Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ,
ԱՐԾՐ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2011

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ,
ԱՐԾՐ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2011

ՀՏԴ 51(042)
ԳՄԴ 22.161.6
Ղ 249

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ Ա.Գ.

Ղ 249 Սովորական դեֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարումներ (դասախոսություններ): / Ա.Գ. Ղալումյան, Ա.Վ. Ցուցուլյան, Ա.Ա. Սարգսյան; ԵՊՀ. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2011. – 100 էջ:

Սույն ձեռնարկը նվիրված է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հավասարումներին և Ֆրեդհոլմի (Վոլտերայի) ինտեգրալ հավասարումներին: Այն համապատասխանում է ԵՊՀ – ի ֆիզիկայի և Իջևանի մասնաճյուղի բնագիտական ֆակուլտետների ուսումնական ծրագրերին:

Ձեռնարկում յուրաքանչյուր բաժին մեկնաբանվում է համապատասխան օրինակներով, որոնք նպաստում են նյութի ընկալմանը:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ – ի, նրա Իջևանի մասնաճյուղի ինչպես նաև այլ ԲՈՒՀ - երի բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողության համար:

ՀՏԴ 51(042)
ԳՄԴ 22.161.6

ISBN 978-5-8084-1464-8

I. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴՐՈՒՅԹՆԵՐ

1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԱՂԱՓԱՐ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ, ՆՐԱ ԼՈՒԾՄԱՆ, ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՎ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՄԱՍԻՆ

Սահմանում 1: Անկախ փոփոխականի, որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների միջև առնչությունն անվանում են դիֆերենցիալ հավասարում:

Այն ընդհանուր դեպքում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0: \tag{1.1}$$

Սահմանում 2: Եթե անհայտ ֆունկցիան կախված է մեկ անկախ փոփոխականից, ապա նրա ածանցյալները սովորական ածանցյալներ են, այդ հավասարումն էլ կոչվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: Եթե անհայտ ֆունկցիան կախված է մի քանի անկախ փոփոխականներից, ապա նրա ածանցյալները մասնակի ածանցյալներ են, և հավասարումը կոչվում է մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Այս ձեռնարկը նվիրված է միայն սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներին, որոնց կարճ կանվանենք դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Քննարկենք ֆիզիկայի որոշ խնդիրներ, որոնք բերվում են դիֆերենցիալ հավասարումների:

Խնդիր1: Դիտարկենք ռադիոակտիվ նյութի տրոհման խնդիրը: Դիցուք տրված ռադիոակտիվ նյութի զանգվածը ժամանակի t պահին $N(t)$ է: Փորձից հայտնի է, որ ռադիոակտիվ նյութի տրոհման արագությունը ուղիղ համեմատական է այդ պահին եղած նյութի զանգվածին՝

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t), \tag{1.2}$$

որտեղ k - ն ռադիոակտիվ նյութը բնորոշող հաստատուն է:

Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի՝

$$dN(t)=\frac{dN(t)}{dt}dt=-kN(t)dt,$$

ստանում ենք՝ $\frac{dN(t)}{N(t)}=-kdt$, կամ՝ $dlnN(t)=d(-kt)$: Որտեղ՝

$$ln(N(t))=-kt+\ln c\Rightarrow$$

$$N(t)=ce^{-kt}: \quad (1.3)$$

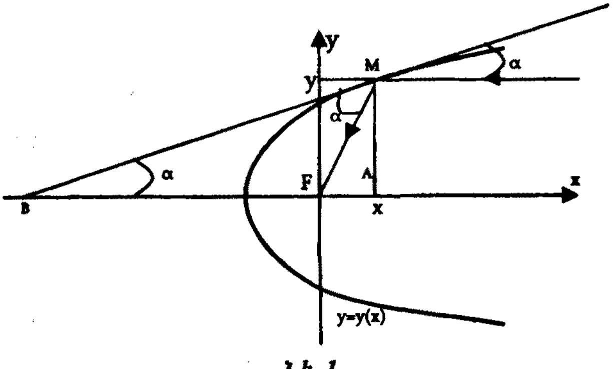
Եթե սկզբնական $t=0$ պահին ռադիոակտիվ նյութի զանգվածը $N(0)=N_0$ է (սկզբնական պայման), ապա (1.3) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$N(t)=N_0e^{-kt}: \quad (1.4)$$

Այսպիսով ռադիոակտիվ նյութը նվազում է էքսպոնենցիալ օրենքով (զրո չի դառնում):

Խնդիր 2: Գտնել այն հայելային մակերևույթի տեսքը, որն ունի առանցքային համաչափություն և այնպիսին է, որ առանցքին զուգահեռ լույսի ճառագայթները անդրադառնում են առանցքի որոշակի F կետի (ֆոկուսի):

Լուծում: Խնդիրը լուծենք փնտրվող մակերևույթի առանցքային հատույթի համար (նկ.1): Համարենք, որ ֆոկուսը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ $(F=O)$: Կորի կամայական $M(x,y)$ կետով տանենք շոշափող և նշանակենք շոշափողի և OX առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունը α :



Նկ. 1

Քանի որ ըստ լույսի անդրադարձման օրենքի՝ անկման և անդրադարձման անկյուններն իրար հավասար են, ապա ΔFAM -ից կունենանք՝

$$BF = FM = z(x) \equiv \sqrt{x^2 + y^2(x)},$$

ΔABM -ից ունենք՝ $y'(x) \equiv tg\alpha \equiv \dfrac{y(x)}{x+z(x)}$:

Տեղադրելով $z(x)$-ի արժեքը, կստանանք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1.5}$$

որին որոնելի ֆունկցիան դարձնում է նույնություն՝

$$y'(x) \equiv \frac{y(x)}{x+\sqrt{x^2+y^2(x)}}:$$

Աջ մասի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով հայտարարի լծորդով, կստանանք՝

$$y'(x) \equiv \frac{y(x)\left(\sqrt{x^2+y^2(x)}-x\right)}{y^2(x)}: \tag{1.6}$$

Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի, որոշ ձևափոխություններից հետո կունենանք՝

$$xdx + y(x)dy(x) \equiv \sqrt{x^2+y^2(x)}dx \text{, կամ՝ } \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2(x))}{\sqrt{x^2+y^2(x)}} \equiv dx:$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$d\sqrt{x^2+y^2(x)} \equiv d(x+c) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2(x)} \equiv x+c \Rightarrow$$

$$y^2(x) \equiv 2xc + c^2 \Rightarrow x \equiv \frac{1}{2c}y^2(x) - \frac{c}{2}:$$

Ստացանք պարաբոլների ընտանիք: Պտտելով OX առանցքի շուրջը, կստանանք պտտման պարաբոլոիդների ընտանիք:

Սահմանում 3: Դիֆերենցիալ հավասարման կարգ ասելով հասկանում են հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալների ամենաբարձր կարգը:

Սահմանում 4: Դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է կոչվում այնպիսի $y=y(x)$ ֆունկցիա, որոշված ինչ – որ X միջակայքում, որը (1.1) դիֆերենցիալ հավասարումը այդ միջակայքում դարձնում է նույնություն:

Սահմանում 5: $y=y(x,c_1,...,c_n)$ տեսքի ֆունկցիան կոչվում է (1.1) դիֆֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծում, եթե՝

1. $\forall c_1,...,c_n$ հաստատունների դեպքում $y=y(x,c_1,...,c_n)$ ֆունկցիան հնդիսանում է (1.1) – ի լուծում ինչ – որ X միջակայքում,

2. (1.1) – ի կամայական $z=z(x)$ լուծման համար $\exists c_1,...,c_n$ հաստատուններ, այնպիսիք որ $z(x)\equiv y(x,c_1,...,c_n)$:

Երբ լուծում ենք (ինտեգրում ենք) դիֆերենցիալ հավասարումը, հաճախ ստացվում է կապ x - ի, y - ի և հաստատունների միջև, որտեղից չի հաջողվում գտնել ընդհանուր լուծումը: Դիֆերենցիալ հավասարումը համարվում է լուծված, երբ վերը նշված կապը ստացվել է:

Սահմանում 6:

$$\varphi(x,y,c_1,...,c_n)=0 \tag{1.7}$$

տեսքի առնչությունը կոչվում է (1.1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ, եթե՝

1. $\forall c_1,...,c_n$ հաստատունների դեպքում (1.7) – ից որոշվող, n անգամ դիֆերենցելի անբացահայտ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.1) հավասարման լուծում:

2. (1.1) հավասարման ինչպիսի $y=y(x)$ լուծում էլ վերցնենք, $\exists c_1,...,c_n$ հաստատուններ, այնպիսիք որ $y=y(x)$ ֆունկցիան (1.7)–ը դարձնում է նույնություն ինչ – որ միջակայքում:

Տրված դիֆերենցիալ հավասարման լուծման պրոցեսը անվանում են ինտեգրում (հավանաբար այն պատճառով, որ լուծման պրոցեսում հարկավոր է լինում կատարել բազմաթիվ ինտեգրումներ):

II. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. $y' = f(x, y)$ ՏԵՍՔԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքը հետևյալն է՝

$$F(x, y, y') = 0: \tag{1.1}$$

Նախ քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ հավասարումը լուծված է ածանցյալի նկատմամբ, այսինքն՝

$$y' = f(x, y): \tag{1.2}$$

Սահմանում 1: Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է XOY հարթության ինչ – որ (D) տիրույթում: Այդ տիրույթի յուրաքանչյուր (x_1, y_1) կետով տանենք այնպիսի ուղիղ (հատված), որի OX առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած α_1 անկյունը որոշվի $tg\alpha_1 = f(x_1, y_1)$ պայմանից: Այդ ուղիղը կոչվում է (x_1, y_1) կետում (1.2) հավասարումով որոշվող ուղղություն: Ստացվեց, որ (D) տիրույթի յուրաքանչյուր կետով անցնում է որոշակի ուղղություն: Այդ ուղղությունների բազմությունը կոչվում է ուղղությունների դաշտ:

Այսպիսով պարզ է դառնում լուծման երկրաչափական իմաստը: Գտնել (1.2) հավասարման լուծման գրաֆիկը (ինտեգրալային կորը) նշանակում է գտնել (D) - ում այնպիսի ողորկ կոր, որի յուրաքանչյուր կետում տարված շոշափողը համընկնի այդ կետում դաշտի ուղղության հետ:

Սահմանում 2: Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղ դաշտն ունի միևնույն ուղղությունը, կոչվում է տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման իզոկլին կամ հավասարաթեք (հավասար թեքությունների գիծ): Իզոկլինը որոշվում է $f(x, y) = c$ պայմանից:

Օրինակ 1: Դիտարկենք $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ հավասարումը և կառուցենք նրա իզոկլինները և ինտեգրալային կորերը: Իզոկլինները որոշվում են $-\frac{x}{y}=c$ պայմանից, այսինքն՝ $y=-\frac{1}{c}x$ ուղիղներն են, որոնց անկյունային գործակիցն է $k_1=-\frac{1}{c}$: Այդ իզոկլինի յուրաքանչյուր կետում ուղղության անկյունային գործակիցն է $k_2=c$: Քանի որ $k_1\cdot k_2=-1$, ապա ստացվում է, որ իզոկլինի յորաքանչյուր կետում ուղղությունը ուղղահայաց է իզոկլինին: Ուրեմն, դժվար չէ հասկանալ, որ ինտեգրալային կորերը կլինեն $(0,0)$ կենտրոնով շրջանագծեր:

Այժմ դիտարկենք առաջին կարգի ճշգրտորեն լուծվող դիֆերենցիալ հավասարումների դասերը:

2. ԱՆՋԱՏՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$$f(y)dy=g(x)dx \tag{2.1}$$

տեսքի հավասարումներն անվանում են **անջատված փոփոխականներով** դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Թեորեմ 1: Ենթադրենք $f(x)$ - ը և $g(y)$ - ն անընդհատ ֆունկցիաներ են XOY հարթության ինչ – որ (D) տիրույթում և $f(y)\neq 0$: Այդ դեպքում (2.1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int f(y)dy-\int g(x)dx-c=0: \tag{2.2}$$

Եթե c - ն ընտրվում է այնպես, որ $y(x_0)=y_0$ ((x_0,y_0) - ն (D)- ի կամայական կետ է), ապա (2.2) – ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\int_{y_0}^{y} f(s)ds=\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \tag{2.2`}$$

Ապացուցում: Դիցուք $y=y(x)$ ֆունկցիան (2.1) հավասարման կամայական լուծում է (նրա գրաֆիկը անցնում է (D) տիրույթին պատկանող կամայական $M_0(x_0,y_0)$ կետով): Այսինքն՝

$$f(y(x))dy(x)\equiv g(x)dx\ \left((x,y)\in(D),y(x_0)=y_0\right): \qquad (2.3)$$

Ինտեգրելով ստացված նույնությունը x_0 - ից x սահմաններում, կստանանք՝

$$\int_{x_0}^{x} f(y(t))dy(t)\equiv\int_{x_0}^{x} g(t)dt: \qquad (2.4)$$

Ներմուծենք նշանակում՝ $F(y)=\int_{y_0}^{y} f(s)\,ds\ \left(F'(y)\equiv f(y)\right)$:

Այդ դեպքում՝

$$\int_{x_0}^{x} f(y(t))dy(t)=F(y(x))-F(y(x_0))=F(y)-F(y_0)=\int_{y_0}^{y} f(s)ds$$

Այսպիսով, $y(x)$ լուծումը (2.2՝) – ը դարձնում է $\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds\equiv\int_{x_0}^{x} g(t)dt$ տեսքի նույնություն:

Այժմ, դիցուք հակառակն է՝ $y=y(x)$ ֆունկցիան (2.2՝) – ը դարձնում է նույնություն՝ $\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds\equiv\int_{x_0}^{x} g(t)dt$:

Եթե նշանակենք՝ $H(x,y)=\int_{x_0}^{x} g(t)dt-\int_{y_0}^{y} f(s)ds$, ապա խնդիրը հանգում է նրան, թե երբ է $H(x,y)=0$ հավասարումը որոշում $y=y(x)$ անբացահայտ, անընդհատորեն դիֆերենցելի ֆունկցիա: Դրա համար բավարար են հետևյալ պայմանները ([7],[9])՝

$H(x,y), H'_x(x,y)=g(x), H'_y(x,y)=f(y)$ ֆունկցիաները լինեն անընդհատ (D) - ում և $H'_y(x,y)=f(y)\neq 0$: Այս բոլոր պայմանները առկա են: Դիցուք $y=y(x)$ այդ անբացահայտ ֆունկցիան է, այսինքն՝

$\int\limits_{y_0}^{y(x)} f(s)ds \equiv \int\limits_{x_0}^{x} g(t)dt$: Կիրառելով դիֆերենցման օպերատորը

այդ նույնության վրա, կստանանք՝ $f(y(x))dy(x)\equiv g(x)dx$:

Այսինքն՝ $y=y(x)$ ֆունկցիան (2.1) – ի լուծումն է[1]: ■

Դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է **անջատվող փոփոխականներով**, եթե այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_1(y)g_2(x)dy=g_1(x)f_2(y)dx,$$

որտեղ $f_1(y), f_2(y), g_1(x), g_2(x)\in C((D))$,

$$f_2(y)\neq 0, g_2(x)\neq 0, \left(\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\right)'\neq 0:$$

Այս հավասարումը բերվում է անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման՝

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx:$$

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

$$y'ctgx+y=2, y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0:$$

Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի՝ $ctgx\cdot dy=(2-y)dx$ և կատարելով բաժանում (մինչև բաժանելը, նկատենք, որ $y\equiv 2$ մասնավոր լուծում է, բայց այն չի բավարարում սկզբնական պայմանին) ստանում ենք՝ $\frac{dy}{y-2}=-tgxdx$: Ինտեգրելով $\int\frac{dy}{y-2}=-\int\frac{sinx}{cosx}dx+ln|c|$,

[1] (■ սիմվոլը նշանակում է թեորեմի ապացուցման ավարտը)

կստանանք՝ $\ln|y-2|=\ln|\cos x|+\ln|c|$: Կամ՝ $y-2=\pm c\cdot cosx$: Վերանշանակելով $\pm c$ - ն նոր c - ով, կստանանք՝ $y=2+c\cdot cosx$: Օգտվելով $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ սկզբնական պայմանից, կստանանք՝ $0=2+c\cdot cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow c=-4$: Այսպիսով, խնդրի լուծումն է՝ $y=2-4cosx$:

Նկատենք, որ՝

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by)\ (a \text{ - ն և } b \text{ - ն հաստատուններ են, } b\neq 0) \qquad (2.5)$$

տեսքի հավասարումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման $z(x)=ax+by(x)$ նշանակումով:

Օրինակ 2: Լուծել $y'=\sqrt{4x+2y-1}$ հավասարումը: Այստեղ բավական է անցնել նոր $4x+2y=z$ որոնելի ֆունկցիայի, բայց ավելի նպատակահարմար է $z(x)=\sqrt{4x+2y-1}$ տեղադրումը: Ունենք՝

$$4x+2y-1=z^2\Rightarrow 4+2y'=2zz'\Rightarrow y'=zz'-2\Rightarrow zz'-2=z$$

$\Rightarrow zz'=z+2$: Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի և անջատելով փոփոխականները ստանում ենք՝ $\frac{zdz}{z+2}=dx\Rightarrow\frac{z+2-2}{z+2}dz=dx$: Ինտեգրելով, ստանում ենք՝

$$z-2\ln|z+2|=x+c\Rightarrow\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+c:$$

3. ՀԱՄԱՍԵՌ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում 1: Կասենք, որ $f(x,y)$ - ը α կարգի համասեռ ֆունկցիա է, եթե այն բանից, որ (x,y) - ը պատկանում է որոշման տիրույթին հետևում է, որ (tx,ty) $(t>0)$ կետն էլ է պատկանում որոշման տիրույթին և՝ $f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y)$:

Սահմանում 2:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{3.1}$$

տեսքի դիֆֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է **համասեռ**, եթե $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաները նույն (α) կարգի համասեռ ֆունկցիաներ են:

Երբ $x>0$, ձևափոխելով (3.1) հավասարումը և օգտվելով P,Q ֆունկցիաների համասեռությունից, կստանանք՝

$$P\left(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x}\right)dx+Q\left(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x}\right)dy=0\Rightarrow$$

$$x^{\alpha}P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+x^{\alpha}Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}\equiv f\left(\frac{y}{x}\right)\ \left(P,Q\in C(D),(D)\subset \mathbf{R}^2,Q(x,y)\neq 0\right):$$

Երբ $x<0$, վերը նշված ձևափոխություններում x - ը պետք է փոխարինել $-x$ ով: Այսպիսով համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումները բերվում են հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),\ f\in C(D): \tag{3.2}$$

Ներմուծենք նոր որոնելի ֆունկցիա՝

$$z(x)=\frac{y}{x}\Rightarrow y=zx\Rightarrow y'=z+xz'\Rightarrow z+xz'=f(z)$$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{f(z)-z}=\dfrac{dx}{x}$ $\left(f(z)\neq z\right)$ ($f(z)\equiv z$ դեպքը հատուկ քննարկման կարիք ունի): Ստացվեց անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Օրինակ 1: Լուծել $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$ համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը: Նշանակելով $y=xz$, կստանանք՝ $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dz}{dx}+z$: Տեղադրելով սկզբնական հավասարման մեջ, կստանանք՝ $x\dfrac{dz}{dx}+z=z+tgz$:

Պարզ է, որ $sinz=0$ $(z=\pi k,\ y=\pi kx,\ k\in Z)$ հավասարման լուծում է: Համարելով այժմ, որ $sinz\neq 0$, կստանանք՝ $\dfrac{cosz}{sinz}dz=\dfrac{dx}{x}$,

$ln|sinz|=ln|x|+ln|c|$, $sinz=cx$, $sin\dfrac{y}{x}=cx$:

$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ տեսքի հավասարումները ևս բերվում են համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխելով $a_1x+b_1y+c_1=0$ և $a_2x+b_2y+c_2=0$ ուղիղների հատման (x_0,y_0) կետը՝ $\begin{cases}a_1x_0+b_1y_0+c_1=0\\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0\end{cases}$: Արդյունքում, եթե իհարկե ուղիղները զուգահեռ չեն՝ $a_1b_2\neq a_2b_1$, կատարելով

$\begin{cases}\tilde{x}=x-x_0\\ \tilde{y}=y-y_0\end{cases}$ կոորդինատական ձևափոխությունը, կստանանք՝

$\dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\dfrac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}}\right)$, կամ $\dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\dfrac{a_1+b_1\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_2+b_2\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right)\equiv\varphi\left(\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$, որը համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է: Եթե $a_1x+b_1y+c_1=0$ և $a_2x+b_2y+c_2=0$ ուղիղները զուգահեռ են՝ $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=k$, այս մեթոդը կիրառելի չէ: Բայց այդ դեպքում՝

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)\equiv F(a_1x+b_1y) \text{ (տես (2.5))}:$$

4. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում այն հավասարումը, որը գծային է որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի նկատմամբ, այսինքն՝ հետևյալ տեսքի հավասարում՝

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{4.1}$$

որտեղ $p(x)$, $q(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են ինչ – որ X միջակայքում:

Գծային (4.1) հավասարումը լուծվում է այսպես կոչված հաստատունի փոփոխարկման (վարիացիայի) մեթոդով: Նախ լուծում ենք համասեռ հավասարումը ($q(x)\equiv 0$)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0: \tag{4.2}$$

Համասեռ հավասարման մեջ անջատելով փոփոխականները և ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx \Rightarrow ln|y|=-\int p(x)dx+ln|c|:$$

Այստեղից, համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_0=ce^{-\int p(x)dx},\ \ c\neq 0 \tag{4.3}$$

(բաժանելով y-ի վրա մենք կորցրեցինք $y\equiv 0$ լուծումը, սակայն եթե համարենք, որ c կարող է ընդունել նաև զրո արժեքը, ապա (4.3)-ը կպարունակի նաև $y\equiv 0$ լուծումը):

Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման (4.3) տեսքը հուշում է, թե ինչ տեսքով որոնենք ոչ համասեռ (4.1) հավասարման լուծումը, այն է՝

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{4.4}$$

որտեղ $c(x)$ - ը նոր որոնելի ֆունկցիա է: Ածանցելով, (4.4) – ը և տեղադրելով (4.1) – ի մեջ, կստանանք՝

$$y'(x)=c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx},$$

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{\int p(x)dx}=q(x)\Rightarrow$$

$$c'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}\Rightarrow c(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c_1,$$

որտեղ c_1 - ը հաստատուն է: Այսպիսով, (4.4) – ից ստանում ենք (4.1) հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$y=c_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx, \tag{4.5}$$

