ln(4 - x^2 - y^2)$

2106. $u = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$

2107. $u = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$

2108. $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

Ապացուցել R^m-ի կետային հաջորդականությունների հետևյալ հատկությունները

2109. Որպեսզի $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_m^{(n)}\right)$ կետային հաջորդականությունը լինի սահմանափակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ սահմանափակ լինեն $\left\{x_i^{(n)}\right\}$ $(i = 1; 2; \cdots m,\ n \in N)$ թվային հաջորդականությունները:

2110. Զուգամետ կետային հաջորդականությունը սահմանափակ է: Հակառակը ճիշտ չէ: Բերել օրինակ:

2111. Զուգամետ հաջորդականության սահմանը միակն է:

2112. Որպեսզի $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_m^{(n)}\right)$ կետային հաջորդականությունը զուգամիտի $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \cdots x_m^0\right)$ կետին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)} = x_i^0, \ (i = 1; 2; \cdots m)$$

2113. Որպեսզի $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_m^{(n)}\right)$ կետային հաջորդականությունը լինի ֆունդամենտալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ֆունդամենտալ լինեն $x_i^{(n)}$ $(i = 1; 2; \cdots m,\ n \in N)$ թվային հաջորդականությունները:

2114. Որպեսզի $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_m^{(n)}\right)$ կետային հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

2115. Ցանկացած սահմանափակ $M_n\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_m^{(n)}\right)$ կետային հաջորդականությունից կարելի է անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն: Ապացույցը կատարել R^2 համար:

2116. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետի ցանկացած գնդային շրջակայք պարունակում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստ շրջակայք և հակառակը:

2117. m – չափանի բաց գունդը բաց բազմություն է:

2118. Ցանկացած թվով բաց բազմությունների միավորումը բաց բազմություն է:

2119. Վերջավոր թվով բաց բազմությունների հատումը բաց բազմություն է:

2120. Ցանկացած թվով փակ բազմությունների հատումը փակ բազմություն է:

2121. Վերջավոր թվով փակ բազմությունների միավորումը փակ բազմություն է:

2122. G փակ բազմությանը պատկանող $M_n\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots x_m^{(n)}\right)$ կետային հաջորդականության սահմանը ևս պատկանում է G-ին:

2123. Որպեսզի G բազմությունը R^m-ում լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա լրացումը լինի բաց:

Ելնելով սահմանի Կոշիի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը

2124. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\y\to2}}(x^2+y)=11$

2125. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\y\to-1}}(x^2-y^2)=15$

2126. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}(x^2+2y^2)=9$

2127. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to-2}}(x^2-xy-y^2)=-1$

2128. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to1}}(x^3+2y^3)=10$

2129. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}(x^3-y^3+2x+y-3)=-6$

2130. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to-2}}\dfrac{5x+3y}{4x+y}=\dfrac{2}{3}$

2131. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to-1}}\dfrac{x^2+y^2}{2x+3y}=-2$

2132. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\y\to3}}\dfrac{2x^3+y^3}{7x+y}=-1$

2133. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

Հետազոտել ֆունկցիայի սահմանի գոյությունը

2134. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$

2135. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x^2-3y}{3x^2+2y^2}$

2136. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

2137. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{3(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+2(y-2)^2}$

2138. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{3x^2-3y+6}{4x^2+5(y-2)^2}$

2139. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

2140. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x^2y-x^2}{2x^4+3(y-1)^2}$

2141. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{2(x-1)^2-3(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2}$

2142. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x^2+5y^3}{4x^2+y^2}$

2143. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

2144. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy^3}{3x^2+y^6}$

2145. $\lim\limits_{\substack{x\to +0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^3}\,y^2}{x^3+y^2}$

Հաշվել ֆունկցիայի սահմանը

2146. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$

2147. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\sin 2xy}{x}$

2148. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

2149. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$

2150. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$

2151. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

2152. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3xy^2}{4x^2+9y^2}$

2153. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

2154. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$

2155. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{1-\cos\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

2156. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(5xy^2)}{9x^2+16y^2}$

2157. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(\sqrt{|x|^3}+\sqrt{|y|^3}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2158. $\lim\limits_{\substack{x\to +0\\ y\to +0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{\sqrt[4]{|x|^3}+\sqrt[4]{|y|^3}}}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$

2159. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+\sin(2xy^2)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

2160. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

2161. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

2162. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)\cdot e^{-(x+y)}$

2163. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x+y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$

2164. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\cos\sqrt{2x^2+3y^2}\right)^{\frac{3}{2x^2+3y^2}}$

Գտնել $(a;b)$ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները

2165. $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; $\quad a=\infty,\ b=\infty$

2166. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; $\quad a=\infty,\ b=\infty$

2167. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{2x+3y}$; $\quad a=0,\ b=0$

2168. $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$; $\quad a=0,\ b=0$

2169. $f(x,y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad a=0,\ b=0$

2170. $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$; $\quad a=0,\ b=+\infty$

2171. $f(x,y)=\dfrac{y^x}{x+y^x}$; $\quad x>0,\ a=0,\ b=+\infty$

2172. $f(x,y)=\log_x(x+y)$; $\quad a=1,\ b=0$

Ելնելով անընդհատության Կոշիի սահմանումից՝ ապացուցել $f(x,y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $M_0(x_0;y_0)$ կետում

2173. $f(x,y)=x^2-5y^2$; $\quad M_0(1;2)$

2174. $f(x,y)=x^3+2y^3$; $\quad M_0(3;1)$

2175. $f(x,y)=x^3+xy^2$; $\quad M_0(2;2)$

2176. $f(x,y)=\dfrac{5x+2y}{4x-3y}$; $\quad M_0(2;3)$

2177. $f(x,y)=\dfrac{2x^3+y^3}{3x+2y}$; $\quad M_0(2;-2)$

2178. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{2x-5y}$; $\quad M_0(-4;-2)$

2179. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$; $\quad M_0(3;-2)$

2180. $f(x,y)=\dfrac{10xy}{x^2+y^2}$; $\quad M_0(-1;-2)$

2181. $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^2}{x^2+y}$; $\quad M_0(2;-2)$

2182. $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0;0)=0$; $\quad M_0(-1;-2)$

Հետազոտել $f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատության տեսակետից

2183. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^2}{x^{\frac{4}{3}}+y^2}, & \text{եթե } x^{\frac{4}{3}}+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^{\frac{4}{3}}+y^2=0\end{cases}$

2184. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}\cdot y^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$

2185. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{8}{3}}\cdot y}{x^4+y^2}, & \text{եթե } x^4+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^4+y^2=0\end{cases}$

2186. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$

2187. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 1, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$

2188. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$

2189. $f(x,y)=\begin{cases} x\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2190. $f(x,y)=\begin{cases} y\cdot\dfrac{3x^2-2y^2}{3x^2+2y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 1, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2191. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2192. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 2, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2193. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy^2}{2x^2+y^4}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2194. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{3x^4+2y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2195. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 1, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2196. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 1, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2197. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2\cdot y^3)}{x^4+y^4}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0 \end{cases}$

2198. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y}, & \text{եթե } y\neq 0\\ 0, & \text{եթե } y=0\end{cases}$, $M_0(0;0)$ կետում

2199. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}, & \text{եթե } 0<x^2+y^2<2\pi\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$, $M_0(0;0)$ կետում

2200. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(xy^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}, & \text{եթե } 0<x^2+y^2<2\pi\\ 1, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$, $M_0(0;0)$ կետում

2201. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y^3)}{1-\cos(x^2+y^2)}, & \text{եթե } 0<x^2+y^2<2\pi\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$, $M_0(0;0)$ կետում

2202. Տրված է $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$, $M_0(0;0)$ կետում:

Ապացուցել, որ ֆունկցիան y փոփոխականի ցանկացած ֆիքսված արժեքի դեպքում որպես միայն x փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է, x-ի ցանկացած ֆիքսված արժեքի դեպքում որպես միայն y փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է, սակայն որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա $(0;0)$ կետում անընդհատ չէ:

2203. Ստուգել, որ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{եթե } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{եթե } x^2+y^2=0\end{cases}$ ֆունկցիան ցանկացած $y=kx$ ուղղի վրա անընդհատ է $(0;0)$ կետում սակայն որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա $(0;0)$ կետում անընդհատ չէ:

Գտնել ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները

2204. $u=x^3y-y^3x$

2205. $u=x^3+y^3-3xy$

2206. $u=\sqrt{2x+3y}$

2207. $u=e^{x^2y^3}$

2208. $u=\sqrt{2x^2-5y^2}$

2209. $u=x^2\sin y^2+y^3$

2210. $u=\left(1+2x^2y+y^3\right)^2$

2211. $u=\left(5x^2y-2y^3\right)^3$

2212. $u=\operatorname{tg}^4(3x^2-4y^2)$

2213. $u=\ln(x+\ln y)$

2214. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

2215. $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

2216. $u=\sqrt[3]{2x^2-3y^3}$

2217. $u=e^{x^2+y^2}$

2218. $u=e^{xy(x^2+y^2)}$

2219. $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}$

2220. $u=e^{\sin\frac{y}{x}}$

2221. $u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

2222. $u=\ln\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}$

2223. $u=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$

2224. $u=\operatorname{arctg}(\ln xy)$

2225. $u=\arccos(x^2y)$

2226. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2227. $u=e^{x^3+xy^2+xz^2}$

2228. $u=\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)$

2229. $u=\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$

2230. Հաշվել $f_x'(0;1)$-ը և $f_y'(0;1)$-ը, եթե $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\sin(xy)$

2231. Հաշվել $f_x'(1;2)$-ը և $f_y'(1;2)$-ը, եթե $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$

2232. Հաշվել $f_x'(\pi;4)$-ը, եթե $f(x,y)=\sqrt{y}\sin 3x-9\pi\cdot\ln\left(\frac{x}{\pi}+2y\right)$

2233. Ճշմարի՞տ է արդյոք $f_{xy}''(0;0)=f_{yx}''(0;0)$ հավասարությունը, երբ

ա) $f(x,y)=\arcsin\frac{x^2+1}{y-3}$

բ) $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

2234. Գոյությո՞ւն ունի արդյոք $f''_{xy}(0;0)$ մասնակի ածանցյալը, եթե

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Դիցուք f ***-ը և*** g ***-ն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Գտնել*** u ***ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները:***

2235. $u=f\left(x^2+y^2\right)$

2236. $u=f\left(x^2-y^2\right)$

2237. $u=xy+f(x-y)$

2238. $u=f(x\cdot y)\cdot g(x-y)$

2239. $u=f\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot g(xy)$

2240. $u=f\left(x;\dfrac{x}{y}\right)$

2241. $u=f(x+y;x-y)$

2242. $u=f(\sin x;\cos y)$

Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիաները $(0;0)$ ***կետում դիֆերենցելի չեն:***

2243. $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$

2244. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

2245. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

2246. $f(x,y)=\sqrt{|x\cdot y|}$

2247. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{3x^2+4y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

2248. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

Ստուգել, որ u ***ֆունկցիայի բավարարում է նշված հավասարմանը***

2249. $u=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2$

2250. $u=\ln\left(e^{x}+e^{y}\right),$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$

2251. $u=y\ln\left(x^{2}-y^{2}\right),$ $\qquad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y^{2}}$

2252. $u=\dfrac{xy}{x^{2}+y^{2}},$ $\qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

2253. $u=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},$ $\qquad x^{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$

2254. $u=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right),$ $\qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$

2255. $u=x+y+e^{\frac{x}{y}},$ $\qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y$

2256. $u=x+y+\sin\dfrac{x}{y},$ $\qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y$

2257. $u=\mathrm{tg}^{3}\left(x^{2}+y^{2}\right),$ $\qquad y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

2258. $u=x\cdot e^{\frac{y}{x^{2}}},$ $\qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$

2259. $u=\dfrac{y^{2}}{3x}+\cos^{3}(x\cdot y),$ $\qquad x^{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^{2}=0$

2260. $u=x\cdot\ln\dfrac{y}{x},$ $\qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$

2261. $u=\sin^{2}\left(x^{2}+y^{2}\right),$ $\qquad y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

2262. $u=e^{\frac{x}{y}},$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}=0$

2263. $u=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x},$ $\qquad \dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=0$

2264. $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2265. $u=x^3-y^3$, $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2266. $u=e^{4y}\cos 4x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2267. $u=e^{5y}\sin 5x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2268. $u=e^{3x}\cos 3y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2269. $u=x\cdot e^{2y}+y\cdot e^{2x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4u$

2270. $u=x\cdot e^{3y}+y\cdot e^{3x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=9u$

2271. $u=xy\cdot\ln\left(x^2-y^2\right)$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}-2xy=2u$

2272. $u=xy\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2(u+xy)$

2273. $u=x\cdot e^{-\frac{y}{x}}$, $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2274. $u=2\cos^2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)$, $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

2275. $u=\ln(ax-by)$, $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+1=0$

2276. $u=x\cdot e^{my}+y\cdot e^{mx}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=m^2u$

2277. $u=e^{my}\cdot\cos mx$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Դիցուք f-ը և g-ն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Ստուգել, որ u ֆունկցիան բավարարում է նշված հավասարմանը:

2278. $u = f(x-ay)+g(x+ay)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2279. $u = f(x+y)+y\cdot g(x+y)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

2280. $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\qquad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը $M(x;y)$ կետում, ըստ տրված ℓ ուղղության

2281. $u = 2x^2 - 3y^2$, $\qquad M(1;0)$, $\left(o\hat{x,\ell}\right) = \dfrac{2}{3}\pi$

2282. $u = e^{\frac{y}{x}}$, $\qquad M(3;0)$, $\left(o\hat{x,\ell}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

2283. $u = \ln(x-4y)$, $\qquad M(5;1)$, $\left(o\hat{x,\ell}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

2284. $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\qquad M(1;1)$, $\left(o\hat{x,\ell}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

2285. $u = \sin^2(2x+y)$, $\qquad M\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(o\hat{x,\ell}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$

2286. $u = \cos^2(3x-2y)$, $\qquad M\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(o\hat{x,\ell}\right) = \dfrac{5}{6}\pi$

2287. $M(1;1)$ կետում որոշել $f(x,y) = x^2\cdot\sqrt{y}$ ֆունկցիայի ածանցյալը, ըստ այն ուղղության, որն x-երի առանցքի հետ կազմում է

ա) 45° անկյուն; բ) 90° անկյուն; գ) 0° անկյուն

2288. $M(3;1)$ կետում որոշել $f(x,y) = xy^2 - 3x^2y + 1$ ֆունկցիայի ածանցյալն առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի ուղղությամբ:

2289. $M(1;2)$ կետում որոշել $f(x,y) = x^3 - 3xy + 1$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ $\vec{e}(4;6)$ վեկտորի ուղղության:

2290. $M(1;2)$ կետում որոշել $f(x,y) = \ln(x+y)$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ $\vec{e}(3;4)$ վեկտորի ուղղության:

Հետազոտել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները

2291. $u = x^2 + (y-1)^2$

2292. $u = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

2293. $u = x^3 + y^3 - 3xy$

2294. $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

2295. $u = x^2 y^3 (6 - x - y)$

2296. $u = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

2297. $u = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

2298. $u = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$, $(x > 0,\ y > 0)$