որը բաղկացած է համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման և ոչ համասեռ հավասարման $e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ մասնավոր լուծման գումարից: Քանի որ ոչ համասեռ հավասարման երկու լուծումները իրարից տարբերվում են համասեռ հավասարման լուծումով, ուստի ոչ համասեռի ընդհանուր լուծման (4.5) բանաձևում կարելի է որպես ոչ համասեռի մասնավոր լուծում ընտրել որը պատահի: Այս հանգամանքը հաշվի առնելով, եթե հաջողվում է գտնել ոչ համասեռ հավասարման որևէ լուծում, ապա այլևս հաստատունի փոփոխարկման մեթոդին կարելի է չդիմել:

Նկատենք, որ կոնկրետ դեպքերում նպատակահարմար չէ օգտվել (4.5) բանաձևից: Ավելի հարմար է յուրաքանչյուր դեպքում կատարել վերը նշված քայլերը:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝ $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$: Նախ լուծենք $xy'+(x+1)y=0$ համասեռ հավասարումը՝

$$\frac{dy}{y}=-\frac{x+1}{x}dx\Rightarrow ln|y|=-x-ln|x|+ln|c|\Rightarrow y_0=c\frac{e^{-x}}{x}:$$

Ոչ համասեռի լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$y=c(x)e^{-x}x^{-1}\Rightarrow y'=c'(x)\frac{e^{-x}}{x}-c(x)\frac{e^{-x}}{x}-c(x)\frac{e^{-x}}{x^2}:$$

Տեղադրելով ոչ համասեռ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$c'(x)e^{-x}-c(x)e^{-x}-c(x)\frac{e^{-x}}{x}+c(x)e^{-x}+c(x)\frac{e^{-x}}{x}=$$

$$=3x^2e^{-x}\Rightarrow c'(x)=3x^2\Rightarrow c(x)=x^3+c_1\Rightarrow y=x^2e^{-x}+c_1\frac{e^{-x}}{x}:$$

Օրինակ 2: Լուծել $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$ հավասարումը: Ինտեգրենք համապատասխան համասեռ հավասարումը.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},\ \ln|y|=\ln|x|+\ln c,\ y_0=cx:$$

Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք $y_1=ax^3$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$3ax^2-ax^2=x^2\Rightarrow a=\frac{1}{2}:$$

Այսպիսով՝ $y_1=\frac{1}{2}x^3$: Ուրեմն, ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $y=cx+\frac{x^3}{2}$:

Որոշ դիֆերենցիալ հավասարումներ փոփոխականի փոխարինման միջոցով կարելի է բերել գծային հավասարման: Օրինակ՝ Բեռնուլիի հավասարումները, որոնք ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}\ (\alpha\neq 0,\alpha\neq 1):$$

Բաժանելով y^{α} - ի վրա (մինչև բաժանելը պետք է քննարկել $y\equiv 0$ լուծում լինելու հարցը), կստանանք՝

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x), \tag{4.6}$$

կամ՝ $\frac{1}{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}\right)'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$:

Նշանակելով $y^{1-\alpha}=z(x)$ ստանում ենք գծային դիֆերենցիալ հավասարում:

Օրինակ 3: Լուծել $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$ Բեռնուլիի հավասարումը: Այն բերելով հետևյալ տեսքի՝ $2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x}+x^2$ և նշանակելով $y^2\equiv z(x)$, կստանանք՝ $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{x}+x^2$ գծային հավասարումը, որի ընդհանուր լուծումն է՝ (տես օրինակ 2.) $z=c_1x+\dfrac{x^3}{2}$: Որտեղ՝ $y=\pm\sqrt{c_1x+\dfrac{x^3}{2}}$:

Հանդիպում են նաև որոշ դեպքերում գծային հավասարման բերվող, Ռիկատիի հավասարումներ: Դրանք են հետևյալ տեսքի հավասարումները՝

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=f(x): \tag{4.7}$$

Հայտնի է, որ ընդհանուր դեպքում Ռիկատիի հավասարումը հնարավոր չէ ճշգրտորեն լուծել, բայց եթե հաջողվել է գտնել այդ հավասարման որևէ $y_1(x)$ մասնավոր լուծում, ապա փոփոխականի $y(x)=y_1(x)+z(x)$ փոխարինման միջոցով կարելի (4.7) – ը բերել Բեռնուլիի հավասարման: Իրոք, տեղադրելով $y(x)=y_1(x)+z(x)$ (4.7) – ի մեջ, կստանանք՝ $y_1'+z'+p(x)(y_1+z)+q(x)(y_1+z)^2=f(x)$: Քանի որ $y_1'+p(x)y_1+q(x)y_1^2\equiv f(x)$, կստանանք Բեռնուլիի հավասարումը. $z'+\left[p(x)+2q(x)y_1\right]z+q(x)z^2=0$:

Օրինակ 4: Լուծել $\dfrac{dy}{dx}=y^2-\dfrac{2}{x^2}$ հավասարումը: Դժվար չէ տեսնել, որ հավասարումն ունի $y_1=\dfrac{a}{x}$ տեսքի մասնավոր լուծում: Տեղադրելով հավասարման մեջ, ստանում ենք՝

$$-\frac{a}{x^2}=\frac{a^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow a_1=-2, a_2=1:$$ Այսպիսով,

օրինակ $y_1=\dfrac{1}{x}$: Նշանակելով $y=z+\dfrac{1}{x}$, կստանանք՝ $y'=z'-\dfrac{1}{x^2}$, $z'-\dfrac{1}{x^2}=z^2+2\dfrac{z}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}$, կամ $z'=z^2+2\dfrac{z}{x}$, որը Բեռնուլիի հավասարում է:

5. ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում: Դիցուք $P,Q\in C(D)$, որտեղ (D) - ն $\boldsymbol{R}^2$ տարածության տիրույթ է (բաց կապակցված բազմություն):

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{5.1}$$

տեսքի հավասարումը կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալներով, եթե (D) - ում գոյություն ունի դիֆերենցելի $U(x,y)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ՝

$$dU(x,y)\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy\ \left((x,y)\in(D)\right): \tag{5.2}$$

Այսպիսով, լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$dU(x,y)=0\ : \tag{5.2`}$$

Քանի որ $dU(x,y)\equiv\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy$ ՝ dx,dy աճերը անկախ են, ապա (5.2`) պայմանը համարժեք է (D) - ում որոշված $U(x,y)$ ֆունկցիայի գոյությանը, որը բավարարում է հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=P(x,y)\\[2mm]\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases} \tag{5.3}$$

Քանի որ $P,Q\in C(D)$, (5.3) – ի $U(x,y)$ լուծումը կլինի դի-ֆերենցելի:

Թեորեմ 5.1: Լրիվ դիֆերենցիալներով (5.1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$U(x,y)=c, \tag{5.4}$$

որտեղ $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}\neq 0$, c - ն կամայական հաստատուն է, :

Ապացույց: Դիցուք $y=y(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է ինչ-որ X միջակայքում (5.1), ուրեմն նաև (5.2՝) հավասարման լուծում՝

$$dU(x,y(x))\equiv 0\ (x\in X):$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $U(x,y(x))\equiv c\ (x\in X)$:

Դիցուք այժմ հակառակը՝ $\tilde{y}=y(x)$ ֆունկցիան որոշվել է (5.4) - ից՝ $U(x,y(x))\equiv c\ (x\in X)$ (նկատենք, որ բավարարված են անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության բոլոր պայմանները ([7],[9]): Ուրեմն՝ $dU(x,y(x))\equiv 0\ (x\in X)$, որն էլ նշանակում է, որ $y=y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (5.1) հավասարմանը: ■

Սահմանում 5.1: Կասենք, որ (D) տիրույթը միակապ է, եթե ինչպիսի անընդհատ փակ կոր էլ ընտրենք (D) - ում, նրանով սահմանափակված տիրույթը պարունակվում է (D) - ում:

Մաթ. անալիզից հայտնի է, որ եթե (D) միակապ տիրույթում $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, ապա՝

$$\frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)dx=\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx,\ \text{որտեղ}\ (x,y)\in(D)\ ([7],[9]):$$

Թեորեմ 5.2: Դիցուք $P,\dfrac{\partial P}{\partial y},Q,\dfrac{\partial Q}{\partial x}\in C(D)$, (D) - ն միակապ տիրույթ է: Որպեսզի (5.1) – ը լինի լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը՝

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad ((x,y)\in(D)): \tag{5.5}$$

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Տրված է որ (5.1) - ը լրիվ դիֆե-րենցիալներով հավասարում է: Այսինքն՝ գոյություն ունի (5.3) - ի $U(x,y)$ լուծում $((x,y)\in(D))$՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} \equiv P(x,y): & (5{,}6) \\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} \equiv Q(x,y): & (5{,}7) \end{cases}$$

(5.6) – ի երկու երկու կողմը ածանցենք ըստ y - ի, (5.7) – ի երկու կողմը՝ ըստ x - ի: Կստանանք՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x} \equiv \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}: & (5{,}8) \\ \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}: & (5{,}9) \end{cases}$$

Քանի որ (5.8) –ի և (5.9) –ի աջ մասերը անընդհատ են, ապա անընդհատ են նաև ձախ մասերը (խառը ածանցյալները), ուրեմն նրանք նույնաբար համընկնում են ([7],[9]), այսինքն ճիշտ է (5.5) - ը: ■

Բավարարություն: Դիցուք $U(x,y)$ - ը բավարարում է (5.3) –ին, այսինքն ճիշտ են (5.6) - ն և (5.7) - ը: Վերցնելով կամայական $M_0(x_0,y_0)\in(D)$ կետ, կունենանք նաև հետևյալ պայմանները՝

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)=P(M_0),\ \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)=Q(M_0): \tag{5.10}$$

Տեսնենք, թե $U(x,y)$ լուծումը ինչպես է արտահայտվում P, Q ֆունկցիաներով: Որից հետո, ածանցելով հեշտությամբ կարող ենք ցույց տալ հակառակը՝ որ այն (5.3) - ի լուծումն է: (5.6) – ում հաստատա-գրենք y - ը և ինտեգրենք ըստ x - ի, կստանանք՝

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y): \tag{5.11}$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ ինտեգրման հաստատունը կախված չէ x - ից, բայց, ընդհանրապես ասած, կախված է y - ից: Ածանցենք (5.11) – ի երկու կողմը ըստ y -ի և հաշվի առնենք (5.7) –ը, կստանանք՝

$$Q(x,y)\equiv\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y): \tag{5.12}$$

Այստեղից՝

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\equiv\Psi(x,y): \tag{5.13}$$

Ցույց տանք, որ իրականում $\Psi(x,y)$ ֆունկցիան կախված չէ x - ից, այսինքն՝ $\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}\equiv0$: Թեորեմի պայմանների առկայությամբ, հաշվի առնելով նաև (5.5) նույնությունը, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx\equiv$$
$$\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv0:$$

Ուրեմն՝

$$\varphi(y)\equiv\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\right]dy:$$

Այսպիսով՝

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\right]dy: \tag{5.14}$$

Մնում է ստուգել, որ (5.14) – ով որոշված $U(x,y)$ - ը բավարարում է (5.3) համակարգին: Իրոք՝

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\equiv P(x,y)+\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dy\equiv P(x,y)+c,$$

որտեղ c - ն հաստատուն է : Հաշվի առնելով (5.10) – ը, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\equiv P(x,y):$$

Նույն կերպ ապացուցվում է, որ՝ $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\equiv Q(x,y)$: ■

Դիտողություն: Հաշվի առնելով մաթ. անալիզից հայտնի կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրման ճանապարհից անկախ լինելու տեսությունը ([7],[9]), $U(x,y)$ ֆունկցիան կարելի է գտնել հետևյալ դատողությամբ: Վերը նշված թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ

$\int_{(A,M)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից, այլ կախված է միայն $A,M\in(D)$ կետերից: Ուստի, եթե հաստատագրենք $A(x_0,y_0)$ կետը և վերցնենք փոփոխական $M(x,y)$ կետ, ապա որոնելի $U(x,y)$ ֆունկցիան կլինի

$$U(x,y)=\int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy:$$

Եթե $A(x_0,y_0),B(x,y_0),M(x,y)$ բեկյալը պարունակվում է (D)-ում, ապա՝

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x,\eta)d\eta:$$

6. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ $y'=f(x,y)$ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիցուք $(D)=[x_0-a;x_0+a]\times[y_0-b;y_0+b]$ ուղղանկյունն է: Ենթադրենք, որ՝ $f\in C(D)$, որտեղից հետևում է՝ $\exists\max_{(D)}|f(x,y)|=M$:

Դիտարկենք հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

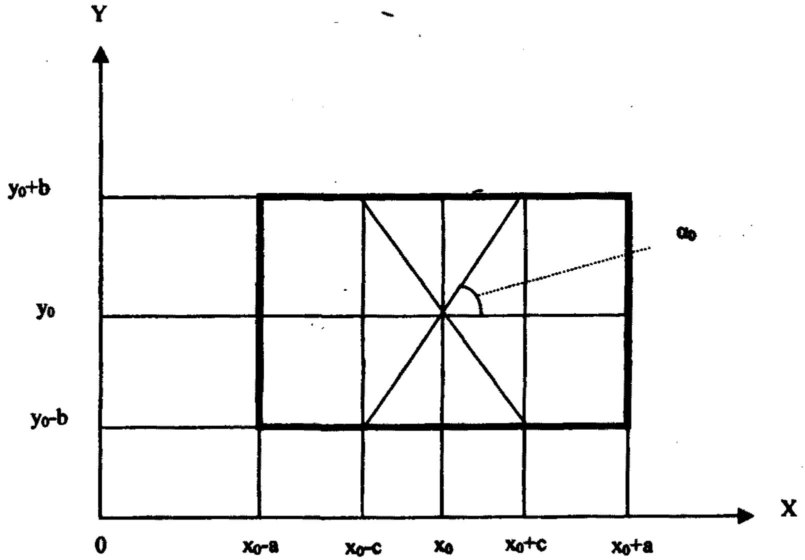
$$\begin{cases} y' = f(x,y), & (6,1) \\ y(x_0) = y_0: & (6,2) \end{cases}$$

Հնարավոր է երկու դեպք՝

1. $M=0 \Rightarrow f(x,y)\equiv 0$: Այս դեպքում (6.1), (6.2) խնդրի լուծումն է՝ $y(x)\equiv y_0$:

2. $M>0$: Նշանակենք $\alpha_0 = arctgM\left(tg\alpha_0 = M\right)$:

Ըստ (6.1) հավասարման $y(x)$ լուծման երկրաչափական մեկնաբանության, որոնելի լուծման գրաֆիկի (ինտեգրալային կորի) յուրաքանչյուր կետում տարված շոշափողի (ուղղության) կազմած α անկյունը $0x$ առանցքի հետ այնպիսին է, որ $|\alpha|\le|\alpha_0|$: Այդ պատճառով



Նկ.2

ինտեգրալային կորը չի հատի (D)– ի հորիզոնական եզրերը, եթե $|x-x_0|\le c$ (տես նկ.2): Ընդ որում, ըստ նկ.2 – ի՝

$$M = tg\alpha_0 = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{M}:$$

Կասենք, որ f ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y-ի, եթե՝

$\exists L > 0, \ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in (D)$ ճիշտ է հետևյալ պայմանը՝

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|: \tag{6.3}$$

Նկատենք, որ Լիպշիցի պայմանի տեղի ունենալու համար բավարար է, (բայց ոչ անհրաժեշտ) որ $f(x, y)$ -ը ունենա սահմանափակ ածանցյալ ըստ y- ի՝ $\left| f'_y(x, y) \right| \le L \ ((x, y) \in (D))$: Իրոք, ըստ Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի՝

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| = \left| f'_y(x, \eta) \right| \left| y_1 - y_2 \right| \le$$

$$\le L \left| y_1 - y_2 \right| \ \left(\eta \in (y_1; y_2) \right) \ \Rightarrow (6.3):$$

Դիցուք h դրական թիվը այնպիսին է, որ՝

$$0 < h < min\left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\}, \text{ իսկ՝ } X = [x_0 - h; x_0 + h]: \tag{6.4}$$

Թեորեմ 6.1 (գոյության և միակության): Եթե $f \in C(D)$ և բավարարում է Լիպշիցի (6.3) պայմանին, ապա $C(X)$ դասում (6.1), (6.2) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում և այն միակն է:

Ապացուցում: Նախ բերենք (6.1), (6.2) խնդիրը համարժեք ինտեգրալ հավասարման:

Դիցուք $y(x)$ - ը $(x \in X)$ հանդիսանում է (6.1), (6.2) խնդրի լուծում: Ունենք՝

$$y'(t) \equiv f(t, y(t)) \ \left(t \in [x_0; x], x \in X \right) \tag{6.5}$$

((6.5) – ից հետևում է, որ $y \in C^1(X)$): Ինտեգրելով (6.5) – ը և հաշվի առնելով (6.2) - ը, կստանանք՝

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt \equiv \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \ y(x) - y(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \ \Rightarrow$$

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt: \tag{6.6}$$

Այսինքն, $y(x)$ - ը հանդիսանում է

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt \tag{6.7}$$

ինտեգրալ հավասարման լուծում $C(X)$ դասում:

Դիցուք այժմ հակառակը՝ $y(x)$ - ը $\left(y \in C(X)\right)$ բավարարում է (6.7) ինտեգրալ հավասարմանը, այսինքն ճիշտ է (6.6) նույնությունը: (6.6) – ից հետևում է (6.2) - ը: Ածանցելով (6.6) – ը և հաշվի առնելով այն, որ $f\left(t, y(t)\right)$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է, կստանանք՝

$$y'(x) \equiv f\left(x, y(x)\right) \ \left(x \in X\right): \tag{6.8}$$

Այսպիսով, ստացանք, որ $y(x)$ - ը բավարարում է (6.1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և (6.2) սկզբնական պայմանին: Ընդ որում, (6.8) – ից հետևում է, որ $y(x)$ - ը ոչ միայն անընդհատ է, այլ ունի նաև անընդհատ ածանցյալ$\left(y \in C^1(X)\right)$: Այսպիսով, մնում է ապացուցել, որ (6.7) ինտեգրալ հավասարումը $C(X)$ դասում ունի լուծում և այն միակն է: Կառուցենք ինդուկտիվ եղանակով հետևյալ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը՝

$$y_n(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt \ \left(y_0(x) \equiv y_0\right), n = 1, 2, \ldots: \tag{6.9}$$

Մասնավորապես՝

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0\right)dt \Rightarrow \left|y_1(x) - y_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} M dt\right| \le M|h| < b:$$ Պարզ է

(այստեղ պետք է կիրառել ինդուկցիայի մեթոդը), որ `

$$\left|y_n(x) - y_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_{n-1}(t)\right)\right|dt\right| \le$$

$$\leq M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \leq Mh < b \quad (n = 1, 2, \dots):$$

Այսպիսով կառուցված հաջորդականության անդամների գրաֆիկները դուրս չեն գալիս (D) – ից: Ապացուցենք, որ այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է X - ում ինչ- որ $y(x)$ ֆունկցիայի, որն էլ հանդիսանում է (6.7) – ի լուծում: Դրա համար դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$y_0(x) + \left[y_1(x) - y_0(x)\right] + \dots + \left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right] + \dots, \qquad (6.10)$$

որի մասնակի գումարների հաջորդականությունը համընկնում է $y_n(x)$ - ի հետ:

Ցույց տանք, որ (6.10) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X - ում: Դրա համար գնահատենք (6.10) շարքի անդամները: (տես (6.9) –ը)

$$\left|y_1(x) - y_0(x)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_0(t)\right)\right| dt\right| \leq Mh:$$

$$\left|y_2(x) - y_1(x)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_1(t)\right) - f\left(t, y_0\right)\right| dt\right| \leq$$

$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x} \left|y_1(t) - y_0\right| dt\right| \leq MLh^2:$$

Ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ապացուցել, որ՝

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq \frac{M}{L}(Lh)^n \quad (n = 1, 2, \dots): \qquad (6.11)$$

Քանի որ՝ $0 < Lh < 1$ (տես (6.4)), ապա $\frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(Lh)^n$ շարքը զուգամետ է, հետևաբար, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի (6.10) շարքը հավասարաչափ և բացարձակ զուգամետ է : Եթե (6.10) շարքի գումարը $y(x)$ - ն է, ապա՝ $y_n(x)$ - ը հավասարաչափ զուգամիտում է $y(x)$ - ին X միջակայքում, այսինքն՝

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n\geq N,\forall x\in X:\left|y_n(x)-y(x)\right|<\frac{\varepsilon}{Lh}: \quad (6.12)$$

Քանի որ $y_n\in C(X)$ $(n=1,2,\ldots)$, ապա, ըստ մաթ.անալիզի հայտնի թեորեմի՝ $y\in C(X)$ ([7],[9]): Անցնենք սահմանի (6.9) – ում, նախապես ցույց տալով, որ՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f\left(t,y_{n-1}(t)\right)dt=\int_{x_0}^{x}f\left(t,y(t)\right)dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{x_0}^{x}f\left(t,y_{n-1}(t)\right)dt-\int_{x_0}^{x}f\left(t,y(t)\right)dt\underset{n\to\infty}{\to}0:$$

Օգտվելով Լիպշիցի (6.3) պայմանից և հավասարաչափ զուգամիտության (6.12) պայմանից, կստանանք՝

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left[f\left(t,y_{n-1}(t)\right)-f\left(t,y(t)\right)\right]dt\right|\leq\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,y_{n-1}(t)\right)-f\left(t,y(t)\right)\right|dt\right|\leq$$

$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_{n-1}(t)-y(t)\right|dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{Lh}L\left|\int_{x_0}^{x}dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{h}h=\varepsilon\quad(n\geq N+1):$$

Այսպիսով, անցնելով (6.9) – ում սահմանի, երբ n - ը ձգտում է անվերջի, ստանում ենք, որ $y(x)$ - ը հանդիսանում է (6.7) ինտեգրալ հավասարման լուծում:

Այժմ ապացուցենք լուծման միակությունը $C(X)$ դասում: Դիցուք (6.7) - ը ունի երկու $\varphi(x),\psi(x)$ լուծում $C(X)$ դասում: Այսինքն՝

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(t,\varphi(t)\right)dt\ \ (x\in X) \quad (6.13)$$

և

$$\psi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(t,\psi(t)\right)dt\ \ (x\in X): \quad (6.14)$$

Նշանակելով $\phi(t) \equiv \varphi(t) - \psi(t)$, օգտվելով Լիպշիցի պայմանից և հանելով (6.13) –ից (6.14) – ը, կստանանք՝

$$|\phi(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \right| dt \right| \le L \left| \int_{x_0}^{x} |\phi(t)| dt \right| \le$$

$$\le L\|\phi\| h \ (x \in X), \qquad (6.15)$$

որտեղ՝ $\|\phi\| = \max\limits_{X} |\phi(x)|$ (նորմ ϕ): (6.15) – ից հետևում է՝ $\|\phi\| \le Lh\|\phi\|$:

Եթե ենթադրենք, $\|\phi\| > 0$, ապա կստանանք՝ $1 \le Lh$, որը հակասում է h - ի ընտրությանը (տես (6.4)): Ուրեմն՝

$$\|\phi\| = \max_{X} |\phi(x)| = 0 \Rightarrow \phi(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv \psi(x) \ \ (x \in X) : \blacksquare$$

Դիտողություն 1: Նկատենք, որ թեորեմի ապացույցը տալիս է նաև մեթոդ նշված Կոշիի խնդիրը մոտավոր լուծելու համար: Դրա համար պետք է հաշվել (6.9) բանաձևով որոշվող մոտարկումները, որը բերում է որոշակի ինտեգրալների հաշվմանը: Բայց ինտեգրալները միշտ չէ, որ ճշգրտորեն հաշվվում են: Այս թերությունից զերծ է գոյության և միակության թեորեմի մեկ այլ ապացույց (համեմատաբար բարդ), հենված էյլերի բեկյալների հաջորդականության մեթոդի վրա ([1]):

7. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՉԼՈՒԾՎԱԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ածանցյալի նկատմամբ չլուծված դիֆերենցիալ հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F(x, y, y') = 0 : \qquad (7.1)$$

Դիցուք, որոնելի ֆունկցիան բավարարում է

$$y(x_0) = y_0 \qquad (7.2)$$

պայմանին: Դիտարկենք $F(x_0, y_0, z) = 0$ հանրահաշվական հավասարումը և դիցուք այն ունի z_k լուծումներ՝

$(F(x_0,y_0,z_k)=0,\ k=0,1,...)$: Ընտրենք այդ լուծումներից, օրինակ z_0 - ն: Այսինքն՝ $F(x_0,y_0,z_0)=0$: Ուրեմն, բնական է պահանջել, որ բավարարվի նաև հետևյալ պայմանը՝

$$y'(x_0)=z_0: \tag{7.3}$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝ $M_0(x_0,y_0,z_0), N_0(x_0,y_0)$:

Գոյության և միակության թեորեմը ածանցյալի նկատմամբ չլուծված (7.1) հավասարման համար հենվում է համապատասխան թեորեմի վրա ածանցյալի նկատմամբ լուծված $y'=f(x,y)$ հավասարման համար և մաթ. անալիզից հայտնի անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության վրա ([7],[9]): Ձևակերպենք այդ տեսության այն թեորեմը, որից պետք է օգտվենք:

Թեորեմ 7.1 (անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության և միակության մասին):

Դիցուք տրված է

$$F(x,y,y')=0 \tag{7.4}$$

հավասարումը, որտեղ $F, F'_x, F'_y, F'_{y'}$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, $F(M_0)=0, F'_{y'}(M_0)\neq 0$: Այդ դեպքում, գոյություն ունի $N_0(x_0,y_0)$ - կետի $U_\delta(N_0)$ շրջակայք, այնպիսին, որ այդտեղ (7.4) հավասարումը որոշում է միակ անբացայայտ ֆունկցիա

$$y'=f(x,y)\ \ (F(x,y,f(x,y))\equiv 0,(x,y)\in U_\delta(N_0)),$$

այնպիսին, որ՝ $f, f'_y \in C(U_\delta(N_0)), f(N_0)=z_0$: Ածանցելով $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ նույնությունը ըստ y - ի, ստանում ենք՝

$$F'_y(x,y,f(x,y))+F'_{y'}(x,y,f(x,y))\cdot f'_y(x,y)\equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y)\equiv -\frac{F'_y(x,y,f(x,y))}{F'_{y'}(x,y,f(x,y))}\Rightarrow f'\in C(U_\delta(N_0)),$$

(եթե հարկավոր է կարելի է δ - ն փոքրացնել):

Թեորեմ 7.2 (գոյության և միակության թեորեմ ածանցյալի նկատմամբ չլուծված դիֆերենցիալ հավասարման համար): Դիցուք $F, F'_x, F'_y, F'_{y'}$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, $F(M_0)=0, F'_{y'}(M_0)\neq 0$: Այդ դեպքում (7.1) - (7.3) խնդիրը x_0 կետի ինչ – որ $U_\gamma(x_0)$ շրջակայքում ունի լուծում և այն միակն է:

Ապացուցում: Քանի որ տեղի ունեն նախորդ թեորեմի բոլոր պայմանները, ապա գոյություն ունի $N_0(x_0, y_0)$ կետի $U_\delta(N_0)$ շրջակայք, այնպիսին, որ այդտեղ (7.1) հավասարումը որոշում է միակ անբացահայտ ֆունկցիա $y'=f(x,y)$, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝ $f, f'_y \in C(U_\delta(N_0)), f(N_0)=z_0$: Այժմ օգտվենք գոյության և միակության թեորեմից $y'=f(x,y)$ հավասարման համար: Այն բանից, որ $f'_y \in C(U_\delta(N_0))$ հետևում է $f'_y \in C\left(\overline{U}_{\delta/2}(N_0)\right)$ պայմանը, որը նշանակում է, որ f'_y - ը սահմանափակ է $U_{\delta/2}(N_0)$ - ում, հետևաբար f - ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Այսպիսով, ըստ գոյության և միակության թեորեմի, (7.1), (7.2) խնդիրը ունի լուծում $y=y(x)$ և այն միակն է x_0 – ի ինչ-որ $U_\gamma(x_0)$ շրջակայքում: Այսինքն՝

$$y'(x)\equiv f(x, y(x)), x\in U_\gamma(x_0), (x, y(x))\in U_{\delta/2}(N_0),$$

$$y(x_0)=y_0:$$

Քանի որ, $F(x, y, f(x,y))\equiv 0, (x,y)\in U_{\delta/2}(N_0)$, ապա մասնավորապես՝ $F(x, y(x), f(x, y(x)))\equiv 0 \ (x\in U_\gamma(x_0))$, ուրեմն $y=y(x)$ - ը բավարարում է (7.1) հավասարմանը:

Քանի որ՝ $y'(x)\equiv f(x, y(x)) \ (x\in U_\gamma(x_0)), y(x_0)=y_0$ և $f(x_0, y_0)=z_0$, ապա ստանում ենք՝

$$y'(x_0)=f(x_0, y(x_0))=f(x_0, y_0)=z_0:$$

Այսպիսով, բավարարվում է նաև (7.3) պայմանը: Խնդրի լուծման միակությունը հետևում է ապացուցման պրոցեսից: ■

Սահմանում 7.1: Կասենք, որ (7.1) հավասարման $y=\bar{y}(x)$ լուծումը եզակի լուծում է, եթե նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր կետով անցնում է նույն հավասարման մեկ այլ $y=y(x,c)$ լուծում, այնպիսին, որ այդ կետում երկու լուծումների շոշափողները համընկնում են, այսինքն՝

$$\forall x_0:\begin{cases}\bar{y}(x)(x_0)=y(x_0,c)\\ \bar{y}'(x)(x_0)=y'(x_0,c)\end{cases} \tag{7.5}$$

Պարզ է, որ եզակի լուծում լինելու համար անհրաժեշտ է, որ խախտվեն նախորդ թեորեմի պայմանները: Այսինքն եզակի լուծումը իմաստ ունի որոնել հետևյալ համարգի լուծումների դասում՝ (այդ լուծումների գրաֆիկները անվանում են դիսկրիմինանտային կորեր)

$$\begin{cases}F(x,y,y')=0\\ F'_{y'}(x,y,y')=0\end{cases}: \tag{7.6}$$

Դիսկրիմանտային կորը գտնելուց հետո պետք է նախ համոզվել որ այն ինտեգրալային կոր է, այնուհետև ստուգել, որ այն բավարարում է (7.5) համակարգին:

Այժմ քննարկենք ածանցյալի նկատմամբ չլուծված (7.1) հավասարումը ինտեգրելու մեթոդները: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1. (7.1) հավասարումը լուծվում է y'– ի նկատմամբ (թեկուզ ոչ միարժեք):

Օրինակ 7.1: Լուծել $(y')^3+y^2-yy'^2-yy'=0$ հավասարումը: Վերլուծելով արտադրիչների, կստանանք՝

$$y'^2(y'-y)-y(y'-y)=0\Rightarrow(y'-y)(y'^2-y)=0:$$ Որտեղից՝

$$\left[\begin{aligned}&y'=y\\ &y'=\pm\sqrt{y}\end{aligned}\right.: \tag{7.7}$$

Պարզ է, որ $y\equiv 0$ լուծում է: Համարելով այժմ, որ $y\neq 0$ և անջատելով փոփոխականները, կստանանք՝

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{dy}{y}=dx\\[2mm] \dfrac{dy}{\sqrt{y}}=\pm dx\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=ce^{x}\\[2mm] y=\left(\dfrac{x}{2}+c\right)^{2}\end{array}\right.:$$

Այժմ որոնենք եզակի լուծումները, նախապես որոշելով դիսկրիմինանտային կորերը: Դրա համար հարկավոր է լուծել հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}(y')^3+y^2-yy'^2-yy'=0, & (7{,}8)\\ 3(y')^2-2yy'-y=0: & (7{,}9)\end{cases}$$

Քանի որ (7.8) – ը համարժեք է (7.7) – ին, ապա (7.9) – ից ստանում ենք՝

$y=0$ կամ $y=1$: Բայց պարզ է,որ $y=1$ լուծում չէ: Այսպիսով, եզակի լուծում լինելու տեսանկյունից կասկածելի է միայն $\overline{y}(x)\equiv 0$: Մնում է ստուգել, որ $\overline{y}(x)\equiv 0$ լուծումը եզակի է: Այսինքն՝ստուգել հետևյալ պայմանների իրականացումը՝

$$\forall x_0:\begin{cases}\left(\dfrac{x_0}{2}+c\right)^2=0\\ 2\left(\dfrac{x_0}{2}+c\right)=0\end{cases}\Rightarrow c=-\dfrac{x_0}{2}:$$

Այսպիսով՝ $\overline{y}(x)\equiv 0$ եզակի լուծում է:

2. (7.1) հավասարումը լուծվում է y – ի նկատմամբ՝

$$y=f(x,y') \qquad 7.10)$$

որտեղ f - ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Եթե նշանակենք՝ $y'(x)\equiv p(x)$, ապա (7.10) – ը կնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$y=f(x,p), \qquad (7.11)$$

Ածանցելով (7.11) – ը և հաշվի առնելով նշանակումը, կստանանք՝ $p = f'_x(x,p) + f'_y(x,p)p'$: Ստացվեց ածանցյալի նկատմամբ լուծված հավասարում: Եթե այն հաջողվի լուծել և ստանալ $p = p(x,c)$ ընդհանուր լուծումը, ապա (7.11) – ից կստանանք (7.10) հավասարման ընդհանուր լուծումը՝ $y = f(x, p(x,c))$: Իսկ, եթե հաջողվի գտնել միայն $x = x(p,c)$ լուծումը, ապա (7.10) հավասարման լուծումը կտրվի պարամետրական տեսքով՝ $\begin{cases} x = x(p,c) \\ y = f(x(p,c), p) \end{cases}$:

Օրինակ 7.2: Լուծել $y = ln(1 + y'^2)$ հավասարումը: Ներմուծելով $y'(x) \equiv p(x)$ նշանակումը, կստանանք՝ $y = ln(1 + p^2)$: Ածանցելով ստացված հավասարումը կունենանք՝ $p = \frac{2pp'}{1+p^2}$: Այստեղից ստանում ենք, որ կամ $p = 0 \Rightarrow y \equiv 0$, կամ

$$\frac{dp}{p^2+1} = \frac{dx}{2} \Rightarrow arctgp = \frac{x}{2} + c \Rightarrow p = tg\left(\frac{x}{2} + c\right):$$

Ի վերջո, ստանում ենք՝ $y = \ln\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2} + c\right)\right)$: Այժմ որոնենք եզակի լուծումները, նախապես որոշելով դիսկրիմինանտային կորերը, որոնք որոշվում են հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} y = ln(1 + y'^2) \\ \dfrac{2y'}{1+y'^2} = 0 \Rightarrow y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y \equiv 0:$$

$\bar{y} \equiv 0$ լուծումը եզակի է, եթե այն բավարարում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} ln\left(1+tg^2\left(\frac{x_0}{2}+c\right)\right)=0 \\ 2tg\left(\frac{x_0}{2}+c\right)\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow c=-\frac{x_0}{2}:$$

Այսպիսով, $\bar{y}(x)\equiv 0$ եզակի լուծում է:

1. (7.1) հավասարումը լուծվում է x – ի նկատմամբ՝

$$x=f(y,y'), \tag{7.12}$$

որտեղ f - ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Եթե նշանակենք՝ $y'(x)\equiv p(y)$ $(p(y)\neq 0)$, ապա (7.12) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x=f(y,p): \tag{7.13}$$

Հաշվի առնելով, որ $x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{p}$, ածանցելով (7.13) – ը ըստ y - ի, կստանանք՝ $\frac{1}{p}=f'_y(y,p)+f'_p(y,p)p'_y$: Եթե ստացված հավասարումը հաջողվում է լուծել p - ի նկատմամբ$(p=p(y,c))$, ապա տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $x=f(y,p(y,c))$: Իսկ եթե հաջողվում է ստացված հավասարումը լուծել y - ի նկատմամբ $(y=y(p,c))$, ապա լուծումը կտրվի պարամետրական տեսքով՝ $x=f(y(p,c),p)$, $y=y(p,c)$:

Օրինակ 7.3: Լուծել $2xy'-y=y'ln(yy')\Rightarrow x=\frac{y}{2y'}+\frac{1}{2}ln(yy')$ հավասարումը: Եթե նշանակենք՝ $y'(x)\equiv p(y)$, ապա կստանանք՝ $x=\frac{y}{2p}+\frac{1}{2}ln(yp)$ $(p\neq 0)$: Ածանցելով ստացված հավասարումը ըստ y -ի, կստանանք՝ $\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}-\frac{yp'}{2p^2}+\frac{p+yp'}{2yp}$: Կամ՝ $\frac{y-p}{2py}=\frac{p-y}{2p^2}p'$:

Հնարավոր է երկու դեպք՝ կամ $p=y \Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln\left(p^2\right)=\frac{1}{2}+ln|p|$,

կամ՝ $p \neq y$, այդ դեպքում, ստանում ենք՝

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y} \Rightarrow ln|p|=-ln|y|+ln|c| \Rightarrow p=\frac{c}{y} \Rightarrow x=\frac{y^2}{2c}+\frac{1}{2}lnc:$$

(7.11) տեսքի հավասարումներից առանձնանում են x - ի նկատմամբ գծային, այսպես կոչված, Լագրանժի հավասարումները՝

$y=x\varphi\left(y'\right)+\psi\left(y'\right)$, որտեղ φ – ն, ψ - ն դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

Ներմուծելով $y'=p$ նշանակումը և ածանցելով $y=x\varphi\left(p\right)+\psi\left(p\right)$ հավասարումը ըստ x - ի, կստանանք՝

$$p=\varphi\left(p\right)+x\varphi'\left(p\right)p'+\psi'\left(p\right)p':$$

Փոխելով անկախ փոփոխականի և որոնելի ֆունկցիաների դերերը, կստանանք՝ $\left(p-\varphi\left(p\right)\right)x'=x\varphi'\left(p\right)+\psi'\left(p\right)$:

Լուծելով այս գծային հավասարումը, կստանանք լուծումը պարամետրական տեսքով՝ $x=x\left(p,c\right), y=x\left(p,c\right)\varphi\left(p\right)+\psi\left(p\right)$: Կարևոր է այս հավասարման մասնավոր դեպքը, այսպես կոչված, Կլերոյի հավասարումը՝ $y=xy'+\psi\left(y'\right)$: Կրկնելով նախորդ դատողու-թյունները, կստանանք՝

$$p=p+xp'+\psi'\left(p\right)p' \Rightarrow p'\left(x+\psi'\left(p\right)\right)=0 \Rightarrow p'=0\left(p=c\right),$$

կամ՝ $x=-\psi'\left(p\right)$: $p=c$ դեպքին համապատասխանում է $y=cx+\psi\left(c\right)$ ուղիղ գծերի ընտանիքը, իսկ $x=-\psi'\left(p\right)$ դեպքում ունենք՝ $y=px+\psi\left(p\right)=-p\psi'\left(p\right)+\psi\left(p\right)$: Ստացվածը կլինի լուծում, եթե ապացուցենք, որ $y'\left(x\right)=p$: Իրոք՝

$$y'=p+xp'+\psi'\left(p\right)p'=p-\psi'\left(p\right)p'+\psi'\left(p\right)p'=p:$$

Օրինակ 7.4 : Լուծել $y=2xy'-4y'^3$ հավասարումը: Ներմուծելով նշանակում՝ $y'\left(x\right)\equiv p\left(x\right)$, ստանում ենք՝ $y=2xp-4p^3$: Ածանցելով ըստ x – ի, կստանանք՝ $p=2p+2xp'-12p^2p'$: Նախ նկատենք, որ

$p=0 \Rightarrow y\equiv 0$ այս հավասարման լուծում է: Այնուհետև, համարելով, որ $p\neq c$ և փոխելով x - ի և p - ի դերերը, կստանանք x - ի նկատմամբ գծային հավասարում $px'=12p^2-2x$: Նախ լուծում ենք $px'=-2x$ համասեռ հավասարումը՝ $\frac{dx}{x}=-2\frac{dp}{p}\Rightarrow x_0=\frac{c}{p^2}$: Պարզ է, որ ոչ համասեռ $px'=12p^2-2x$ հավասարումը ունի $x=ap^2$ տեսքի լուծում, որն էլ տեղադրելով հավասարման մեջ, գտնում ենք $a=3$: Այսպիսով ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $x=\frac{c}{p^2}+3p^2$: Ուրեմն, նախնական հավասարման լուծումը կտրվի պարամետրական տեսքով՝

$$\begin{cases} x=3p^2+\frac{c}{p^2}, \\ y=2p^3+2\frac{c}{p} \end{cases}:$$

Ունենք նաև $y\equiv 0$ մասնավոր լուծումը:

Օրինակ 7.5: Լուծել $y=xy'-\ln y'$ հավասարումը: Ներմուծելով նշանակում՝ $y'(x)\equiv p(x)$, ստանում ենք՝ $y=xp-\ln p$: Ածանցելով ըստ $x-$ի, կստանանք՝

$$p=p+xp'-\frac{1}{p}p'\Rightarrow p'\left(x-\frac{1}{p}\right)=0\Rightarrow p'=0(p=c) \text{ կամ՝ } p=\frac{1}{x}:$$

Ստանում ենք լուծումների $y=cx-lnc$ ընտանիքը և մասնավոր $\bar{y}=1+lnx$ լուծում: Որոնենք եզակի լուծումները: Դիսկրիմինանտային կորը կորոշվի հետևյալ համակարգից՝

$$y=xy'-\ln y', x-\frac{1}{y'}=0\Rightarrow \bar{y}(x)=1+lnx:$$

Վերցնելով $\forall x_0>0$ ստուգենք որ լուծումը եզակի է, այսինքն՝ $1+lnx_0=cx_0-lnc,\ \frac{1}{x_0}=c$, որը ճշմարիտ է: Այսպիսով՝ $\bar{y}=1+lnx$ լռծումը եզակի է:

III. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱՐ

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համարգ է կոչվում հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots y_n) \end{cases} : \qquad (3.1)$$

Այս համակարգի լուծում ասելով հասկանում ենք $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ֆունկցիաների այնպիսի n – յակ, որ երբ $y_k(x)$ $(k = 1, \dots, n)$ ֆունկցիաները տեղադրում ենք համակարգի մեջ, ապա հավասարումներից յուրաքանչյուրը դառնում է նույնություն x_0 կետի ինչ – որ շրջակայքում: Ենթադրվում է, որ այդ ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ սկզբնական պայմաններին՝ (Կոշիի խնդիր)

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} : \qquad (3.2)$$

(3.1), (3.2) Կոշիի խնդիրը կարելի է գրել համարժեք վեկտորական տեսքով: Դիցուք՝

$$\vec{Y}(x) = \left(Y_1(x), \dots, Y_n(x)\right), \ \vec{Y}'(x) = \left(Y_1'(x), \dots, Y_n'(x)\right),$$

$$\vec{F}(x) = \left(f_1\left(x, \vec{Y}(x)\right), \dots, f_n\left(x, \vec{Y}(x)\right)\right), \vec{Y_0} = \left(y_{10}, \dots, y_{n0}\right):$$

(3.1), (3.2) Կոշիի խնդիրը կգրվի հետևյալ համարժեք կերպ՝

$$\vec{Y}'(x) = \vec{F}\left(x, \vec{Y}(x)\right), \vec{Y}(x_0) = \vec{Y}_0 :$$

Նկատում ենք, որ վեկտորական տեսքով գրված Կոշիի խնդիրը նման է արդեն ուսումնասիրած սկալյար դեպքին համապատասխան Կոշիի խնդրին, ուստի բերենք առանց ապացույցի նորմալ համակարգի համար (3.1), (3.2) խնդրի գոյության և միակության թեորեմը, նախապես ներմուծելով հետևյալ նշանակումը՝ $M_0\left(x_0, \vec{Y_0}\right) = \left(x_0, y_{10}, \dots y_{n0}\right)$:

Թեորեմ 1 (գոյության և միակության)։ Դիցուք՝

$f_k \in C^1\left(U_\delta\left(M_0\right)\right)$ $\left(k=1,\ldots,n\right)$։ Այդ դեպքում (3.1), (3.2) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում

$\left(y_1\left(x\right),\ldots,y_n\left(x\right)\right)$ և այն միակն է $C^1\left(U_\gamma\left(x_0\right)\right)$ $\left(\gamma<\delta\right)$ դասում։

IV. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիտարկենք ածանցյալի նկատմամբ լուծված բարձր կարգի հետևյալ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right): \tag{4.1}$$

Պահանջվում է, որ լուծումը բավարարի հետևյալ "սկզբնական" պայմաններին՝

$$y\left(x_0\right)=y_{10},y'\left(x_0\right)=y_{20},\ldots,y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_{n0}: \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2) Կոշիի խնդիրը բերենք նորմալ համակարգի, ներմուծելով հետևյալ նշանակումները՝

$$y\left(x\right)\equiv y_1\left(x\right),y'\left(x\right)\equiv y_1'\left(x\right)\equiv y_2\left(x\right),\ldots,y^{(n-1)}\left(x\right)\equiv y_{n-1}'\equiv y_n\left(x\right):$$

Ստացվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y_1'\left(x\right)=y_2\left(x\right)\equiv f_1\left(x,y_1,\ldots,y_n\right) \\ y_2'\left(x\right)=y_3\left(x\right)\equiv f_2\left(x,y_1,\ldots,y_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}'\left(x\right)=y_n\left(x\right)\equiv f_{n-1}\left(x,y_1,\ldots,y_n\right) \\ y_n'=f\left(x,y_1,\ldots y_n\right) \end{cases}, \tag{4.3}$$