2299. $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

2300. $u = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

2301. $u = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$

2302. $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումները

2303. $u = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$

2304. $u = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$

2305. $u = x^2 - 2xy + 4y^3$

2306. $u = x^2 - xy + y^2$

2307. $u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$

2308. $u = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

2309. $u = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

2310. $u = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

2311. $u = x^3 + y^3 - 15xy$

2312. $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$

2313. $u = 4x - 4y - x^2 - y^2$

2314. $u = \dfrac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1$

2315. $u = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

2316. $u = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

2317. $u = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

2318. $u = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$

2319. $u = x^3 + xy^2 + 6xy$

2320. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

2321. $u = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$

2322. $u = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

2323. $u = y^4 - 4y^2\sqrt{x} + y^2 + 4x + 4y$

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

2324. $u = x^2 + 3x - 2y^2$, $D = [0;2]\times[0;3]$

2325. $u = x^2 + xy - y^2$, $D = [-1;2]\times[2;3]$

2326. $u = x^2 y + xy^2 - 2xy$, $D = [-3;3]\times[-3;3]$

2327. $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $D = [-2;1]\times[1;3]$

2328. $u = x^3 - 3x^2 y + y^3$, $D = [-4;3]\times[2;5]$

2329. $u = x - 2y - 3$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$

2330. $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $x^2 + y^2 \le 25$

2331. $u = x^2 - xy + y^2$, $|x| + |y| \le 1$

2332. a դրական թիվը տրոհել երեք դրական գումարելիների այնպես, որ նրանց արտադրյալը լինի մեծագույնը:

2333. a դրական թիվը վերլուծել երեք դրական արտադրիչների այնպես, որ նրանց խորանարդների գումարը լինի փոքրագույնը:

2334. Գտնել $2p$ պարագծով ուղղանկյուն, որն իր կողմերից մեկի շուրջը պտտելիս առաջացնում է մեծագույն ծավալի գլան:

ԳԼՈՒԽ VII

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում: Հավասարումը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարում, եթե անհայտ ֆունկցիան հավասարման մեջ մասնակցում է նաև ածանցյալի նշանի տակ:

Եթե որոնելի ֆունկցիան մեկ փոփոխականի է՝ $y = y(x)$, ապա հավասարումը կոչվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում:

Սահմանում: Դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է n-րդ կարգի, եթե հավասարման մեջ մասնակցող անհայտ ֆունկցիայի ամենաբարձր կարգի ածանցյալը n-րդ կարգի է: Այն ընդհանուր տեսքով գրվում է

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0,$$

տեսքով, որտեղ $F\left(t_1, t_2, \cdots t_{n+1}\right)$-ը $D \subset R^{n+1}$ տիրույթում տրված ֆունկցիա է, իսկ $y = y(x)$-ը որոնելի ֆունկցիան է և $\dfrac{\partial F}{\partial t_{n+1}} \neq 0$:

Դիֆերենցիալ հավասարման լուծում կոչվում է յուրաքանչյուր $y = \varphi(x)$ $(x \in (a;b))$ ֆունկցիա, որն իր ածանցյալների հետ միասին տեղադրելով հավասարման մեջ այն դարձնում է նույնություն՝

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0:$$

$\varphi(t)$-ի գրաֆիկը կոչվում է ինտեգրալային կոր, իսկ $(a;b)$ միջակայքը՝ դիֆերենցիալ հավասարման լուծման որոշման տիրույթ:

Եթե դիֆերենցիալ հավասարումը լուծված է բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ՝ $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$, ապա հավասարումը կոչվում է նորմալ դիֆերենցիալ հավասարում: Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար կլինի՝ $y' = f(x;y)$:

Առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ներկայացման առավել ընդհանուր տեսքն է՝ $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$:

Դիֆերենցիալ հավասարումն ունի անվերջ թվով լուծումներ և երբեմն հարկ է լինում լուծումների բազմությունից ընտրել որոշակի պայմանին բավարարող լուծումը:

$y' = f(x;y)$ հավասարման այն $y = y(x)$ լուծման որոնումը, որը բավարարում է $y_0 = y(x_0)$ սկզբնական պայմանին, կոչվում է Կոշիի խնդիր, որտեղ $f(x;y)$-ը D տիրույթում տրված ֆունկցիա է և $(x_0;y_0)$-ն կամայական կետ է D-ից:

Թեորեմ (Կոշիի խնդրի լուծման գոյության և միակության մասին): Եթե $f(x;y)$ և $f'_y(x;y)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են D տիրույթում, ապա

ա) D տիրույթի ցանկացած $(x_0;y_0)$ կետով անցնում է որևէ ինտեգրալային կոր,

բ) $(x_0;y_0)$ կետով անցնող ինտեգրալային կորը միակն է:

Կոշիի խնդրի լուծումը կոչվում է $y' = f(x;y)$ հավասարման մասնավոր լուծում կամ սկզբնական պայմանին բավարարող լուծում:

Դիֆերենցիալ հավասարման լուծումները կարող են ներկայացվել բացահայտ, անբացահայտ, պարամետրական տեսքով:

$y' = f(x;y)$ հավասարման բոլոր մասնավոր լուծումների բազմությունը կոչվում է այդ հավասարման ընդհանուր լուծում, որը հաճախ ներկայացվում է $y = \varphi(x;c)$ բացահայտ տեսքով և մասնավոր լուծումները ստացվում են c-ին թվային արժեքներ տալով: Որոշ դեպքերում $y' = f(x;y)$ հավասարման լուծման գործընթացը հանգում է $\Phi(x,y,c) = 0$ տեսքի առնչության, որում հավասարման լուծումները մասնակցում են անբացահայտ ձևով, որը կոչվում է $y' = f(x;y)$ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ:

Դիտարկենք գործնականում առավել հաճախ հանդիպող դիֆերենցիալ հավասարումները:

1. ԱՆՋԱՏՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Անջատվող փոփոխականներով կոչվում են $y' = f(x)g(y)$ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումները, որտեղ $f(x)$ և $g(y)$ ֆունկցիաները որոշված են (a,b) և (c,d) միջակայքերում:

Այն դեպքում, երբ $f(x)$-ը և $g(y)$-ը անընդհատ են և $g(y) \neq 0$ $(y \in (c,d))$ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը գրվում է $\Phi(y) = F(x) + C$ առնչությամբ, որտեղ $\Phi(y)$-ը $\dfrac{1}{g(y)}$-ի, իսկ $F(x)$-ը $f(x)$-ի որևէ նախնականն է, c-ն կամայական հաստատուն է: Տրված պայմանների դեպքում $\Phi(y)$-ը ունենում է Φ^{-1} հակադարձ, և հավասարման ընդհանուր լուծումը ստանում է $y(x)=\Phi^{-1}(F(x)+c)$, $(c\in R)$ տեսքը:

Օրինակ: Լուծել $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$ հավասարումը: Պետք է x և y փոփոխականները անջատել, դրա համար հավասարման երկու կողմը պետք է բաժանել $(1+x^2)(1+y^2)$-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{ydy}{1+y^2}=-\frac{xdx}{1+x^2},$$

որն ինտեգրելով կստանանք

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=-\int\frac{xdx}{1+x^2},$$

$$2\int\frac{dy^2}{1+y^2}=-2\int\frac{dx^2}{1+x^2},$$

$$\ln(y^2+1)=-\ln(x^2+1)+\ln c,$$

(ինտեգրման հաստատունը կարելի է գրել հարմար եղանակով),

$$\ln(y^2+1)=\ln\frac{c}{x^2+1},$$

$$y^2+1=\frac{c}{x^2+1},\qquad y^2=\frac{c}{x^2+1}-1,\qquad y=\pm\sqrt{\frac{c}{x^2+1}-1}$$

Ստացված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը միջակայք է, $c>1$ դեպքում:

Պատասխան՝ $y=\pm\sqrt{\dfrac{c}{x^2+1}-1}$ $(c>1)$:

2. ԱՆՋԱՏՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԲԵՐՎՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ տեսքի հավասարումը կոչվում է համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում: $z=\dfrac{y}{x}$ բանաձևով ներմուծելով նոր որոնելի ֆունկցիա՝ համասեռ հավասարումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով հավասարման:

Այդ դեպքին են բերվում նաև $(a_1x+b_1y+c_1)dy+(a_2x+b_2y+c_2)dx=0$ տեսքի հավասարումները, հիմնականում կատարելով a_1x+b_1y կամ $z=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ տեղադրությունները, կախված նրանից զուգահեռ են $a_1x+b_1y+c_1=0$ և $a_2x+b_2y+c_2=0$ ուղիղները, թե հատվում են մի $(x_0;y_0)$ կետում:

Օրինակ: Գտնել ընդհանուր ինտեգրալը, եթե

$$(x^4+y^4)dx-(x^4+xy^3)dy=0$$

Քանի որ հավասարման գործակիցները միևնույն (4-րդ) աստիճանի անդամներից բաղկացած բազմանդամներ են, ուստի հավասարումը համասեռ է և հետևաբար, $\dfrac{y}{x}=z$ նշանակմամբ, որտեղ z-ը նոր անհայտ ֆունկցիան է (y-ի փոխարեն) հավասարումը կբերվի անջատվող փոփոխականներով հավասարման: Ունենք $y=zx\Rightarrow dy=zdx+xdz$, որոնք տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք

$$(x^4+z^4x^4)dx-(x^4+x^4z^3)(zdx+xdz)=0$$

$$(x^4+z^4x^4)dx-(x^4z+x^4z^4)dx-(x^5+x^5z^3)dz=0$$

$$(x^4-x^4z)dx=(x^5+x^5z^3)dz,$$

$$x^5(1+z^3)dz=x^4(1-z)dx$$

Ենթադրելով, որ $x^5(1-z)\neq 0$, հավասարման երկու կողմը բաժանենք $x^5(1-z)$-ի, կստանանք ($x^5(1-z)=0$ դեպքը կքննարկենք ստորև)

$$\frac{(1+z^3)dz}{1-z}=\frac{dx}{x},$$

որն ինտեգրելով, կունենանք

$$\int\frac{(1+z^3)dz}{1-z}=\int\frac{dx}{x}, \quad -\int\frac{(z^3-1+2)dz}{z-1}=\ln|x|,$$

$$-\int(z^2+z+1)dz-2\int\frac{dz}{z-1}=\ln|x|,$$

ինտգրելով և հաստատունը գրելով հարմար ձևով, կստանանք

$$\ln c_1x(z-1)^2=-\frac{2z^3+3t^2+6t-11}{6},$$

$$c_1x(z-1)^2=e^{\frac{11-2t^3-3z^2-6z}{6}},$$

տեղադրելով $z=\frac{y}{x}$, կստանանք $c_1x\left(\frac{y}{x}-1\right)^2=e^{\frac{11-\frac{2t^3}{x^3}-3\frac{y^2}{x^2}-6\frac{y}{x}}{6}}$, նշանակելով $c=\frac{1}{c_1}$ կունենանք

$$\frac{1}{x}(y-x)^2=c\cdot e^{\frac{11x^3-2y^3-3xy^2-6x^2y}{6x^3}},\ (c\neq 0):$$

Եթե $x^5(1-z)=0$, ապա $x=0$ կամ $z=1$: Ակնհայտ է $x=0$ տրված հավասարման լուծումն է, իսկ $z=1$ դեպքում ընդունելով $c=0$, վերջնական պատասխանը կլինի՝

Պատասխան՝ $(y-x)^2=cx\cdot e^{\frac{11x^3-2y^3-3xy^2-6x^2y}{6x^3}}$, $x=0$:

Օրինակ: Գտնել ընդհանուր ինտեգրալը և տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը, եթե

$$(3x+y-4)y'=4x-2y-2\,;\ y(2)=3$$

Տեղադրենք $y=s+b$, $x=t+a$ որտեղ a,b-ն հաստատուններ են: a-ն և b-ն ընտրելու ենք այնպես, որ նոր փոփոխականներով ստանանք համասեռ հավասարում: Ունենք

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(s+b)}{d(t+a)}=\frac{ds}{dt}=s'$$

որից հետո հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$(3(t+a)+s+b-4)s'=4t-2s+4a-2b-2:$$

a-ն և b-ն ընտրենք այնպես, որ $\begin{cases}3a+b-4=0\\4a-2b-2=0\end{cases}\Rightarrow\ a=1,\ b=1:$

Հետևաբար $y=s+1$, $x=t+1$ և հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$(3t+s)s'=4t-2s,$$

որը առաջին կարգի համասեռ հավասարում է: $z=\frac{s}{t}$ նշանակմամբ հավասարումը կբերվի անջատվող փոփոխականներով հավասարման $s'=z't+z$՝

$$(3t+zt)(z't+z)=4t-2zt\Rightarrow(z+3)t^2z'=4t-5zt-z^2t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(z+3)dz=-(z^2+5z-4)dt\Rightarrow$$

$$\frac{(z+3)dz}{z^2+5z-4}=-\frac{dt}{t}\Rightarrow\int\frac{(z+3)dz}{z^2+5z-4}=-\int\frac{dt}{t}:$$

Գտնելով ինտեգրալները և տեղադրելով $z=\dfrac{y-1}{x-1}$, կստանանք՝

$$(y-1)^2+5(y-1)(x-1)-4(x-1)^2\left|\frac{2(y-1)+5(x-1)-\sqrt{41}(x-1)}{2(y-1)+5(x-1)+\sqrt{41}(x-1)}\right|^{\frac{1}{\sqrt{41}}}=c$$

Սա եղավ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը:

$y(2)=3$ դեպքում $c=10\left(\dfrac{9-\sqrt{41}}{9+\sqrt{41}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{41}}}$, տեղադրելով ընդհանուր ինտեգրալի մեջ, կստանանք մասնակի լուծում:

3. ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

Դիտարկենք $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ հավասարումը, որտեղ $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$:

Հավասարումը լուծելու համար կազմենք

$$\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

բնութագրիչ հավասարումը, որի իրական արմատներն են $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ թվերը՝ համապատասխանաբար $n_1,n_2,\cdots,n_k$ պատիկություններով, իսկ ոչ իրական արմատներն են $\alpha_1\pm i\beta_1,\alpha_2\pm i\beta_2,\cdots,\alpha_m\pm i\beta_m$ $(\beta_i>0)$ թվերը՝ համապատասխանաբար $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_k$ պատիկություններով: Այդ դեպքում հավասարման ընդհանուր լուծումը հետևյալ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիան է.

$$e^{\lambda_i x},xe^{\lambda_i x},\cdots,x^{n_i-1}e^{\lambda_i x},\ (1\le i\le k);$$

$$e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x,\ xe^{\alpha_i x}\cos\beta_i x,\cdots,x^{\ell_i-1}e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x,$$

$$e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x,\ xe^{\alpha_i x}\sin\beta_i x,\cdots,x^{\ell_i-1}e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x\quad(1\le i\le m);$$

Օրինակ: Լուծել հավասարումը

$$y''+y'-12y=0$$

Նշանակենք $y=\ell^{\lambda x}$ կունենանք

$$(\lambda^2+\lambda-12)\ell^{\lambda x}=0$$

որտեղից $\lambda^2+\lambda-12=0$, որը կոչվում է տված դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարում: Լուծելով այն, կստանանք $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=3$: Դիֆերենցիալ հավասարման արմատները կլինեն՝ $y_1(x)=\ell^{-4x}$ և $y_2(x)=\ell^{3x}$:

Դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1\ell^{-4x}+C_2\ell^{3x},$$