բավարարող հետևյալ պայմաններին՝

$$y_1\left(x_0\right)=y_{10},\ldots,y_n\left(x_0\right)=y_{n0}: \tag{4.4}$$

Նկատենք, որ (4.3) – ի աջ մասի f_k $(k=1,...,n-1)$ գծային ֆունկցիաները աընդհատ են իրենց ածանցյալների հետ մեկտեղ՝ $\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}=\begin{cases}1, j=k+1\\0, j\neq k+1\end{cases}$: Ուրեմն մնում է պահանջներ դնել միայն f - ի վրա:

Թեորեմ 1 (գոյության և միակության): Դիցուք $f\in C^1\left(U_\delta\left(M_0\right)\right)$, որտեղ $M_0=M_0\left(x_0,y_{10},...y_{n0}\right)$: Այդ դեպքում (4.1), (4.2) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում և այն միակն է $C^n\left(U_\gamma\left(x_0\right)\right)$ $(\gamma<\delta)$ դասում:

Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ (4.3) համակարգը, (4.4) պայմանների առկայությամբ ունի լուծում $(y_1(x),...,y_n(x))$ և այն միակն է $C^1\left(U_\gamma\left(x_0\right)\right)$ $(\gamma<\delta)$ դասում (տես III բ.1): Ապացուցենք, որ $y(x)\equiv y_1(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (4.1), (4.2) Կոշիի խնդրի լուծում: Իրոք՝

$$y(x_0)=y_1(x_0)=y_{10},\ y'(x)=y_1'(x)=y_2(x)\Rightarrow y'(x_0)=y_{20},$$
$$...,y^{(n-1)}(x)=y_n(x)\Rightarrow$$
$$y^{(n-1)}(x_0)=y_n(x_0)=y_{n0},$$
$$y^{(n)}(x)=y_n'(x)=f\left(x,y,y',...y^{(n-1)}\right):$$

Լուծման միակությունը հետևում է (4.3) համակարգի համար խնդրի $y_1(x),...,y_n(x)$ լուծման միակությունից, որը նշանակում է որ միակն է նաև $y(x)\equiv y_1(x)$ ֆունկցիան: ■

Այժմ ուսումնասիրենք բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների կարգը իջեցնելու մեթոդներ: Կարգը կարելի է իջեցնել հետևյալ դեպքերում՝

1. Հավասարման մեջ բացակայում են $y,y',...,y^{(k-1)}$, այսինքն հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝ $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$: Եթե ներմուծենք նշանակում՝ $y^{(k)}(x)\equiv z(x)$, ապա հավասարման կարգը կիջնի k - ով:

Օրինակ 4.1: Լուծել $xy''' = y'' - xy''$ հավասարումը: Նշանակենք $y''(x) \equiv z(x)$, կստանանք՝

$$xz' = z(1-x) \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1-x}{x}dx \Rightarrow ln|z| =$$
$$= ln|x| - x + ln|c| \Rightarrow z = cxe^{-x} \Rightarrow y'' = cxe^{-x} :$$

Մնում է երկու անգամ ինտեգրել ստացվածը, կամ օգտվել ստորև դուրս բերվող բազմապատիկ ինտեգրալի միապատիկի բերելու բանաձևից (տես V (2.1)): Օգտվենք վերջինից, կստանանք՝

$$y = c_1 \int_0^x (x-t)te^{-t}dt + c_2x + c_3 :$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում, ի վերջո ստանում ենք՝

$$y = c_1(x+2)e^{-x} + c_2x + c_3 :$$

2. Հավասարման մեջ x - ը բացահայտ չի մասնակցում: Այս դեպքում հավասարման կարգը մեկով կիջնի, եթե կատարենք հետևյալ նշանակումը՝ $y' = z(y)$: Անցնելով ածանցումից ըստ x - ի ածանցմանը ըստ y - ի, կստանանք՝

$$y''_{xx} = z'_y \cdot y'_x = z' \cdot z, y''' = (z' \cdot z)'_y \cdot y'_x = \left(z'' \cdot z + (z')^2\right)z, \ldots$$

Ինչպես տեսնում ենք նոր հավասարման կարգը մեկով իջավ:

Օրինակ 4.2: Լուծել $yy'' = y'^2 - y'^3$ հավասարումը: Անցնելով նոր որոնելի ֆունկցիայի $z(y) = y', (y''_{xx} = z'_y y'_x = z' \cdot z)$, որտեղ y-ը նոր անկախ փոփոխականի դերում է, կստանանք՝ $yz'z = z^2 - z^3$:

Նկատելով, որ $z \equiv 0$ $(y' \equiv 0, y \equiv c)$, $z \equiv 1$ $(y' \equiv 1, y \equiv x+c)$, լուծումներ են և համարելով, որ արդեն $z \neq 0, z \neq 1$, անջատելով փոփոխականները, կստանանք՝ $\dfrac{dz}{z(1-z)} = \dfrac{dy}{y}$: Ինտեգրելով կստանանք՝

$ln\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = ln|y| + ln|c_1|$, կամ՝ $\dfrac{z}{1-z} = c_1y$: Այստեղից՝ $z = \dfrac{c_1y}{c_1y+1}$, կամ՝ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{c_1y}{c_1y+1}\Rightarrow\dfrac{c_1y+1}{c_1y}dy=dx$: Ինտեգրելով, կստանանք՝ $y+c_1ln|y|=x+c_2$ (նկատենք, որ այս լուծումների մեջ կա $y\equiv x+c$ լուծումը, բայց $y\equiv c$ լուծումը պետք է առանձին նշել):

3. Կարգը մեկով կիջնի, եթե հավասարման ձախ և աջ մասերում հաջողվում է առաջացնենք լրիվ ածանցյալներ:

Օրինակ 4.3: Լուծել $yy''=y'\left(y'+1\right)$ հավասարումը: Այն ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\frac{\left(y'+1\right)'}{y'+1}=\frac{y'}{y}\Rightarrow(ln|y'+1|)'=(ln|y|)'\Rightarrow y'+1=c_1y\Rightarrow\frac{dy}{c_1y-1}=dx:$$

Նկատենք, որ բաժանման պրոցեսում կորցրել ենք $y'+1=0\Rightarrow y=-x+c$ և $y=0$ լուծումները: Ինտեգրելով $\dfrac{dy}{c_1y-1}=dx$ հավասարումը, կստանանք՝

$$ln|c_1y-1|=lnc_2+c_1x\Rightarrow c_1y-1=c_2e^{c_1x};y=c-x;y=0:$$

4. $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ հավասարման կարգը մեկով կիջնի, եթե F ֆունկցիան համասեռ է y- ի և նրա ածանցյալների նկատմամբ: Այսինքն՝ $F\left(x,ty,ty',...,ty^{(n)}\right)=t^{\alpha}F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$ $\left(t>0\right)$: Այս դեպքում, $\dfrac{y'}{y}=z\left(x\right)$ $\left(y'=yz,y''=y'z+yz'=y\left(z'+z^2\right)\right)$,...:

y փոփոխականից "ազատվում ենք" շնորհիվ $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$ ֆունկցիայի համասեռության:

Օրինակ 4.4: Լուծել $xyy''+xy'^2-2yy'=0$ հավասարումը: Այս հավասարման ձախ մասը երկրորդ կարգի համասեռ ֆունկցիա է y,y',y'' փոփոխականների նկատմամբ: Նախ նկատենք, որ հավասարումն ունի $y\equiv0$ լուծում: Այնուհետև, համարելով, որ $y\left(x\right)\neq0$, անցնենք նոր $z(x) \equiv \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ որոնելի ֆունկցիայի: Այստեղից ստանում ենք՝

$y' \equiv y \cdot z \Rightarrow y'' \equiv y' \cdot z + y \cdot z' \Rightarrow y'' \equiv y\left(z' + z^2\right)$: Տեղադրելով հավասարման մեջ և կրճատելով y^2 - ով, կստանանք՝

$$x\left(z' + z^2\right) + xz^2 - 2z = 0 \Rightarrow xz' + 2xz^2 - 2z = 0$$

(Բեռնուլիի հավասարումը): Նկատենք, որ $z \equiv 0 \Rightarrow y' \equiv 0 \Rightarrow y \equiv c$ լուծում է: Այժմ, համարելով, որ $z(x) \neq 0$ և բաժանելով հավասարման երկու կողմը z^2 վրա, անցնենք $u \equiv \dfrac{1}{z}$ փոփոխականի, կստանանք գծային $xu' + 2u = 2x$ հավասարումը: Նախ լուծենք համասեռ $\dfrac{du}{u} = -2\dfrac{dx}{x}$ հավասարումը, կստանանք՝ $u_0 = \dfrac{c}{x^2}$: Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք $u_1 \equiv ax$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝ $u_1 \equiv \dfrac{2}{3}x$: Այսպիսով՝

$$u(x) \equiv \frac{c}{x^2} + \frac{2}{3}x \Rightarrow z(x) \equiv \frac{x^2}{c + \frac{2}{3}x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} \equiv \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{2}{3}x^3 + c\right)}{\frac{2}{3}x^3 + c} \Rightarrow y(x) \equiv c_1\left(\frac{2}{3}x^3 + c\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) \equiv c_3\left(x^3 + \tilde{c}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^2 \equiv c_1 x^3 + c_2:$$

Նկատենք, որ ստացված լուծման մեջ պարունակվում են $y(x) \equiv 0$ և $y(x) \equiv c$ լուծումները:

V. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԸ, ՆՐԱ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանենք հետևյալ օպերատորը՝

$L[y](x) \equiv y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x) y(x)$,

որտեղ $p_k(x)$ գործակիցները նախապես տրված իրական արժեքանի ֆունկցիաներ են՝ $p_k \in C[a;b]$ $(k = 1,...,n)$: Քանի որ ածանցման օպերատորը գծային է, ապա պարզ է որ գծային է նաև L օպերատորը՝ $L[\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2](x) = \alpha \cdot L[y_1](x) + \beta \cdot L[y_2](x)$, որտեղ α - ն և β - ն հաստատուններ են, իսկ $y_1(x)$ - ը և $y_2(x)$ - ը n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են $[a;b]$ - ում:

$$L[y](x) = f(x)$$

$$(y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + ... p_n(x) y(x) = f(x)) \qquad (1.1)$$

հավասարումը, որտեղ $f \in C[a;b]$ կոչվում է n կարգի գծային, **ոչ համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում**:

$$L[y](x) = 0 \qquad (1.2)$$

հավասարումը կոչվում է n կարգի **գծային, համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում**:

Համասեռ (1.2) հավասարման լուծումների բազմությունը նշանակենք Λ - ով: Քանի որ L օպերատորը գծային է, ապա պարզ է, որ Λ - ն գծային տարածություն է: Հետագայում ցույց կտանք, որ այն n - չափանի է: Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 1.1: Դիցուք $y(x) = u(x) + i \cdot v(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.2) հավասարման լուծում $[a;b]$ - ում, $u(x), v(x)$ ֆունկցիաները իրական արժեքանի են, i - ն կեղծ միավորն է: Այդ դեպքում $y(x)$

լուծման իրական և կեղծ մասերը՝ $u(x), v(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են (1.2) – ի լուծումներ՝

$$L[u](x) \equiv 0, L[v](x) \equiv 0 \ (x \in [a;b]):$$

Ապացուցում: Քանի որ L օպերատորը գծային է և $p_k(x)$ գործակիցները իրական արժեքանի են, ապա՝

$$0 \equiv L[u + i \cdot v](x) \equiv L[u](x) + i \cdot L[v](x) \Rightarrow L[u](x) \equiv 0$$

$$\text{և } L[v](x) \equiv 0: \ \blacksquare$$

2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԲԵՐՈՒՄԸ ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆԸ

Լեմմա 2.1 (բազմապատիկ ինտեգրալի բերումը միապատիկի):

Դիցուք $f \in C[a;b]$: Ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը, որը կապում է n – պատիկ ինտեգրալը միապատիկի հետ՝

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \ \ (n = 2,3,\ldots), x \in [a;b] \tag{2.1}$$

Ապացուցում: Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Նախ ստուգենք, որ (2.1) – ը ճիշտ է, երբ $n = 2$: Այսինքն՝

$$\int_a^x dt \int_a^t f(s)ds = \int_a^x (x-t) f(t)dt : \tag{2.2}$$

Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա՝

$$F_t(s) = \begin{cases} f(s), a \le s \le t \\ 0, t < s \le x \end{cases}:$$

Այդ դեպքում՝

$$\int_a^x dt\int_a^t f(s)\,ds = \int_a^x dt\int_a^x F_t(s)\,ds = \int_a^x ds\int_a^x F_t(s)dt = \int_a^x ds\int_s^x f(s)dt =$$

$$= \int_a^x f(s)\,ds\int_s^x dt = \int_a^x f(s)(x-s)\,ds = \int_a^x (x-t)\,f(t)\,dt :$$

Այսպիսով, (2.2) – ը ապացուցված է: ■

Դիտողություն 2.1: Նկատենք, որ (2.2) – ը դուրս բերելու ընթացքում եկանք ավելի ընդհանուր փաստի. եթե $f(s,t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $C([a;b]\times[a;b])$ - ում, ապա՝

$$\int_a^x dt\int_a^t f(s,t)\,ds = \int_a^x ds\int_s^x f(s,t)\,dt : \qquad (2.3)$$

Այժմ ենթադրենք, (2.1) – ը ճիշտ է n - ի համար, ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $n+1$ դեպքում: Այսինքն, ճշմարիտ է՝

$$\int_a^x dt_1\int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (t-x)^{n-1} f(t)\,dt :$$

Պետք է ապացուցել, որ

$$\int_a^x dt_1\int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt = \frac{1}{n!}\int_a^x (t-x)^n f(t)\,dt \;\; (n=2,3,\ldots):$$

Բայց՝

$$\int_a^x dt_1\int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt = \int_a^x g(t_1)\,dt_1 ,$$

որտեղ՝

$$g(t_1) = \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt :$$

Ըստ (2.3) – ի՝

$$g(t_1) \equiv \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{t_1} (t_1-t)^{n-1} f(t)dt :$$

Այսպիսով, օգտվելով նաև (2.2) – ից ստանում ենք՝

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-1} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)dt \int_t^x (t_1 - t)^{n-1} dt_1 = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)dt : \blacksquare$$

Վերադառնանք նորից

$$L[y](x) = f(x) \tag{2.4}$$

հավասարմանը, որտեղ՝ $p_k \in C[a;b]$ $(k = 1,\ldots,n), f \in C[a;b]$:

Վերցնենք $\forall x_0 \in [a;b]$ և դիտարկենք հետևյալ սկզբնական պայմանները՝

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} : \tag{2.5}$$

Թեորեմ 2.1: (2.4), (2.5) Կոշիի խնդիրը համարժեք է հետևյալ Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարմանը՝

$$z(x) = \int_{x_0}^x K(x,t) z(t)dt + F(x) \quad \left(z \in C[a;b]\right): \tag{2.6}$$

Այսինքն, եթե $y(x)$- ը հանդիսանում է (2.4), (2.5) Կոշիի խնդրի լուծում $C^n[a;b]$ դասում, ապա $z(x)$ - ը ($y^{(n)}(x) \equiv z(x)$, $z \in C[a;b]$) հանդիսանում է (2.6) ինտեգրալ հավասարման լուծում, որտեղ՝

$$K(x,t) \equiv -\sum_{i=1}^n p_i(x) \frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}, \tag{2.7}$$

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n p_i(x) \sum_{k=1}^i y_{n-k} \frac{(x-x_0)^{i-k}}{(i-k)!} : \tag{2.8}$$

և հակառակը՝ եթե $z(x)$ - ը հանդիսանում է (2.6) – ի լուծում, որտեղ $K(x,t)$ կորիզը և $F(x)$ ազատ մասը որոշվում են (2.7), (2.8) բանաձևերով, ապա $y(x)$ - ը, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$y(x) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} z(t)\,dt + y_0 + y_1(x-x_0) + \ldots +$$

$$+y_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.9}$$

հանդիսանում է (2.4), (2.5) Կոշիի խնդրի լուծում: Ընդ որում պարզ է, որ՝ $K \in C(\Delta)$, $\Delta = \{(x,t); a \le x \le b, a \le t \le x\}$, $F \in C[a;b]$:

Ապացուցում: Դիցուք $y(x)$ - ը $(x \in [a;b])$ հանդիսանում է (2.4), (2.5) Կոշիի խնդրի լուծում: Ներմուծենք նշանակում՝ $y^{(n)}(x) \equiv z(x)$ $(x \in [a;b])$: Ցույց տանք, որ $z(x)$ - ը հանդիսանում է (2.6) ինտեգրալ հավասարման լուծում $C[a;b]$ դասում: Ինտեգրելով $y^{(n)}(t) \equiv z(t)$ $(t \in [a;b])$ նույնությունը x_0 - ից x սահմաններում և հաշվի առնելով (2.5) - ը, կստանանք՝

$$\int_{x_0}^{x} \left(y^{(n-1)}\right)'(t)\,dt \equiv \int_{x_0}^{x} z(t)\,dt \Rightarrow y^{(n-1)}(x) \equiv \int_{x_0}^{x} z(t)\,dt + y_{n-1}:$$

Նորից ինտեգրելով ստացված նույնությունը և հաշվի առնելով (2.1) -ը, կունենանք՝ $y^{(n-2)}(x) \equiv \int_{x_0}^{x} (x-t) z(t)\,dt + y_{n-2} + y_{n-1}(x-x_0)$:

Շարունակելով ինտեգրման պրոցեսը, կստանանք՝

$$y^{(n-3)}(x) \equiv \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^2 z(t)\,dt + y_{n-3} + y_{n-2}(x-x_0) +$$

$$+y_{n-1}\frac{(x-x_0)^2}{2!}, \ldots,$$

$$y(x) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} z(t)\,dt + y_0 + y_1(x-x_0) + \ldots +$$

$$+y_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{(ստացանք (2.9) – ը):}$$

Տեղադրելով ստացվածը (2.4) հավասարման մեջ, կստանանք որ $y^{(n)}(x)\equiv z(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.6) ինտեգրալ հավասարմանը (տես նաև (2.7), (2.8)):

Դիցուք այժմ հակառակը՝ $z(x)$ - ը հանդիսանում է (2.6) ինտեգրալ հավասարման լուծում $C[a;b]$ դասում, իսկ $y(x)$ - ը որոշվում է (2.9) բանաձևով: Պարզ է, որ $y(x_0)=y_0$: n անգամ ածանցելով (2.9) – ը հեշտ է ստուգել, որ $y(x)$ - ը բավարարում է թե (2.4) հավասարմանը, թե (2.5) սկզբնական պայմաններին: ■

Թեորեմ 2.2: Վոլտերայի (2.6) ինտեգրալ հավասարումը, երբ նրա կորիզը՝ $K\in C(\Delta)$ և ազատ մասը՝ $F\in C[a;b]$, ունի լուծում և այն միակն է $C[a;b]$ դասում:

Թեորեմի ապացույցը տես ինտեգրալ հավասարումներ բաժնում:

Դիտարկենք հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝ գտնել $L[y](x)=f(x)$ հավասարման ($p_k\in C[a;b]$ $(k=1,\dots,n)$, $f\in C[a;b]$) այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ սկզբնական պայմաններին՝

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0^{(1)},\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\left(x_0\in[a;b]\right):$$

Թեորեմ 2.3 (գոյության և միակության): Վերը նշված Կոշիի խնդիրը ունի լուծում և այն միակն է $C[a;b]$ դասում:

Թեորեմի ապացուցը բխում է նախորդ դատողություններից:

3. ԳԾՈՐԵՆ ԱՆԿԱԽ ԵՎ ԿԱԽՅԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ: ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳ: ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Սահմանում 3.1: $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն անկախ X միջակայքում, եթե

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)\equiv 0 \qquad (x\in X)$$

նույնությունից հետևում է՝ $c_1=c_2=\dots=c_n=0$:

Սահմանում 3.2: $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն կախյալ X միջակայքում, եթե նրանք գծորեն անկախ չեն, այսինքն՝ ճշմարիտ է

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x)\equiv 0 \quad (x\in X)$$

նույնությունը, երբ ոչ բոլոր c_k հաստատուններն են հավասար զրոյի:

Օրինակ 3.1: Ապացուցել,որ $1, x, x^2,..., x^n$ $(n\in N)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են կամայական X միջակայքում: Դիցուք հակառակն է՝ առկա է

$c_0 1+c_1x^1+...+c_nx^n\equiv 0$ $(x\in X)$ նույնությունը, բայց՝

$c_k\neq 0, c_{k+1}=...=c_n=0$ $(k\leq n)$: Այսինքն՝

$P_k(x)=c_0 1+c_1x^1+...+c_kx^k$ k-րդ կարգի բազմանդամը նույնաբար զրո է X - ում (ունի անվերջ քանակությամբ զրոներ), որը հակասում է հանրաշվից հայտնի փաստի՝ k-րդ կարգի բազմանդամն ունի ճիշտ k հատ զրոներ, հաշվի առած և կոմպլեքս արմատները և արմատի պատիկությունը: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը:

Օրինակ 3.2: Ապացուցել, որ $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},..., e^{\lambda_n x}$ $(\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են կամայական X միջակայքում (λ_j - երը, ընդհանրապես ասած, կոմպլեքս թվեր են):

Դիցուք ճիշտ է հակառակը, ունենք՝

$$c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+...c_ne^{\lambda_n x}\equiv 0 \quad (x\in X)$$

նույնությունը, բայց (որոշակիության համար) $c_n\neq 0$: Այդ նույնության երկու կողմը բաժանելով $e^{\lambda_1 x}$ – ի վրա և ստացված նոր նույնությունը ածանցելով, կստանանք՝

$c_2(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+...+c_n(\lambda_n-\lambda_1)e^{(\lambda_n-\lambda_1)x}\equiv 0$: Այս պրոցեսը (էքսպոնենտի վրա բաժանելու և ածանցելու) շարունակենք $n-1$ անգամ: Արդյունքում կստանանք՝

$$c_n(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)...(\lambda_n-\lambda_{n-1})e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x}\equiv 0:$$

Ստացվեց հակասություն, որն էլ ապացուցեց պնդումը:

Օրինակ 3.3: Դիցուք $y_1(x)\equiv 0$, իսկ $y_2(x),...,y_n(x)$ կամայական ֆունկցիաներ են, որոշված ինչ-որ X միջակայքում: Ապացուցենք, որ այս ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են: Իրոք, վերցնելով $c_1=1, c_2=...=c_n=0$, կստանանք՝

$$1\cdot 0+0\cdot y_2(x)+...+0\cdot y_n(x)\equiv 0\ \ (x\in X):$$

Խնդիր 3.1: Ապացուցել, որ եթե $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են X միջակայքում և X_1 միջակայքը պարունակվում է X - ում, ապա պարտադիր չէ, որ այդ ֆունկցիաները լինեն գծորեն անկախ X_1 միջակայքում:

Բերենք հետևյալ օրինակը՝ $y_1(x)\equiv x,\ \ y_2(x)\equiv |x|\ \ (x\in[-1;1])$: Այս ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[-1;1]$ հատվածում: Իրոք, դիցուք $c_1x+c_2|x|\equiv 0\ \ (x\in[-1;1])$:

Տալով x - ին $1,-1$ արժեքներ, կստանանք՝ $c_1+c_2=0,\ \ c_1-c_2=0$ $\Rightarrow c_1=c_2=0$: Եթե այդ ֆունկցիաները դիտարկենք $[0;1]$ հատվածում, ապա այդտեղ նրանք համընկնում են և, ուրեմն գծորեն կախյալ են:

Ֆունկցիաների գծորեն անկախ (կախյալ) լինելու հարցում կարևոր դեր ունի Վրոնսկիի որոշիչը, որը $n-1$ անգամ դիֆերենցելի $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\ \ (x\in X)$ ֆունկցիաների համար սահմանվում է, հետևյալ կերպ՝

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix} y_1(x) & ...... & y_n(x)\\ y_1'(x) & ...... & y_n'(x)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}:$$

Թեորեմ 3.1: Եթե $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\ \ \left(y_k\in C^{(n-1)}(X)\right)$ ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են X միջակայքում, ապա նրանց Վրոնսկիի որոշիչը՝ $W(x)\equiv 0\ \ (x\in X)$:

Ապացուցում: Դիցուք, հակառակը՝ $\exists x_0 \in X, W(x_0) \neq 0$: Ունենք նույնություն $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0$, որտեղ ոչ բոլոր գործակիցներն են զրո: Ածանցելով $n-1$ անգամ այդ նույնությունը և այնուհետև տեղադրելով $x = x_0$, կստանանք հետևյալ համակարգը $c_1, \ldots, c_n$ – ի նկատմամբ՝

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \quad \ldots \quad + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \quad \ldots \quad + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Այս համակարգի գլխավոր որոշիչը՝ $\Delta = W(x_0) \neq 0$: Որեմն այն ունի միայն զրոյական լուծում, որը հակասում է այդ ֆունկցիաների գծորեն կախյալ լինելուն: ■

Հետևանք 3.1: Թեորեմից հետևում է, որ եթե ինչ – որ ֆունկցիաների Վրոնսկիի որոշիչը միջակայքի ինչ – որ կետում զրո չէ, ապա այդ միջակայքում նրանք գծորեն անկախ են:

Նկատենք որ, ընդհանրապես ասած հակառակը սխալ է, այսինքն, ֆունկցիաները կարող են լինել գծորեն անկախ, բայց նրանց Վրոնսկիի որոշիչը լինի նույնաբար զրո: Օրինակ, կառուցենք հետևյալ երկու ֆունկցիաները՝

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1;0] \\ 0, & x \in [0;1] \end{cases}, \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \\ x^2, & x \in [0;1] \end{cases}:$$

Պարզ է որ՝

$$y_1'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-1;0] \\ 0, & x \in [0;1] \end{cases}, \; y_2'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \\ 2x, & x \in [0;1] \end{cases}:$$

Այս ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[-1;1]$ հատվածում: Իրոք, եթե $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0 \; (x \in [-1;1])$ նույնության մեջ վերցնենք $x = \pm 1$, կստանանք՝ $c_2 = 0, c_1 = 0$: Հաշվենք այս ֆունկցիաների Վրոնսկիի որոշիչը՝ $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$:

Եթե $x\in[-1;0]$, ապա՝ $W(x)=\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix}=0$, իսկ եթե $x\in[0;1]$, ապա՝ $W(x)=\begin{vmatrix}0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}=0$: Այսպիսով՝ $W(x)\equiv 0\ (x\in[-1;1])$:

Սակայն, որոշ լրացուցիչ պայմանների առկայությամբ, թեորեմ 3.1 – ը հակադարձելի է: Ավելի ստույգ, ճշմարիտ է հետևյալը պնդումը:

Թեորեմ 3.2: Դիցուք $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ $\left(y_k\in C^{(n)}[a;b]\right)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a;b]$ հատվածում և հանդիսանում են $L[y](x)=0$ գծային անընդհատ գործակիցներով ($p_k\in C[a;b]$) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ: Այդ դեպքում՝
$\forall x\in[a;b]\ :\ W(x)\neq 0$:

Ապացուցում: Դիցուք հակառակը՝ $\exists x_0\in[a;b]\ :\ W(x_0)=0$: Դիտարկենք հետևյալ համակարգը $c_1,\dots,c_n$ գործակիցների նկատմամբ՝

$$\begin{cases}c_1y_1(x_0)+\ \dots\ +c_ny_n(x_0)=0\\ c_1y_1'(x_0)+\ \dots\ +c_ny_n'(x_0)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases}:$$

Քանի որ այս համակարգի գլխավոր որոշիչը՝ $\Delta=W(x_0)=0$, ապա այն ունի նաև ոչ զրոյական $\overline{c}_1,\dots,\overline{c}_n$ լուծում: Ներմուծենք ֆունկցիա՝ $\overline{y}(x)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{c}_ky_k(x)$, որն ակնհայտորեն բավարարում է $L[y](x)=0$ հավասարմանը և $\overline{y}(x_0)=0,\ \overline{y}'(x_0)=0,\dots,\ \overline{y}^{(n-1)}(x_0)=0$ պայմաններին: Բայց ակնհայտ է նաև, որ նույն հավասարմանը և պայմաններին բավարարում է $z(x)\equiv 0$ ֆունկցիան: Ըստ գոյության և միակության 2.3 թեորեմի՝ $\overline{y}(x)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{c}_ky_k(x)\equiv 0$, Բայց ոչ բոլոր $\overline{c}_k$ – են զրո, որն հակատում է $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ ֆունկցիաների գծորեն անկախությանը: ■

Սահմանում 3.3: $L[y](x)=0$ հավասարման գծորեն անկախ $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ լուծումները բազմությունը կոչվում է այդ հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Թեորեմ 3.3: Անընդհատ գործակիցներով ($p_k \in C[a;b]$) $L[y](x)=0$ գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը ունի լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Ապացույց: Դիցուք $A=\|a_{ij}\|_{ij=1}^{n}$ - ն ինչ-որ մատրից է, որի որոշիչը՝ $detA \neq 0$ (օրինակ միավոր մատրից): Նշանակենք $y_1(x)$ - ով $L[y](x)=0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ $y_1(x_0)=a_{11}, y_1'(x_0)=a_{21},..., y_1^{(n-1)}(x_0)=a_{n1}$:

Այդպիսի ֆունկցիա գոյություն ունի ըստ գոյության և միակության 2.3 թեորեմի: Նշանակենք $y_2(x)$ - ով $L[y](x)=0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$y_2(x_0)=a_{12}, y_2'(x_0)=a_{22},..., y_2^{(n-1)}(x_0)=a_{n2}$:

Այդպես շարունակելով, ի վերջո $y_n(x)$- ով նշանակենք $L[y](x)=0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ $y_n(x_0)=a_{1n}, y_n'(x_0)=a_{2n},..., y_n^{(n-1)}(x_0)=a_{nn}$

Քանի որ այս ֆունկցիաների Վրոնսկիի որոշիչը x_0 կետում համընկնում է $detA$ - ի հետ, որը զրո չէ, ուստի նրանք գծորեն անկախ են, այսինքն կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ: ■

Դիտողություն 3.1: Քանի որ լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի կառուցումը կապվեց ոչ զրոյական որոշիչ ունեցող մատրիցի հետ, իսկ այդպիսիք անվերջ են, ուրեմն կա անվերջ քանակությամբ լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Թեորեմ 3.4: Համասեռ $L[y](x)=0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$, որտեղ $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են նույն հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք որ ցանկացած c_k հաստատունների դեպքում $y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ հանդիսանում է $L[y](x)=0$ հավասարման լուծում:

Իրոք՝

$$L[y_0](x) \equiv L\left[\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right](x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k L[y_k](x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 0 \equiv 0:$$

Դիցուք այժմ $z(x)$ - ը հանդիսանում է $L[y](x)=0$ հավասարման որևէ լուծում: Վերցնենք $\forall x_0 \in [a;b]$ և ներմուծենք նշանակումներ՝ $z(x_0)=z_0, z'(x_0)=z_0^{(1)},..., z^{(n-1)}(x_0)=z_0^{n-1}$: Պահանջենք, որ $y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ լուծումը բավարարի նույն սկզբնական պայմաններին ինչ $z(x)$ - ը՝ $y_0(x_0)=z_0, y_0'(x_0)=z_0^{(1)},..., y_0^{(n-1)}(x_0)=z_0^{n-1}$: Այսինքն՝

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0)+ \quad ... \quad + c_n y_n(x_0) \equiv z_0 \\ c_1 y_1'(x_0)+ \quad ... \quad + c_n y_n'(x_0) \equiv z_0^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+...+c_n y_n^{(n-1)}(x_0) \equiv z_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Քանի որ այս համակարգի գլխավոր որոշիչը համընկնում է $W(x_0)$ $(W(x_0) \neq 0)$ Վրոնսկիի որոշիչի հետ, ապա համակարգն ունի միակ $\bar{c}_1,...,\bar{c}_n$ լուծում: Եթե նշանակենք՝ $\bar{y}(x)=\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k y_k(x)$, ապա $\bar{y}(x)$ և $z(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են միևնույն $L[y](x)=0$

հավասարման լուծումներ, բավարարող միևնույն սկզբնական պայմաններին, ուստի, ըստ գոյության և միակության թեորեմի նրանք համընկնում են, այսինքն՝ $z(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k y_k(x)$: ■

Դիտողություն 3.2: Թեորեմ 3.4 – ից հետևում է որ $L[y](x)=0$ հավասարման լուծումների Λ տարածությունը, վերը նշված պայմանների առկայությամբ n - չափանի գծային տարածություն է, որի բազիսն է հանդիսանում լուծումների ֆունդամենտալ համակարգը:

Թեորեմ 3.5: Ոչ համասեռ $L[y](x)=f(x)$ հավասարման, ($p_k \in C[a;b]$ $(k=1,...,n), f \in C[a;b]$) ընդհանուր լուծումն իրենից ներկայացնում է համասեռ $L[y](x)=0$ հավասարման ընդհանուր լուծման և ոչ համասեռի որևէ մասնավոր $\overline{y}(x)$ լուծման գումար՝

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)+\overline{y}(x),$$

որտեղ $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են համասեռ հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Ապացուցում: Մի կողմը ակնհայտ է՝ կամայական c_k հաստատունների դեպքում՝

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} c_k y_k+\overline{y}(x)\right](x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k L[y_k](x)+L[\overline{y}](x) \equiv f(x):$$

Դիցուք, այժմ $z(x)$ - ը ոչ համասեռ հավասարման կամայական լուծում է՝ $L[z](x) \equiv f(x)$: Այդ դեպքում պարզ է, որ $\varphi(x) \equiv z(x)-\overline{y}(x)$ հանդիսանում է համասեռ հավասարման լուծում՝

$$L[z-\overline{y}](x) \equiv L[z](x)-L[\overline{y}](x) \equiv f(x)-f(x) \equiv 0:$$

Համաձայն նախորդ թեորեմի,

$$\exists \overline{c}_1,...,\overline{c}_n \ : \ z(x)-\overline{y}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k y_k(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) \equiv \overline{y}(x)+\sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k y_k(x): ■$$

Հարց է առաջանում, ըստ համասեռ հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի ինչպես գտնել ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը: Այստեղ, ինչպես առաջին կարգի հավասարման դեպքում գործում է **հաստատունների փոփոխարկման (վարիացիայի) մեթոդը**:

Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$z(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x), \tag{3.1}$$

որտեղ $c_k(x)$ - րը նոր որոնելի ֆունկցիաներ են: Հարկավոր է n անգամ ածանցել և տեղադրել $L[y](x) = f(x)$ հավասարման մեջ: Կստացվի մեկ հավասարում n անհայտով: Ուստի կարող ենք պահանջել, որ տեղի ունենան ևս (հարմար) $n-1$ պայմաններ: Այնպես վարվենք, որ $c_k(x)$ - րը ածանցվեն միայն մեկ անգամ: Ունենք՝

$$z'(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k'(x):$$

Պահանջենք, որ՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k(x) \equiv 0 :$$

Այդ դեպքում՝

$$z'(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z''(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k'(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k''(x):$$

Նորից պահանջենք, որ՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k'(x) \equiv 0:$$

Այսպես շարունակելով $n-1$ քայլին կունենանք՝

$$z^{(n-1)}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{(n-1)}(x):$$

Պահանջենք, որ՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) \equiv 0:$$

Ի վերջո կունենանք՝

$$z^{(n)}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{(n)}(x):$$

Տեղադրենք ստացվածը

$$z^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) z^{(n-k)}(x) \equiv f(x)$$

հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{(n)}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} p_k(x) \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j^{(n-k)}(x) \equiv f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) (y_k^{(n)}(x) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} p_j(x) y_k^{(n-j)}(x)) \equiv f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) L[y_k](x) \equiv f(x):$$

Քանի որ $\forall k \ : \ L[y_k](x) \equiv 0$, ապա ի վերջո, ստանում ենք՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) \equiv f(x):$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ համակարգը $c_k'(x)$ - ի նկատմամբ՝

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k(x)=0\\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k'(x)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-2)}=0\\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-1)}=f(x)\end{cases} \qquad 3.2)$$

$c_k'(x)$ - ի նկատմամբ՝ (3.2) համակարգի գլխավոր որոշիչը համնկնում է $y_1(x),\dots,y_n(x)$ գծորեն անկախ լուծումների $W(x)\neq 0$ Վրոնսկիի որոշիչի հետ: Այդ պատճառով (3.2) – ը ունի միակ անընդհատ լուծում՝ $(c_1'(x),\dots,c_n'(x))$: Պարզ է, որ $c_k'(x)$ - ը հավասար է երկու անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված որոշիչների հարաբերությանը, ընդ որում հայտարարում $W(x)$ - ն է, որը զրո չէ

$$c_k'(x)\equiv g_k(x)\equiv\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(x)\dots & 0 & \dots & y_n(x)\\ y_1'(x)\dots & 0 & \dots & y_n'(x)\\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\\ y_1^{(n-1)}(x)\dots & f(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad k$$

$$c_k(x)\equiv\int g_k(x)dx+\overline{c}_k\ \ (k=1,\dots,n),$$

որտեղ $\overline{c}_k$ - ն հաստատուն է: Տեղադրելով (3.1) – ի մեջ, կստանանք՝

$$z(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{c}_k y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int g_k(x)dx:$$

Նկատենք, որ թեպետ որոնում էինք ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծում, բայց ստացանք այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

4. ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՈՒՄԸ ԸՍՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ

Դիցուք տրված են $y_1(x),...,y_n(x)$ $\left(y_k \in C^n[a;b]\right)$, որոնք գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում: Դնենք մեր առջև հետևյալ խնդիրը՝ որն է այն գծային հավասարումը, որի համար այդ ֆունկցիաները կհանդիսանան լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ: Ճշմարիտ են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 4.1 (միակություն): Դիցուք $y_1(x),...,y_n(x)$ $\left(y_k \in C^n[a;b]\right)$ գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում: Այն n կարգի գծային, համասեռ, անընդհատ գործակիցներով (ավագ ածանցյալի գործակիցը հավասար մեկի) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի համար նշված ֆունկցիաները կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ միակն է:

Ապացույցում: Դիցուք հակառակը՝ գոյություն ունեն երկու տարբեր այդպիսի հավասարումներ՝

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)=0 \ \left(p_k \in C[a;b]\right), \tag{4.1}$$

$$y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+...+q_n(x)=0 \ \left(q_k \in C[a;b]\right), \tag{4.2}$$

որոնց համար $y_k(x)$ $(k=1,...,n)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է լուծում: Հետևաբար, նրանք բավարարում են նաև

$$r_1(x)y^{(n-1)}+...+r_n(x)=0, \tag{4.3}$$

որտեղ՝ $r_k(x) \equiv p_k(x)-q_k(x)$; $p_k, q_k \in C[a;b]$ $(k=1,...,n)$: Դիցուք՝ $r_1(x) \equiv r_2(x) \equiv ... \equiv r_{m-1}(x) \equiv 0$, իսկ $r_m(x)$ $(1 \le m < n)$ նույնաբար զրո չէ $[a;b]$ - ում: Այսինքն՝ $\exists x_0 \in [a;b]$ $: r_m(x_0) \neq 0$: Քանի որ $r_m(x)$ անընդհատ է $[a;b]$ - ում, ապա՝ $\exists [a_1;b_1] \subset [a;b]$, $\forall x \in [a_1;b_1]$ $: r_m(x) \neq 0$: Դիտարկենք (4.3) – ը (այն ընդունել է հետևյալ տեսքը՝ $r_m(x)y^{(n-m)}+...+r_n(x)=0$) $[a_1;b_1]$ միջակայքում և բաժանենք նրա երկու կողմը $r_m(x)$ - ի վրա, կստանանք՝

$$y^{(n-m)}+s_{m+1}(x)y^{(n-m-1)}+\ldots+s_n(x)=0\left(x\in[a_1;b_1]\right), \qquad (4.4)$$

որտեղ՝ $s_k(x)\equiv\dfrac{r_k(x)}{r_m(x)}\in C[a_1;b_1]\ (k=m+1,..,n)$: Քանի որ $\forall x\in[a;b]\ :\ W(x)\neq 0$, ապա՝ $\forall x\in[a_1;b_1]\ :\ W(x)\neq 0$: Ուրեմն $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ n հատ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a_1;b_1]$ - ում և բավարարում են n - ից ցածր կարգ ունեցող անընդհատ գործակիցներով (4.4) հավասարմանը: Ստացանք հակասություն: ■

Թեորեմ 4.2 (գոյությունը): Դիցուք $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ $\left(y_k\in C^n[a;b]\right)$ գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում և նրանց Վրոնսկիի $W(x)$ որոշիչը $[a;b]$ միջակայքի ոչ մի կետում զրո չէ: Այդ դեպքում n կարգի գծային, համասեռ, անընդհատ գործակիցներով (ավագ ածանցյալի գործակիցը հավասար մեկի) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի համար նշված ֆունկցիաները կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots\ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & \ldots\ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix}=0: \qquad (4.5)$$

Այստեղ նշված որոշիչը պետք է բացել ըստ վերջին սյան, ընդ որում $y^{(n)}(x)$ - ի հանրահաշվական լրացումը հենց Վրոնսկիի որոշիչն է, ուստի, $y^{(n)}(x)$ գործակիցը հավասար է մեկի: Եթե (4.5) – ի մեջ տեղադրենք $y(x)$- ի փոխարեն $y_1(x)$ - ը, ապա այդ որոշիչի առաջին և վերջին սյուները կհամընկնեն, ուստի այն կհավասարվի նույնաբար զրոյի: Նույն կերպ համոզվում ենք, որ այդ հավասարմանը բավարարում են նաև $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ ֆունկցիաները: ■

5. ԼԻՈՒՎԻԼ – ՕՍՏՐՈԳՐԱԴՍԿՈՒ ԲԱՆԱՁԵՎԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է X միջակայքում դիֆերենցելի ֆունկցիաներից կազմված որոշիչ՝

$$A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}:$$

Լեմմա 5.1: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ, ճիշտ է որոշիչի ածանցման հետևյալ կանոնը՝

$$A'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x)\ldots a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x)\ldots a'_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n1}(x)\ldots a'_{nn}(x) \end{vmatrix}: \tag{5.1}$$

Ապացուցում: Ըստ մատրիցի որոշիչի սահմանման՝

$$A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}, \tag{5.2}$$

որտեղ գումարը տարածվում է ըստ բոլոր հնարավոր $i_1\ldots i_n$ տեղափոխությունների, իսկ $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ գործակիցները հավասար են մեկի, երբ կարգախախտումների (ինվերսիաների) թիվը զույգ է և մինուս մեկի, երբ կարգախախտումների թիվը կենտ է: Ըստ արտադրյալի ածանցման կանոնի ստանում ենք՝

$$A'(x)=\sum_{i_1\dots i_n}\varepsilon_{i_1\dots i_n}a'_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}+$$
$$+\sum_{i_1\dots i_n}\varepsilon_{i_1\dots i_n}a_{1i_1}\cdot a'_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}+\ldots+\sum_{i_1\dots i_n}\varepsilon_{i_1\dots i_n}a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a'_{ni_n}:$$

Նորից օգտվելով (5.2) որոշիչը բացելու կանոնից, ստանում ենք (5.1) – ը: ■

Թեորեմ 5.1: Դիցուք տրված են՝

$y_1(x),\dots,y_n(x)\left(y_k\in C^n[a;b],\ k=1,\dots,n\right)$ ֆունկցիաներ, որոնք հանդիսանում են

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0\ \left(p_k\in C[a;b]\right) \tag{5.3}$$

հավասարման լուծումներ և $W(x)$ - ը նրանց Վրոնսկիի որոշիչն է: Ճշմարիտ է հետևյալ Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու բանաձևը՝

$$W(x)=ce^{-\int p_1(x)dx}, \tag{5.4}$$

որտեղ c - ն հաստատուն է:

Ապացուցում: Ածանցենք Վրոնսկիի որոշիչը, կիրառելով լեմմա 5.1 – ը, կստանանք՝

$$W'(x)\equiv\begin{vmatrix} y_1'(x) & \dots & y_n'(x)\\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x)\\ y_1''(x) & \dots\dots & y_n''(x)\\ y_1''(x) & \dots\dots & y_n''(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}:$$

Ստացված որոշիչները, բացի վերջինը զրո են, քանի որ ունեն կրկնվող տողեր: Վերջին որոշիչի մեջ (5.3) - ից տեղադրելով $y_k^{(n)}(x)$ - ը և վերածելով այն գումարի, կստանանք՝

$$W'(x) \equiv -p_1(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots\dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} -$$

$$-p_2(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots\dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix} - \dots - p_n(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots\dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}:$$

Ստացված որոշիչների մեջ առաջինը Վրոնսկիի որոշիչն է, իսկ մյուսները զրո են, քանի որ նրանց մեջ կան կրկնվող տողեր: Այսպիսով, ստացանք՝ $W'(x) = -p_1(x)W(x)$: Ինտեգրելով այս հավասարումը ստանում ենք (5.4) – ը: ■

Դիտողություն 5.1: Պարզ է, որ Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու (5.4) բանաձևը կարելի է նաև ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt} \quad \left(x_0 \in [a;b]\right): \tag{5.5}$$

Հետևանք 5.1: Եթե Վրոնսկիի որոշիչը $[a;b]$ հատվածի որևէ կետում զրո չէ, ապա այն ոչ մի կետում զրո չէ:

Եթե 2 -րդ կարգի հավասարման համար հաջողվում է գտնել ոչ զրոյական $y_1(x)$ մասնավոր լուծում, ապա մյուս, առաջինի հետ գծորեն անկախ լուծումը հաջողվում է գտնել Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու բանաձևի միջոցով: Իրոք, օգտվելով (5.4) – ից և վերցնելով $c=1$, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \frac{y'(x)y_1(x)-y_1'(x)y(x)}{\left(y_1(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(y_1(x)\right)^2} e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{1}{\left(y_1(x)\right)^2} e^{-\int p_1(x)dx}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_1(x) \int \frac{1}{\left(y_1(x)\right)^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx: \qquad (5.6)$$

Օրինակ 5.1: Գտնել $x^2 lnx \cdot y'' - xy' + y = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Ակնհայտ է, որ հավասարումը ունի $y_1(x) \equiv x$ մասնավոր լուծումը: Հավասարումը բաժանելով $x^2 lnx$ - ի վրա ($p_1(x)$ ճիշտ գտնելու նպատակով), կստանանք, որ

$$p_1(x) = -\frac{1}{xlnx} \quad (x>1):$$

(5.6) – ից ստանում ենք՝

$$y(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{xlnx}} dx = -x\int lnx d\frac{1}{x} = -lnx + x\int \frac{dx}{x^2} = -lnx - 1:$$

Այսպիսով, հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_0 = c_1 x + c_2 (lnx + 1):$$

Նկատենք, որ Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու բանաձևի օգնությամբ կարելի է գտնել նաև երրորդ կարգի գծային հավասարման համար լուծումների ֆունդամենտալ համակարգը, նախապես գտնելով երկու հատ գծորեն անկախ լուծումներ:

6. ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ, ՔՎԱԶԻԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԴԵՊՔԸ:

Գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի գոյությունը ապացուցված է, բայց այն կառուցելը, ընդհանրապես ասած, դժվար խնդիր է: Հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարման համար այդ խնդիրը լուծվում է: Այս դեպքում L գծային օպերատորը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$L[y](x) \equiv y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x), \tag{6.1}$$

որտեղ a_k գործակիցները իրական հաստատուններ են: Դիտարկենք համասեռ

$$L[y](x) = 0 \tag{6.2}$$

հավասարումը, որի լուծումը որոնենք՝ $y = e^{\lambda x}$ տեսքով: Տեղադրելով (6.2) – ի մեջ, կստանանք՝

$$l(\lambda) = 0, \tag{6.3}$$

որտեղ $l(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$, այն կոչվում է **բնութագրիչ բազմանդամ**, իսկ (6.3) հավասարումը՝ **բնութագրիչ հավասարում**:

Քննարկենք դեպքեր.