որտեղ C_1 և C_2 կամայական հաստատուններ են:

Օրինակ: Լուծել հավասարումը

$$y^{IV}-3y^{III}+3y^{II}-y^{I}=0$$

Դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարումը կլինի՝

$$\lambda^4-3\lambda^3+3\lambda^2-\lambda=0$$

որտեղից $\lambda(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1)=0$, կամ $\lambda(\lambda-1)^3=0$:

Ստացվեց, որ $\lambda_1=0$-ն պարզ արմատ է և $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$-ը եռապատիկ արմատ է: Հետևաբար դիֆերենցիալ հավասարման գծորեն անկախ լուծումներն են՝

$$y_1(x)=e^{0\cdot x}=1,\ y_2(x)=e^x,\ y_3(x)=xe^x,\ y_4(x)=x^2e^x:$$

Ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y(x)=C_1+C_2e^x+C_3xe^x+C_4x^2e^x=C_1+(C_2+C_3x+C_4x^2)e^x,$$

որտեղ C_1,C_2,C_3,C_4 թվերը կամայական հաստատուններ են:

Օրինակ: Լուծել հավասարումը

$$y''+y=0$$

Բնութագրիչ հավասարումը կլինի՝ $\lambda^2+1=0$, որտեղից $\lambda^2=-1$, $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, այսինքն հավասարումն ունի ոչ իրական արմատներ: Հավասարման ընդհանուր իրական լուծումը կլինի՝ $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$, որտեղ C_1,C_2-ը կամայական հաստատուններ են:

4. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում կոչվում է $y'+a(x)y=b(x)$ տեսքի հավասարումը, որտեղ $a(x)$ և $b(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ ֆունկցիաներ են (α,β) միջակայքում:

Եթե $b(x)=0$, երբ $x\in(\alpha,\beta)$, ապա հավասարումը կոչվում է գծային համասեռ, և նրա ընդհանուր լուծումը տրվում է $y(x)=c\cdot e^{-\int a(x)dx}$, $(c\in R)$ բանաձևով:

Եթե $b(x)\neq 0$, ապա հավասարումը կոչվում է գծային անհամասեռ, որի ընդհանուր լուծումը ստացվում է համապատասխան գծային համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման և անհամասեռի որևէ մասնակի լուծման գումարի տեսքով:

Անհամասեռ հավասարման մասնակի լուծումը կարելի է գտնել հաստատունի փոփոխման (վարիացիայի) եղանակով, համաձայն որի անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը փնտրվում է $y_1(x)=\alpha(x)\cdot e^{-\int a(x)dx}$ տեսքով, որտեղ $\alpha(x)$-ը պետք է ընտրել այնպես, որ $y_1(x)$-ը դառնա $y'+a(x)y=b(x)$ հավասարման լուծումը: Արդյունքում ստացվում է $\alpha(x)=\int b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}dx$ և հետևաբար անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կհամընկնի

$$y(x)=c\cdot e^{-\int a(x)dx}+e^{-\int a(x)dx}\int b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}dx$$

տեսքի ֆունկցիաների բազմության հետ:

Օրինակ: Լուծել $(1+x^4)y'-4x^3y=x^5(1+x^4)$ հավասարումը:

Պետք է լուծել համապատասխան համասեռ հավասարումը

$$(1+x^4)y'-4x^3y=0,$$

անջատենք փոփոխականները՝

$$\frac{dy}{y}=\frac{4x^3}{1+x^4}dx\Rightarrow \ln|y|=\int\frac{dx^4}{1+x^4}\Rightarrow$$

$$y=\alpha\cdot e^{\int\frac{dx^4}{1+x^4}}=\alpha\cdot e^{\ln(1+x^4)}=\alpha(1+x^4)$$

α-ն հաստատուն է:

Կատարենք հաստատունի վարիացիա. տրված հավասարման մասնակի լուծումը փնտրենք $y=\alpha(x)(1+x^4)$ տեսքով:

Ունենք $y'=\alpha'(x)(1+x^4)+4x^3\alpha(x)$ տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կունենանք

$$(1+x^4)\left(\alpha'(x)(1+x^4)+4x^3\alpha(x)\right)-4x^3\alpha(x)(1+x^4)=x^5(1+x^4),$$

$$\alpha'(x)(1+x^4)=x^5(1+x^4)\Rightarrow\alpha'(x)=\frac{x^5}{1+x^4},$$

$$\alpha(x)=\int\frac{x^5}{1+x^4}dx=\int\frac{x^5+x-x}{1+x^4}dx=$$

$$=\int\frac{x(1+x^4)}{1+x^4}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+x^4}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+c:$$

Հետևաբար

$$y=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+c\right)(1+x^4),$$

որը կլինի տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Օրինակ: Լուծել $y' + 2xy = x$ հավասարումը $y(0) = \frac{1}{2}$ սկզբնական պայմանով:

Լուծենք $y' + 2xy = 0$ համապատասխան համասեռ հավասարումը.

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \Rightarrow \ln|y| = -2\int xdx \Rightarrow y = \alpha \cdot e^{-\int xdx} = \alpha \cdot e^{-x^2}$$

α-ն հաստատուն է:

Կատարենք հաստատունի վարիացիա.

$$y = \alpha(x) \cdot e^{-x^2},\ y' = \alpha'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot \alpha(x) \cdot e^{-x^2}:$$

Տեղադրենք տված հավասարման մեջ

$$\alpha'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x\alpha(x) \cdot e^{-x^2} + 2x\alpha(x) \cdot e^{-x^2} = x,$$

$$\alpha'(x) = xe^{x^2},\ \alpha(x) = \int xe^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c,$$

տեղադրելով y-ի մեջ, կստանանք $y = \left(\frac{e^{x^2}}{2} + c\right)e^{-x^2}$: Իսկ $y(0) = \frac{1}{2}$ դեպքում $C = 1/2$:

Պատասխան՝ $y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$, $C = \frac{1}{2}$:

Օրինակ: Լուծել $dx - x\sin ydy = y^2 e^{y^3 - \cos y} dy$ հավասարումը, լուծումը փնտրելով $x = x(y)$ տեսքով:

Հավասարման երկու կողմը բաժանենք dy-ի վրա և տեղադրենք $\frac{dx}{dy} = x'(y)$: Կստանանք $x' - x\sin y = y^2 e^{y^3 - \cos y}$:

Լուծենք համապատասխան համասեռ հավասարումը:

$x' - x\sin y = 0$, $\frac{dx}{x} = \sin ydy$, $\ln|x| = \int \sin ydy$, $x = \alpha e^{-\cos y}$ որտեղ α-ն հաստատուն է: Կատարենք հաստատունի վարիացիա՝

$$x = \alpha(y)e^{-\cos y} \Rightarrow x' = \alpha'(y)e^{-\cos y} + \alpha(y)\sin y \cdot e^{-\cos y}$$

Տեղադրենք հավասարման մեջ:

$$\alpha'(y)e^{-\cos y} + \alpha(y)e^{-\cos y} - \alpha(y)\sin y \cdot e^{-\cos y} = y^2 e^{y^3 - \cos y} \Rightarrow$$

$$\alpha'(y) = y^2 e^{y^3} \Rightarrow \alpha(y) = \int y^2 e^{y^3} dy = \frac{e^{y^3}}{3} + c \Rightarrow x\left(\frac{e^{y^3}}{3} + c\right)e^{-\cos y}:$$

Պատասխան՝ $x\left(\frac{e^{y^3}}{3} + c\right)e^{-\cos y}$:

Գտնել անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը և տրված սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծումը

2335. $y' = x^3 + \sin x$

2336. $y' = \cos^2 x$

2337. $y' = xe^x$

2338. $y' = y^2 - 1$

2339. $yy' = y^2 - 1$

2340. $y' \sin y = e^x$

2341. $y' = xy^2$

2342. $e^{2x} dy = e^{3y} dx$

2343. $yy' = e^{x+y}$

2344. $yy' = x\sqrt{1+y^2}$

2345. $(y + xy)dx + (x + xy)dy = 0$

2346. $(x^2 + x + 4)dx = (y^2 + 2y + 4)dy$

2347. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$

2348. $yy' \sin x + (1+y^2)\cos x = 0$

2349. $(1+8x^2)yy' = x(1+y^2)$

2350. $y^4 dx + \sqrt{1+x^2}\,dy = 0$

2351. $\operatorname{arctg} x dx = y dy$

2352. $dy = y \ln x dx$, $y(e) = 1$

2353. $e^{x^2} y dy = x dx$, $y(0) = 0$

2354. $y' \operatorname{tg} x = y$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

2355. $xyy' - 1 - y^2 = 0$, $y(1) = 0$

2356. $y' \sin x = y \ln y$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

Համասեռ և համասեռի բերվող դիֆերենցիալ հավասարումներ

2357. $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

2358. $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$

2359. $2x^2 y' = y^2 - 3x^2$

2360. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} e^{-\frac{y}{x}}$

2361. $\left(x^2 + y^2\right)dx + xydy = 0$

2362. $\left(2x^2 + 3y^2\right)dx - 5xydy = 0$

2363. $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

2364. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$

2365. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

2366. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

2367. $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$

2368. $y' = \frac{x + y - 3}{x - y + 1}$

2369. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$

2370. $y' = \frac{3x^3 + 4x^2 y}{2y^2 + 2x^2}$

Գտնել հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը

2371. $y'' + y' - 2y = 0$

2372. $y'' + 25y = 0$

2373. $y'' - 8y = 0$

2374. $y'' - 2y' + y = 0$

2375. $y'' + 4y' + 10y = 0$

2376. $y'' - y' = 0$

2377. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

2378. $y''' + y'' = 0$

2379. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

2380. $y''' + y = 0$

2381. $y''' - y'' - y' + y = 0$

2382. $y''' - 3y' + 2y = 0$

2383. $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^2y = 0$

2384. $y^{IV} - y'' = 0$

2385. $y^{IV} + 9y'' = 0$

2386. $y^{IV} - 16y = 0$

2387. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$

2388. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

2389. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$

2390. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$

2391. $y^{V} - 64y^{IV} + 9y''' = 0$

2392. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$

Գտնել գծային դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը

2393. $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1+x^2}{x-1}$

2394. $y' + 2xy = x$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$

2395. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

2396. $x^2y' + e^{-\frac{1}{x}}y = 0$

2397. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$

2398. $y' + y = x$

2399. $dy - y\,\mathrm{tg}\,x dx = \cos x dx$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

2400. $y' + y\dfrac{x^3}{1+x} = 0$

2401. $xy' + y = x\cos^2 x$, $x > 0$

2402. $y' + y\sin^3 x = 0$

2403. $(1+x^4)y' - 4x^3y = x^5(1+x^4)$

2404. $xy' + y = xe^x$, $x > 0$

2405. $y' + (4x^3 - 2)y = e^{-x^4+x}$

2406. $y' + ay = \sin bx$

2407. $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = x$, $x \in (0; \pi)$

2408. $xy' + y = e^{-x}$, $x > 0$

2409. $(1+x)y' - xy = 1 + x$, $x > 0$

2410. $y' + x^2e^{-x^3}y = 0$

2411. $x(x^3+1)y' + 2(x^3+1)y = x$

2412. $y' + y = x^2e^{-x}$, $y(0) = 1$

2413. $xy' - y = x\ln x$, $y(1) = 1$

2414. $y' + y\cos^2 x = 0$

2415. $ydx + xdy = ye^{-y^2}dy$ լուծումը փնտրել $x = x(y)$ տեսքով

2416. $dx - x\sin ydy = y^2e^{y^3-\cos y}dy$ լուծումը փնտրել $x = x(y)$ տեսքով:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

975. -7: **976.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$: **977.** $\frac{9}{10}$: **978.** $\frac{3}{16}$: **979.** -1:

980. $2\cos 1$: **981.** 0: **982.** $3/2$: **983.** $8/3$: **984.** 0:

985. $\frac{\sqrt{3}}{2}$: **986.** $-\sqrt{3}$: **987.** 16: **988.** $\frac{2}{3}\cos 3$: **989.** $-\frac{17}{2}$:

990. $-\frac{7}{5}$: **991.** $-8/27$: **992.** $-5/8$: **993.** 6016: **994.** -4:

995. $5/9$: **996.** $3/(3e+5)$: **997.** $2e$: **998.** $4e^4$: **999.** 0:

1000. $e(\sin 1+\cos 1)$: **1001.** $32(\ln 2\cos 4-\sin 4)$: **1002.** $\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$:

1003. $64(2\ln 4+1)$: **1004.** $3e$: **1005.** $\frac{4}{19}(19\ln 19+7)$: **1006.** $2(\sin 1+\cos 1)$:

1016. $5x^4-3x^2$: **1017.** $(x+2)(x+3)^2\cdot(6x^2+22x+18)$:

1018. $\frac{17}{(3x+4)^2}$: **1019.** $-\frac{y}{x}$: **1020.** $\frac{2(1-2x)}{(1-x-x^2)^2}$: **1021.** $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$:

1022. $\frac{-3x^5+5x^4+2x^3-6x^2-6x+12}{(1-x)^3}$: **1023.** $-\frac{8\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+2}{6\sqrt[6]{x}\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}$:

1024. $\sin x-x\cos x+x^2\sin x$: **1025.** $\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$: **1026.** $\frac{1}{1+\cos x}$:

1027. $\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x+\cos x)\cos x-x\sin x}{(1+\operatorname{tg} x)^2\cos^2 x}$: **1028.** $e^x(x^2+3x)$:

1029. $1+\ln x+e^x(\cos x+\sin x)$: **1030.** $-\frac{3}{2}\sqrt{2-3x}$: **1031.** $6\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}\cdot\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$:

1032. $\frac{1}{8y}\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x+\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x+(x+\sqrt{x})}}$: **1033.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$: **1034.** $-8\sin 8x\cos^2 4x$:

1035. $4\cos 8x-\cos 2x$: **1036.** $\sin^2 x\left((9-3x^2)\cos x-2x\sin x\right)$:

1037. $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cos\left(\sin\frac{1}{x}\right)$: **1038.** $\frac{2x}{\cos(x^2+1)}$: **1039.** $-\frac{2x\sin\left(2\sqrt[3]{x^2-1}\right)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$:

1040. $4x^3+2^{x^2}x\ln 4+2^{2^x+x}\ln^2 2$: **1041.** $\dfrac{y}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$: **1042.** $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$:

1043. $\dfrac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$: **1044.** $\left(2x\cos x^2-\sin x\sin x^2\right)\cdot e^{\cos x}$: **1045.** $-\dfrac{1}{\cos x}$:

1046. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$: **1047.** $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$: **1048.** $\left(\dfrac{1+x}{\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)}$:

1049. $\dfrac{2\sin(2\arcsin 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$: **1050.** $\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sin(4\arccos x^2)$:

1051. $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$: **1052.** $\dfrac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^2}$: **1053.** $\dfrac{e^{x/2}-1}{2(e^x+1)}$:

1054. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$: **1055.** $\sqrt{a^2-x^2}$: **1056.** $\dfrac{3\ln^2 x\sin\ln^3 x}{y\cdot 4x(1+\cos\ln^3 x)\sqrt{\cos\ln^3 x}}$:

1057. $\dfrac{2}{1+e^{2x}}-\dfrac{arctge^x}{e^x}$: **1058.** $x^x(1+\ln x)$: **1059.** $e^x\cdot x^{e^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$:

1060. $(\ln x)^{x-1}\cdot\dfrac{x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln\ln x}{x^{1+\ln x}}$: **1061.** $(\sin x)^{\cos x+1}(\mathrm{ctg}^2 x-\ln\sin x)$:

1062. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2-1}$: **1063.** $\dfrac{x-2}{x(x-1)}+\dfrac{9-x}{3(x^2-9)}$: **1064.** $\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}$: **1065.** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k}{x-a_k}$:

1066. $\dfrac{1}{2}\ln\mathrm{tg}\,x+\dfrac{x+1}{\sin 2x}$: **1067.** $4\,\mathrm{ctg}\,2x+\dfrac{2-5x}{3x(1-x)}-\dfrac{2x}{1+x^2}$:

1068. $5;-5$: **1069.** $7;-7$: **1070.** $2;-2$: **1071.** $\dfrac{9}{8}\pi^2;-\dfrac{9}{8}\pi^2$: **1072.** $8\pi^2;-8\pi^2$:

1073. $1;-1$: **1074.** $3;-3$: **1075.** $-14;14$: **1076.** $2\ln 2;-2\ln 2$: **1077.** $2;-2$:

1078. $4;-4$: **1079.** $5;-5$: **1080.** $0;-2$: **1081.** $0;0$: **1082.** $-1;-1$:

1083. $20;0$: **1084.** $9;4$: **1085.** $12;16\ln 4$: **1086.** $-1;1$: **1087.** $1;-1$:

1088. Գոյություն չունի; $+\infty;+\infty$; գոյություն չունի: **1089.** $0;1$: **1090.** $\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}$:

1091. ա) $-1;-1$; բ) $1;1$: **1092.** $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$, $y=2x$: **1093.** $y=-3x$, $y=\dfrac{1}{3}x$:

1094. $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$: **1095.** $y=-3x+\dfrac{3\pi}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{6}$:

1096. $y=\frac{4}{9}x+\frac{8}{9}$, $y=-\frac{9}{4}x-\frac{9}{2}$: **1097.** $y=2x+1-2\pi$, $y=-\frac{1}{2}x+1+\frac{\pi}{2}$:

1098. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$, $y=2x+\frac{\pi}{4}-2$:

1099. $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3\right)x+3\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{-3x}{\sqrt{3}\pi+9}+\frac{\pi}{2}+\frac{9}{\sqrt{3}\pi-9}$:

1100. $y=-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{2}{\pi}x-\frac{2}{\pi}$: **1101.** $y=-\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{16}$, $y=\frac{8}{\pi}x-\frac{4}{\pi}$:

1102. $(-1;-58)$, $(1;54)$, $(7;-2106)$:

1103. $(\pi n;\pi n)$, $n\in Z$; $\left(\pi k+\frac{\pi}{2};\pi k+\frac{\pi}{2}+1\right)$, $k\in Z$:

1104. $(1;2)$: **1105.** $(2;7)$, $(3;-6)$: **1106.** $(\pi k;3-2\pi k)$, $k\in Z$:

1107. $(\log_2^3;-27)$: **1108.** $(1;7)$: **1109.** $(3;0)$, $\left(\frac{9}{2};\frac{27}{16}\right)$:

1110. $y=-x+3$, $y=7x-21$: **1111.** $y=3x-2$, $y=\frac{19}{9}x+\frac{2}{3}$: **1112.** $y=\frac{3}{2}x$:

1113. $y=4x+1$, $y=8x-3$: **1114.** $y=-3x+4$: **1115.** $y=-5x-2$, $y=7x-14$:

1116. $y=-2x+2$, $y=\frac{2}{3}x-6$: **1117.** $y=\frac{13}{6}-\frac{5}{6}x$: **1118.** $a=2\sqrt{2}-1$:

1119. $a=4$: **1120.** $a=5$: **1121.** $a=8$: **1122.** $a=2$: **1123.** $a=2$:

1124. $a=4$: **1125.** $(-1;-6)$: **1126.** $a=6\pi$: **1127.** $a=2$: **1128.** $a=1$:

1133. $a=-\frac{1}{25}$, $b=\frac{6}{25}$: **1134.** $a=3e^9-6$, $b=-8e^9+9$:

1135. $a=2e^{11}-3$, $b=-7e^{11}+4$: **1136.** $a=e-2$, $b=1$:

1137. $a=e^4-1$, $b=-3e^4-4$: **1138.** $a=\frac{4-4\pi}{\pi^2}$, $b=\frac{2\pi-4}{\pi}$:

1139. $a=e$, $b=0$: **1140.** $a=\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$, $b=\frac{3}{2}+\frac{2}{e}$:

1141. $a=1$, $b=\frac{1}{2}$: **1142.** $a=0$, $b=e$: **1143.** $a=-3$, $b=\frac{3}{4}$:

1144. $a=2e-2$, $b=-e+1$: **1145.** $a=-\frac{7}{4}+\ln 2$, $b=\frac{15}{4}-3\ln 2$:

1146. $a=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\ln 5$, $b=\frac{4}{5}-\ln 5$: **1147.** $a=1-\frac{2e}{e+1}+\ln(1+e)$, $b=1$:

1148. $a=14-\pi$, $b=\pi-13$: **1149.** $a=-\frac{12}{\pi}+\frac{3}{\pi^2}$, $b=-12+\frac{6}{\pi}$:

1150. $a=-1$, $b=1$: **1151.** $a=2$, $b=2\pi+1$:

1152. $a=-5+\frac{3}{\pi}$, $b=8\sqrt{\pi}-\frac{6}{\sqrt{\pi}}$:
1153. $y\cdot\frac{x\ln 3dx}{(1+x^4)\sqrt{\operatorname{arctg}x^2}}$:

1154. $2\sqrt{64-x^2}dx$, $|x|\le 8$:
1155. $\left(\frac{-1}{2\sqrt{(1-x^2)\arccos x}}-2^{-x}\ln 2\right)dx$:

1156. $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$:
1157. $y(1+2\ln x)xdx$:
1158. $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}dx$:

1159. ա) $ugdv+vgdu+uvdg$, բ) $-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{3/2}}$, գ) $\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$, դ) $\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$:

1160. 1.995:
1161. 1.007:
1162. 1.937:
1163. 2.012:
1164. 0.965:
1165. -0.874:
1166. 1.043:
1167. 1.24:
1168. 0.81:

1169. $\frac{179}{30}$:
1170. $\frac{9}{10}$:
1171. $\frac{103}{50}$:
1172. $\frac{59}{30}$:

1173. $\frac{\pi}{6}-\frac{7}{800\sqrt{3}}$:
1174. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{80}$:
1175. $-\frac{\pi}{4}$:
1176. $\frac{3}{4}\pi$:

1177. $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$:
1178. $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$:
1179. $-\frac{4x\operatorname{sgn}x}{(1+x^2)^2}$:

1180. $\frac{x-1}{(2x-x^2)^{3/2}}$:
1181. $\frac{4x^3}{(1+x^4)^{5/4}}$:
1182. $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$:

1183. Բավարարում է:
1184. Բավարարում է:
1185. Բավարարում է:
1186. Չի բավարարում:
1187. Բավարարում է:
1188. Բավարարում է:
1189. Բավարարում է:
1190. Բավարարում է:
1191. Բավարարում է:
1192. Բավարարում է:
1193. Բավարարում է:

1196. $\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$:
1197. $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$:

1198. $\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$:
1199. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)$:

1200. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$:

1201. $\frac{(a-b)^n}{2}\cdot\cos\left((a-b)x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{(a-b)^n}{2}\cdot\cos\left((a+b)x+\frac{\pi n}{2}\right)$:

1202. $\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{5n}{4}\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)$:

1203. $-\frac{(n-1)!}{(1-x^2)^n}\left((1+x)^n+(-1)^{n-1}(1-x)^n\right)$:

1240. $-1;1$: **1241.** $2;-2$: **1242.** $-2;2$: **1243.** $-1;1$: **1244.** $1;-1$, $-1;1$:

1245. $\frac{1}{2}$: **1246.** $-\frac{1}{2}$: **1281.** $-\frac{3}{2}$: **1282.** $\frac{4}{7}$: **1283.** $-\frac{1}{2}$: **1284.** $\frac{1}{4}$: **1285.** 4:

1286. $-\frac{5}{2}$: **1287.** $-\frac{1}{6}$: **1288.** $\frac{3}{2}$: **1289.** $\frac{9}{16}$: **1290.** $\frac{7}{4}$: **1291.** 12: **1292.** $\frac{65}{96}$:

1293. $\frac{1}{2}$: **1294.** $\frac{16}{9}$: **1295.** $\frac{4}{5}$: **1296.** $-\frac{125}{48}$: **1297.** $-\frac{4}{9}$: **1298.** $-\frac{1}{2}$: **1299.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$:

1300. 3: **1301.** -2: **1302.** 2: **1303.** $\frac{2}{3}$: **1304.** 0: **1305.** $\frac{1}{2}$: **1306.** $\frac{1}{2}$: **1307.** $\frac{6}{7}$:

1308. $\frac{1}{9}$: **1309.** $-\frac{2}{\pi}$: **1310.** $\frac{1}{2}$: **1311.** 1: **1312.** $\frac{1}{3}$: **1313.** $\frac{1}{2}$: **1314.** -3:

1315. $\frac{15}{4}$: **1316.** $\frac{1}{2}$: **1317.** 0: **1318.** $\frac{1}{3}$: **1319.** 2: **1320.** 0: **1321.** $\frac{9}{14}$:

1322. $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$: **1323.** 0: **1324.** $\frac{\alpha-\beta}{2}$: **1325.** $\frac{1}{3}$: **1326.** 0: **1327.** 0: **1328.** $-\frac{\pi}{2}$:

1329. 0: **1330.** 2: **1331.** 0: **1332.** 0: **1333.** 1: **1334.** 1: **1335.** 1: **1336.** 1:

1337. 1: **1338.** $e^{2/\pi}$: **1339.** e: **1340.** $\sqrt[3]{e}$: **1341.** $e^{-2/\pi}$: **1342.** $e^{2/\sin 4}$: **1343.** $e^{-2/\pi}$:

1344. 1: **1345.** 3: **1346.** 1: **1347.** $1-3x+6x^2$: **1348.** $1+x+\frac{x^2}{2}$:

1349. $1-2x+2x^2$: **1350.** $1+x+\frac{x^2}{2}$: **1351.** $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}$: **1352.** $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$:

1353. $x-\frac{x^3}{3}$: **1354.** $x^3-\frac{5x^4}{6}$: **1355.** $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{7}{15}x^5$:

1356. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}$: **1357.** $-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}$: **1358.** $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$:

1359. Նվազող է $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ միջակայքում, աճող է $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$ միջակայքում:

1360. Աճող է $\left(-\infty;\frac{7}{2}\right]$ միջակայքում, նվազող է $\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$ միջակայքում:

1361. Աճող է $(-\infty;-2]$ և $[0;+\infty)$ միջակայքերում, նվազող է $[-2;0]$ միջակայքում:

1362. Աճող է $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$ և $[3;+\infty)$ միջակայքերում, նվազող է $\left[\frac{1}{2};3\right]$ միջակայքում:

1363. Աճող է $(-\infty;6]$ միջակայքում, նվազող է $[6;+\infty)$ միջակայքում:

1364. Նվազող է $(-\infty;-1]$ և $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ միջակայքերում, աճող է $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ և $[0;+\infty)$ միջակայքերում:

1365. Նվազող է $(-\infty;-1)$, $\left[\frac{1}{3};1\right]$ և $[3;+\infty)$ միջակայքերում, աճող է $\left(-1;\frac{1}{3}\right]$ և $(1;3]$ միջակայքերում:

1366. Նվազող է $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ և $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ միջակայքերում, աճող է $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ միջակայքում:

1367. Նվազող է $(-\infty;0]$ և $[2;+\infty)$ միջակայքերում, աճող է $[0;2]$ միջակայքում:

1368. Նվազող է $(-\infty;-3)$, $(-3;-1)$ և $(-1;+\infty)$ միջակայքերում:

1369. Աճող է $(-\infty;-3)$ և $\left(-3;-\frac{1}{2}\right]$ միջակայքերում, նվազող է $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ միջակայքում:

1370. Աճող է $\left[-2\pi;-\frac{5}{3}\pi\right]$ և $\left[-\frac{4}{3}\pi;-\pi\right]$ միջակայքերում, նվազող է $\left[-\frac{5}{3}\pi;-\frac{4}{3}\pi\right]$ միջակայքում:

1371. Աճող է $(-1;1)$ միջակայքում:

1372. Աճող է $\left[-2\pi;-\frac{2}{3}\pi\right]$ միջակայքում, նվազող է $\left[-\frac{2}{3}\pi;0\right]$ միջակայքում:

1373. Նվազող է $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերում, աճող է $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ միջակայքում:

1374. Աճող է $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$ միջակայքում, նվազող է $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$ միջակայքում:

1375. Աճող է $(-\infty;-1]$ և $[0;1]$ միջակայքերում, նվազող է $[-1;0]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերում:

1376. Նվազող է $(0;\sqrt{5}]$ միջակայքում, աճող է $[\sqrt{5};+\infty)$ միջակայքում:

1377. Նվազող է $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ միջակայքում, աճող է $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$ միջակայքում:

1378. Նվազող է $(-\infty;1)$ միջակայքում:

1379. Նվազող է $(0;1)$ և $(1;e]$ միջակայքերում, աճող է $[e;+\infty)$ միջակայքում:

1380. Նվազող է $(0;+\infty)$ միջակայքում:

1381. Նվազող է $[3;4]$ միջակայքում, աճող է $[0;3]$ միջակայքում:

1382. Նվազող է $[-2;0]$ և $[2;2\sqrt{2}]$ միջակայքերում, աճող է $[-2\sqrt{2};-2]$ և $[0;2]$ միջակայքերում:

1383. Նվազող է $[-3;0]$ միջակայքում, աճող է $\left[-\frac{9}{2};-3\right]$ և $[0;+\infty)$ միջակայքերում:

1384. Աճող է $(-\infty;-1]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերում:

1385. $(-\infty;0]$: **1386.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$: **1387.** $[-3;3]$: **1388.** -3:

1389. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$: **1390.** $\varnothing$: **1391.** $[-3;3]$: **1392.** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$:

1393. $[1;+\infty)$: **1394.** $[1;+\infty)$: **1395.** $[-3;3]$: **1396.** $[-4;4]$:

1397. $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$: **1398.** $[-5;5]$: **1399.** $[5;+\infty)$: **1400.** $[13;+\infty)$:

1401. $[-3;3]$: **1402.** $[-5;5]$: **1403.** $[6;+\infty)$: **1408.** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6};+\infty\right)$:

1409. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$: **1410.** $\left[-\sqrt{7};\sqrt{7}\right]$: **1411.** $[-4;4]$:

1412. $(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$: **1413.** $[-4;4]$: **1414.** $[-5;5]$: **1415.** $[-6;6]$:

1420. $\frac{1}{4}$: **1426.** -1: **1433.** $x=\frac{1}{2}$, $x_{max}=\frac{1}{2}$:

1434. $x=0$, $x=\frac{8}{3}$; $x_{max}=0$, $x_{min}=\frac{8}{3}$: **1435.** $x=1$:

1436. $x=0$, $x=1$, $x=\frac{m}{n+m}$; $x_{max}=\frac{m}{n+m}$; երբ m-ը զույգ է, $x_{min}=0$; երբ n-ը զույգ է, $x_{min}=1$:

1437. $x_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x_{max}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, երբ k-ն կենտ է, $x_{min}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, երբ k-ն զույգ է:

1438. $x_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x_{max}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_{min}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$:

1439. $x=-1$, $x=9$; $x_{max}=9$, $x_{min}=-1$: **1440.** $x=-\frac{5}{4}$, $x_{min}=-\frac{5}{4}$:

1441. $x=0$, $x=\frac{1}{3}$, $x=1$; $x_{max}=\frac{1}{3}$; $x_{min}=\frac{1}{3}$: **1442.** $x=\frac{1}{2}$; $x_{min}=\frac{1}{2}$:

1443. $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$; $x_{max}=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$; $x_{min}=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$:

1444. Կրիտիկական կետեր չունի:

1445. $x_{min}=\frac{1}{2}$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}$: **1446.** $x_{max}=\frac{3}{2}$, $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$:

1447. $x_{max}=1$; $y(1)=0$; $x_{min}=3$, $y(3)=-4$: **1448.** Էքստրեմումի կետեր չունի:

1449. $x_{\min}=-2$, $y(-2)=0$, $x_{\min}=\frac{1}{2}$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $x_{\max}=-\frac{3}{4}$, $y\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{625}{256}$:

1450. $x_{\max}=-5$; $y(-5)=0$; $x_{\min}=1$, $y(1)=-324$:

1451. $x_{\max}=-2$; $y(-2)=0$, $x_{\max}=3$; $y(3)=0$; $x_{\min}=0$; $y(0)=-108$:

1452. $x_{\min}=0$; $y(0)=5$:

1453. $x_{\max}=2$; $y(2)=\frac{1}{4}$, $x_{\min}=-2$, $y(-2)=\frac{1}{4}$:

1454. $x_{\max}=-3$; $y(-3)=-8$, $x_{\min}=1$, $y(1)=0$:

1455. $x_{\max}=-4$; $y(-4)=-\frac{256}{271}$, $x_{\min}=0$, $y(0)=0$:

1456. $x_{\min}=\frac{7}{5}$; $y\left(\frac{7}{5}\right)=-\frac{1}{24}$:

1457. Էքստրեմում կետեր չունի:

1458. $x_{\min}=\frac{3}{4}$; $y\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$:

1459. $x_{\min}=2$; $y(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$:

1460. Էքստրեմում կետեր չունի:

1461. $x_{\max}=-1$; $y(-1)=-2$:

1462. $x_{\max}=3$; $y(3)=6e^{-3}$; $x_{\min}=-1$; $y(-1)=-2e$:

1463. $x_{\max}=2\pi k+\frac{\pi}{3}$, $k\in Z$; $y\left(2\pi k+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$;

$x_{\min}=2\pi k-\frac{\pi}{3}$, $y\left(2\pi k-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k\in Z$:

1464. $x_{\max}=2\pi k$; $y(2\pi k)=1$; $x_{\max}=2\pi k+\frac{\pi}{2}$, $y\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)=1$,

$x_{\max}=2\pi k+\frac{\pi}{4}$, $y\left(2\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{\min}=2\pi k+\pi$, $y(2\pi k+\pi)=-1$,

$x_{\min}=2\pi k+\frac{3\pi}{2}$, $y\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, $k\in Z$:

1465. $x_{\max}=-1$; $y(-1)=\frac{\pi}{2}-1$, $x_{\min}=1$; $y(1)=1-\frac{\pi}{2}$:

1466. $x_{\min}=1$; $y(1)=\ln 2-\frac{\pi}{2}$:

1467. $x_{\max}=-1$; $y(-1)=\frac{1}{e}$; $x_{\min}=2$, $y(2)=4\sqrt{e}$:

1468. $x_{\min}=\pi k$, k-ն զույգ է, $y(\pi k)=0$; $x_{\max}=\pi k$, k-ն կենտ է, $y(\pi k)=\ln 3$:

1469. $(-1;3)$: 1470. $(-2;1)$: 1471. $(-3;2)$: 1472. $(-1;5)$: 1473. $\varnothing$:

1474. $(-4;4)$: 1475. $(-4;4)$: 1476. $(-4;4)$: 1477. $(-3;3)$: 1478. 3:

1479. -1: **1480.** 2: **1481.** $-\sqrt{3}$: **1482.** 2: **1483.** $x_{max} = a$, $x_{min} = a+1$:
1484. 1: **1485.** 2: **1486.** 1: **1487.** 1:
1488. ա) $\min y = 3$, $\max y = 19$; բ) $\min y = -17$, $\max y = 3$:

1489. $\min y = -20$, $\max y = 7$:
1490. $\min y = 2$, $\max y = \frac{5}{2}$:
1491. $\min y = -28$, $\max y = -8$:
1492. $\min y = 3$, $\max y = 9$:
1493. $\min y = \frac{3}{5}$, $\max y = 1$:
1494. $\min y = 1$, $\max y = \frac{5}{3}$:
1495. $\min y = 2$, $\max y = 3$:
1496. $\min y = -e^3$, $\max y = e^5$:
1497. $\min y = -149$, $\max y = 4$:
1498. $\min y = 6e^{-3}$, $\max y = 2e$:
1499. $\min y = \sqrt{5}$, $\max y = 3$:
1500. $\min y = 0$, $\max y = \frac{4}{3}$:
1501. $\min y = -1$, $\max y = \frac{3}{2}$:
1502. $\min y = 2 - \ln 4$, $\max y = \frac{3}{2} - \ln\frac{9}{4}$:
1503. $\min y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\max y = 1 + \sqrt{2}$:
1504. $\min y = \frac{\pi}{2}$, $\max y = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$:
1505. $\min y = -\sqrt[3]{19}$, $\max y = 2$:
1506. $\min y = 1 - \sqrt{2}$, $\max y = 2$:
1507. $\min y = -2$, $\max y = \frac{5}{2}$:
1508. $\min y = -3$, $\max y = \frac{3}{2}$:
1509. $\min y = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$:
1510. $\min y = \ln 2 - \frac{\pi}{2}$, $\max y = 0$:
1511. $\min y = -2$, $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$:
1512. $\min y = 0$, $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{16}$:
1513. $\min y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\max y = \frac{1+3\sqrt{3}}{8}$:
1514. $\min y = -3e^{-6}$, $\max y = 4e^{-8}$:
1515. $\min y = -4e^2$, $\max y = 8e^{-4}$:
1516. $\min y = 0$, $\max y = \frac{\pi}{2} - 1$:

1527. $x_7 = 539$: **1528.** $x_{1900} = \frac{\sqrt{19}}{380}$: **1529.** $x_9 = 1721$: **1530.** $x_{100} = \frac{1}{20}$:
1531. $x_{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{30}$: **1532.** $x_7 = \frac{49}{543}$: **1533.** $x_{12} = \frac{12^{12}}{e^{12}}$: **1534.** $x_{14} = \frac{7^{10}}{2^4}$:
1535. $x_{11} = -842$: **1536.** $x_5 = 15$: **1537.** $x_8 = -443$: **1538.** $x_6 = 27$:
1539. $x_9 = \frac{1979}{9}$: **1540.** $x_6 = 216$: **1541.** $x_{25} = \frac{75}{\sqrt[3]{25}}$: **1542.** $x_2 = \frac{48}{\sqrt[3]{2}}$:
1543. Գոգավոր է $(0;+\infty)$ միջակայքում: **1544.** Ուռուցիկ է $(0;+\infty)$ միջակայքում:
1545. Ուռուցիկ է $(-\infty;0)$ և $(0;+\infty)$ միջակայքերում:

1546. Ուռուցիկ է $[0;+3]$ միջակայքում և գոգավոր է $[3;+\infty)$ միջակայքում, $x=3$ շրջման կետ է:

1547. Ուռուցիկ է $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ միջակայքում, գոգավոր է $\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ և $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ միջակայքերում, $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ և $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ շրջման կետեր են:

1548. Ուռուցիկ է $\left(0;10e^{3/2}\right]$ միջակայքում և գոգավոր է $\left[10e^{3/2};+\infty\right)$ միջակայքում, $x=10e^{3/2}$ շրջման կետ է:

1549. Գոգավոր է $(-\infty;-3]$ միջակայքում և ուռուցիկ է $[-3;+\infty)$ միջակայքում, $x=-3$ շրջման կետ է:

1550. Ուռուցիկ է $[2\pi k;(2k+1)\pi]$ միջակայքում, $k\in Z$, գոգավոր է $[(2k+1)\pi;2(k+1)\pi]$ միջակայքում, $k\in Z$; $x_k=\pi k$, $k\in Z$ շրջման կետեր են:

1551. Ուռուցիկ է $(-\infty;-1]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերում, գոգավոր է $[-1;1]$ միջակայքում, $x_1=-1$, $x_2=1$ շրջման կետեր են:

1552. Ուռուցիկ է $\left[e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k};e^{\frac{\pi}{4}+(2\pi k+1)\pi}\right]$ միջակայքում, $k\in Z$, գոգավոր է $\left[e^{\frac{\pi}{4}+(2k-1)\pi};e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}\right]$ միջակայքում, $k\in Z$; $x_k=e^{\frac{\pi}{4}+\pi k}$ շրջման կետեր են:

1556. $[-2;2]$: **1557.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$: **1558.** $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$:

1559. $x=-1$ և $x=1$ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ; $y=0$ հորիզոնական ասիմպտոտ:

1560. $y=1$ հորիզոնական ասիմպտոտ:

1561. $x=0$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ, $y=x$ թեք ասիմպտոտ:

1562. $x=0$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ, $y=3x$ թեք ասիմպտոտ:

1563. $x=-4$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ, $y=x-4$ թեք ասիմպտոտ:

1564. $x=-4$ և $x=3$ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ:

1565. $x=-2\sqrt{2}$ և $x=2\sqrt{2}$ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ; $y=-1$ հորիզոնական ասիմպտոտ:

1566. $y=5x$ թեք ասիմպտոտ:

1567. $x=-2$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ և $y=5x-17$ թեք ասիմպտոտ:

1568. $x=-2$ և $x=2$ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ; $y=-3x-2$ թեք ասիմպտոտ:

1569. $x=-2$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ և $y=x-4$ թեք ասիմպտոտ:

1570. $y=-\frac{1}{2}x$ և $y=\frac{1}{2}x$ թեք ասիմպտոտներ: **1571.** $y=-x$ թեք ասիմպտոտ:

1572. $y=2x$ թեք ասիմպտոտ: **1573.** $y=3x$ թեք ասիմպտոտ:

1574. $y=\pm\frac{\pi}{2}$ հորիզոնական ասիմպտոտներ:

1575. $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$ թեք ասիմպտոտներ: **1576.** $y=\pm x$ թեք ասիմպտոտներ:

1577. $x=0$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ, $y=0$ հորիզոնական ասիմպտոտ:

1578. $x=0$ ուղղաձիգ ասիմպտոտ, $y=0$ հորիզոնական ասիմպտոտ:

1586. $\frac{a}{2};\frac{a}{2}$: **1587.** $\sqrt{S}$ կողմով քառակուսի: **1588.** $30^\circ;60^\circ$: **1589.** 2:

1590. $\frac{a}{\sqrt{2}}$: **1591.** $\frac{bh}{2}$: **1592.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$: **1593.** $\pi R^2\left(1+\sqrt{5}\right)$: **1594.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$:

1595. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$: **1596.** $\frac{S\sqrt{S}}{3\sqrt{6\pi}}$: **1597.** $\frac{1-IR}{2}$: **1598.** $\frac{2R}{3};\frac{H}{3}$: **1599.** $\frac{2P}{3}$:

1600. $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$: **1601.** $m^m n^n\cdot\left(\frac{a}{a+n}\right)^{n+m}$: **1612.** $x-x^2+C$:

1613. $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C$: **1614.** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2+C$: **1615.** $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{x_7}{7}+C$:

1616. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$: **1617.** $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+C$: **1618.** $x-\operatorname{arctg}x+C$:

1619. $-x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$: **1620.** $\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$:

1621. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$: **1622.** $\frac{a^{x+1}e^{x+1}}{1+\ln a}+C$: **1623.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$:

1624. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{5}x+C$: **1625.** $-\frac{1}{18}\frac{1}{(3x-4)^6}+C$: **1626.** $\frac{1}{20}(1+x^2)^{10}+C$:

1627. $x+\ln(1+x^2)+C$: **1628.** $-x-10\ln|x-5|+C$: **1629.** $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$:

1630. $\ln(e^x+2)$: **1631.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$: **1632.** $2e^{\sqrt{x}}+C$:

1633. $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$: **1634.** $-\frac{1}{2}\ln|2\cos x+1|+C$: **1635.** $-2\cos\sqrt{x}+C$:

1636. $\frac{1}{5}\arcsin x^5+C$: **1637.** $\frac{5}{32}\sqrt[5]{\left(2x^4+1\right)^4}+C$: **1638.** $-\frac{4}{15}(1-3x)^{\frac{5}{4}}+C$:

1639. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$: **1640.** $x-4\ln|x+4|+C$:

1641. $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right|+C$: **1642.** $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$: **1643.** $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$:

1644. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$: **1645.** $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{3x+5}{3x-1}\right|+C$: **1646.** $\ln\left|3x^2-7x+1\right|+C$:

1647. $\frac{3}{10}\ln\left|2-3x+5x^2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$:

1648. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{5}-1}{2x+\sqrt{5}-1}\right|+C$:

1649. $\frac{1}{5}\ln\left|5x^2-x+2\right|-\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$: **1650.** $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$:

1651. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$:

1652. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$:

1653. $-2\sqrt{5+3x-x^2}-2\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{29}}+C$:

1654. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{x}+\sqrt{7+\frac{3}{x^2}}\right|+C$:

1655. $-\frac{1}{3}\operatorname{sgn}x\cdot\arcsin\frac{3}{2x}+C$: **1656.** $\frac{1}{2(1-x^2)}+C$:

1657. $-\frac{1}{15(x^5+2)^3}+C$: **1658.** $\ln\left|x^3-x+1\right|+C$:

1659. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+5}\right|+C$: **1660.** $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C$:

1661. $\frac{2}{15}(1+x)^{\frac{3}{2}}(3x-2)+C$: **1662.** $\frac{1}{15}(3x^2+2)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$:

1663. $\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$:

1664. $\frac{3}{2}\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)^2-6\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$:

1665. $4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}-7\right)+C$:

1666. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$: **1667.** $\left(\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\operatorname{sgn}x+C$:

1668. $\frac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}+C$; **1669.** $x-\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$;

1670. $-2\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)+2\ln\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)+C$; **1671.** $-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}+C$;

1672. $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+\sqrt{1+e^{4x}}\right)+C$; **1673.** $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C$;

1674. $\frac{4}{21}\left(3e^x-4\right)\sqrt[4]{\left(1+e^x\right)^3}+C$; **1675.** $\frac{2}{3}\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}+C$;

1676. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{2(x+1)}\right|+C$; **1677.** $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;

1678. $\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)+C$;

1679. $-\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)-\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{b+x}{a+x}\right|+C$;

1680. $\frac{\ln^3 x}{3}+C$; **1681.** $\ln|\ln 3x|+C$; **1682.** $\ln|\ln\ln x|+C$;

1683. $\ln x-\ln 2\cdot\ln|\ln 4x|+C$; **1684.** $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$;

1685. $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$; **1686.** $-\ln|\cos x|+C$; **1687.** $\ln|\sin x|+C$; **1688.** $\operatorname{tg}x+C$;

1689. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$; **1690.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; **1691.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C$;

1692. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; **1693.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

1694. $\operatorname{tg}x-x+C$; **1695.** $-\operatorname{ctg}x-x+C$;

1696. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; **1697.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

1698. $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{18}\cos 9x+C$; **1699.** $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$;

1700. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{40}\sin 10x-\frac{1}{128}\sin 16x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

1701. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{144}\sin 18x-\frac{1}{32}\sin 8x+\frac{1}{40}\sin 10x-\frac{1}{16}\sin 2x+C$;

1702. $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}}+C$;

1703. $\frac{\sin^7 x}{7}+C$; **1704.** $\frac{2\sqrt{\cos x}}{5}(\cos^2 x-5)$;

1705. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2\cos^2 x-1}\right|+C$: **1706.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right)+C$:

1707. $\frac{1}{8}\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}+C$: **1708.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C$:

1709. $\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}+C$: **1710.** $-\frac{4}{3\sqrt[4]{\mathrm{tg}^3 x}}+C$: **1711.** $\sin(\ln x)+C$:

1712. $\frac{1}{4}\ln^2(\mathrm{tg}\,x)+C$: **1713.** $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1}+C$: **1714.** $e^{\mathrm{tg}\,x}+\ln|\,\mathrm{tg}\,x\,|+C$:

1715. $-e^{\mathrm{ctg}\,x}-\ln|\,\mathrm{ctg}\,x\,|+C$: **1716.** $\ln|\arcsin x|+C$: **1717.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$:

1718. $-\frac{1}{6}\arccos^3 2x+C$: **1719.** $\frac{1}{2}\ln^2(\arccos x)+C$: **1720.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(arcctgx)^4}+C$:

1721. $\left(\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)^2+C$: **1722.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+C$: **1723.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$:

1724. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$, $a>0$:

1725. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-x\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$, $a>0$:

1726. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$: **1727.** $\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$: **1728.** $x\ln\frac{x}{e}+C$:

1729. $x(\ln^2 x-\ln x+2)+C$: **1730.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$:

1731. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$: **1732.** xe^x+C: **1733.** $-(1+x)e^{-x}+C$:

1734. $\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$: **1735.** $\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+C$, $n\neq -1$:

1736. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$: **1737.** $-x\cos x+\sin x+C$:

1738. $x\sin x+\cos x+C$: **1739.** $-\frac{4}{9}\cos x+\frac{1}{9}x\cos x-\frac{1}{9}\sin x+C$:

1740. $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$: **1741.** $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$:

1742. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$: **1743.** $\frac{1}{5}\left(\arccos x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$:

1744. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$: **1745.** $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x)+C$:

1746. $\frac{1}{3}x^3 \arcsin 2x - \frac{1}{72}(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2}+C$:

1747. $\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$: **1748.** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$:

1749. $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x + C$: **1750.** $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$:

1751. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C$:

1752. $-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C$:

1753. $-\cos x\ln(\operatorname{tg} x)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$: **1754.** $\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$:

1755. $\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$: **1756.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+1$:

1757. $\operatorname{arctg} e^x + 2\pi$: **1758.** $\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-2$: **1759.** $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{4}$:

1760. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}-2\sqrt{1+\ln x}+2$: **1761.** $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+4-\frac{2e^3}{9}$:

1762. $x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x(1-x)}}{2}+1+\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{8}$:

1763. $-2\sqrt{40-3x-x^2}+14$: **1764.** $\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x-5)+2$:

1765. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+1+\ln 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$:

1766. $s_n=-77+\frac{147}{n}(n-1)$, $S_n=-77+\frac{147}{n}(n+1)$:

1767. $s_n = 28-\frac{64}{n}(n-2)+\frac{32}{2}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$,

$S_n = 28-\frac{64}{n}(n+2)+\frac{32}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$:

1768. $s_n=\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\frac{(n-1)}{2}\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$, $S_n=\frac{\pi}{2n}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)}{2}\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$:

1769. $s_n = \frac{\pi}{2n}\frac{\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)}{4n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$, $S_n = \left(1 + \frac{\sqrt{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{4\pi}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\right)$:

1770. $s_n = \frac{625}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 125\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} + 150\frac{n-1}{n} - 40$:

$S_n = \frac{625}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 125\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + 150\frac{n+1}{n} - 40$:

1771. $s_n = \frac{3^9 - 1}{3^{\frac{9}{n}} - 1}\cdot\frac{9}{n}$, $S_n = \frac{3^{\frac{9}{n}}(3^9 - 1)}{3^{\frac{9}{n}} - 1}\cdot\frac{9}{n}$: **1773.** 8: **1774.** 56: **1775.** $\frac{231}{2}$:

1776. $-\frac{1015}{14}$: **1777.** $\frac{82}{3}$: **1778.** 2: **1779.** 1: **1780.** $\frac{1}{\ln 2}$: **1781.** $\ln 2$: **1782.** $\frac{2}{3}$:

1783. $\frac{15}{4}$: **1784.** $\frac{1}{20}$: **1785.** $-\frac{9}{4}$: **1786.** $\frac{135}{4}$: **1787.** $\frac{16}{15}$: **1788.** $\frac{\pi}{12}$: **1789.** $\frac{1}{6}$:

1790. $\frac{\pi}{2}$: **1791.** π: **1792.** 0: **1793.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$: **1794.** $\frac{1}{8}$: **1795.** $\frac{8\sqrt{3}}{27} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$:

1796. $\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 10.5$: **1797.** $-\frac{12}{5}$: **1798.** $\frac{7}{32}$: **1799.** $\frac{\pi}{6}$: **1800.** $\frac{\pi}{3}$: **1801.** 4:

1802. $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$: **1803.** $2 - \ln 5$: **1804.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}$: **1805.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$: **1806.** $4 - \ln 9$:

1807. $7 + \ln 4$: **1808.** $2 - \ln 2$: **1809.** $-\frac{468}{7}$: **1810.** $\frac{\pi}{16}$: **1811.** $-\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{3}$:

1812. $\frac{29}{270}$: **1813.** $\frac{1}{2}\left(e - \sqrt[4]{e}\right)$: **1814.** $\sin 1$: **1815.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$: **1816.** $\frac{5\sqrt{2}}{12}$:

1817. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$: **1818.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$: **1819.** $-\frac{3}{4}$: **1820.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$: **1821.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$:

1822. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$: **1823.** $\frac{\pi}{4}$: **1824.** $4\sqrt{2}$: **1825.** $2\sqrt{2}$: **1826.** $200\sqrt{2}$:

1827. $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$: **1828.** $3\ln 3 - 2$: **1829.** $\ln 4 - \frac{3}{4}$: **1830.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$:

1831. $\frac{\pi}{4}$: **1832.** $\pi^2 - 4$: **1833.** $\frac{5\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}$: **1834.** $\frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$:

1835. $\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}+2\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{2}$: **1836.** $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)$:

1837. $2(2-\sqrt{e-2})-2\sqrt{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e-2}{2}}\right)$: **1838.** 1: **1839.** $1+\frac{1}{2}\ln 2e$:

1840. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3}{2\sqrt{2}}$: **1841.** $\frac{1}{12}$: **1845.** $\ln 2$: **1846.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$: **1847.** $2(\sqrt{2}-1)$:

1848. $\frac{1}{4}$: **1849.** $\frac{1}{2}$: **1850.** $\frac{1}{4}$: **1851.** $\frac{3}{2}\arcsin\frac{2}{3}$: **1852.** $\frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}$: **1853.** $\frac{8}{27}$:

1854. $\frac{3}{5}\left(3\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{4}\right)-3\left(3\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)$: **1855.** $\frac{1}{5}\left(9\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{9}\right)$: **1856.** $\frac{5\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}$:

1857. $\frac{1}{12}\ln\frac{7}{3}$: **1858.** $\frac{1}{8}\ln\frac{4}{e}$: **1859.** $\frac{5}{8}\ln\frac{11}{7}$: **1860.** $\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$:

1861. $\frac{25}{12}\sqrt[5]{81}-\frac{95}{36}\sqrt[5]{16}$: **1862.** $\ln\frac{4}{e}$: **1863.** $\frac{1}{\pi}$: **1864.** $-\frac{2}{\pi^2}$:

1865. 0: **1866.** $-\sin x^2$: **1867.** $\sqrt{1+x^2}$: **1868.** $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$:

1869. $-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x(\cos\pi\sin^2 x)$: **1870.** $4x^3e^{x^8}$: **1871.** 1:

1872. $\frac{1}{3}$: **1873.** 0: **1874.** 1: **1875.** $\frac{\pi^2}{4}$: **1876.** 1: **1877.** $\eta_1\le\eta_2$: **1878.** $\eta_1\le\eta_2$:

1879. $\eta_1\ge\eta_2$: **1880.** $\eta_1\le\eta_2$: **1881.** ≤ 0: **1882.** ≥ 0: **1883.** ≤ 0: **1884.** ≥ 0:

1885. ≤ 0: **1886.** ≤ 0: **1887.** ≥ 0: **1888.** ≥ 0: **1920.** 2: **1921.** 9:

1922. $\frac{50}{3}$: **1923.** $\frac{9}{2}$: **1924.** $\frac{9}{2}$: **1925.** $\frac{9}{2}$: **1926.** $\frac{121}{4}$: **1927.** $\frac{32}{3}$: **1928.** $\frac{80}{3}$:

1929. $\frac{1}{3}$: **1930.** $\frac{9}{4}$: **1931.** $\frac{27}{2}$: **1932.** 21: **1933.** 4: **1934.** $\frac{9}{8}$: **1935.** $\frac{9}{8}$:

1936. 18: **1937.** 2: **1938.** 9: **1939.** 9: **1940.** 45: **1941.** 18.75:

1942. $\frac{9}{16}$: **1943.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$: **1944.** 36: **1945.** 64: **1946.** 16: **1947.** $e^2-\frac{7}{2}$:

1948. $\frac{1}{2}$: **1949.** $\frac{1}{4}$: **1950.** $4e+4$: **1951.** $\frac{3}{4}-\ln 2$: **1952.** $\frac{15}{8}-\ln 4$:

1953. $\frac{4}{3}-\ln 4$: **1954.** $\frac{16-9\ln 3}{3}$: **1955.** $8-3\ln 3$: **1956.** $\frac{3}{2}$: **1957.** $\frac{7}{6}$: **1958.** $\frac{32}{3}$:

1959. $\frac{1}{2}$: **1960.** $\frac{1}{4}$: **1961.** $\frac{5}{12}$: **1962.** 1: **1963.** $\frac{208}{3}-8\ln 3$: **1964.** 1: **1965.** $\frac{3}{2}$:

1966. $1-\frac{\pi^2}{8}$; **1967.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; **1968.** $\sqrt{2}-1$; **1969.** $\pi-2$; **1970.** 4; **1971.** 5;

1972. $2\pi+\frac{4}{3}$; **1973.** $6\ln 2-\frac{9}{2}$; **1974.** $2-\frac{2}{e}$; **1975.** 6π; **1976.** $\frac{\pi}{2}$; **1977.** $\frac{4}{3}$;

1978. $\log_2 e-1$; **1979.** $\frac{9}{2}$; **1980.** 9; **1981.** $\frac{e+2}{2}$; **1982.** $\ln(3+\sqrt{10})+3\sqrt{10}-6$;

1983. $\frac{1}{3}$; **1984.** $\frac{9}{2}$; **1985.** $\frac{1}{12}$; **1986.** $\frac{595}{3}$; **1987.** 75; **1988.** $\frac{497}{3}$; **1989.** $\frac{171}{4}$;

1990. $\frac{9}{4}$; **1991.** 7; **1992.** $\frac{14}{3}$; **1993.** $\frac{14}{3}$; **1994.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$; **1995.** $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$;

1996. $\arcsin\frac{3}{4}$; **1997.** $3+\ln 2$; **1998.** $\frac{1}{2}\ln 3$; **1999.** $\frac{1}{2}\ln 3$; **2000.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2001. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; **2002.** $\sqrt{2}$; **2003.** $\frac{335}{27}$; **2004.** $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{x_0}-\sqrt{x_0^3}\right)$; **2005.** $\frac{232}{15}$;

2006. $\frac{339}{16}$; **2007.** $\frac{1}{2}\ln(7+2\sqrt{3})$; **2008.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; **2009.** $2+\ln\frac{9}{4}$; **2010.** 8;

2011. $6a$; **2012.** 2; **2013.** $18\sqrt{2}+3\ln(2\sqrt{2}+3)$; **2014.** $\frac{5a}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|$;

2015. $96a$; **2016.** $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$; **2017.** $\frac{1472}{15}\pi$; **2018.** 12π; **2019.** $\frac{\pi}{2}$;

2020. $\frac{\pi}{4}$; **2021.** $\frac{272}{15}\pi$; **2022.** $\frac{\pi}{4}(e-1)$; **2023.** $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$; **2024.** $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$;

2025. $\frac{128}{7}\pi$; **2026.** $\frac{3}{7}\pi$; **2027.** 4π; **2028.** $\frac{4\pi^4-15\pi^2}{24}$; **2029.** $\frac{\pi^2}{4}$;

2030. $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2a}}-\frac{2a}{e^{2a}}\right)$; **2031.** $\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi$; **2032.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$; **2033.** $\frac{49}{3}\pi$;

2034. $\frac{1}{8}\left((4\sqrt{2}-\sqrt{5})+\frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)2\pi$; **2035.** $\left(\frac{15}{8}+\ln 4\right)\pi$;

2036. $\left(\frac{435}{8}+\ln 2\right)\frac{\pi}{6}$; **2037.** $2\left(\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)\right)\pi$;

2038. $\frac{\pi a^2}{8}\left(7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; **2039.** $\frac{196\pi}{9}$; **2040.** $\frac{\pi}{9}(20+9\ln 3)$; **2041.** $\frac{16\pi}{9}$;

2042. $\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$; **2043.** $\frac{\pi}{4}$; **2044.** $\frac{\pi}{8}$; **2045.** $\frac{1}{3e^3}$; **2046.** $\frac{\pi}{2}$; **2047.** $\frac{1}{40}$;

2048. $-\frac{\pi}{6}$: **2049.** $\frac{\pi}{6}$: **2050.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$: **2051.** $\frac{1}{2}$: **2052.** 1: **2053.** -1: **2054.** 2:

2055. $\frac{2}{13}$: **2056.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\frac{3\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}+2}$: **2057.** $\frac{3}{4}\pi$: **2058.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$:

2059. $\frac{1}{8}\ln 5$: **2060.** $\frac{3}{16}\pi^2$: **2061.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{4+3\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$: **2062.** $\sin\frac{1}{2}$: **2063.** $\frac{1}{2}\ln 2$:

2064. 1: **2065.** $\frac{1}{4}$: **2066.** $\frac{1}{2}$: **2067.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$: **2068.** $\ln(3+2\sqrt{2})$: **2069.** $2(1-\ln 2)$:

2070. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$: **2071.** $\ln 25$: **2072.** $\frac{9\pi}{4}$: **2073.** $\log_2 e$: **2074.** 2: **2075.** -1:

2076. $-\frac{3}{2}$: **2077.** $\frac{\pi^2}{2}$: **2078.** $2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$: **2079.** $\frac{31}{5}$: **2080.** -4:

2081. Զուգամետ է, երբ $\alpha < 1$, տարամետ է, երբ $\alpha \geq 1$:
2082. Զուգամետ է, երբ $P < 1$, տարամետ է, երբ $P \geq 1$:
2083. Տարամետ է: **2084.** Զուգամետ է, երբ $P > 1$, տարամետ է, երբ $P \leq 1$:
2085. Զուգամետ է: **2086.** Զուգամետ է: **2087.** Տարամետ է:
2088. Զուգամետ է: **2089.** Զուգամետ է: **2090.** Զուգամետ է:
2091. Տարամետ է: **2092.** Զուգամետ է: **2093.** Զուգամետ է:
2094. Զուգամետ է: **2095.** Զուգամետ է: **2096.** Զուգամետ է:
2097. Տարամետ է: **2098.** Զուգամետ է: **2099.** $y \geq 0$:
2100. $O(0,0)$ կենտրոնով և 4 շառավղով փակ շրջան:
2101. $\{(x;y)\ ,\ |x|\leq 1\ ,\ |y|\geq 1\}$: **2102.** $\{(x;y): x^2+y^2>1\}$:
2103. $y=-x$ ուղղից ներքև ընկած կետերի բազմությունը: **2104.** $\{(x;y): |y|\leq |x|\}$:
2105. $O(0,0)$ կենտրոնով և 2 շառավղով բաց շրջան:
2106. $\{(x;y): |x|\leq y^2,\ 0\leq y\leq 2\}$: **2107.** $\{(x;y): x\leq x^2+y^2<2x\}$:
2108. $\{(x;y): 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$:
2134. Սահման չունի: **2135.** Սահման չունի: **2136.** Սահման չունի:
2137. Սահման չունի: **2138.** Սահման չունի: **2139.** Սահման ունի:
2140. Սահման չունի: **2141.** Սահման չունի: **2142.** Սահման չունի:
2143. Սահման չունի: **2144.** Սահման չունի: **2145.** Սահման չունի:
2146. 0: **2147.** 2: **2148.** 0: **2149.** 4: **2150.** -6: **2151.** 0: **2152.** 0:

2153. $\frac{1}{2}$: **2154.** 0: **2155.** $\frac{4}{9}$: **2156.** 0: **2157.** 0: **2158.** 0: **2159.** 1:

2160. 0: **2161.** 0: **2162.** 0: **2163.** 0: **2164.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$: **2165.** $0;1$: **2166.** $0;0$:

2167. $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$: **2168.** $-\frac{1}{2};\frac{1}{2}$: **2169.** $1;-1$: **2170.** $0;1$: **2171.** $1;1$: **2172.** $1;\infty$:

2183. Անընդհատ է: **2184.** Անընդհատ է: **2185.** Անընդհատ է:
2186. Անընդհատ է: **2187.** Անընդհատ է: **2188.** Խզվող է $(0;0)$ կետում:
2189. Անընդհատ է: **2190.** Խզվող է $(0;0)$ կետում: **2191.** Անընդհատ է:
2192. Խզվող է $(0;0)$ կետում: **2193.** Խզվող է $(0;0)$ կետում:
2194. Խզվող է $(0;0)$ կետում: **2195.** Խզվող է $(0;0)$ կետում:
2196. Անընդհատ է: **2197.** Անընդհատ է: **2198.** Անընդհատ է:
2199. Խզվող է $(0;0)$ կետում: **2200.** Խզվող է $(0;0)$ կետում:
2183. Անընդհատ է $(0;0)$ կետում:

2204. $U'_x = y(3x^2 - y^2)$, $U'_y = x(x^2 - 3y^2)$, $U''_{xx} = 6xy$; $U''_{yy} = -6xy$;
$U''_{xy} = 3(x^2 - y^2)$:

2205. $U'_x = 3x^2 - 3y$, $U'_y = 3y^2 - 3x$, $U''_{xx} = 6x$; $U''_{yy} = 6y$; $U''_{xy} = -3$:

2206. $U'_x = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3y}}$, $U'_y = \dfrac{3}{2\sqrt{2x+3y}}$, $U''_{xx} = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x+3y)^3}}$;
$U''_{yy} = -\dfrac{9}{4\sqrt{(2x+3y)^3}}$; $U'_{xy} = -\dfrac{3}{2\sqrt{(2x+3y)^3}}$:

2207. $U'_x = 2xy^3 e^{x^2y^3}$, $U'_y = 3x^2y^2 e^{x^2y^3}$, $U''_{xx} = 2y^3 e^{x^2y^3}(1 + 2x^2y^3)$,
$U''_{yy} = 3x^2 y e^{x^2y^3}(2 + 3x^2y^3)$, $U''_{xy} = 6xy^2 y e^{x^2y^3}(1 + x^2y^3)$:

2208. $U'_x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 5y^2}}$; $U'_y = -\dfrac{5y}{\sqrt{2x^2 - 5y^2}}$; $U''_{xx} = -\dfrac{10y^2}{\sqrt{(2x^2 - 5y^2)^3}}$;
$U''_{yy} = -\dfrac{10x^2}{\sqrt{(2x^2 - 5y^2)^3}}$; $U''_{xy} = \dfrac{10xy}{\sqrt{(2x^2 - 5y^2)^3}}$:

2209. $U'_x = 2x\sin y^2$; $U'_y = 2x^2 y\cos y^2 + 3y^2$; $U''_{xx} = 2\sin y^2$;
$U''_{yy} = 2x^2\cos y^2 - 4x^2y^2\sin y^2 + 6y$; $U''_{xy} = 4xy\cos y^2$:

2210. $U'_x = 8xy(1 + 2x^2y + y^3)$; $U'_y = 2(1 + 2x^2y + y^3)(2x^2 + 3y^2)$;
$U''_{xx} = 8y(1 + y^3 + 6x^2y)$; $U''_{yy} = 2(4x^4 + 24x^2y^2 + 9y^4 + 6y + 6y^4)$;
$U''_{xy} = 8x(1 + 4x^2y + 4y^3)$:

2211. $U'_x = 30xy\left(5x^2y - 2y^3\right)^2$; $U'_y = 3\left(5x^2y - 2y^3\right)^2\left(5x^2 - 6y^2\right)$;
$U''_{xx} = 30y^3(5x^2 - 2y^2)(25x^2 - 2y^2)$;
$U''_{yy} = 6y(5x^2 - 2y^2)(25x^4 - 90x^2y^2 + 48y^4)$;
$U''_{xy} = 30y(5x^2 - 2y^2)(5x^2y^2 + 10x^3y - 12xy^3 - 2y^7)$:

2212. $U'_x = \dfrac{24x\,\mathrm{tg}^3(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)}$; $U'_y = -\dfrac{32y\,\mathrm{tg}^3(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)}$;

$$U''_{xx} = \frac{24x\,\mathrm{tg}^3(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)} + \frac{72x^2\,\mathrm{tg}^2(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)}(3+5\,\mathrm{tg}^2(3x^2-4y^2));$$

$$U''_{yy} = \frac{-32\,\mathrm{tg}^3(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)} + \frac{256y^2\,\mathrm{tg}^2(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)}(3+5\,\mathrm{tg}(3x^2-4y^2));$$

$$U''_{xy} = -\frac{192xy^2\,\mathrm{tg}^2(3x^2-4y^2)}{\cos^2(3x^2-4y^2)}(3+\mathrm{tg}^2(3x^2-4y^2)):$$

2213. $U'_x = \dfrac{1}{x+\ln y}$; $U'_y = \dfrac{1}{(x+\ln y)y}$; $U''_{xx} = -\dfrac{1}{(x+\ln y)^2}$; $U''_{yy} = -\dfrac{x+\ln y+1}{(x+\ln y)^2 y^2}$;

$$U''_{xy} = -\frac{1}{y(x+\ln y)^2}:$$

2214. $U'_x = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$; $U'_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}$; $U''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$; $U''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$; $U''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$:

2215. $U'_x = \dfrac{y}{x^2+y^2}$; $U'_y = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $U''_{xx} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $U''_{yy} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$U''_{xy} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}:$$

2216. $U'_x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-3y^3}}$; $U'_y = \dfrac{-9y^2}{2\sqrt{2x^2-3y^3}}$; $U''_{xx} = \dfrac{-6y^3}{(2x^2-3y^3)^{3/2}}$;

$$U''_{yy} = -\frac{9}{4}\cdot\frac{8yx^2-3y^4}{(2x^2-3y^3)^{3/2}};\ U''_{xy} = \frac{9xy^2}{(2x^2-3y^3)^{3/2}}:$$

2217. $U'_x = 2xe^{x^2+y^2}$; $U'_y = 2ye^{x^2+y^2}$; $U''_{xx} = 2xe^{x^2+y^2}(1+2x^2)$;

$$U''_{yy} = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2);\ U''_{xy} = 4xye^{x^2+y^2}:$$

2218. $U'_x = (3x^2y+y^3)e^{xy(x^2+y^2)}$; $U'_y = (x^3+3xy^2)e^{xy(x^2+y^2)}$;

$$U''_{xx} = \left((3x^2y+y^3)^2+6xy\right)e^{xy(x^2+y^2)};\ U''_{yy} = \left((x^3+3xy^2)^2+6xy\right)e^{xy(x^2+y^2)};$$

$$U''_{xy} = (3x^2+3y^2+10x^3y^3+9x^5y+3xy^5)e^{xy(x^2+y^2)}:$$

2219. $U'_x=-\dfrac{2xy}{1+2x^2+x^4+y^2}$; $U''_{xx}=\dfrac{6x^4y+4x^2y-2y^2-2y}{(1+2x^2+x^4+y^2)^2}$;

$U'_y=\dfrac{1+x^2}{1+2x^2+x^4+y^2}$; $U''_{yy}=\dfrac{-2y(1+x^2)}{(1+2x^2+x^4+y^2)^2}$;

$U''_{xy}=\dfrac{2xy^2-2x-4x^3-2x^5}{(1+2x^2+x^4+y^2)^2}$:

2220. $U'_x=\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}$; $U''_{xx}=\dfrac{y}{x^3}\left(2\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos^2\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}\right)\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}$;

$U'_y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}$; $U''_{yy}=\dfrac{1}{x^2}\left(\cos^2\dfrac{y}{x}-\sin\dfrac{y}{x}\right)\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}$;

$U''_{xy}=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}\cos^2\dfrac{y}{x}\right)$:

2221. $U'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $U'_y=\dfrac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$; $U''_{xx}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

$U''_{yy}=\dfrac{x^2(x+\sqrt{x^2+y^2})-y^2\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2(x^2+y^2)}$; $U''_{xy}=-\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$:

2222. $U'_x=\dfrac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}$; $U'_y=-\dfrac{x+1}{2y^{3/2}}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}$; $U''_{xx}=-\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}$;

$U''_{yy}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x+1}{y^{5/2}}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}-\dfrac{(x+1)^2}{4y^3}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}}$;

$U''_{xy}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{y^{3/2}}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{y+1}{\sqrt{y}}}$:

2223. $U'_x=\dfrac{2}{y\sin\dfrac{2x}{y}}$; $U'_y=\dfrac{-2x}{y^2\sin\dfrac{2x}{y}}$; $U''_{xx}=\dfrac{-4}{y^2}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{2y}{x}}{\sin\dfrac{2x}{y}}$;

$U''_{yy}=\dfrac{4x\left(y\sin\dfrac{2x}{y}-\cos\dfrac{2x}{y}\right)}{y^4\sin^2\dfrac{2x}{y}}$; $U''_{xy}=\dfrac{4x\cos\dfrac{2x}{y}-2y\sin\dfrac{2x}{y}}{y^3\sin^2\dfrac{2x}{y}}$:

2224. $U'_x=\dfrac{1}{x(1+\ln^2 xy)}$; $U'_y=\dfrac{1}{y(1+\ln^2 xy)}$; $U''_{xx}=-\dfrac{(1+\ln xy)^2}{x(1+\ln^2 xy)^2}$;

$U''_{yy}=-\dfrac{(1+\ln xy)^2}{y(1+\ln^2 xy)^2}$; $U''_{xy}=-\dfrac{2\ln xy}{xy(1+\ln^2 xy)^2}$:

2225. $U'_x=\dfrac{2xy}{\sqrt{1-x^4y^2}}$; $U'_y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^4y^2}}$; $U''_{xx}=\dfrac{2y(1+x^4y^2)}{\left(1-x^4y^2\right)^{3/2}}$;

$U''_{yy}=\dfrac{yx^6}{\left(1-x^4y^2\right)^{3/2}}$; $U''_{xy}=\dfrac{2x(1+x^4y^2)}{\left(1-x^4y^2\right)^{3/2}}$:

2226. $U'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $U'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $U'_z=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

$U''_{xx}=\dfrac{y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$; $U''_{yy}=\dfrac{x^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$; $U''_{zz}=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$;

$U''_{xy}=\dfrac{-xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$; $U''_{yz}=\dfrac{-yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$; $U''_{xz}=\dfrac{-yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$:

2227. $U'_x=2xU$; $U'_y=2yU$; $U'_z=2zU$; $U''_{xx}=2(1+2x^2)U$; $U''_{yy}=2(1+2y^2)U$;

$U''_{zz}=2(1+2z^2)U$; $U''_{xy}=4xyU$; $U''_{xz}=4xzU$; $U''_{yz}=4yzU$:

2228. $U'_x=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$; $U'_y=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$;

$U'_z=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$; $U''_{xx}=2(\cos(x^2+y^2+z^2)-2x^2U)$;

$U''_{yy}=2(\cos(x^2+y^2+z^2)-2y^2U)$; $U''_{zz}=2(\cos(x^2+y^2+z^2)-2z^2U)$;

$U''_{xy}=-4xyU$; $U''_{xz}=-4xzU$; $U''_{yz}=-4yzU$:

2229. $U'_x=-4x\sin 2(x^2+y^2+z^2)$; $U'_y=-4y\sin 2(x^2+y^2+z^2)$;

$U'_z=-4z\sin 2(x^2+y^2+z^2)$; $U''_{xx}=-4\sin 2(x^2+y^2+z^2)-16xU$;

$U''_{yy}=-4\sin 2(x^2+y^2+z^2)-16yU$; $U''_{zz}=-4\sin 2(x^2+y^2+z^2)-16zU$;

$U''_{xy}=-16xyU$; $U''_{xz}=-16xzU$; $U''_{yz}=-16yzU$:

2230. $f'_x(0;1)=1$; $f'_y(0;1)=0$: **2231.** $f'_x(1;2)=0$; $f'_y(1;2)=1/4$:

2232. $f'_x(\pi;4)=-7$: **2233.** ա) այո, բ) ոչ: **2234.** Ոչ:

2235. $U'_x=2xf'(x^2+y^2)$; $U''_{xx}=2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$;

$U'_y=2yf'(x^2+y^2)$; $U''_{yy}=2f'(x^2+y^2)+4y^2f''(x^2+y^2)$;

$U''_{xy}=4xyf''(x^2+y^2)$:

2236. $U'_x = 2xf'(x^2+y^2)$; $U'_y = -2yf'(x^2-y^2)$; $U''_{xy} = -4xyf''(x^2-y^2)$;

$U''_{xx} = 2f'(x^2-y^2)+4x^2f''(x^2-y^2)$;

$U''_{yy} = -2f'(x^2-y^2)+4y^2f''(x^2-y^2)$:

2237. $U'_x = y+f'(x-y)$; $U'_y = x-f'(x^2-y^2)$; $U''_{xx} = f''(x-y)$;

$U''_{yy} = f''(x-y)$; $U''_{xy} = 1-f''(x-y)$:

2238. $U'_x = y\cdot f'(xy)g(x-y)+f(xy)\cdot g'(x-y)$;

$U'_y = x\cdot f'(xy)g(x-y)-f(xy)\cdot g'(x-y)$; $U''_{xx} = y^2f''(xy)g(x-y)+$

$+xyf''(xy)g(x-y)+(x-y)f''(xy)g'(x-y)-f(xy)g''(x-y)$;

$U''_{yy} = x^2f''(xy)g(x-y)-2xf'(xy)g'(x-y)+f(xy)g''(x-y)$;

$U''_{xy} = f'(xy)g(x-y)+xyf''(xy)g(x-y)-yf(xy)g'(x-y)+xf'(xy)g'(x-y)-$

$-f(xy)g''(x-y)$:

2239. $U'_x = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)g(xy)+yf\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)$;

$U'_y = -\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)g(xy)+xf\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)$;

$U''_{xx} = \frac{1}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)g(xy)+f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)+f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)+y^2f\left(\frac{x}{y}\right)g''(xy)$;

$U''_{yy} = \frac{2x}{y^3}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g(xy)+\frac{x^2}{y^4}f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)-\frac{x^2}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)+$

$+x^2f\left(\frac{x}{y}\right)g''(xy)$; $U''_{xy} = -\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g(xy)-\frac{x^2}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g(xy)+$

$+f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)+\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot g'(xy)+xyf\left(\frac{x}{y}\right)g''(xy)$:

2240. $U'_x = f'_1\left(x;\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x;\frac{x}{y}\right)$; $U'_y = -\frac{x}{y^2}f'_2\left(x;\frac{x}{y}\right)$;

$U''_{xx} = f''_{11}\left(x;\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x;\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x;\frac{x}{y}\right)$;

$U''_{yy} = \frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x;\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x;\frac{x}{y}\right)$;

$U''_{xy} = -\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x;\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x;\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x;\frac{x}{y}\right)$:

2241. $U'_x = f'_1(x+y;x-y) + f'_2(x+y;x-y)$;

$U'_y = f'_1(x+y;x-y) - f'_2(x+y;x-y)$;

$U''_{xx} = f''_{11}(x+y;x-y) + 2f''_{12}(x+y;x-y) + f''_{22}(x+y;x-y)$;

$U''_{yy} = f''_{11}(x+y;x-y) - 2f''_{12}(x+y;x-y) + f''_{22}(x+y;x-y)$;

$U''_{xy} = f''_{11}(x+y;x-y) - f''_{22}(x+y;x-y)$:

2242. $U'_x = f'_1(\sin x;\cos y)\cos x$; $U'_y = -f'_2(\sin x;\cos y)\sin y$;

$U''_{xx} = -f'_1(\sin x;\cos y)\sin x + f''_{11}(\sin x;\cos y)\cos^2 x$;

$U''_{yy} = -f'_2(\sin x;\cos y)\cos y + f''_{22}(\sin x;\cos y)\sin^2 y$;

$U''_{xy} = -f''_{12}(\sin x;\cos y)\cos x \sin y$:

2281. -2 : **2282.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$: **2283.** $\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$: **2284.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$: **2285.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$: **2286.** $\frac{3}{4}$:

2287. ա) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$; բ) $\frac{5}{2}$; գ) 2 : **2288.** $-7\sqrt{2}$: **2289.** $-\frac{18}{\sqrt{13}}$: **2290.** $\frac{8}{15}$:

2291. $(0;1)$ մինիմումի կետ է: **2292.** $(1;0)$ մինիմումի կետ է:

2293. $(1;1)$ մինիմումի կետ է, $(0;0)$ էքստրեմումի կետ չէ:

2294. $(1;1)$; $(-1;-1)$ մինիմումի կետեր են, $(0;0)$ -ն էքստրեմումի կետ չէ:

2295. $(2;3)$ մաքսիմումի կետ է, $\{(0;y); y \in (0;6)\}$ մինիմումի կետ է, $\{(0;y); y \in (-\infty;0) \cup (6;+\infty)\}$ մաքսիմումի կետ է:

2296. $(0;0)$ -ն մաքսիմումի կետ է, $\left(\frac{1}{2};\pm 1\right)$ -ը և $\left(-\frac{1}{2};\pm 1\right)$ -ը մինիմումի կետեր են, $(0;\pm 1)$ -ը և $\left(\pm\frac{1}{2};0\right)$ -ն էքստրեմումի կետեր չեն:

2297. $(0;0)$ -ն մինիմումի կետ է, $x^2 + y^2 = 1$ շրջանագծի կետերը մաքսիմումի կետեր են:

2298. $(5;2)$ -ը մինիմումի կետ է: **2299.** $(0;0)$ -ն մաքսիմումի կետ է:

2300. $(0;0)$ -ն մինիմումի կետ է, $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$ -ը մաքսիմումի կետ է:

2301. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ -ն մինիմումի կետ է, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ մաքսիմումի կետ է; $(0;\pm 1)$ -ը և $(\pm 1;0)$ -ն էքստրեմումի կետ չէ:

2302. $y^2 - x^2 = 3$ կորի կետերը մինիմումի կետեր չեն:

2303. $U_{\min}\left(\frac{1}{4};\frac{7}{6}\right) = -\frac{101}{24}$: **2304.** $U_{\max}\left(-\frac{1}{12};1\right) = \frac{49}{4}$: **2305.** $U_{\min}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{108}$:

2306. $U_{\min}(0;0) = 0$: **2307.** $U_{\min}(-2;-1) = -2$: **2308.** $U_{\max}(0;0) = 10$:

2309. $U_{\min}(1;0)=-1$: **2310.** $U_{\min}(-1;1)=0$: **2311.** $U_{\min}(5;5)=-125$:

2312. $U_{\min}\left(1;-\frac{1}{2}\right)=4$: **2313.** $U_{\max}(2;-2)=8$: **2314.** $U_{\max}(-1;1)=-\frac{2}{3}$:

2315. $U_{\min}\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)=-\frac{7}{3}$: **2316.** $U_{\min}\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$: **2317.** $U_{\min}(0;3)=-9$:

2318. $U_{\min}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};3\right)=\frac{19}{2}+\ln 2-18\ln 3$:

2319. $U_{\min}(\sqrt{3};-3)=-6\sqrt{3}$; $U_{\max}(-\sqrt{3};-3)=8\sqrt{3}$:

2320. $U_{\max}(0;0)=0$; $U_{\min}(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})=-8$: **2321.** $U_{\min}(0;-2)=\frac{2}{e}$:

2322. $U_{\max}(4;4)=15$: **2323.** $U_{\min}(4;-2)=-4$: **2324.** $U_{\max}=0$; $U_{\min}=-8$:

2325. $U_{\max}=1$; $U_{\min}=-5$: **2326.** $U_{\max}=36$; $U_{\min}=-72$:

2327. $U_{\max}=19$; $U_{\min}=-1$: **2328.** $U_{\max}=17$; $U_{\min}=-152$:

2329. $U_{\max}=-2$; $U_{\min}=-5$: **2330.** $U_{\max}=125$; $U_{\min}=-75$:

2331. $U_{\max}=1$; $U_{\min}=0$: **2332.** Գումարելիները հավասար են $a/3$:

2333. Արտադրիչները հավասար են $\sqrt[3]{a}$:

2334. Ուղղանկյան կողմերն են $P/3$ և $2P/3$:

2335. $\frac{x^4}{4}-\cos x+C$: **2336.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{2}+C$: **2337.** $x(e^x+1)+C$:

2338. $\frac{1+e^{2x+C}}{1-e^{2x+C}}$: **2339.** $\pm\sqrt{1+e^{2x+C}}$: **2340.** $-\frac{\sin y+\cos y}{e^y}=2x+C$:

2341. $-\frac{2}{x^2}+C$: **2342.** $\frac{2}{3}x+C$: **2343.** $\frac{1+y}{e^y}=-e^x+C$:

2344. $\pm\frac{\sqrt{x^4+4}}{2}+C$: **2345.** $\operatorname{arctg}\frac{y+1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{15}}+C$:

2346. $\pm\sqrt{\frac{C}{1+x^2}-1}$: **2347.** $\ln(1+y)+\frac{(y+1)^2}{2}=-\operatorname{arctg}e^x+C$:

2348. $\pm\sqrt{\frac{C^2}{\sin^2 x}-1}$: **2349.** $\pm C\left(\sqrt{1+8x^2}-1\right)^{1/2}$: **2350.** $\sqrt[3]{3\ln\frac{1}{C\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$:

2351. $\pm\sqrt{2x\operatorname{arctg}x-\ln C(1+x^2)}$: **2352.** $\pm\sqrt{x^2-1}$: **2353.** $\pm\sqrt{1-e^{-x^2}}$:

2354. $\pm\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x$: **2355.** $\pm\sqrt{x^2-1}$: **2356.** $e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$: **2357.** $-\dfrac{x}{\ln|Cx|}$:

2358. $x\operatorname{arctg}(\ln|Cx|)$: **2359.** $\sqrt{\dfrac{y-3x}{y+x}}=\pm Cx$: **2360.** $e^{\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{y-x}{x}=\ln|Cx|$:

2361. $\pm\sqrt{c^4x^4-\dfrac{x^2}{2}}$: **2362.** $\left(\dfrac{y+x}{y-x}\right)^{5/4}=\pm cx$: **2363.** $\pm\arcsin Cx$:

2364. $x=ce^{-2\sqrt{1-\frac{y}{x}}}$: **2365.** $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}=Cx$: **2366.** $y=ce^{\frac{y}{x}}$: **2367.** $y=ce^{\frac{y^3}{3x^3}}$:

2368. $C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}$:

2369. $2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-3\ln(x^2+y^2)+5\ln|x|=C$:

2370. $\dfrac{1}{2}\ln(y^2+2x^2)+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=C$: **2371.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$:

2372. $y=C_1\sin 5x+C_2\cos 5x$: **2373.** $y=C_1e^{2\sqrt{2}x}+C_2e^{-2\sqrt{2}x}$:

2374. $y=e^x(C_1+C_2x)$: **2375.** $y=e^{-2x}(C_1\sin\sqrt{6}x+C_2\cos\sqrt{6}x)$:

2376. $y=C_1+C_2e^x$: **2377.** $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2+C_3x)$:

2378. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}$: **2379.** $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$:

2380. $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$:

2381. $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-x}$: **2382.** $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}$:

2383. $y=e^{ax}(C_1+C_2x+C_3x^2)$: **2384.** $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4e^x$:

2385. $y=C_1+C_2x+C_3\sin 3x+C_4\cos 3x$:

2386. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x$:

2387. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$:

2388. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$:

2389. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x$:

2390. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$:

2391. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$:

2392. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$:

2393. $y = Ce^{\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}}$: **2394.** $y = Ce^{\frac{e-x^2}{3}}$: **2395.** $C(1+x)e^{-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x}$:

2396. $Ce^{\frac{1}{x}}$: **2397.** $Ce^{\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}}$: **2398.** $x-1+Ce^{-x}$:

2399. $x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{C}{\cos x} - 1$: **2400.** $\cos x \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|$: **2401.** $1 - x\,\mathrm{ctg}\,x + \frac{C}{\sin x}$:

2402. $\frac{x^4}{4}(1+\sin 2x) + \frac{\cos 2x}{8x} + \frac{C}{x}$: **2403.** $\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} + \frac{\ln(x-1)^2}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}$:

2404. $e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$: **2405.** $\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + Ce^{-ax}$:

2406. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2 + C\right)\cdot(1+x^4)$: **2407.** $-e^{-x^4+x} + Ce^{-x^4+2x}$:

2408. $-xe^{-x} + Cx$: **2409.** $\frac{2x+\sin 2x+4c}{\cos x}$: **2410.** $Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$:

2411. $\frac{x}{x+1} + \frac{Ce^x}{x+1}$: **2412.** $\frac{\ln|x^3+1|}{3x^2} + \frac{C}{x^2}$: **2413.** $\frac{x(\ln x)^2}{2} + Cx$; $\frac{x(\ln x)^2}{2} + x$:

2414. $\frac{x^3}{3}e^{-x} + Ce^{-x}$; $\frac{x^3}{3}e^{-x} + e^{-x}$: **2415.** $\frac{C}{y} - \frac{e^{-y^2}}{2y}$: **2416.** $Ce^{-\cos x} + \frac{e^{y^3+\cos y}}{3}$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Հ.Գ. Ղազարյան, Ս.Մ. Հովհաննիսյան, Ռ.Ս. Դավթյան, Գ.Պ. Տոնոյան,** «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք տնտեսագետների համար», Երևան, 2007:
2. **Л.Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин**, «Сборник задач по математическому анализу», часть первая, Москва, «Наука»-1984, часть вторая, Москва, «Наука»-1986.
3. **Գ.Գ. Գևորգյան, Լ.Հ. Գալստյան, Ա.Կ. Թասլաքյան, Գ.Վ. Միքայելյան, Կ.Ա. Նավասարդյան,** «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք», Երևան, առաջին մաս – 1998, երկրորդ մաս, 1999:
4. **Ս.Մ. Հովհաննիսյան, Ռ.Ս. Դավթյան, Ն.Հ. Սինանյան, Բ.Վ. Գրիգորյան,** «Մաթեմատիկական անալիզ», ուսումնամեթոդական ձեռնարկ, առաջին մաս, Երևան, 1985:
5. **Ռ.Ս. Դավթյան, Ռ.Ա. Ավետիսյան, Վ.Մ. Մանուկյան, Գ.Վ. Միքայելյան,** «Մաթեմատիկական անալիզ», ուսումնամեթոդական ձեռնարկ, երկրորդ մաս, Երևան, 1988:
6. **Վ.Ս. Զաքարյան, Հ.Ս. Առաքելյան, Հ.Մ. Խոսրովյան, Ֆ.Մ. Մինասյան,** «Մաթեմատիկայի խնդիրների շտեմարան», մաս II, Երևան 2005:
7. **Հ.Գ. Ղազարյան, Ֆ.Հ. Մամիկոնյան, Ա.Հ. Հովհաննիսյան, Գ.Ա. Կարապետյան,** «Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ» (խնդրագիրք), Երևան, 1988:
8. **Х.Э. Крыньский,** «Математика для экономистов», Москва, «Статистика»-1970

ՍԵԴՐԱԿ ՄՈՒՇԵՂԻ ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ
ԱՌԱՔԵԼ ԿԱՐԱՊԵՏԻ ԹԱՄԼԱՔՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ ՏՆՏԵՍԱԳԵՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՄԱՍ II

Համակարգչային աշխատանքները՝ Ն.Օ. ԽՆԿԻԿՅԱՆԻ

LIMUSH PRINTHOUSE

Տպագրության եղանակը՝ ռիզոգրաֆիա:
Ֆորմատ՝ 70x100 1/16, թուղթ օֆսեթ, N 1:
Ծավալ՝ 13.25 տպ. մամուլ: Տպաքանակ 300:

Տպագրված է «ԼԻՄՈՒՇ» ՍՊԸ-ի տպարանում:
Ք. Երևան, Պուշկին 40, տարածք 76, հեռ. 58.22.99
E-mail: info@limush.am