1. բնութագրիչ հավասարումը ունի n հատ իրարից տարբեր $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ իրական արմատներ: Այդ դեպքում ունենք n հատ $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ գծորեն անկախ լուծումներ (տես օրինակ 3.2): Այսպիսով, հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}:$$

2. արմատների մեջ կան բազմապատիկները:

Սահմանում 6.1: Կասենք, որ բնութագրիչ հավասարման համար λ_0 -ն s - պատիկ արմատ է, եթե՝ $l(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s l_1(\lambda)$, որտեղ $l_1(\lambda)$ բազմանդամը չի բաժանվում $\lambda - \lambda_0$ - ի վրա $(l_1(\lambda_0) \neq 0)$: Հաշվի առնելով արտադրյալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը հեշտ է ստանալ, որ՝

$$l(\lambda_0)=l'(\lambda_0)=\ldots=l^{(s-1)}(\lambda_0)=0, l^{(s)}(\lambda_0)\neq 0: \tag{6.4}$$

Թեորեմ 6.1: Դիցուք λ_0 - ն բնութագրիչ հավասարման s - պատիկ արմատ է: Այդ դեպքում $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{s-1}e^{\lambda_0 x}$ ֆունկցիաները $L[y](x)=0$ հավասարման լուծումներ են:

Ապացույց: Ունենք նույնություն՝ $L\left[e^{\mu x}\right](x)\equiv l(\mu)e^{\mu x}$: Ստացված նույնության երկու կողմը ածանցենք ըստ μ անընդհատ արգումենտի k անգամ, կստանանք՝

$$L\left[x^k e^{\mu x}\right](x)\equiv\left(l(\mu)e^{\mu x}\right)^{(k)}\equiv\sum_{j=0}^{k}C_k^j l^{(j)}(\mu)x^{k-j}e^{\mu x}:$$

Տեղադրելով այս նույնության մեջ $\mu=\lambda_0$ և հաշվի առնելով (6.4) – ը, կստանանք՝ $L\left[x^k e^{\mu x}\right](x)\equiv 0$, երբ $k\leq s-1$: ■

Թեորեմ 6.2: Դիցուք (6.3) բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝ λ_1 (s_1 - պատիկ), λ_2 (s_2 - պատիկ),…, λ_m (s_m - պատիկ) $\left(\sum_{k=1}^{m}s_k=n\right)$: Այդ դեպքում $L[y](x)=0$ հավասարման լուծումներն են

$$\begin{gathered}
e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x};\\
e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{s_2-1}e^{\lambda_2 x};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{s_m-1}e^{\lambda_m x}:
\end{gathered},$$

որոնք գծորեն անկախ են $\mathbb{R}$ ում:

Ապացույց: Կազմենք այդ լուծումների գծային կոմբինացիան և դիտարկենք հետևյալ նույնությունը՝

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x}+\ldots+P_m(x)e^{\lambda_m x}\equiv 0: \tag{6.5}$$

Ենթադրենք հակառակը՝ օրինակ $P_m(x)$ - ը նույնաբար զրո չէ, և նրա կարգը $0\leq ordP_m\leq s_m-1$: Բաժանենք (6.5) – ը $e^{\lambda_1 x}$ - ի վրա և ածանցենք $P_1(x)$ բազմանդամի կարգից մեկով ավելի անգամ, որը կբերի

$P_1(x)$ - ի վերացմանը: Կիրառելով արտադրյալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը հեշտ է նկատել, որ մնացած բազմանդամների կարգը չի փոխվի: Կստանանք՝ $\overline{P}_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+...+\overline{P}_m(x)e^{(\lambda_m-\lambda_1)x}\equiv 0$:

Այս պրոցեսը շարունակելով մինչև վերջին գումարելիին հասնելը, կստանանք՝ $Q_m(x)e^{(s_m-s_{m-1})x}=0$, որտեղ $Q_m(x)$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է, ինչ $P_m(x)$ - ը: Ստացանք հակասություն: ■

3. Կոմպլեքս արմատների դեպքը: Հաշվի առնելով, որ բնութագրիչ հավասարման գործակիցները իրական են, կստանանք, որ եթե որևէ կոմպլեքս $\lambda=\alpha+i\beta$ թիվ հանդիսանում է այդ հավասարման լուծում, ապա նրա համալուծը՝ $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$, նույնպես լուծում է: Իրոք, ունենք $l(\alpha+i\beta)=0\Rightarrow\overline{l(\alpha+i\beta)}=0\Rightarrow l\left(\overline{\alpha+ib}\right)=0\Rightarrow\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ նույնպես լինում է բնութագրիչ հավասարման արմատ: Այդ՝ $\lambda=\alpha+i\beta$ արմատին համապատասխանում է $e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(cos\alpha x+isin\alpha x)$ լուծումը, որը իր հերթին առաջացնում է $e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sin\beta x$ իրական արժեքանի լուծումներ (տես լեմմա1.1): Իսկ $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ արմատին համապատասխան նոր, գծորեն անկախ իրական արժեքանի լուծումներ չեն առաջանում:

Հետագա շարադրանքը պարզ լինելու համար քննարկենք $n=3$ դեպքը: Դիցուք բնութագրիչ հավասարումը ունի մեկ հատ $\lambda_1=\mu$ իրական և երկու հատ էլ կոմպլեքս՝ $\lambda_{2,3}=\alpha\pm i\beta$ արմատներ: Այսպիսով ունենք հետևյալ իրական արժեքանի լուծումներ՝

$e^{\mu x}, e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sin\beta x$: Ցույց տանք որ նրանք գծորեն անկախ են: Ենթադրենք ունենք ՝ $c_1e^{\mu x}+c_2e^{\alpha x}cos\beta x+c_3e^{\alpha x}sin\beta x\equiv 0$ նույնությունը: Օգտվելով Էյլերի բանաձևերից՝

$$cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\quad sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},$$ կստանանք՝

$$c_1e^{\mu x}+c_2e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+c_3\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\equiv 0:$$

Կամ՝

$$c_1 e^{\mu x} + \frac{c_2 - ic_3}{2} e^{\lambda_2 x} + \frac{c_2 + ic_3}{2} e^{\lambda_3 x} \equiv 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{c_2 - ic_3}{2} = \frac{c_2 + ic_3}{2} = 0 \text{ (տես օրինակ 3.2):}$$

Այստեղից, ստանում ենք՝ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$: Նույն կերպ կարելի է ցույց տալ ընդհանուր դեպքում:

Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը քվազիբազմանդամի դեպքում

Քվազիբազմանդամ է կոչվում հետևյալ տեսքի ֆունկցիան՝ $f(x) = P(x)e^{\mu \cdot x}$, որտեղ $P(x)$ - ը բազմանդամ է, μ - ն՝ կոմպլեքս հաստատուն: Այսպիսով ունենք հետևյալ տեսքի հավասարում՝

$$L[y](x) = P(x)e^{\mu \cdot x} \tag{6.6}$$

Գտնենք այս հավասարման մասնավոր լուծման տեսքը, որտեղ՝

$$L[y](x) \equiv y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x):$$

Այս օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամն է՝

$$l(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n:$$

Ներմուծենք ածանցման օպերատորներ՝

$$D^k y(x) \equiv y^{(k)}(x) \ (k = 0, 1, \ldots, n), \ l(D) y(x) \equiv$$

$$\equiv D^n y(x) + a_1 D^{n-1} y(x) + \ldots + a_{n-1} D y(x) + a_n y(x):$$

Այս նշանակումներով (6.6) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$l(D) y(x) = P(x) e^{\mu \cdot x}: \tag{6.7}$$

Այս հավասարման աջ մասը կոչվում է քվազիբազմանդամ այն պատճառով, որ այն, փոփոխականի փոխարինման միջոցով բերվում է նոր գծային հավասարման, որի աջ մասը բազմանդամ է: Ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6.3 (շեղման մասին): Եթե $V \in C^n(\mathbb{R})$, ապա՝

$$l(D) e^{\mu \cdot x} V(x) \equiv e^{\mu \cdot x} l(D + \mu) V(x), \tag{6.8}$$

որտեղ՝ $l(D+\mu)V(x)\equiv$

$$\equiv(D+\mu)^n V(x)+a_1(D+\mu)^{n-1}V(x)+\ldots+a_nV(x):$$

Ապացուցում: Պարզ է, որ՝ $De^{\mu\cdot x}V(x)\equiv\left(e^{\mu\cdot x}V(x)\right)'\equiv$

$$\equiv\mu e^{\mu\cdot x}V(x)+e^{\mu\cdot x}V'(x)\equiv e^{\mu\cdot x}(D+\mu)V(x),$$

$$D^2e^{\mu\cdot x}V(x)\equiv\left(e^{\mu\cdot x}\left(V'(x)+\mu V(x)\right)\right)'\equiv$$

$$\equiv e^{\mu\cdot x}\left(\mu^2V(x)+\mu V'(x)+\mu V'(x)+V''(x)\right)\equiv$$

$$\equiv e^{\mu\cdot x}\left(V''(x)+2\mu V'(x)+\mu^2V(x)\right)\equiv e^{\mu\cdot x}(D+\mu)^2V(x):$$

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից հեշտ է ցույց տալ, որ՝ $D^ke^{\mu\cdot x}V(x)\equiv e^{\mu\cdot x}(D+\mu)^kV(x)$ $(k=1,\ldots,n)$: Մնում է բազմապատկել ստացվածը a_{n-k} հաստատուն գործակիցներով $(k=1,\ldots,n)$ և իրար գումարել: ■

Դիտողություն 6.3: Թեորեմից հետևում է, որ $y(x)\equiv e^{\mu\cdot x}V(x)$ փոփոխականի փոխարինումը բերում է (6.7) հավասարումը հետևյալ տեսքի՝

$$l(D+\mu)V(x)=\tilde{P}(x): \tag{6.9}$$

Պարզ է, որ (6.9) – ը նույնպես հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$l(\lambda+\mu)=0: \tag{6.10}$$

Այժմ վերադառնանք (6.6) հավասարման մասնավոր լուծում որոնելու խնդրին: Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $\mu=0$, այսինքն (6.6.) – ը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_ny(x)=P(x), \tag{6.11}$$

և $\lambda=0$ չի հանդիսանում

$$l(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{6.12}$$

բնութագրիչ հավասարման արմատ, ուրեմն՝ $a_n \neq 0$: Դիցուք՝ $P(x) \equiv b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ $(b_0 \neq 0)$: (6.11) – ի լուծումը որոնենք նույն կարգի բազմանդամի տեսքով՝ $y_1(x) \equiv Q(x)$, որտեղ՝ $Q(x) \equiv c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m$: Հավասարեցնելով իրար ձախ և աջ մասի միևնույն աստիճանի գործակիցները, կստանանք՝

$$x^m \left| a_nc_0 = b_0 \Rightarrow c_0 = \frac{b_0}{a_n}\right.$$

$$x^{m-1} \left| a_nc_1 + a_{n-1}mc_0 = b_1 \Rightarrow c_1 = \frac{b_1 - ma_{n-1}c_0}{a_n}\right.,$$

....:

Այսպիսով, ինդուկտիվ եղանակով որոշվում են $y_1(x)$ - ի բոլոր անհայտ c_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ գործակիցները:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu = 0$ և $\lambda = 0$ - ն հանդիսանում է (6.12) հավասարման s պատիկ արմատ, այսինքն՝ $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-s+1} = 0,\quad a_{n-s} \neq 0$: Այս դեպքում (6.11) հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-s}y^{(s)} = P(x): \tag{6.13}$$

Անցնենք նոր

$$z(x) \equiv y^{(s)}(x) \tag{6.14}$$

փոփոխականի: Այդ դեպքում (6.13) հավասարումը կձևափոխվի հետևյալ տեսքի՝

$$z^{(n-s)} + a_1z^{(n-s-1)} + \ldots + a_{n-s}z = P(x)\ \ (a_{n-s} \neq 0):$$

Համաձայն նախորդի,

$$z_1(x) = Q(x),$$

որտեղ $Q(x) \equiv c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է ինչ $P(x)$ - ը: Մնում է s անգամ ինտեգրել (6.14) – ը: Կստանանք մասնավոր $y_1(x)$ լուծումը (ինտեգրման հաստատունները գրել հարկավոր չէ, քանի որ նրանք կմասնակցեն համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման մեջ):

$$y_1^{(s-1)}(x) \equiv \frac{c_0}{m+1}x^{m+1} + \frac{c_1}{m}x^m + \ldots + c_m x \equiv xQ_1(x), \ldots,$$

$$y_1(x) \equiv x^s Q_s(x),$$

որտեղ $Q_k(x)$ $(k=1,\ldots,s)$ - ը նույն կարգի բազմանդամներ են ինչ $P(x)$ - ը:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu \neq 0$ և այն (μ -ն) չի հանդիսանում (6.12) բնութագրիչ հավասարման արմատ՝ $l(\mu) \neq 0$: Լուծումը որոնք $y = e^{\mu x}V(x)$ $\left(V \in C^n(\mathbb{R})\right)$ տեսքով: Հաշվի առնելով շեղման մասին թեորեմը, հանգում ենք (6.9) հավասարմանը՝ $l(D+\mu)V(x) = P(x)$, որի բնութագրիչ հավասարումն է՝ $l(\lambda+\mu) = 0$ (տես (6.10) - ը): Քանի որ $l(\mu) \neq 0$, ապա $\lambda = 0$ թիվը (6.10) հավասարման լուծում չէ: Ուրեմն, համաձայն նախորդի $l(D+\mu)V(x) = P(x)$ հավասարման մասնավոր լուծումը ունի $V_1(x) = Q(x)$ տեսքը, որտեղ $Q(x)$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է ինչ $P(x)$ -ը: Այսպիսով, այս դեպքում $L[y](x) = P(x)e^{\mu \cdot x}$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի՝ $y_1(x) = Q(x)e^{\mu \cdot x}$:

Ի վերջո, դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu \neq 0$ և μ - ն հանդիսանում է (6.10) բնութագրիչ հավասարման s պատիկ արմատ: Դա նշանակում է, որ $\lambda = 0$ թիվը $l(\lambda+\mu) = 0$ նոր բնութագրիչ հավասարման s պատիկ արմատ է: Ուրեմն, համաձայն արդեն ապացուցածի $l(D+\mu)V(x) = P(x)$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի՝ $V_1(x) = x^s Q(x)$, որտեղ $Q(x)$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է ինչ $P(x)$ - ը: Հետևաբար, $L[y](x) = P(x)e^{\mu \cdot x}$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի՝ $y_1(x) = x^s Q(x)e^{\mu \cdot x}$:

Այժմ ուսումնասիրենք հաստատուն գործակիցներին բերվող հետևյալ հավասարումները:

7. ԷՅԼԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (7.1)$$

տեսքի հավասարումը կոչվում է էյլերի հավասարում, որտեղ a_k - ը հաստատուններ են: Անցնենք նոր անկախ փոփոխականի

$$x = e^t, t > 0 \ \left(x = -e^t, t < 0\right) \Rightarrow t = ln|x|:$$

Անցնելով ածանցյալներից ըստ x –ի ածանցյալներին ըստ t –ի, կստանանք՝

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t\left(ln|x|\right)'_x = y'_t \frac{1}{x},$$

$$y''_{xx} = \left(y'_t \frac{1}{x}\right)_x = y''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} - y'_t \cdot \frac{1}{x^2}, \ldots:$$

Այսպիսով, (7.1) – ը վերածվում է հաստատուն գործակիցներով հավասարման: Դա նշանակում է, որ (7.1) – ին համապատասխան համասեռ հավասարման լուծումը պետք է որոնել

$$y = e^{\lambda t} = x^\lambda \ \ (x > 0)$$

տեսքով: Երբ (7.1) ոչ համասեռ հավասարման մեջ անցնելով $x = e^t, t > 0$ աջ մասում ունենում ենք քվազիբազմանդամ, մասնավոր լուծման տեսքը ընտրելուց հետո անցնում ենք նորից հին փոփոխականի:

Օրինակ 7.1: Գտնել $x^3 y'' - 2xy = 6lnx$ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Նախ այն բերենք էյլերի հավասարման, բաժանելով x - ի վրա $x^2 y'' - 2y = 6\dfrac{lnx}{x}$: Համասեռի լուծումը որոնենք $y = x^\lambda$ տեսքով, կստանանք՝

$$\left(\lambda(\lambda - 1) - 2\right)x^\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2:$$

Ուրեմն, համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝ $y_0 = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x^2$: Ոչ համասեռի մասնավոր լուծումը հարկավոր է որոնել հետևյալ տեսքի՝ $y_1 = \left(at^2 + bt\right)e^{-t} = \left(aln^2x + blnx\right)x^{-1}$: Երկու անգամ ածանցելով և տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$y_1'(x)=\left(b+(2a-b)lnx-aln^2x\right)x^{-2},$$

$$y_1''(x)=\frac{2a-3b+(2b-6a)lnx+2aln^2x}{x^3}:$$

$$\frac{2a-3b+(2b-6a)lnx+2aln^2x}{x}-$$

$$-\frac{2blnx+2aln^2x}{x}=\frac{6lnx}{x}:$$

Հաշվի առնելով, որ 1, lnx ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, կստանանք՝ $2a-3b=0$ և $-6a=6\Rightarrow a=-1, b=-\frac{2}{3}$: Այսպիսով, հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x^2-\frac{3ln^2x+2lnx}{3x}:$$

1. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ, ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Նախ դիտարկենք երկու անհայտ ֆունկցիաներով նորմալ համակարգի դեպքը՝

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t) \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+f_2(t) \end{cases}, \tag{8.1}$$

որտեղ a_{ik} - ը հաստատուններ են, իսկ f_i - ը՝ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ: Համարելով, որ $x(t)$, $y(t)$ (8.1) – ի լուծումներն են, ածանցենք առաջին նույնությունը և օգտվենք առաջին և երկրորդ նույնություններից, կստանանք երկրորդ կարգի, գծային, հաստատուն գործակիցներով հավասարում:

Օրինակ 8.1: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x'=4x+y-e^{2t} \\ y'=y-2x \end{cases}$$

Շարժվենք վերը նշվածի պես, կստանանք՝

$$x'' = 4x' + y' - 2e^{2t} = 4x' + y - 2x - 2e^{2t} = 5x' - 6x - e^{2t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'' - 5x' + 6x = -e^{2t}:$$

Նախ լուծենք համասեռ հավասարումը, լուծումը որոնելով $x = e^{\lambda t}$ տեսքով, կստանանք՝ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$: Ուրեմն, համասեռի ընդհանուր լուծումն է՝ $x_0 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$, իսկ ոչ համասեռինը պետք է որոնել $x_1 = ate^{2t}$ տեսքով: Պարզ հաշվարկը ցույց է տալիս, որ $a = 1$: Այսպիսով՝ $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + te^{2t}$: Ստացվածը ածանցելով և տեղադրելով առաջինի մեջ, կունենանք՝
$y = 2(1 - c_1 - t)e^{2t} - c_2 e^{3t}$:

Այժմ անցնենք երեք անհայտով նորմալ, համասեռ համակարգին՝

$$\begin{cases} x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}, \qquad (8.2)$$

որտեղ a_{ik} - ը հաստատուններ են: Այստեղ նույնպես կարելի է կիրառել արտաքսման մեթոդը, բայց այն բարդ է: Այստեղ ավելի հարմար է մատրիցային մեթոդը, որը մեծապես կհենվի սկալյար դեպքի վրա: Ներմուծենք մատրից սյունակ (վեկտոր)՝

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \text{ որի ածանցյալը կլինի՝ } \overrightarrow{X}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

և եթե ներմուծենք մատրից՝ $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$, ապա (8.2) համակարգը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t): \qquad (8.3)$$

Լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B}e^{\lambda t} \Rightarrow \overrightarrow{X}' = \lambda \overrightarrow{B}e^{\lambda t} = \lambda E \overrightarrow{B}e^{\lambda t}$ ($\overrightarrow{B}$ - ն հաստատուն վեկտոր է, իսկ E - ն միավոր մատրից): Տեղադրելով (8.3) – ի մեջ, և կրճատելով $e^{\lambda t}$ - ի վրա, կստանանք՝

$$(A - \lambda E)\overrightarrow{B} = 0: \qquad (8.4)$$

Քանի որ մեզ հետաքրքրում է $\overrightarrow{X} \neq 0$ լուծումը (մեզ հարկավոր են երեք հատ գծորեն անկախ լուծումներ), ապա առաջանում է սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների պրոբլեմը: Այն λ - ն, որի դեպքում (8.4) ունի ոչ զրոյական լուծում կոչվում է սեփական արժեք, իսկ համապատասխան ոչ զրոյական վեկտորը՝ սեփական վեկտոր: Պարզ է, որ համասեռ (8.4) հավասարումը կունենա ոչ զրոյական լուծում, եթե՝

$$det(A - \lambda E) = 0: \qquad (8.5)$$

Այս հավասարումը կոչվում է **բնութագրիչ հավասարում**: Դիտարկենք տարբեր դեպքերը բնութագրող օրինակներ:

Օրինակ 8.1: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

Նկատենք, որ A մատրիցը տվյալ դեպքում կլինի՝

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ տվյալ դեպքում (8.5) բնութագրիչ հավասարման արմատներն են (սեփական արժեքներ)՝ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$: Յուրա- քանչյուր սեփական արժեքին համապատասխան (8.4) հավասարումը կլինի՝

$$\lambda_1 = 1, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \ (\overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}) \Rightarrow \begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 + b_2 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_1 = 0, b_2 = b_3 = 1:$$

Այսպիսով՝ $\overrightarrow{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$:

$$\lambda_2 = 2, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 1:$$

Այսպիսով՝ $\overrightarrow{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$:

$$\lambda_3 = 3, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 - b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 0 \\ b_1 = b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}:$$

Որոնելի ընդհանուր լուծումը կլինի ստացված երեք հատ գծորեն անկախ լուծումների գծային կոմբինացիան՝

$$\overrightarrow{X} = c_1 \overrightarrow{X}_1 + c_2 \overrightarrow{X}_2 + c_3 \overrightarrow{X}_3:$$

Անցնելով հավասարության ըստ կոորդինատների, կստանանք՝

$$\begin{cases} x = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{cases}:$$

Օրինակ 8.2: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x' = 2x + 2z - y \\ y' = x + 2z \\ z' = y - 2x - z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}:$$ Հեշտ է տեսնել, որ տվյալ դեպ-

թում (8.5) բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝ $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$: Յուրաքանչյուր սեփական արժեքին համապատասխան (8.4) հավասարումը կլինի՝

$$\lambda_1 = 1, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 - b_2 + 2b_3 = 0 \\ -2b_1 + b_2 - 2b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \Rightarrow \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t :$$

$$\lambda_2 = -i, \begin{bmatrix} 2+i & -1 & 2 \\ 1 & i & 2 \\ -2 & 1 & i-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2+i)b_1 - b_2 + 2b_3 = 0 \\ b_1 + ib_2 + 2b_3 = 0 \\ -2b_1 + b_2 + (i-1)b_3 = 0 \end{cases} :$$

Գումարելով առաջին և երրորդ հավասարումները կստանանք հետևյալ համարժեք համակարգը՝

$$\begin{cases} ib_1 + (1+i)b_3 = 0 \\ b_1 + ib_2 + 2b_3 = 0 \\ -2b_1 + b_2 + (i-1)b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = (i-1)b_3 \\ b_2 = (i-1)b_3 \Rightarrow \\ 0b_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} b_1 = i-1 \\ b_2 = i-1 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-it} = \begin{bmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 1 \end{bmatrix} (cost - isint) = \begin{bmatrix} sint - cost \\ sint - cost \\ cost \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} sint + cost \\ sint + cost \\ -sint \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով, ունենք՝

$$\overrightarrow{X}_2 = \begin{bmatrix} sint - cost \\ sint - cost \\ cost \end{bmatrix}, \overrightarrow{X}_3 = \begin{bmatrix} sint + cost \\ sint + cost \\ -sint \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{X} = c_1\overrightarrow{X}_1 + c_2\overrightarrow{X}_2 + c_3\overrightarrow{X}_3 :$$

Անցնելով հավասարության ըստ կոորդինատների, կստանանք՝

$$x = c_2\left(sint - cost\right) + c_3\left(sint + cost\right),$$

$$y = 2c_1e^t + c_2\left(sint - cost\right) + c_3\left(sint + cost\right),$$

$$z = c_1e^t + c_2cost - c_3sint :$$

Օրինակ 8.3: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x + y - z \\ z' = x + z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} :$$

Տված հավասարմանը համապատասխան (8.5) բնութագրիչ հավասարումը ընդունում է $\left(\lambda - 2\right)^3 = 0$ տեսքը, այսինքն $\lambda = 2$ - ը բնութագրիչ հավասարման եռապատիկ արմատ է: Ելնելով սկալյար դեպքի անալոգից, $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}$ հավասարման լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B}e^{2t} + \overrightarrow{D}te^{2t} + \overrightarrow{F}t^2e^{2t} = E\overrightarrow{B}e^{2t} + E\overrightarrow{D}te^{2t} + E\overrightarrow{F}t^2e^{2t} :$$

Որտեղից՝ $\overrightarrow{X}' = \left(2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D} + 2t\left(\overrightarrow{D} + \overrightarrow{F}\right) + 2t^2\overrightarrow{F}\right)e^{2t}$: Տեղադրելով այս բոլորը $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}$ հավասարման մեջ և հավասարեցնելով իրար t նույն աստիճանի գործակիցները, կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \left(A - 2E\right)\overrightarrow{F} = 0 \\ \left(A - 2E\right)\overrightarrow{D} = 2\overrightarrow{F} : \\ \left(A - 2E\right)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{D} \end{cases}$$

Սկսենք առաջինից՝

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2f_1 - f_2 = 0 \\ 3f_1 - f_2 - f_3 = 0 \\ f_1 - f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_2 = 2f_1 \\ f_3 = f_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 2f_1 \\ f_1 \end{bmatrix}:$$

Անցնենք երկրորդին՝

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_1 \\ 4f_1 \\ 2f_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2d_1 - d_2 = 2f_1 \\ 3d_1 - d_2 - d_3 = 4f_1 \\ d_1 - d_3 = 2f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = d_3 + 2f_1 \\ d_2 = 2d_3 + 2f_1 \end{cases}:$$

Անցնելով երրորդին, կստանանք՝

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 - b_2 = d_3 + 2f_1 \\ 3b_1 - b_2 - b_3 = 2d_3 + 2f_1 \Rightarrow \\ b_1 - b_3 = d_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_2 = 2b_1 - d_3 - 2f_1, b_3 = b_1 - d_3:$$

Կատարելով վերանշանակումներ՝ $b_1 = c_1$, $d_3 = c_2$, $2f_1 = c_3$, կստանանք՝ $b_2 = 2c_1 - c_2 - c_3, b_3 = c_1 - c_2, d_1 = c_2 + c_3, d_2 = 2c_2 + c_3$, $f_2 = 2c_3, f_3 = c_3$: Այսպիսով՝

$$\vec{X} = \vec{B}e^{2t} + \vec{D}te^{2t} + \vec{F}t^2e^{2t} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_1 - c_2 - c_3 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} e^{2t} +$$

$$+t\begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ 2c_2 + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{2t} + 2t^2 \begin{bmatrix} c_3 \\ 2c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} e^{2t}:$$

Այստեղից, վերջնականապես ստանում ենք՝

$$x = c_1e^{2t} + (c_2 + c_3)te^{2t} + 2c_3t^2e^{2t},$$

$$y = (2c_1 - c_2 - c_3)e^{2t} + (2c_2 + c_3)te^{2t} + 4c_3t^2e^{2t},$$

$$z = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2te^{2t} + 2c_3t^2e^{2t}:$$

VI. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարում է կոչվում հետևյալ հավասարումը՝

$$\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x):$$

Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումն է՝

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt + f(x), \tag{1.1}$$

որտեղ $K(x,t)$ տրված կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիան կոչվում է կորիզ, $K\in C(D)$ $(D=[a;b]\times[a;b])$: Տրված է նաև $f(x)$ ֆունկցիան $(f\in C[a;b])$, λ- ն կոմպլեքս հաստատուն է: Որոնելի ֆունկցիան $\varphi(x)$- ն է $(\varphi\in C[a;b])$:

Ներմուծենք ինտեգրալ օպերատոր՝

$$(\mathrm{K}f)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt \quad (f\in C[a;b]):$$

Այդ նշանակումով (1.1) – ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi)(x)+f(x) \tag{1.2}$$

2. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ "ՓՈՔՐ" ԿՈՐԻԶԻ ԴԵՊՔՈՒՄ:

Կառուցենք հաջորդականություն՝

$$\varphi_n(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi_{n-1})(x)+f(x),\ n=1,2,\ldots,\left(\varphi_0(x)\equiv f(x)\right),$$

կամ որ նույնն է ինչ՝

$$\varphi_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt+f(x),\ n=1,2,\ldots : \tag{2.1}$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$\left(\mathrm{K}^0 f\right)(x) \equiv f(x), \left(\mathrm{K}^1 f\right)(x) \equiv (\mathrm{K} f)(x), \ldots,$$
$$\left(\mathrm{K}^p f\right)(x) \equiv \left(\mathrm{K}\left(\mathrm{K}^{p-1} f\right)\right)(x):$$

Պարզ է, որ այսպես կառուցված օպերատորները նույնպես անընդհատ կորիզներով ինտեգրալ օպերատորներ են:

$$\left(\mathrm{K}^2 f\right)(x) \equiv (\mathrm{K}(\mathrm{K} f))(x) \equiv \int_a^b K(x,\tau)(\mathrm{K} f)(\tau)\,d\tau \equiv$$
$$\equiv \int_a^b K(x,\tau)\,d\tau \int_a^b K(\tau,t) f(t)\,dt \equiv$$
$$\equiv \int_a^b f(t)\,dt \int_a^b K(x,\tau) K(\tau,t)\,d\tau \equiv \int_a^b K_2(x,t) f(t)\,dt,$$

որտեղ՝ $K_2(x,t) \equiv \int_a^b K(x,\tau) K(\tau,t)\,d\tau$: Պարզ է, որ՝ $K_2 \in C(D)$:

Ինդուկտիվ կերպ՝

$$K_p(x,t) \equiv \int_a^b K(x,\tau) K_{p-1}(\tau,t)\,d\tau,\ K_p \in C(D),$$
$$p = 2,3,\ldots\ \left(K_1(x,t) \equiv K(x,t) \in C(D)\right): \qquad (2.2)$$

$K_p(x,t)$ կորիզները կոչվում են **հաջորդական կորիզներ**:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ $\varphi_n(x)$ հաջորդականությունը իրենից ներկայացնում է

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\mathrm{K}^n f\right)(x) \qquad (2.3)$$

Նեյմանի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականություն՝

$$\varphi_n(x) \equiv \sum_{j=0}^{n} \lambda^j \left(\mathrm{K}^j f\right)(x),\ n = 0,1,2,\ldots : \qquad (2.4)$$

Իրոք՝ $\varphi_0(x)\equiv\lambda^0(\mathrm{K}^0 f)(x)\equiv f(x)$: Դիցուք (2.4) – ը ճիշտ է n - ի համար, ապացուցենք,որ ճիշտ է նաև $n+1$ - ի համար, իրոք՝

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi_n)(x)+f(x)\equiv\lambda\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\left(\mathrm{K}\left(\mathrm{K}^j f\right)\right)(x)+$$

$$+f(x)\equiv\sum_{j=0}^{n}\lambda^{j+1}\left(\mathrm{K}^{j+1}f\right)(x)+f(x)\equiv\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^j\left(\mathrm{K}^j f\right)(x)+$$

$$+f(x)\equiv\sum_{j=0}^{n+1}\lambda^j\left(\mathrm{K}^j f\right)(x):$$

Այժմ գնահատենք Նեյմանի (2.3) շարքի անդամները, պարզելու համար, թե երբ է այն զուգամետ:

Նախապես ներմուծենք նշանակումներ՝ $\max\limits_{[a;b]}|f(x)|=\|f\|$ (f-ի նորմ), $\max\limits_{(D)}|K(x,t)|=M>0$ ($M=0$ դեպքը հետաքրքիր չէ, քանի որ այդ դեպքում ինտեգրալ հավասարումը վերածվում է հանրահաշվականի):

Այսպիսով, ունենք՝

$$\left|\left(\mathrm{K}^0 f\right)(x)\right|\equiv|f(x)|\le\|f\|,\ \left|(\mathrm{K}f)(x)\right|\equiv$$

$$\equiv\left|\int_a^b K(x,t)f(t)dt\right|\le\int_a^b|K(x,t)||f(t)|dt\le\|f\|M(b-a),$$

$$\left|\left(\mathrm{K}^2 f\right)(x)\right|\le\int_a^b|K(x,t)||(\mathrm{K}f)(t)|dt\le\|f\|M^2(b-a)^2:$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ապացուցել, որ՝

$$\left|\left(\mathrm{K}^j f\right)(x)\right|\le\|f\|\left(M(b-a)\right)^j:$$

Ուրեմն՝

$$\left|\lambda^j\left(\mathrm{K}^j f\right)(x)\right|\le\|f\|\alpha^j\ \left(\alpha=|\lambda|M(b-a)\right): \tag{2.5}$$

Ենթադրենք որ՝ $\alpha<1$, այսինքն՝

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}: \tag{2.6}$$

Այդ դեպքում $\|f\|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$ թվային շարքը զուգամետ է և, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի, (2.3) Նեյմանի շարքը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$ հատվածում ([7], [9]): Այսինքն (2.3) շարքի մասնակի գումարների $\varphi_n(x)$ հաջորդականությունը $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է ինչ – որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի, որն էլ (2.3) շարքի գումարն է՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(\mathrm{K}^n f\right)(x), \tag{2.7}$$

ընդ որում $\varphi\in C[a;b]$, քանի որ՝ $\mathrm{K}^n f\in C[a;b]$, $n=0,1,2,\ldots$ ([6],[9]):

Թեորեմ 1.1 (գոյության և միակության թեորեմ Ֆրեդհոլմի հավասարման համար "փոքր" կորիզի դեպքում): Եթե $K\in C(D)$, $(f\in C[a;b])$ և λ կոմպլեքս հաստատունը բավարարում է (2.6) պայմանին, ապա (1.2) ինտեգրալ հավասարումը ունի լուծում և այն միակն է $C[a;b]$ դասում:

Ապացույցում: Ցույց տանք, որ $\varphi_n(x)$ հաջորդականության սահման $\varphi(x)$ - ը հանդիսանում է (1.1) ինտեգրալ հավասարման լուծում: Դրա համար հարկավոր է (2.1) – ում անցնել սահմանի և ցույց տալ որ կարելի է անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt=\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt: \tag{2.8}$$

Այն, որ $\varphi_n(x)$ - ը հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ - ին նշանակում է՝

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n\geq N(\varepsilon),\forall x\in[a;b]\ :\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}:$$

Հետևաբար՝

$$\left|\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}dt-\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right|\le$$

$$\le\int_a^b\left|K(x,t)\right|\left|\varphi_{n-1}-\varphi(t)\right|dt\le M\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\int_a^b dt=\varepsilon$$

$\left(n\ge N(\varepsilon)+1\right)\Rightarrow$ (2.8): Այսպիսով, լուծման գոյությունը ապացուցված է: Անցնենք միակության ապացուցմանը: Դիցուք (1.1) հավասարումը $C[a;b]$ դասում ունի երկու՝ $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ լուծումներ և, դիցուք՝ $z(x)\equiv\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$: Պարզ է, որ $z(x)$ - ը բավարարում է հետևյալ համասեռ ինտեգրալ հավասարմանը՝ $z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)$: Որտեղից հետևում է՝

$z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)=\lambda^2\left(\mathrm{K}^2z\right)(x)=...=\lambda^n\left(\mathrm{K}^nz\right)(x),\ n=1,2,...$:

Այստեղից, հաշվի առնելով (2.6) – ը, կստանանք՝

$\left|z(x)\right|\le\|z\|\alpha^n\Rightarrow\|z\|\le\|z\|\alpha^n$:

Անցնելով սահմանի, երբ $n\to\infty$ և հաշվի առնելով այն, որ $0<\alpha<1$, կստանանք՝ $\|z\|\le 0\Rightarrow\|z\|=0$, որն էլ նշանակում է, որ $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$:■

3. ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիցուք Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման $K(x,t)$ կորիզը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝ $K(x,t)=0,x<t\le b$: Նշանակենք Δ-ով հետևյալ եռանկյունին $\Delta=\left\{(x,t);a\le x\le b,a\le t\le x\right\}$: Այդ դեպքում Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt+f(x), \tag{3.1}$$

որն էլ անվանում են Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարում: Այն օպերատորային տեսքով կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi)(x)+f(x), \tag{3.2}$$

որտեղ K ինտեգրալ օպերատորը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$(\mathrm{K}f)(x)=\int_a^x K(x,t)f(t)\,dt \quad (f\in C[a;b]) \tag{3.3}$$

Գոյության և միակության թեորեմ Վոլտերայի հավասարման համար: Դիցուք $K\in C(\Delta)$ և $f\in C[a;b]$, այդ դեպքում $C[a;b]$ դասում (3.1) հավասարումն ունի լուծում և այն միակն է:

Ապացուցում: Նորից կիրառենք հաջորդական մոտարկումների մեթոդը և կառուցենք հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$\varphi_n(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi_{n-1})(x)+f(x),\ n=1,2,\ldots\left(\varphi_0(x)\equiv f(x)\right): \tag{3.4}$$

Ինչպես և նախորդ դեպքում $\varphi_n(x)$ - ը իրենից ներկայացնում է

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(\mathrm{K}^n f)(x)$$

Նեյմանի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

$$\varphi_n(x)\equiv\sum_{j=0}^{n}\lambda^j(\mathrm{K}^j f)(x),\ n=0,1,2,\ldots:$$

Սակայն այս դեպքում շարքի անդամները թույլ են տալիս հետևյալ գնահատականները՝

$$\left|(\mathrm{K}^0 f)(x)\right|\equiv|f(x)|\le\|f\|,\ \left|(\mathrm{K}f)(x)\right|\equiv\left|\int_a^x K(x,t)f(t)\,dt\right|\le$$

$$\le\int_a^x|K(x,t)||f(t)|\,dt\le\|f\|M\int_a^x dt=\|f\|M(x-a),$$

$$\left|(\mathrm{K}^2 f)(x)\right|\le\int_a^x|K(x,t)|\left|(\mathrm{K}f)(t)\right|dt\le\|f\|M^2\int_a^x(t-a)\,d(t-a)=$$

$$=\|f\|M^2\frac{(t-a)^2}{2}\Bigg|_a^x=\|f\|M^2\frac{(x-a)^2}{2}:$$

$$\left|\left(K^3f\right)(x)\right|\le\int_a^x\left|K(x,t)\right|\left|\left(K^2f\right)(t)\right|dt\le\|f\|M^3\int_a^x\frac{(t-a)^2}{2}d(t-a)=$$

$$=\|f\|M^3\frac{(x-a)^3}{2\cdot 3}=\|f\|M^3\frac{(x-a)^3}{3!}\quad :$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ապացուցել, որ՝

$$\left|\left(K^nf\right)(x)\right|\le\|f\|\frac{\left(M(x-a)\right)^n}{n!}\Rightarrow\left|\lambda^n\left(K^nf\right)(x)\right|\le$$

$$\le\|f\|\frac{\alpha^n}{n!},\ \alpha=|\lambda|M(b-a): \tag{3.5}$$

Քանի որ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ \left(a_n=\frac{\alpha^n}{n!}\right)$ շարքը զուգամետ է (օգտվենք Դ՝ Ալամբերի ([7],[9]) հայտանիշից՝ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!\alpha^{n+1}}{(n+1)!\alpha^n}=\frac{\alpha}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0<1$), ապա $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(K^nf\right)(x)$ Նեյմանի շարքը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$ հատվածում: Այսինքն շարքի մասնակի գումարների $\varphi_n(x)$ հաջորդականությունը $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է ինչ – որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի, որն էլ Նեյմանի շարքի գումարն է: Մնում է (3.4) – ում անցնենք սահմանի, երբ $n\to\infty$ (այն, որ կարելի անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ հիմնավորվում է ինչպես նախորդ թեորեմի ապացույցում): Այժմ ապացուցենք միակությունը: Դիցուք (3.2) հավասարումը $C[a;b]$ դասում ունի երկու՝ $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ լուծումներ և, դիցուք՝ $z(x)\equiv\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$: Պարզ է, որ $z(x)$ - ը բավարարում է հետևյալ համասեռ ինտեգրալ հավասարմանը՝

$z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)$: Որտեղից հետևում է՝

$z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)=\lambda^2(\mathrm{K}^2z)(x)=...=\lambda^n(\mathrm{K}^nz)(x)$, $n=1,2,...$:

Այստեղից, հաշվի առնելով (3.5) – ը, կստանանք՝

$$|z(x)|\le\|z\|\frac{\alpha^n}{n!}\Rightarrow\|z\|\le\|z\|\frac{\alpha^n}{n!}\underset{n\to\infty}{\to}0:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $n\to\infty$, կստանանք՝ $\|z\|\le 0\Rightarrow\|z\|=0$:

Որն էլ նշանակում է, որ $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$: ■

Դիտողություն: Նկատենք, որ այս թեորեմի ապացուցման պրոցեսում կարիք չեղավ պահանջելու կորիզի "փոքր" լինելը:

4. ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ ՎԵՐԱՍԵՐՎԱԾ ԿՈՐԻԶԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Նորից վերադառնանք Ֆրեդհոլմի (3.1) ինտեգրալ հավասարմանը, որն ուսումնասիրել էինք "փոքր" կորիզի դեպքում: Այժմ դիտարկենք վերասերված կորիզի դեպքը, երբ այն ներկայացվում է հետևյալ կերպ՝

$$K(x,t)\equiv\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\cdot q_j(t)\ \ \left(p_j,q_j\in C[a;b],\ j=1,2,...,n\right): \quad (4.1)$$

Որպես վերասերված կորիզի կարևոր օրինակ է հանդես գալիս երկու փոփոխականի բազմանդամը, այսինքն՝ երբ $p_j(x)$ և $q_j(t)$ ֆունկցիաները բազմանդամներ են:

Մենք կենթադրենք, որ $p_j(x)$ $(j=1,2,...,n)$ $(q_j(t)$ $(j=1,2,...,n))$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a;b]$ հատվածում: Հակառակ դեպքում, այդ ֆունկցիաների քանակը քչացնելու և վերանշանակելու հաշվին կարելի է հանգել գծորեն անկախ ֆունկցիաների: Վերասերված կորիզի դեպքում (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\int_a^b q_j(t)\varphi(t)dt+f(x): \quad (4.2)$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$c_j = \int_a^b q_j(t)\varphi(t)dt = (\bar{q}_j, \varphi), \tag{4.3}$$

(երկու φ, $\psi \in C[a;b]$ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է (ելնելով դիսկրետ անալոգից) հետևյալ կերպ՝

$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx$ ($\bar{\psi}$ - ն ψ - ի կոմպլեքս համալուծն է)):

Ասում են, որ φ - ն ուղղահայաց է ψ - ին, եթե

$$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx = 0:$$

Այսպիսով, (4.2) – ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x) = \lambda\sum_{j=1}^n c_j p_j(x) + f(x): \tag{4.4}$$

Բազմապատկենք (4.4) – ի երկու կողմը $q_k(x)$ - ով և ինտեգրենք, կստանանք՝

$$c_k = \lambda\sum_{j=1}^n a_{kj}c_j + a_k\ , \tag{4.5}$$

որտեղ

$$a_{kj} = \int_a^b p_j(x)q_k(x)dx,\ k,j = \{1,2,...,n\}, \tag{4.6}$$

$$a_k = \int_a^b q_k(x)f(x)dx = (\bar{q}_k, f)\ \ (k = 1,2,...n): \tag{4.7}$$

Ներմուծենք մատրիցներ՝

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix},\ \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix},\ A = \left\|a_{kj}\right\|_{k,j=1}^n:$$

Այդ նշանակումներով (4.5) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{c} = \lambda A\vec{c} + \vec{a}: \tag{4.8}$$

Այսպիսով, եթե $\varphi(x)$ - ը հանդիսանում է (4.1) ինտեգրալ հավասարման լուծում, ապա (4.3) բանաձևով որոշվող c_j - ը բավարարում են (4.5) համակարգին:

Հակառակը՝ եթե c_j - երը բավարարում են (4.5) համակարգին, ապա (4.4) – ից որոշվող $\varphi(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (4.2) ինտեգրալ հավասարման լուծում, իրոք՝

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\int_a^b q_j(t)\varphi(t)dt-f(x)\equiv$$

$$\equiv\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j(x)(c_j-\lambda\sum_{m=1}^{n}a_{jm}c_m-a_j)\equiv 0,$$

քանի որ $\forall j: c_j-\lambda\sum_{m=1}^{n}a_{jm}c_m-a_j=0$:

Ստացվածը նշանակում է, որ (4.2) և (4.5) խնդիրները իրար համարժեք են, այսինքն, օրինակ, եթե (4.5) – ը ունի լուծում և այն միակն է, ապա նույնը կարելի է պնդել (4.2) – ի մասին:

Պարզվում է, որ (1.1) հավասարման հետ մեկտեղ կարևոր է այսպես կոչված նրան **համալուծ** հավասարումը

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\left(\mathrm{K}^*\psi\right)(x)+g(x), \tag{4.9}$$

որտեղ $g\in C[a;b]$, K^*-ը ինտեգրալ օպերատոր է $K^*(x,t)=\bar{K}(t,x)$ կորիզով: Վերասերված կորիզի դեպքում՝ $K^*(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x)\bar{p}_j(t)$:

Այս դեպքում (4.9) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}d_j\bar{q}_j(x)+g(x), \tag{4.10}$$

որտեղ՝

$$d_j = \int_a^b \overline{p}_j(t)\psi(t)dt = (p_j, \psi): \tag{4.11}$$

Բազմապատկենք (4.11) - ի երկու կողմը $\overline{p}_k(x)$ - ով և ինտեգրենք, կստանանք՝

$$d_k = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^* d_j + b_k, \tag{4.12}$$

որտեղ՝

$$a_{kj}^* = \int_a^b \overline{q}_j(x)\overline{p}_k(x)dx = \overline{a}_{jk}, j,k \in \{1,2,...,n\}, \tag{4.13}$$

$$b_k = \int_a^b \overline{p}_k(x)g(x)dx = (p_k, g),\ k = 1,2,...,n: \tag{4.14}$$

Ներմուծենք մատրիցներ՝

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}, A^* = \left\| a_{kj}^* \right\|_{k,j=1}^{n} = \overline{A}^T = \left\| \overline{a}_{jk} \right\|_{j,k=1}^{n}:$$

Այդ նշանակումներով (4.12) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{d} = \overline{\lambda} A^* + \vec{b}: \tag{4.15}$$

Ինչպես և նախորդում հեշտ է ապացուցել, որ (4.9) հավասարումը համարժեք է (4.15) – ին, որտեղ $\psi(x)$ ֆունկցիան որոշվում է $\vec{d}$ - ի միջոցով (4.10) բանաձևով:

Նկատենք, որ (4.8), (4.15) մատրիցային հավասարումները կարելի ներկայացնել ավելի հարմար, հետևյալ կերպ՝

$$(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{a}, \tag{4.16}$$

$$(E - \overline{\lambda} A^*)\vec{d} = \vec{b}, \tag{4.17}$$

որտեղ՝ E - ն միավոր մատրից է:

Նշանակենք՝ $D(\lambda)=det(E-\lambda A)$: Պարզ է, որ՝
$D(\lambda)\neq 0$ $\left(D(0)=1\right)$:

Քանի որ մատրիցի և նրա տրանսֆորմացված մատրիցի որոշիչները նույնն են և բացի այդ, եթե մատրիցի որոշիչը զրո չէ, զրո չէ նաև համալուծ մատրիցի որոշիչը, ապա՝ $D(\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow \det\left(E-\bar{\lambda}A^{*}\right)\neq 0$: Պարզ է նաև, որ, եթե $E-\lambda A$ մատրիցի ռանգը՝ $r=rang(E-\lambda A)$, ապա՝ $rang\left(E-\bar{\lambda}A^{*}\right)=r$: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ են հետևյալ Ֆրեդհոլմի թեորեմները վերասերված կորիզի դեպքում:

Թեորեմ 1: Եթե $D(\lambda)\neq 0$, ապա (1.1) ինտեգրալային հավասարումը և նրան համալուծ (4.9) հավասարումը միարժեքորեն լուծելի են կամայական f, g ազատ անդամների դեպքում:

Ապացուցում: Քանի որ $D(\lambda)\neq 0$, ապա ըստ Կրամերի կանոնի (4.16) և (4.17) համակարգերը ունեն լուծում և այն էլ միակն է կամայական աջ մասերի դեպքում: Հետևաբար նույնը կարելի է պնդել նրանց համարժեք (1.1) և (4.9) ինտեգրալային հավասարումների մասին: ■

Դիտարկենք (1.1) և (4.9) ինտեգրալային հավասարումներին համապատասխան համասեռ հավասարումները ($f(x)\equiv g(x)\equiv 0$)

$$\varphi(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi)(x) \qquad (1.1`)$$

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\left(\mathrm{K}^{*}\psi\right)(x) \qquad (4.9`)$$

Թեորեմ 2: Եթե $D(\lambda)=0$, ապա (1.1`) և (4.9`) հավասարումները ունեն նույն քանակով $m=n-r$ գծորեն անկախ լուծումներ:

Ապացուցում: Երբ $D(\lambda)=0$, ապա $\left(E-\bar{\lambda}A^{*}\right)\vec{d}=0$ համա-կարգը ունի m հատ գծորեն անկախ $\vec{d}^{s}, s=1,2,\ldots,m$ լուծումներ: Նույնը կարելի է պնդել նաև $(E-\lambda A)\vec{c}=0$ համակարգի մասին: Նշված պնդումը ճիշտ է նաև նրանց համապատասխան համարժեք (1.1`) և (4.9`) հավասարումների մասին: ■

Հաջորդ թեորեմը հենվում է հանրահաշվից հայտնի (տես օրինակ [11]) փաստի վրա: Որպեսզի (4.16) համակարգը տվյալ $\vec{a}$ ազատ մասի

դեպքում ունենա լուծում անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\vec{a}$ վեկտորը լինի ուղղահայաց $\vec{d}^s$ վերտորներից յուրաքանչյուրին՝
$0=\left(\vec{a},\vec{d}^s\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j d_j^s,\ s=1,...,m$: $\vec{d}^s$ վեկտորները առաջացնում են (4.9՝) – ին համապատասխան լուծումներ՝

$\psi_s\left(x\right)=\overline{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\overline{q}_j\left(x\right)d_j^s,\ s=1,...,m$ (տես (4.10)):

Թեորեմ 3: Եթե $D\left(\lambda\right)=0$, ապա որպեսզի (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ունենա լուծում անհրաժեշտ է և բավարար որ $f\left(x\right)$ - ը լինի ուղղահայաց $\psi_s\left(x\right)=\overline{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\overline{q}_j\left(x\right)d_j^s,\ s=1,...,m$ լուծումներից յուրաքանչյուրին:

Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $D\left(\lambda\right)=0$:

Նախ ցույց տանք որ $\psi_s\left(x\right)$ լուծումները գծորեն անկախ են: Իրոք, դիցուք՝

$$\sum_{s=1}^{m}C_s\psi_s\left(x\right)=\overline{\lambda}\sum_{s=1}^{m}C_s\sum_{j=1}^{n}\overline{q}_j\left(x\right)\vec{d}^s\equiv 0:$$

Այսինքն՝ $\sum_{j=1}^{n}\overline{q}_j\left(x\right)\sum_{s=1}^{m}C_s d_j^s\equiv 0$: Քանի որ $q_j\left(x\right)$ $\left(j=1,...,n\right)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ապա ստանում ենք՝

$$\forall j\in\left\{1,...,n\right\}\ :\ \sum_{s=1}^{m}C_s d_j^s=0\Rightarrow\sum_{s=1}^{m}C_s\vec{d}^s=0\Rightarrow C_s=0,\ \left(s=1,...,m\right):$$

Այժմ ցույց տանք, որ f - ի ուղղահայացությունը $\psi_s\left(x\right)$ լուծումներից յուրաքանչյուրին համարժեք է նրան, որ $\vec{a}$ -ն ուղղահայաց է $\vec{d}^s$ վերտորներից յուրաքանչյուրին: Իրոք՝

$$\left(f,\psi_s\right)=\overline{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(f,\overline{q}_j\right)d_j^s=\overline{\lambda}\sum_{j=1}^{n}a_j d_j^s=\overline{\lambda}\left(\vec{a},\vec{d}^s\right),\ s=1,...,m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(f,\psi_s\right)=0\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{d}^s\right)=0\ \left(s=1,2,...,m\right):\blacksquare$$

5. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՐԻԶՆԵՐ, ՌԵԶՈԼՎԵՆՏ

Մենք արդեն գիտենք, որ "փոքր" կորիզի (տես (2.5)) դեպքում (1.1) հավասարման լուծումը տրվում է Նեյմանի շարքով, հաջորդական կորիզների միջոցով (տես (2.3)), որը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\left(\mathrm{K}^{n}f\right)(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_{n}(x,t)\right)f(t)\,dt:$$

Հեշտ է համոզվել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_{n}(x,t)$ շարքը նույնպես բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է (2.6) պայմանի առկայությամբ: Նշված շարքի գումարը անվանում են **ռեզոլվենտ** կորիզ և նշանակում՝ $R(x,t;\lambda)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_{n}(x,t)$: Համապատասխան ինտեգրալ օպերատորը կոչվում է **ռեզոլվենտ օպերատոր**՝ $(\mathrm{R}f)(x)\equiv\int_{a}^{b}R(x,t;\lambda)f(t)\,dt$:

Նկատենք, որ (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կարելի է ներկայացնել օպերատորային տեսքով՝ $(I-\lambda\mathrm{K})(\varphi)(x)=f(x)$, որտեղ I - և միավոր օպերատոր է: Այսպիսով ապացուցվել է, որ (2.6) պայմանի առկայությամբ ("փոքր կորիզի դեպքը") $I-\lambda\mathrm{K}$ օրերատորը հակադարձելի է (այսինքն, φ և f անընդհատ ֆունկցիաների միջև կա փոխմիարժեք համապատասխանություն)

$$\varphi(x)=(I-\lambda\mathrm{K})^{-1}f(x)=(I+\lambda\mathrm{R})f(x):$$

Այսինքն՝ $(I-\lambda\mathrm{K})^{-1}=I+\lambda\mathrm{R}$:

6. ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԿՈՐԻԶԻ (ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ) ԴԵՊՔՈՒՄ

Դիտարկենք ընդհանուր դեպքը՝ $K(x,t)$ կորիզը կամայական անընդհատ ֆունկցիա է ($K\in C(D)$): Այդ դեպքում, մաթ. անալիզից հայտնի է (Վայերշտրասի թեորեմ [6]), որ

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists p_j, q_j \in C[a;b] \; (j=1,\dots,n)$, $p_j(x)$ և $q_j(t)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում և՝

$$K(x,t)-P(x,t)\equiv Q(x,t),$$

որտեղ $P(x,t)\equiv\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\cdot q_j(t)$ վերասերված կորիզ է, իսկ $Q(x,t)$ արնդհատ կորիզը այնպիսին է, որ $\forall(x,t)\in(D)$: $|Q(x,t)|<\varepsilon$

Ընդ որում, $p_j(x), q_j(t)$ ֆունկցիաները կարող են լինել բազմանդամներ: ε դրական թիվը ընտրենք այնպես, որ՝

$|\lambda|\max_{(D)}|Q(x,t)|(b-a)<1, |\lambda|\varepsilon(b-a)<1$, այսինքն՝ $\varepsilon<\dfrac{1}{|\lambda|(b-a)}$:

Այսպիսով (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կարելի ՝ ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b P(x,t)\varphi(t)dt-\lambda\int_a^b Q(x,t)\varphi(t)dt=f(x), \qquad (6.1)$$

կամ օպերատորային տեսքով՝

$$(I-\lambda\mathrm{Q})\varphi(x)=\lambda\mathrm{P}\varphi(x)+f(x): \qquad (6.2)$$

Ներմուծելով նշանակում՝ $(I-\lambda\mathrm{Q})\varphi(x)\equiv\phi(x)$ և հաշվի առնելով, որ այստեղից $\varphi(x)$- ը միարժեքորեն արտահայտվում է $\phi(x)$ - ով՝ $\phi(x)=(I-\lambda\mathrm{Q})^{-1}\varphi(x)=(I+\lambda\mathrm{R})\varphi(x)$, կստանանք՝

$$\phi(x)=\lambda\mathrm{P}(I+\lambda\mathrm{R})\phi(x)+f(x),$$

կամ՝

$$\phi(x)=\lambda\mathrm{T}\phi(x)+f(x), \quad \mathrm{T}=\mathrm{P}+\lambda\mathrm{PR} \qquad (6.3)$$

Հեշտ է նկատել, որ PR օպերատորին համապատասխան ինտեգրալ կորիզը վերասերված է, այսինքն T օպերատորին համապատասխանում է վերասերված կորիզ:

Այսպիսով (1.1) խնդիրը բերվեց համարժեք վերասերված կորիզով (6.3) ինտեգրալ հավասարմանը:

Այժմ ձևափոխենք (1.1) – ին համալուծ (4.9) ինտեգրալ հավասարումը, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$\left(I-\bar{\lambda}\mathrm{P}\right)\psi(x)=\bar{\lambda}\mathrm{Q}\psi(x)+g(x)$, այսինքն՝

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\mathrm{T}^{*}\psi(x)+G(x), \tag{6.4}$$

որտեղ՝

$$\mathrm{T}^{*}=\mathrm{P}^{*}+\bar{\lambda}\mathrm{R}^{*}\mathrm{Q}^{*},\ G(x)=g(x)+\bar{\lambda}\mathrm{R}^{*}g(x),$$

Այսպիսով (1.1) – ը համարժեք է (6.3) – ին: Ուստի ճշմարիտ է Ֆրեդհոլմի ալտերնատիվը՝

1. Եթե (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ($K\in C(D)$) ունի լուծում ցանկացած ազատ $f\in C[a;b]$ մասերի դեպքում, ապա՝ նրա համալուծ (6.4) ինտեգրալ հավասարումը ունի լուծում կամայական ազատ $g\in C[a;b]$ դեպքում, ընդ որում այդ լուծումները միակն են (**Ֆրեդհոլմի առաջին թեորեմ**):

2. Եթե (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ($K\in C(D)$) ունի լուծում ոչ բոլոր ազատ $f\in C[a;b]$ մասերի դեպքում, ապա (1.1՝) և (4.9՝) համասեռ ինտեգրալ հավասարումները ունեն միևնույն վերջավոր քանակությամբ լուծումներ (**Ֆրեդհոլմի երկրորդ թեորեմ**);

Որպեսզի տվյալ ազատ $f\in C[a;b]$ մասի դեպքում (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ունենա լուծում անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $f(x)$ - ը լինի օրթոգոնալ համալուծ համասեռ (4.9՝) հավասարման լուծումներից յուրաքանչյուրին (**Ֆրեդհոլմի երրորդ թեորեմ**):

Ապացույց: Երբ $\lambda=0$, ապա ակընհայտ է, որ Ֆրեդհոլմի ալտերնատիվը տեղի ունի: Համարենք, որ $\lambda\neq 0$ և ընտրենք $\varepsilon<\dfrac{1}{|\lambda|(b-a)}$: Ենթադրենք, որ (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ունի լուծում կամայական $f\in C[a;b]$ համար, այդ դեպքում (1.1) – ին համարժեք (6.3) վերասերված ինտեգրալ հավասարումը նույնպես լուծելի է $C[a;b]$ դասում կամայական $f\in C[a;b]$ - ի համար: Այստեղից, կիրառելով Ֆրեդհոլմի թեորեմ1 – ը վերասերված կորիզի դեպքում, ստանում ենք, որ $D(\lambda)\neq 0$: Այդ դեպքում ըստ Ֆրեդհոլմի թեորեմ 1 – ի, ստանում ենք, որ կամայական $f,G\in C[a;b]$ համար (1.1) և (6.4) ինտեգրալ հավասարումները միարժեքորեն լուծելի են $C[a;b]$ դասում: Բայց, քանի որ g և G ֆունկցիաների միջև կա փոխմիարժեք համապատասխանություն, ապա (1.1) և համարժեք (6.4) հավասարումները լուծելի են յուրաքանչյուր f և g ազատ մասերի դեպքում: Ֆրեդհոլմի առաջին թեորեմը ապացուցված է: ■

Եթե (1.1) ինտեգրալային հավասարումը ոչ բոլոր f - ի դեպքում է լուծելի $C[a;b]$ դասում, ապա նրան համարժեք վերասերված կորիզով (6.3) հավասարումը նույնպես լուծելի չէ ցանկացած f - ի դեպքում: Իսկ դա նշանակում է, որ $D(\lambda)=0$: Որեմն, ըստ Ֆրեդհոլնի թ. 2 – ի (1.1`) և $\psi(x)=\bar{\lambda}T^{*}\psi(x)$ հավասարումները ունեն նույն վերջավոր քանակությամբ գծորեն անկախ լուծումներ: Քանի որ $\varphi$ և $\phi$ ֆունկցիաների միջև կա փոխմիարժեք համապատասխանություն, ապա նույնը կարելի է պնդել (1.1`) և (4.9`) հավասարումների համար: Ֆրեդհոլմի երկրորդ թեորեմը ապացուցված է: ■

Ըստ Ֆրեդհոլմի թեորեմ 3 – ի, վերասերված կորիզների համար երբ $D(\lambda)=0$, որպեսզի (1.1) հավասարումը ունենա լուծում $C[a;b]$ դասում տվյալ f - ի դեպքում անհրաժեշտ է և բավարար, որ f -ը լինի օրթոգոնալ համալուծ համասեռ ինտեգրալ (4.9`) հավասարման բոլոր լուծումներին: Քանի որ համարժեք վերասերված կորիզով ինտեգրալ հավասարման համար ոչ f - ըն է փոխվել ոչ էլ համասեռ համալուծ հավասարման համար g - ն, ստացվածը ճիշտ է նաև ընդհանուր դեպքում: Ֆրեդհոլմի երրորդ թեորեմը նույնպես ապացուցված է: ■

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников**, Дифференциальные уравнения, М., Наука, 1979.
2. **П.И. Лизоркин**, Курс дифференциальных и интегральных уравнений, М. Наука, 1981.
3. **Эльсгольц**, Дифференциальные уравнения и вариационнное исчисление., М., Наука, 1969.
4. **Հ.Գ. Ղազարյան,Ա.Հ. Հովհաննիսյան, Տ.Ն. Հարությունյան, Գ.Ա. Կարապետյան**, Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, Երևան-2002.
5. **В.С. Владимиров**, Уравнения математической физики, М., Наука, 1976.
6. **А.В. Бицадзе**, Уравнения математической физики, М., Наука, 1976.
7. **Г.М. Фихтенгольц**, Курс дифференциального и интегрального исчисления., М., Физ-мат., лит., Т2, 2003,Т3.,2005.
8. Ստեպանով Սովորական դիֆֆերենցիալ հավասարումների դասընթաց:
9. **Ա.Գ. Ղալումյան, Ա.Ս.Սարգսյան**, Մաթեմատիկական անալիզ, երրորդ մաս, ԵՊՀ – հրատ., 2008.
10. **Ա.Ղ. Թունիև, Յու.Մ. Մովսիսյան**, Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ, ԵՊՀ – ի հրատ. 2002.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

I. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴՐՈՒՅԹՆԵՐ

1. Ներածություն 3

Գաղափար դիֆերենցիալ հավասարման, նրա լուծման, ընդհանուր լուծման և ընդհանուր ինտեգրալի մասին 3

II. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ 7

1. $y' = f(x,y)$ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարման լուծման երկրաչափական մեկնաբանությունը 7

2. Անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումներ 8

3. Համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ 11

4. Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ 14

5. Լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարումներ 18

6. Գոյության և միակության թեորեմը $y' = f(x,y)$ հավասարման համար 22

7. Ածանցյալի նկատմամբ չլուծված դիֆերենցիալ հավասարումներ 28

III. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ և ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱՐ 37

IV. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ 38

V. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ 43

1. Գծային օպերատորը, նրա պարզագույն հատկությունները 43

2. Բարձր կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման բերումը Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարմանը 44

3. Գծորեն անկախ և կախյալ ֆունկցիաներ: Լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ: Գծային հավասարման ընդհանուր լուծումը 48

4. Գծային դիֆերենցիալ հավասարման վերականգնումը ըստ լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի 59

5. Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու բանաձևը և նրա կիրառությունները 61

6. Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ: Համասեռ և ոչ համասեռ հավասարումների ընդհանուր լուծումները, քվազիբազմանդամի դեպքը 65
7. Էյլերի հավասարումները 72
8. Առաջին կարգի գծային, հաստատուն գործակիցներով 73
9. դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր 73

VI. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ 80

1. Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումները 80
2. Հաջորդական մոտարկումների մեթոդը "փոքր" կորիզի դեպքում 80
3. Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարումներ 84
4. Ֆրեդհոլմի թեորեմները վերասերված կորիզի դեպքում 87
5. Հաջորդական կորիզներ, ռեզոլվենտ 93
6. Ֆրեդհոլմի թեորեմները անընդհատ կորիզի (ընդհանուր) դեպքում 93

Գրականություն 97

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՍՅԱՆ, Ա.Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ, ԱՐԾՐ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

(Դասախոսություններ)

Տեխ. խմբագիր՝ Վ.Զ. Բդոյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Լ.Բ. Մելիքյան

Ստորագրված է տպագրության 22.06.2011 թ.:
Չափսը՝ $60x84^{1}/_{16}$: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 5 մամուլ,
տպագր. 6.25 մամուլ= 5.8 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 100: Պատվեր՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: