Ս. Ա. ԻԳԻԹԽԱՆՅԱՆ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԽՄԲԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

ԵՐԵՎԱՆ
1999

12(ՀՅ.Հ)
Ի-18

Ս. Ա. ԻԳԻԹԽԱՆՅԱՆ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԽՄԲԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

ԵՐԵՎԱՆ
1999

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

G *բազմության տարրերի համար սահմանված է հանրահաշվական գործողություն, եթե նրա* a *և* b *տարրերի նշված կարգով կամայական զույգին միարժեքորեն համապատասխանության մեջ է դրված այդ նույն բազմության որևէ տարր: Եթե գործողությունը անվանվում է բազմապատկում, գրելու ենք* $ab = c$ *և խոսելու ենք գործողության արտադրյալային (մուլտիպլիկատիվ) գրառման մասին, իսկ եթե գործողությունը անվանվում է գումարում, գրելու ենք* $a + b = c$ *և ասելու ենք, որ գործողությունը տրված է գումարային (ադիտիվ) գրառմամբ:*

Մեկ հանրահաշվական գործողությամբ G *ոչ դատարկ բազմությունը կոչվում է խումբ, եթե*

ա) $(ab)c = a(bc)$ *, այսինքն գործողությունն օժտված է զուգորդական (ասոցիատիվ) հատկությամբ* G *բազմության ցանկացած* a *,* b *,* c *տարրերի համար,*

բ) գոյություն ունի միավոր տարր, այսինքն այնպիսի $e \in G$ *, որ ցանկացած* $a \in G$ *համար* $ae = ea = a$ *,*

գ) ցանկացած $a \in G$ *տարրի համար գոյություն ունի հակադարձ տարր, այսինքն այնպիսի* $a^{-1} \in G$ *, որ*

$aa^{-1} = a^{-1}a = e$ *:*

Եթե բացի այս պահանջներից, գործողությունն օժտված է նաև տեղափոխական (կոմուտատիվ) հատկությամբ, ապա խումբը կոչվում է կոմուտատիվ կամ աբելյան: Որպես կանոն, աբելյան խմբի համար օգտագործվում է գործողության գումարային գրառումը: Խմբի աքսիոմներն այդ դեպքում ունեն հետևյալ տեսքը.

ա) $a + b = b + a$ *,* $\forall a, b \in G$ *,*

բ) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *,* $\forall a, b, c \in G$ *,*

գ) $\exists 0 \in G$ *տարր, որ* $\forall a \in G$ *համար* $a + 0 = a$ *,*

դ) $\forall a \in G$ *համար* $\exists$ *հակադիր* $-a \in G$ *տարր, որ*

$a + (-a) = 0$ *:*

Վերջավոր խմբի կարգ է անվանվում նրա տարրերի քանակը: Խմբի տարրի կարգն այն ամենափոքր բնական n *թիվն է, որ* $a^n = e$ *(կամ* $na = 0$ *գումարային գրառման դեպքում):*

1. Կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ.

ա) զրոյից տարբեր բոլոր ռացիոնալ թվերը բազմապատկման նկատմամբ,

բ) $\{-1, 1\}$ բազմությունը բազմապատկման նկատմամբ,

գ) $\{1\}$ բազմությունը բազմապատկման նկատմամբ,

դ) ամբողջ թվերը գումարման նկատմամբ (Z գումարային խումբ),

զ) կենտ թվերը գումարման նկատմամբ,

ե) զույգ թվերը գումարման նկատմամբ,

է) զրոյից տարբեր իրական թվերը բաժանման նկատմամբ:

2. Կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ.

ա) մեկից n աստիճանի արմատները ($x^n = 1$ հավասարման բոլոր լուծումները) բազմապատկման նկատմամբ,

բ) մեկից բոլոր բնական աստիճանների արմատները բազմապատկման նկատմամբ,

գ) n-րդ կարգի մատրիցները բազմապատկման նկատմամբ,

դ) n-րդ կարգի չվերասերված մատրիցները բազմապատկման նկատմամբ,

ե) n-րդ կարգի ամբողջաթիվ մատրիցները (որոնց տարրերն ամբողջ թվեր են) գումարման նկատմամբ,

զ) n-րդ կարգի ամբողջաթիվ մատրիցները բազմապատկման նկատմամբ,

է) ± 1 որոշիչ ունեցող n-րդ կարգի մատրիցները բազմապատկման նկատմամբ:

3. Կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ դրական թվերը, եթե գործողությունը սահմանված է

ա) $a * b = a^b$, բ) $a * b = a^2 b^2$, գ) $a * b = abk$, $k > 0$ բանաձևերով:

4. Ցույց տալ, որ a_0, a_1, a_2, a_3 տարրերով բազմությունը ստորև բերված բազմապատկման աղյուսակով կազմում է խումբ (Քլայնի K_4 խումբ): Աբելյա՞ն է արդյոք այդ խումբը:

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

Այսպիսի աղյուսակը կոչվում է խմբի բազմապատկման Կելիի աղյուսակ:

5. Կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ հետևյալ տեսքի մատրիցները բազմապատկման նկատմամբ $(a \in R, a \neq 0)$.

ա) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$, բ) $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, գ) $\begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & 3a \end{bmatrix}$:

6. Կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ $a + b\sqrt{5}$ տեսքի թվերը, եթե $a, b \in Q$ և $a^2 + b^2 \neq 0$

ա) բազմապատկման նկատմամբ,

բ) գումարման նկատմամբ:

7. Ցույց տալ, որ ցանկացած խմբում

ա) $a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n$,

բ) $(a^m)^n = a^{mn}$,

գ) $\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{m+k} = \prod_{i=1}^{m+n} a_i$:

8. Ցույց տալ, որ աբելյան խմբերում

ա) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}$,

բ) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}$,

գ) $1, 2, \ldots, n$ բազմության ինքն իր վրա φ փոխմիարժեք արտապատկեպման դեպքում

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \ :$$

9. Խու՞մբ է արդյոք $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ տեղադրությունների բազմությունը բազմապատկման նկատմամբ:

10. Ցույց տալ, որ խմբում հնարավոր է երկկողմանի բաժանում, այսինքն՝ $ax = b$ և $ya = b$ հավասարումներն ունեն միակ լուծում:

11. Ցույց տալ, որ ցանկացած խմբում հնարավոր է կրճատում, այն է՝ $ax = ax_1$ և $ya = y_1a$ հավասարություններից հետևում է, որ $x = x_1$, $y = y_1$:

Կասենք, որ A բազմությունն արտապատկերվում է B բազմության մեջ, եթե A բազմության կամայական x տարրին միարժեքորեն համապատասխանեցված է B բազմության որևէ y տարր: Ընդունված է y տարրն անվանել x տարրի կերպար, իսկ x տարրը y տարրի նախակերպար: Մասնավոր դեպքում B բազմությունը կարող է համընկնել A բազմության հետ:

12. Դիցուք G-ն որևէ A բազմության արտապատկերումների ոչ դատարկ բազմություն է: Երկու արտապատկերումների արտադրյալը սահմանվում է որպես նրանց հաջորդական կիրառման արդյունք: Ցույց տալ, որ G-ն խումբ է, եթե ա) G-ին պատկանող ցանկացած երկու արտապատկերումների արտադրյալը նորից պատկանում է G-ին, և բ) G-ին պատկանող ցանկացած արտապատկերման հակադարձը նորից պատկանում է G-ին:

13. Ապացուցել, որ որևէ P կետի շուրջը հարթության պտույտների բազմությունը աբելյան խումբ է: Իսկ եթե այդ բազմությանն ավելացնենք P կետով անցնող բոլոր ուղիղների նկատմամբ արտացոլումները (երբ կետի պատկերը տրված ուղղի նկատմամբ այդ կետին համաչափ կետն է) ստացվում է ոչ աբելյան խումբ:

14. Ապացուցել, որ (a, b) կարգավորված իրական թվազույգերի բազմությունը $(a_1, b_1)*(a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1)$ գործողությամբ խումբ է:

15. Ցույց տալ, որ $a \neq 0$ դեպքում $ax + b$ գծային ֆունկցիաները բարդույթ (սուպերպոզիցիա) գործողությամբ կազմում են խումբ: Համեմատել նախորդ խնդրի հետ:

16. Ապացուցել, որ n-րդ կարգի քառակուսային մատրիցները, որոնց յուրաքանչյուր տողի և սյան մեջ կա զրոյից տարբեր միայն մեկ տարր, որը հավասար է 1-ի, բազմապատկման գործողությամբ կազմում են խումբ:

17. Կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ n-րդ կարգի իրական մատրիցների հետևյալ ենթաբազմությունները բազմապատկման գործողությամբ.

ա) դրական տարրերով չվերասերված մատրիցները,

բ) չվերասերված անկյունագծային մատրիցները,

գ) չվերասերված վերին եռանկյուն ($a_{ij} = 0$, երբ $i > j$) մատրիցները,

դ) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցները, եթե

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,

ե) $\begin{bmatrix} a & b \\ \lambda b & a \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցները, երբ $\lambda \in R$ ֆիքսված է, $a^2 + b^2 \neq 0$:

18. Իրական թվերի բազմությանն ավելացնենք ∞ "անիսկական" տարրը և նշանակենք $R \cup \{\infty\} = \overline{R}$: Ընդունենք $\overline{R}$ բազմության մեջ $\frac{a}{0} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $\infty \pm a = \infty$, $\forall a \in R$ համար և $\frac{\infty}{0} = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$: Իսկ $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ և $0 \cdot \infty$ արտահայտություններին որևէ արժեք չի վերագրվելու: Ցույց տալ, որ $\overline{R}$ բազմության $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$, $ad - bc \neq 0$ արտապատկերումների բազմությունը (կոտորակագծային ձևափոխությունների բազմությունը) խումբ է: Այն կոչվում է միաչափ պրոյեկտիվ խումբ:

Տրված երկրաչափական պատկերի ինքնահամատեղում ասելով հասկանում ենք հարթության վրա կամ տարածության մեջ պատկերի այնպիսի տեղաշարժերը, որոնք պատկերը համատեղում են իր հետ, այսինքն պատկերի կերպարը տվյալ տեղաշարժի դեպքում համընկնում է իր հետ: Այդպիսի տեղաշարժերի ոչ դատարկ բազմությունը կազմում է խումբ (տես խնդիր 12):

Նման խմբի տարրեր կարող են լինել զուգահեռ տեղափոխությունները, պտույտները և համաչափության ձևափոխությունը (սիմետրիան) որևէ ուղղի կամ հարթության նկատմամբ, որն անվանելու ենք արտացոլում: Տարածական կամ հարթ պատկերի համար հիմնականում դիտարկվում է նրա ինքնահամատեղող պտույտների խումբը և համաչափությունների խումբը, երբ պտույտներին ավելանում են ինքնահամատեղող զուգահեռ տեղաշարժերը և արտացոլումները:

19. Նկարագրել հատվածի համաչափությունների խումբը և գտնել նրա կարգը:
20. Նկարագրել ուղղի համաչափությունների խումբը և ցույց տալ, որ այն չունի վերջավոր կարգ:
21. Ապացուցել, որ ուղղի համաչափությունների խումբը ոչ աբելյան է:
22. Ցույց տալ, որ կանոնավոր n անկյուն բուրգի պտույտների խմբի բոլոր տարրերը ներկայացվում են որպես այդ խմբի որևէ տարրի աստիճաններ: Քանի՞ այդպիսի տարր կա տված խմբում:
23. Գրել շեղանկյան համաչափությունների խմբի բազմապատկման աղյուսակը: Համեմատել 4 խնդրի հետ:
24. Գտնել կանոնավոր քառանիստի պտույտների խմբի կարգը:
25. Ցույց տալ, որ կանոնավոր քառանիստի համաչափությունների խումբն աբելյան չէ: Գտնել այդ խմբի կարգը:
26. Գտնել ա) խորանարդի պտույտների խմբի կարգը, բ) խորանարդի համաչափությունների խմբի կարգը:
27. Թվարկել քառակուսու համաչափությունների խմբի ութ տարրերը և ներկայացնել այդ տարրերը տեղադրությունների միջոցով:
28. Նկարագրել խորանարդի վեց համաչափություն, որոնք նրա մի գագաթը թողնում են անշարժ:
29. Ցույց տալ, որ կանոնավոր ութանիստի (օկտաէդր) համաչափությունների խմբի կարգը համընկնում է խորանարդի համաչափությունների խմբի կարգի հետ:
30. Գտնել կանոնավոր n-անկյուն հարթ սալիկի համաչափությունների խմբի (դիեդրի D_n խմբի) կարգը: Նկարագրել այդ խմբի բազմապատկման աղյուսակը:

n տարր ունեցող բազմության բոլոր տեղադրությունների խումբը նշանակելու ենք S_n, իսկ S_n խմբի բոլոր զույգ տեղադրություններ-ի ենթաբազմությունը, որը նույնպես խումբ է, նշանակելու ենք A_n:

31. Կազմել S_3 խմբի բազմապատկման աղյուսակը:
32. S_3 և A_4 խմբերի բոլոր տեղադրությունները գրել ցիկլերի տեսքով:
33. S_3 խմբի բոլոր տեղադրությունները գրել դիրքափոխումների արտադրյալի տեսքով:
34. S_7 խմբում լուծել $ax = b$ և $ya = b$ հավասարումները, որտեղ

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}:$$

35. Դիցուք $a=(1\ 2)(3\ 4\ 5)$: Թվարկել a-ի աստիճանների հնարավոր արժեքները և գտնել a^{100}:

36. $s=(i_1\dots i_k)$ և $t=(j_1\dots j_l)$ երկու ցիկլեր կոչվում են անկախ, եթե $\{i_1,\dots,i_k\}$ և $\{j_1,\dots,j_l\}$ բազմությունները չեն հատվում: Ապացուցել, որ $st=ts$, այսինքն՝ անկախ ցիկլերը տեղափոխելի են:

37. Գտնել S_n խմբի $a=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ ցիկլի հետ տեղափոխելի բոլոր տեղադրությունները:

38. Ցույց տալ, որ ցանկացած խմբի a և b տարրերի համար $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$: Գտնել $(a_1a_2\dots a_n)^{-1}$ տարրը:

39. Ապացուցել, որ եթե խմբի ցանկացած a տարրի համար $a^2=e$, ապա խումբն աբելյան է:

40. Ապացուցել, որ մեկից n աստիճանի արմատների արտադրյալային բազմությունը թվային տարրերով n կարգի միակ արտադրյալային խումբն է:

41. Ապացուցել, որ խմբի ցանկացած a, b, c տարրերի համար

ա) abc և bca տարրերն ունեն միևնույն կարգը,

բ) abc և cba տարրերը կարող են ունենալ տարբեր կարգ

գ) abc և cba տարրերը կարող են ունենալ տարբեր կարգ

42. Ապացուցել, որ եթե $a\in G$ տարրն ունի m կարգ, ապա $a^k=e$ այն և միայն այն դեպքում, երբ m-ը k թվի բաժանարար է:

43. Ցույց տալ, որ S_n խմբում կենտ տեղադրության կարգը զույգ թիվ է:

44. Ցանկացած k թվի համար գտնել խմբի x^k տարրի կարգը, եթե x տարրի կարգը n է:

Եթե խմբի բոլոր տարրերը նրա որևէ a տարրի աստիճաններ են, խումբը կոչվում է ցիկլիկ, որի համար a ծնիչ կամ առաջացնող է a տարրով: Այդպիսի խումբը նշանակելու ենք $<a>$:

45. Դիցուք G-ն a տարրով առաջացած n կարգի ցիկլիկ խումբ է: Ապացուցել, որ

ա) a^k և a^m տարրերն ունեն միևնույն կարգը, եթե k, n և m, n զույգերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարները համընկնում են,

բ) a^k տարրը ծնիչ է G խմբի համար, եթե k և n թվերը փոխադարձաբար պարզ են,

գ) եթե k և n փոխադարձաբար պարզ են, ապա G խմբում գոյություն ունի $\sqrt[k]{a}$, այսինքն a տարրը G խմբի որևէ տարրի k աստիճան է,

դ) եթե n թիվը կենտ է, ապա խմբի բոլոր տարրերը որոշակի տարրերի քառակուսիներ են:

46. Ապացուցել, որ եթե G խմբի a և b տարրերը տեղափոխելի են և ունեն վերջավոր r և s փոխադարձաբար պարզ կարգերը, ապա ab տարրն ունի rs կարգ:

47. Գտնել S_{12} խմբի $a=(1\,3\,2\,5\,4\,6\,7\,8\,12\,10\,9\,11)$ և $b=(2\,1\,5\,8\,4)$ տարրերի կարգը:

48. Ինչպիսի՞ն է S_8 խմբի տարրերի առավելագույն կարգը: Առավելագույն կարգի քանի՞ տեղադրություն կա ա) S_8 խմբում, բ) S_9 խմբում:

49. Գտնել S_{12} խմբի ամենաբարձր կարգի տարրի կարգը:

50. Գտնել $a=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ ցիկլի բնական ցուցիչով աստիճանները:

51. Ապացուցել, որ եթե տեղադրությունը ներկայացվել է $k_1,k_2,\ldots,k_s$ երկարությամբ անկախ ցիկլերի արտադրյալի տեսքով, ապա այդ տեղադրության կարգը հավասար է $k_1,k_2,\ldots,k_s$ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկին:

52. Ապացուցել, որ եթե խմբի a և b տարրերը տեղափոխելի են, ունեն m և n վերջավոր կարգերը, նրանցով առաջացած ցիկլիկ ենթախմբերի հատումը միավոր տարրն է, ապա ab տարրի կարգը m և n թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:

53. Երկրորդ կարգի չվերասերված մատրիցների արտադրյալային խմբում $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ և $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ տարրերն ունեն համապատասխանաբար 4 և 3 կարգ: Ցույց տալ, որ AB մատրիցն առաջացնում է անվերջ ցիկլիկ խումբ, այսինքն չունի վերջավոր կարգ: Հնարավո՞ր է արդյոք նման օրինակ բերել աբելյան խմբերի համար:

54. Ցույց տալ, որ $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ տարրը զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբում ունի անվերջ կարգ և ապացուցել, որ $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ թիվն իռացիոնալ է:

55. Ապացուցել, որ ա) զույգ կարգի ցանկացած խումբ պարունակում է 2 կարգի տարր, բ) կենտ կարգի խմբի բոլոր տարրերն այդ խմբի որոշակի տարրերի քառակուսիներ են:

56. Ցույց տալ, որ 4 կարգի բոլոր խմբերն աբելյան են:

57. Բուլյան հանրահաշվում ընդունենք $a+b=(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)$: Ցույց տալ, որ ստացված խումբն աբելյան է և յուրաքանչյուր զրոյից տարբեր տարր ունի 2 կարգ:

58. Դիտարկելով $Z_p\setminus\{0\}$ արտադրյալային խումբը՝ p պարզ թվի դեպքում, ապացուցել, որ

ա) $n^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, եթե n-ը չի բաժանվում p-ի վրա (Ֆերմայի "փոքր" թեորեմ),

բ) $n^p\equiv n(\mathrm{mod}\ p)$ բոլոր $n\in Z$ համար:

59. Դիցուք $2^r+1=p$ պարզ թիվ է: Ցույց տալ, որ $Z_p\setminus\{0\}$ արտադրյալային խմբում 2 տարրի կարգը 2r է, որտեղից 2r թիվը $p-1=2^r$ թվի բաժանարար է: Հետևաբար, $r=2^s$ և $p=2^{2^s}+1$ (այս տեսքի պարզ թվերը կոչվում են Ֆերմայի թվեր):

Եթե G խմբի տարրերի G_1 եթաբազմությունը G-ում սահմանված գործողությամբ խումբ է, այն կոչվում է G խմբի ենթախումբ: Միավոր տարրից և ամբողջ խմբից տարբեր ենթախմբերն անվանելու ենք ոչ ակներև ենթախմբեր:

60. Ենթախումբ է արդյոք $a+b\sqrt{3}$ տեսքի $(a,\ b\in Q)$ թվերի բազմությունն իրական թվերի գումարային խմբում:

61. Ենթախումբ է արդյոք դրական իրական թվերի արտադրյալային խումբը բոլոր իրական թվերի գումարային խմբի համար:

62. Ցույց տալ, որ G խմբի տարրերի G_1 ենթաբազմությունը ենթախումբ է, եթե ցանկացած $a,\ b\in G_1$ համար $ab^{-1}\in G_1$:

63. Գտնել S_3 խմբի բոլոր ենթախմբերը և նրանցից առանձնացնել ցիկլիկ ենթախմբերը:

64. Ապացուցել, որ գոյություն ունեն տեղադրությունների ցանկացած կարգի ցիկլիկ խմբեր:
65. Ապացուցել, որ ցիկլիկ խմբի ցանկացած ենթախումբ ցիկլիկ է:
66. Ապացուցել, որ պարզ կարգի ցանկացած խումբ ցիկլիկ է:
67. Բերել անվերջ խմբի օրինակ, որի բոլոր տարրերն ունեն վերջավոր կարգ և որի բոլոր ենթախմբերը ցիկլիկ են:
68. Ապացուցել, որ ցանկացած անվերջ խումբ ունի անվերջ թվով ենթախմբեր:
69. Գտնել A_4 խմբի 2, 3 և 4 կարգի ենթախմբեր և ցույց տալ, որ այն չունի 6 կարգի ենթախումբ, այսինքն Լագրանժի թեորեմը հակադարձելի չէ:
70. Ցույց տալ, որ G խմբի A և B ենթախմբերի արտադրյալը ենթախումբ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $AB = BA$ և այդ դեպքում $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$:
71. Ստուգել, որ
    ա) n-րդ կարգի օրթոգոնալ մատրիցները (Q մատրիցը կոչվում է օրթոգոնալ, եթե $QQ' = E$) կազմում են արտադրյալային խումբ,
    բ) ± 1 որոշիչ ունեցող ամբողջաթիվ մատրիցները կազմում են արտադրյալային խումբ,
    գ) այդ երկու խմբերի հատումը վերջավոր խումբ է:
    Գտնել այդ վերջավոր խմբի կարգը:
72. Գտնել այն ութերորդ կարգի խմբի բոլոր ենթախմբերը, որի միավորից տարբեր բոլոր տարրերն ունեն 2 կարգ:
73. Գտնել պրիմար ցիկլիկ խմբի (p^k կարգի խմբի, որտեղ p-ն պարզ թիվ է) բոլոր ենթախմբերը:
74. Գտնել ա) 6 կարգի ցիկլիկ խմբի բոլոր ենթախմբերը, բ) S_5 խմբի 2 կարգի բոլոր ենթախմբերի քանակը:
75. Գտնել Քլայնի խմբի (տես խնդիր 4) բոլոր ենթախմբերը:
76. Գտնել կանոնավոր քառանիստի պտույտների խմբի բոլոր ենթախմբերը:
77. Զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբում գտնել ա) i, բ) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, գ) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$, դ) $-\frac{1}{2} i$, ե) 2 և -5 տարրերով առաջացած ենթախմբերը և նրանց հատումը զրոյից տարբեր իրական թվերի ենթախմբի հետ:

78. Երկրորդ կարգի չվերասերված կոմպլեքս մատրիցների արտադրյալային խմբում գտնել ստորև բերված տարրերով առաջացած ցիկլիկ ենթախմբերի կարգերը. ա) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, բ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, գ) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, դ) $\begin{bmatrix} -2+3i & -2+2i \\ 1-i & 3-2i \end{bmatrix}$, ե) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$:

79. Նկարագրել այն խմբերը, որոնք ունեն ա) մեկ ենթախումբ, բ) երկու ենթախումբ, գ) երեք ենթախումբ:

80. Ցույց տալ, որ քառակուսու համաչափությունների խմբում 2 կարգ ունեցող տարրերը ենթախումբ չեն կազմում:

81. Ապացուցել, որ $[0, 1]$ հատվածը $\oplus$ գործողությամբ, որտեղ $\alpha+\beta$ թվի կոտորակային մասը նշանակվել է $\alpha\oplus\beta$, խումբ է և նրա ցանկացած ենթախումբ ցիկլիկ է:

82. Ցույց տալ, որ ցանկացած խմբում վերջավոր թվով ենթախմբերի հատումը ենթախումբ է, իսկ երկու ենթախմբերի միավորումը ենթախումբ է միայն այն դեպքում, երբ նրանցից մեկը պարունակվում է մյուսի մեջ:

83. Ապացուցել, որ եթե A, B, C ենթախմբեր են և $C\subset A\cup B$, ապա $C\subseteq A$ կամ $C\subseteq B$:

84. Ապացուցել, որ a տարրով առաջացած n կարգի G ցիկլիկ խմբում $H\in G$ ցանկացած ենթախումբ առաջանում է a^m տեսքի տարրով, որտեղ m-ը n-ի բաժանարարն է և n թվի ցանկացած d բաժանարարի համար գոյություն ունի d կարգի միակ $H\in G$ ենթախումբ:

85. Խմբի պարբերական մաս է կոչվում նրա վերջավոր կարգ ունեցող բոլոր տարրերի բազմությունը: Ապացուցել, որ աբելյան խմբի պարբերական մասը ենթախումբ է: Ճի՞շտ է արդյոք այդ պնդումը ոչ աբելյան խմբերի համար:

86. Ապացուցել, որ աբելյան խմբում այն տարրերը, որոնց կարգերը ֆիքսված n թվի բաժանարարներ են, կազմում են ենթախումբ: Ճի՞շտ է արդյոք այդ պնդումը ոչ աբելյան խմբերի համար:

87. Գտնել g տարրով առաջացած հետևյալ կարգի ցիկլիկ խմբի բոլոր ենթախմբերը. ա) 24, բ)100, գ) 360, դ)125, ե) 14: Յուրաքանչյուր խմբում գտնել 4 կարգի տարրերի քանակը:

88. x_1, x_2, x_3, x_4 փոփոխականների f բազմանդամի համար ընդունենք

$$G_f = \left\{\sigma \in S_4 \;\middle|\; f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}\right) = f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right\}$$

Ցույց տալ, որ G_f-ը S_4 խմբի ենթախումբ է և գտնել այդ ենթախումբը հետևյալ բազմանդամների համար.

ա) $f = x_1x_2 + x_3x_4$,

բ) $f = x_1x_2x_3$,

գ) $f = x_1 + x_2$,

դ) $f = x_1x_2x_3x_4$,

ե) $f = x_1^3x_2x_3^3x_4 + 2x_1^2x_2x_3^2x_4 + 5x_1 + 3x_3 + 1$:

ԽՄԲԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀԱՐԱԿԻՑ ԴԱՍԵՐԻ ՆՈՐՄԱԼ ԵՆԹԱԽՈՒՄԸ

Եթե H*-ը ենթախումբ է* G *խմբում,* xh *տեսքի տարրերի բազմությունը, որտեղ* h*-ը* H*-ի ցանկացած տարր է, իսկ* $x \in G$ *ֆիքսված է, կոչվում է ձախ հարակից դաս ըստ* H *ենթախմբի և նշանակվում է* xH*: Իսկ* hx *տարրերի բազմությունը, որտեղ* h *և* x *տարրերը վերցված են նման ձևով, կոչվում է աջ հարակից դաս ըստ* H *ենթախմբի և նշանակվում է* Hx*:*

Հարակից դասերի բազմության հզորությունը (վերջավոր բազմության դեպքում դասերի քանակը) կոչվում է H *ենթախմբի ինդեքս (նշիչ)* G *խմբում: Ենթախմբի կարգը և ինդեքսը խմբի կարգի բաժանարարներ են (Լագրանժի թեորեմ):*

Եթե ցանկացած $x \in G$ *համար* $xH = Hx$ *կամ* $x^{-1}Hx = H$*, ապա* H *ենթախումբը կոչվում է նորմալ բաժանարար, ինվարիանտ ենթախումբ կամ նորմալ ենթախումբ:*

89. Գտնել S_3 խմբի աջ և ձախ հարակից դասերն ըստ 3 կարգի ենթախմբի: Նորմա՞լ է արդյոք այդ ենթախումբը:
90. Գտնել S_3 խմբի աջ և ձախ հարակից դասերն ըստ 2 կարգի ենթախմբերի: Այդ ենթախմբերից որո՞նք են նորմալ:
91. Ցույց տալ, որ ցանկացած ենթախմբի ձախ հարակից դասի տարրերին հակադարձ տարրերը կազմում են աջ հարակից դաս:
92. Ցույց տալ, որ 2 ինդեքսի կամայական ենթախումբ նորմալ է:
93. Ապացուցել, որ աբելյան խմբի ցանկացած ենթախումբ նորմալ է:
94. Դիցուք G ցիկլիկ խումբն առաջանում է a տարրով, իսկ F-ենթախումբը a^m տարրով: Ապացուցել, որ $e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}$

տարրերն ըստ F ենթախմբի հարակից դասերի ներկայացուցիչներ են և m-ը F-ի ինդեքսն է G-ում:

95. Ցույց տալ, որ A_n ենթախումբը նորմալ է S_n խմբում:

96. Ապացուցել, որ եթե ըստ F ենթախմբի ցանկացած երկու ձախ հարակից դասերի արտադրյալը նորից ձախ հարակից դաս է, ապա F ենթախումբը նորմալ է:

97. Ցույց տալ, որ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցները, որտեղ a և b թվերն ամբողջ են, կազմում են գումարային խումբ: Գտնել այդ խմբի մի քանի ենթախմբեր, այդ թվում նաև ցիկլիկ, և խումբը վերլուծել հարակից դասերի ըստ այդ ենթախմբերի:

98. Գտնել A_4 խմբի հարակից դասերն ըստ որևէ 3 կարգի ենթախմբի:

99. Գտնել ամբողջ թվերի գումարային խմբի հարակից դասերն ըստ տված n թվին բազմապատիկ թվերի nZ ենթախմբի:

100. Գտնել իրական թվերի գումարային խմբի հարակից դասերն ըստ ամբողջ թվերի ենթախմբի:

101. Գտնել կոմպլեքս թվերի գումարային խմբի հարակից դասերն ըստ Գաուսյան թվերի ($a + ib$, որտեղ $a, b \in Z$) ենթախմբի:

102. Գտնել հարակից դասերը.

ա) հարթության վեկտորների գումարային խմբի ըստ OX առանցքի վեկտորների ենթախմբի (վեկտորները կիրառված են սկզբնակետում),

բ) զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբի ըստ 1 մոդուլ ունեցող թվերի ենթախմբի,

գ) զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբի ըստ դրական իրական թվերի ենթախմբի,

դ) զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբի ըստ զրոյից տարբեր իրական թվերի ենթախմբի:

103. Գտնել S_n խմբի հարակից դասերն ըստ n-ը տեղում թողնող տեղադրությունների ենթախմբի:

104. Ապացուցել, որ

ա) $2k$ կարգի G խմբի k կարգի ենթախումբը պարունակում է G խմբի բոլոր տարրերի քառակուսիները,

բ) ցանկացած G խմբի 2 ինդեքսի H ենթախումբը պարունակում է G խմբի բոլոր տարրերի քառակուսիները:

105. Նկարագրել ձախ հարակից դասերը G խումբն ըստ H ենթախմբի վերլուծելիս, երբ

ա) $G = Z_8$, H-ը նրա 4 կարգի ենթախումբն է,

բ) $G = S_3$, H-ը $(1\ 2)$ ցիկլով առաջացած ենթախումբն է,

գ) G-ն խորանարդի պտույտների խումբն է, H-ը նրա այն պտույտների ենթախումբը, որոնց դեպքում խորանարդի նիստերից մեկը համատեղվում է ինքն իր հետ,

դ) G-ն բոլոր չվերասերված մատրիցների ենթախումբն է, H-ը՝ 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախումբը:

106. Գտնել A_4 խմբի ծախ վերլուծությունն ըստ $(1\ 2\ 3)$ տարրով առաջացած ենթախմբի:

107. Գտնել 8 կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի վերլուծություններն ըստ բոլոր ենթախմբերի:

108. Գտնել 10 կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի վերլուծություններն ըստ բոլոր ենթախմբերի:

109. Գտնել a ծնիչով անվերջ ցիկլիկ խմբի վերլուծությունն ըստ ա) a^3 տարրով առաջացած ենթախմբի, բ) a^{10} տարրով առաջացած ենթախմբի:

Խմբի a տարրը կոչվում է b տարրին համալուծ x տարրի միջոցով, եթե $a = x^{-1}bx$: Խմբի տարրերի միջև համալուծության հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է (ապացուցել) և որպես համարժեքության հարաբերություն խումբը տրոհում է իրար հետ չհատվող դասերի:

110. S_3 խմբի բոլոր տարրերը բաշխել իրար համալուծ տարրերի դասերի:

111. Ապացուցել, որ եթե խմբի a և b տարրերն իրար համալուծ են, ապա նրանց կարգերը նույնն են:

112. Ցույց տալ, որ $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ տեղադրությունները համալուծ են և գտնել այն $c \in S_6$ տարրերի քանակը, որ $c^{-1}ac = b$:

113. Ցույց տալ, որ S_n խմբում անկախ ցիկլերի արտադրյալի տեսքով ներկայացված երկու տեղադրություն իրար համալուծ են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց ցիկլերի երկարությունների հավաքածուները համընկնում են, այսինքն նրանք պարունակում են յուրաքանչյուր երկարության հավասար թվով ցիկլեր:

114. Գտնել ա) $(1\ 2)(3\ 4)$ և բ) $(1\,2\,4)$ տարրին համալուծ տարրերը S_4 խմբում:

115. Նկարագրել համալուծ տարրերի բոլոր դասերը S_4 խմբում և գտնել տարրերի քանակը նրանցից յուրաքանչյուրում:

116. Նկարագրել համալուծ տարրերի բոլոր դասերը A_4 խմբում և գտնել տարրերի քանակը նրանցից յուրաքանչյուրում: Համեմատել նախորդ խնդրի արդյունքի հետ:

117. Գտնել կանոնավոր քառանիստի պտույտների խմբի իրար համալուծ տարրերի դասերը:

118. Ապացուցել, որ A_n $(n > 2)$ ենթախումբը S_n խմբի 2 ինդեքսի միակ ենթախումբն է: Բերել վերջավոր խմբի օրինակ, որն ունի 2 ինդեքսի մի քանի ենթախումբ:

119. Ցույց տալ, որ ռացիոնալ թվերի գումարային խումբը չունի ա) երկու ինդեքսի ենթախումբ, բ) վերջավոր ինդեքսի ենթախումբ:

120. Եթե G խմբի տարրերի K ենթաբազմությունն աջ կամ ձախ հարակից դաս է ըստ որևէ H ենթախմբի, ապա $\forall x, y, z \in K$ համար $xy^{-1}z \in K$: Ապացուցել:

121. Պարզել, թե S_5-ի ստորև բերված ենթաբազմություններից որո՞նք են հարակից դասեր ըստ որևէ ենթախմբի.

ա) $K_1 = \{(2\,3\,4), (1\,2\,3\,4)\}$,

բ) $K_2 = \{(1\,2), (1\,2\,3), (1\,2\,3\,4)\}$,

գ) $K_3 = \{e, (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2)\}$,

դ) $K_4 = \{(1\,2), (1\,3), (1\,4), (1\,5)\}$,

ե) $K_5 = \{(1\,2), (1\,5\,2)(3\,4)\}$:

122. n-րդ կարգի չվերասերված մատրիցների խմբում դիտարկվում են այն մատրիցները, որոնց որոշիչը հավասար է տված a թվին: Ցույց տալ, որ այդ մատրիցները հարակից դաս են ըստ որևէ ենթախմբի: Գտնել այդ ենթախումբը:

123. 12 կարգի խումբը վերլուծվել է աջ հարակից դասերի ըստ որևէ 3 կարգի ենթախմբի: Այդ դասերի ներկայացուցիչների քանի՞ իրարից տարբեր բազմություններ կան:

124. Ցույց տալ, որ վերջավոր խմբում համալուծ տարրերի ցանկացած դասի տարրերի քանակը բաժանարար է խմբի կարգի համար:

125. Ապացուցել, որ S_4 խմբում հետևյալ ենթախմբերը նորմալ են

ա) A_4 ենթախումբը,

բ) e, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$ տեղադրություններից կազմված աբելյան ենթախումբը (Քլայնի խումբ):

Ունի արդյո՞ք S_4 խումբն այլ նորմալ ենթախմբեր:

126. Ապացուցել, որ եթե H ենթախումբը նորմալ է G խմբում և F-ը «միջանկյալ» ենթախումբ է, այսինքն՝ $H \subseteq F \subseteq G$, ապա H-ը նորմալ է F-ում: Ստացված արդյունքը կիրառել A_4 խմբի համար (տես խմդիր 125):

127. Հնարավո՞ր է արդյոք, որ H-ը լինի F-ի նորմալ ենթախումբ, F-ը G-ի նորմալ ենթախումբ, բայց H-ը չլինի G-ի նորմալ ենթախումբ:

ԽՄԲԵՐԻ ԻԶՈՄՈՐՖԻԶՄ և ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄ

G_1 խմբի φ փոխմիարժեք արտապատկերումը G_2 խմբի վրա կոչվում է իզոմորֆիզմ, եթե այդ արտապատկերումը պահպանում է գործողությունը $\varphi(gh) = \varphi(g) \cdot \varphi(h)$: Իսկ եթե G_1 և G_2 խմբերը համընկնում են, այդ իզոմորֆիզմը կոչվում է ավտոմորֆիզմ: G խմբի ավտոմորֆիզմների խումբը նշանակվում է $\mathrm{Aut}\,G$:

128. Ապացուցել, որ ա) 3 կարգի բոլոր խմբերն իզոմորֆ են իրար, բ) բոլոր այն խմբերը, որոնց կարգը տված p պարզ թիվն է, իզոմորֆ են:

129. Ցույց տալ, որ կանոնավոր եռանկյան համաչափությունների խումբն իզոմորֆ է S_3 խմբին:

130. Ցույց տալ, որ 4 կարգի ցանկացած խումբ իզոմորֆ է քառակուսու պտույտների խմբին կամ Քլայնի խմբին, որոնք արդեն իրար իզոմորֆ չեն:

131. Ապացուցել, որ ցանկացած վերջավոր խումբ իզոմորֆ է տեղադրությունների որևէ խմբի (Կելիի թեորեմ):

132. 3 և 4 կարգի բոլոր խմբերը ներկայացնել տեղադրությունների խմբերի տեսքով:

133. Ներկայացնել կանոնավոր քառանիստի պտույտների խումբը տեղադրությունների տեսքով:

134. Ցույց տալ, որ բոլոր անվերջ ցիկլիկ խմբերն իրար իզոմորֆ են: Մասնավորապես, նրանք բոլորն իզոմորֆ են ամբողջ թվերի գումարային խմբին:

135. Ապացուցել, որ դրական ռացիոնալ թվերի արտադրյալային խումբն իզոմորֆ չէ բոլոր ռացիոնալ թվերի գումարային խմբին:

136. Կառուցել իզոմորֆիզմ իրական դրական թվերի արտադրյալային և բոլոր իրական թվերի գումարային խմբերի միջև:

137. Ապացուցել, որ m կարգի ցանկացած ցիկլիկ խումբ իզոմորֆ է ըստ m մոդուլի մնացքների դասերի Z_m գումարային խմբին:

138. Ցույց տալ, որ 2-ին բազմապատիկ թվերի գումարային խումբն իզոմորֆ է 3-ին բազմապատիկ թվերի գումարային խմբին:

139. Կառուցել իզոմորֆիզմ իրական թվերի արտադրյալային խմբի և զրոյից տարբեր իրական թվերի այն խմբի միջև, որտեղ գործողությունը սահմանվում է այսպես $a*b=3ab$:

140. Ցույց տալ, որ $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$ տեսքի իրական մատրիցները բազմապատկման գործողությամբ կազմում են խումբ, որն իզոմորֆ է զրոյից տարբեր իրական թվերի արտադրյալային խմբին:

141. Բերել հարթ երկրաչափական պատկերի օրինակ, որի համաչափությունների խումբն իզոմորֆ է ա) Z_2, բ) Z_3, գ) K_4 խմբին:

142. Կառուցել իզոմորֆիզմ զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբի և $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ տեսքի բոլոր չվերասերված իրական մատրիցների արտադրյալային խմբի միջև:

143. Ցույց տալ, որ կանոնավոր քառանիստի համաչափությունների խումբն իզոմորֆ է S_4 խմբին:

144. Նկարագրել բոլոր իզոմորֆիզմները Z_4 գումարային խմբի և $Z_5 \setminus \{0\}$ արտադրյալային խմբի միջև:

145. Ցույց տալ, որ գոյություն ունեն n կարգի վերջավոր թվով խմբեր (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ):

146. Z գումարային խմբի φ_1, φ_2 և φ_3 արտապատկերումներից որո՞նք են ավտոմորֆիզմ

ա) $\varphi_1(m) = m + 1$,

բ) $\varphi_2(m) = 2m$,

գ) $\varphi_3(m) = -m$:

147. Գտնել ա) անվերջ ցիկլիկ խմբի, բ) վերջավոր ցիկլիկ խմբերի ավտոմորֆիզմների խմբերը: Նկարագրել 12 և 14 կարգի ցիկլիկ խմբերի ավտոմորֆիզմների խմբերը:

148. Ապացուցել, որ S_3 խումբն ունի ճիշտ 6 ներքին ավտոմորֆիզմ (ներքին ավտոմորֆիզմ՝ $x \mapsto axa^{-1}$), ընդ որում ներքին ավտոմորֆիզմների խումբն իզոմորֆ է հենց S_3 խմբին:

149. Ապացուցել, որ $\mathrm{Aut}\, K_4$ խումբն իզոմորֆ է S_3 խմբին՝ $\mathrm{Aut}\, K_4 \simeq S_3$:

150. Եթե վերջավոր ցիկլիկ խմբի կարգը մեծ է երկուսից, նրա ավտոմորֆիզմների խումբը զույգ կարգի աբելյան խումբ է: Ապացուցել:

Եթե իզոմորֆիզմի սահմանման մեջ հրաժարվենք փոխմիարժեքության պայմանից, կստանանք արտապատկերում, որը կոչվում է հոմոմորֆիզմ:

Դիցուք G *-ն խումբ է,* H *-ը՝ նրա նորմալ ենթախումբը, իսկ* G/H *-ը՝ ըստ* H *ենթախմբի* G *խմբի հարակից դասերի բազմությունը (աջ և ձախ հարակից դասերը համընկնում են* H *ենթախմբի նորմալ լինելու շնորհիվ):* aH *և* bH *հարակից դասերի արտադրյալ է կոչվում* abH *հարակից դասը: Այդ գործողությամբ հարակից դասերի բազմությունը դառնում է խումբ, որը կոչվում է* G *խմբի ֆակտոր խումբ ըստ* H *նորմալ ենթախմբի:*

$\varphi: G \to G/H$ *արտապատկերումը, որտեղ* $\varphi(g) = gH$, *երբ* $g \in G$, *հոմոմորֆիզմ է, որն անվանվում է բնական հոմոմորֆիզմ:*

151. Ապացուցել, որ

ա) խմբի հոմոմորֆ կերպարը խումբ է,

բ) հոմոմորֆիզմի դեպքում միավոր տարրի նախակերպարները կազմում են արտապատկերվող խմբի նորմալ ենթախումբ:

152. Ապացուցել, որ եթե G խումբը ցիկլիկ է, իսկ H-ը նրա m ինդեքսի ենթախումբ է, ապա G/H ֆակտոր խումբը m կարգի ցիկլիկ խումբ է:

153. Կառուցել ամբողջ թվերի գումարային Z խմբի հոմոմորֆիզմ $\{-1, 1\}$ արտադրյալային խմբի վրա և գտնել այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը:

154. Ցույց տալ, որ $3Z$ ենթախումբը (երեքին բազմապատիկ ամբողջ թվեր) նորմալ է Z գումարային խմբում: Կառուցել ֆակտոր խումբն ըստ այդ ենթախմբի և նկարագրել գործողությունները ֆակտոր խմբում:

155. Ապացուցել, որ կանոնավոր n անկյուն հարթ սալիկի համաչափությունների խումբը կարելի է հոմոմորֆ արտապատկերել 2 կարգի խմբի վրա: Գտնել այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը:

156. Ապացուցել, որ աբելյան խմբի ցանկացած ֆակտոր խումբ աբելյան է:

157. Q_8 բազմությունը ունի ութ տարր՝ $1, -1, i, j, k, -i, -j, -k$ (այստեղ մինուս նշանը ծառայում է միայն տարրերը իրարից տարբերելու համար): Ստորև բերված բազմապատկման աղյուսակով տրված բազմությունը խումբ է, որն ընդունված է անվանել քվատերնիոնների խումբ:

	1	-1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
1	1	-1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
-1	-1	1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
i	i	$-i$	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
$-i$	$-i$	i	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
j	j	$-j$	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
$-j$	$-j$	j	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
k	k	$-k$	$-j$	j	i	$-i$	1	-1
$-k$	$-k$	k	j	$-j$	$-i$	i	-1	1

Ցույց տալ, որ չնայած Q_8 խումբը ոչ աբելյան է, նրա բոլոր ենթախմբերը նորմալ բաժանարարներ են:

158. G խմբի բոլոր տարրերի հետ տեղափոխելի տարրերի C բազմությունը կոչվում է խմբի կենտրոն: Ապացուցել, որ

ա) խմբի կենտրոնը նորմալ ենթախումբ է,

բ) քվատերնիոնների խմբի ֆակտոր խումբն ըստ կենտրոնի 4 կարգի ոչ ցիկլիկ խումբ է:

գ) եթե խմբի ֆակտոր խումբն ըստ կենտրոնի ցիկլիկ է, ապա խումբն աբելյան է:

159. Ապացուցել, որ եթե p-ն պարզ է, p^2 կարգի ցանկացած խումբ աբելյան է:

160. Ապացուցել, որ եթե G խումբը հոմոմորֆ արտապատկերվում է G' խմբի վրա, ընդ որում a տարրն անցնում է a' տարրին, ապա

ա) a տարրի կարգը բաժանվում է a' տարրի կարգի վրա,

բ) G խմբի կարգը բաժանվում է G' խմբի կարգի վրա:

161. Գտնել բոլոր հոմոմորֆ արտապատկերումները

ա) 6 կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի 18 կարգի $<b>$ ցիկլիկ խմբի մեջ,

բ) 12 կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի 15 կարգի $<b>$ ցիկլիկ խմբի մեջ,

գ) 18 կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի 6 կարգի $<b>$ ցիկլիկ խմբի մեջ,

դ) 6 կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի 25 կարգի $<b>$ ցիկլիկ խմբի մեջ,

ե) n կարգի $<a>$ ցիկլիկ խմբի n կարգի $<b>$ ցիկլիկ խմբի մեջ:

162. Ապացուցել, որ ռացիոնալ թվերի գումարային խումբը չի կարելի հոմոմորֆ արտապատկերել ամբողջ թվերի գումարային խմբի վրա:

163. Կառուցել n-րդ կարգի չվերասերված իրական մատրիցների արտադրյալային խմբի հոմոմորֆիզմ իրական թվերի արտադրյալային խմբի վրա:

164. Ապացուցել, որ S_n/A_n ֆակտոր խումբը 2 կարգի ցիկլիկ խումբ է և այն իզոմորֆ է ամբողջ թվերի ֆակտոր խմբին ըստ զույգ թվերի ենթախմբի:

165. Ապացուցել, որ S_4/K_4 ֆակտոր խումբն իզոմորֆ է S_3 խմբին (K_4-Քլայնի խումբ, տես խնդիր 125):

166. Գտնել տված գումարային խմբի ֆակտոր խումբն ըստ նշված ենթախմբի.

ա) ամբողջ թվերի խմբի ըստ տված n թվին բազմապատիկ թվերի ենթախմբի,

բ) 3-ին բազմապատիկ թվերի խմբի ըստ 15-ին բազմապատիկ թվերի ենթախմբի,

գ) 4-ին բազմապատիկ թվերի խմբի ըստ 24-ին բազմապատիկ թվերի ենթախմբի:

167. Գտնել զրոյից տարբեր իրական թվերի արտադրյալային խմբի ֆակտոր խումբն ըստ դրական թվերի ենթախմբի:

168. Դիցուք G-ն զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խումբն է, իսկ H-ը իրական և կեղծ առանցքների զրոյից տարբեր թվերն են: Ցույց տալ, որ ա) H-ը նորմալ ենթախումբ է, բ) գտնել G-ի հարակից դասերն ըստ H-ի, գ) ցույց տալ, որ G/H ֆակտոր

խումբն իզոմորֆ է մեկ մոդուլով կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբին:

169. n-րդ կարգի չվերասերված մատրիցների արտադրյալային խմբի համար ապացուցել, որ

ա) իրական մատրիցների խմբի ֆակտոր խումբն ըստ 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախմբի իզոմորֆ է զրոյից տարբեր իրական թվերի արտադրյալային խմբին,

բ) նույնն ըստ ± 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախմբի իզոմորֆ է դրական թվերի արտադրյալային խմբին,

գ) կոմպլեքս մատրիցների ֆակտոր խումբն ըստ 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախմբի իզոմորֆ է դրական թվերի արտադրյալային խմբին,

դ) նույնն ըստ դրական որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախմբի իզոմորֆ է 1 մոդուլով կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբին,

ե) իրական մատրիցների ֆակտոր խումբն ըստ դրական որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախմբի երկրորդ կարգի ցիկլիկ խումբ է:

170. Ապացուցել, որ տեղադրությունների ցանկացած խմբում, որը պարունակում է առնվազն մեկ կենտ տեղադրություն, զույգ և կենտ տեղադրությունների քանակները նույնն են և զույգ տեղադրությունները այդ խմբում կազմում են նորմալ ենթախումբ:

171. Ցույց տալ, որ $\varphi \mapsto \cos\varphi + i\sin\varphi$ արտապատկերումն իրական թվերի գումարային խմբի հոմոմորֆ արտապատկերում է 1 մոդուլով կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբի վրա: Գտնել հոմոմորֆիզմի միջուկը:

172. Դիտարկենք իրական գործակիցներով աստիճան $f(x) \le n-1$ բազմանդամների գումարային խումբը: Յուրաքանչյուր $f(x)$ բազմանդամին համապատասխանեցնենք $\left(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)\right)$ տողը, որտեղ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ իրարից տարբեր թվեր են: Երկու տողերի գումար կանվանենք նրանց համապատասխան բաղադրիչների գումարումից ստացվող տողը:

Ապացուցել որ այդ արտապատկերումն իզոմորֆիզմ է աստիճան $f(x) \le n-1$ բազմանդամների գումարային խմբի և տողերի գումարային խմբի միջև:

173. Նախորդ խնդրի արտապատկերումը կիրառվում է բոլոր աստիճանի իրական գործակիցներով բազմանդամների

գումարային խմբի վրա: Ցույց տալ, որ ստացված արտապատկերումը հոմոմորֆիզմ է և գտնել նրա միջուկը:

174. Դիցուք G-ն ամբողջ թվերի բոլոր կարգավորված եռյակների բազմությունն է

$$(k_1, k_2, k_3)*(l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_2} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3)$$

գործողությամբ: Ստուգել, որ G-ն խումբ է և ցույց տալ, որ $(1,0,0)$ տարրով առաջացած ենթախումբը նորմալ է G-ում:

175. Ապացուցել, որ ռացիոնալ թվերի Q գումարային խումբը չի կարելի հոմոմորֆ արտապատկերել զրոյից տարբեր որևէ վերջավոր խմբի վրա:

176. Դիցուք G-ն g ծնիչով k կարգի վերջավոր ցիկլիկ խումբ է: Ցույց տալ, որ $n \mapsto g^n$ արտապատկերումն ամբողջ թվերի գումարային խմբի հոմոմորֆիզմ է G խմբի վրա և գտնել այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը:

177. S_n խումբը հոմոմորֆ արտապատկերվում է 2 տարրից բաղկացած ցիկլիկ խմբի վրա: Գտնել հոմոմորֆիզմի միջուկը:

178. Ապացուցել, որ G խմբի ներքին ավտոմորֆիզմների խումբն իզոմորֆ է նրա ֆակտոր խմբին ըստ կենտրոնի:

179. Դիցուք H-ը G խմբի որևէ ենթախումբ է: Նշանակենք $H^x = xHx^{-1}$ $(x \in G)$: Ցույց տալ, որ

ա) H^x-ը ենթախումբ է,

բ) նման բոլոր ենթախմբերի N հատումը G-ի նորմալ ենթախումբ է,

գ) N-ը H-ում պարունակվող նորմալ ենթախմբերից առավելագույնն է (եթե N_1 նորմալ ենթախումբը պարունակվում է H ենթախմբում, ապա այն պարունակվում է նաև N ենթախմբում):

180. Ապացուցել, որ եթե N-ը մաքսիմալ նորմալ ենթախումբ է G խմբում, ապա G/N խումբը պարզ է (չունի ոչ ակներև նորմալ ենթախումբ):

181. Ինչպիսի՞ նորմալ ենթախմբեր են առաջացնում S_4 խմբի հետևյալ տեղադրությունները.

ա) $(1\ 2)$, $(1\ 2\ 3\ 4)$,

բ) $(1\ 2\ 3)$,

գ) $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2\ 4)$:

182. Ցույց տալ, որ հարթության $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ տեղաշարժերը կազմում են նորմալ ենթախումբ $(x, y) \mapsto$ $\mapsto (\alpha x + \beta y + a, \gamma x + \delta y + b)$, $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, բոլոր աֆինական ձևափոխությունների խմբի համար:

183. Ուղղի համաչափությունների խմբի համար ուղղի զուգահեռ տեղաշարժերի ենթախումբը նորմալ է: Ապացուցել:

184. Ապացուցել, որ n անկյուն կանոնավոր սալիկի համաչափությունների խմբի (դիէդրի խումբ) համար պտույտների ենթախումբը նորմալ է:

185. Գտնել բոլոր այն աբելյան խմբերը, որոնք չունեն ոչ ակներև հոմոմորֆիզմներ, այսինքն իզոմորֆիզմից և զրոյական ենթախմբի վրա հոմոմորֆիզմից տարբեր հոմոմորֆիզմներ:

186. Ցույց տալ, որ Q/Z ֆակտոր խմբում

ա) յուրաքանչյուր տարր ունի վերջավոր կարգ,

բ) յուրաքանչյուր n բնական թվի համար գոյություն ունի միայն մեկ n կարգի ենթախումբ:

187. Ապացուցել, որ եթե G խումբն ունի վերջավոր ինդեքսի H ենթախումբ, ապա ունի նաև վերջավոր ինդեքսի նորմալ ենթախումբ:

188. Ապացուցել, որ եթե G խումբը պարունակում է n ինդեքսի H ենթախումբ, ապա այն ունի նորմալ ենթախումբ, որի կարգը $n!$ թվի բաժանարար է:

189. Ամբողջ թվային առանցքի վրա անընդհատ և ցանկացած կարգի անընդհատ ածանցյալ ունեցող ֆունկցիաների բազմության մեջ դիտարկվում է ֆունկցիաների գումարման սովորական գործողությունը:

Պարզել, կազմո՞ւմ են արդյոք խումբ այդ գործողության նկատմամբ.

ա) դիտարկվող բոլոր ֆունկցիաները (Φ),

բ) այդպիսի զույգ ֆունկցիաները (Φ_1),

գ) այդպիսի կենտ ֆունկցիաները (Φ_2):

Իզոմորֆիզմի և հոմոմորֆիզմի ինչպիսի՞ առնչություններ կարելի է դիտարկել այդ խմբերի միջև: Նույնաբար զրոյի հավասար ֆունկցիան համարելու ենք և զույգ և կենտ:

190. Ցույց տալ, որ եթե G խմբում H_1 և H_2 նորմալ ենթախմբեր են, ապա

ա) $a \in H_1$ և $b \in H_2$ հետևում է, որ $a^{-1}b^{-1}ab \in H_1 \cap H_2$,

բ) եթե $H_1 \cap H_2 = e$, ապա H_1 և H_2 ենթախմբերի տարրերը տեղափոխելի են իրար հետ:

191. Ապացուցել, որ ցանկացած խմբում

ա) a և b տարրերի կոմուտատորը ($[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ տարրը կոչվում է a և b տարրերի կոմուտատոր) հավասար է խմբի միավոր տարրին այն և միայն այն դեպքում, երբ a և b տարրերը տեղափոխելի են,

բ) խմբի K կոմուտանտը (բոլոր հնարավոր կոմուտատորներով առաջացած ենթախումբը) նորմալ է,

գ) ըստ կոմուտանտի ֆակտոր խումբն աբելյան է,

դ) եթե G/N խումբն աբելյան է, ապա N-ը պարունակում է խմբի կոմուտանտը,

ե) աբելյան խմբի կոմուտանտը միավոր ենթախումբն է:

192. S_4 խմբում $x_1 = (1\ 2)$, $x_2 = (1\ 2\ 3)$, $x_3 = (1\ 2\ 3\ 4)$, $y = (1\ 3)(2\ 4)$: Գտնել $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_3]$, $[x_1, y]$, $[x_2, x_1]$, $[x_3, x_1]$, $[y, x_1]$ կոմուտատորները:

193. Երկրորդ կարգի ± 1 որոշիչով քառակուսային մատրիցների խմբում գտնել $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ տարրերի $[x, y]$ $[y, z]$ և $[z, x]$ կոմուտատորները:

194. Ապացուցել, որ S_n խմբի կոմուտանտը A_n ենթախումբն է:

195. Գտնել քվատերնիոնների Q_8 խմբի (տես խնդիր 157) կոմուտանտը: Համեմատել այն խմբի կենտրոնի հետ:

ԽՈՒՄԲԸ ՈՐՈՇՈՂ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ
ԱԶԱՏ ԽՄԲԵՐ

Դիցուք S *-ը խմբի տարրերի բազմության որևէ ոչ դատարկ ենթաբազմություն է:* S *-ը պարունակող բոլոր ենթախմբերի* H *հատումը կանվանենք* S *-ով առաջացած ենթախումբ և կնշանակենք* $H = \langle S \rangle$*: Այդ դեպքում* H *ենթախմբի տարրերը կունենան* $a_1 a_2 \dots a_n$, $n = 1, 2, \dots$ *տեսքը, որտեղ* $a_i \in S$ *կամ* $a_i^{-1} \in S$ $(1 \le i \le n)$*:* S *բազմությունը կոչվում է* $H = \langle S \rangle$ *ենթախմբի ծնիչների բազմություն:* $a_1 a_2 \dots a_n$ *արտահայտությունը կոչվում է բառ* S *այբուբենում, իսկ* $g = a_1 a_2 \dots a_n$ *տարրը՝ այդ բառի արժեք:*

Եթե S *բազմությունը վերջավոր է,* $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *, ապա* $H = \langle S \rangle$ *փոխարեն գրում են նաև* $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ *և* H *ենթախումբն անվանում են վերջավորածին: Երբ* $k = 1$*, ստացվում է ցիկլիկ ենթախումբ:*

H *խմբի ծնիչների* S *բազմությունը կանվանենք մինիմալ, եթե* $\langle S \rangle = H$*, բայց* $\langle S' \rangle \ne H$*, որտեղ* S' *-ը* S *-ի որևէ ենթաբազմություն է, որն ստացվում է* S *-ից թեկուզ մեկ տարր հեռացնելով:*

Հնարավոր է, որ $h \in H$ *տարրի համար գոյություն ունենան* S *այբուբենի* $x_1 x_2 \dots x_k$ *և* $y_1 y_2 \dots y_l$ *բառեր, որոնց արժեքը հավասար է* h *-ի: Այդ դեպքում* $x_1 x_2 \dots x_k = y_1 y_2 \dots y_l$ *: Այդպիսի հավասարությունը կոչվում է* S *-ի նկատմամբ առնչություն* H *խմբում:*

G *խմբում* S *ծնիչ բազմության նկատմամբ առնչությունների* Φ *բազմությունը կոչվում է խումբը որոշող առնչությունների բազմություն, եթե* G *-ում ցանկացած առնչություն կարելի է ստանալ որպես* Φ *բազմության առնչությունների հետևանք:*

G *խմբի ծնիչների* S *բազմությունը կոչվում է ազատ, եթե նրա տարրերը տարբեր են միավորից և* G *խումբը* S *-ի նկատմամբ որոշող առնչությունների բազմությունը դատարկ է: Այն խումբը, որն ունի ազատ ծնիչների բազմություն, կոչվում է ազատ խումբ: Ազատ խմբի ծնիչների բազմության հզորությունը կոչվում է ազատ խմբի ռանգ:*

196. Դիցուք $a = (1\ 2\ 3\ 4)$ և $b = (1\ 3\ 2)$ S_4 խմբի տարրեր են: Ցույց տալ, որ

ա) $S_4 = \langle a, b \rangle$

բ) $a^4 = e$, $b^3 = e$, $(ab)^2 = e$ առնչություններ են S_4-ում: Այդ առնչությունները որոշում են S_4 խումբը:

197. Ապացուցել, որ S_n խմբի բոլոր տարրերը կարելի է ստանալ

ա) $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ դիրքափոխումների միջոցով,

բ) $(1\ 2)$ և $(1\ 2\ 3\ \ldots n)$ երկու տեղադրությունների միջոցով:

198. Ապացուցել, որ $n > 2$ դեպքում A_n խմբի բոլոր տարրերը կարելի է ստանալ $n-2$ հատ $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n)$ 3-ցիկլերի միջոցով:

199. Ներկայացնել $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ տեղադրությունը 3-ցիկլերի արտադրյալի տեսքով:

200. Ապացուցել, որ եթե խմբի a և b տարրերի համար տեղի ունեն $a^5 = b^3 = e$, $b^{-1}ab = a^2$ առնչությունները, ապա $a = e$:

201. Ցույց տալ, որ a և b ծնիչներով և $a^2 = b^7 = e$, $a^{-1}ba = b^{-1}$ առնչություններով որոշվող խումբը վերջավոր է:

202. Ապացուցել, որ a, b ծնիչներով և $a^2 = b^3 = (ab)^2 = e$ որոշող առնչություններով խումբն իզոմորֆ է S_3 խմբին:

203. Ապացուցել, որ x_1, x_2 ծնիչներով և $x_1^2 = x_2^3 = e$, $x_1^{-1}x_2x_1 = x_2^2$ որոշող առնչություններով խումբն իզոմորֆ է S_3 խմբին:

204. Դիցուք Q_8-ն քվատերնիոնների խումբն է: Ցույց տալ, որ

ա) $Q_8 = \langle i, j \rangle$,

բ) Q_8 խմբում ճիշտ են

$$i^4 = 1, \quad j^4 = 1, \quad i^2 = j^2, \quad iji = j$$

առնչությունները:

205. Ցույց տալ, որ ռացիոնալ թվերի Q գումարային խմբում $M = \left\{1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\right\}$ ծնիչ բազմություն է: Ապացուցել, որ Q խմբի ծնիչ բազմություն է նաև M բազմության ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն:

206. Ապացուցել, որ Z գումարային խումբն ազատ խումբ է 1 ազատ ծնիչով:

207. Ապացուցել, որ $k \neq 1$ ռանգի ցանկացած ազատ խումբ ունի անվերջ քանակով իրարից տարբեր ազատ ծնիչների բազմություններ: Մասնավորապես, եթե $S = \{a, b, c, \ldots\}$ ազատ

ծնիչների բազմությունն է, ապա $S' = \{a b^n, b, c, \ldots\}$, $n \in N$ նույնպես:

208. Ցույց տալ, որ 1 ռանգ ունեցող ազատ խումբը միակ աբելյան ազատ խումբն է:

209. Ցույց տալ, որ ցանկացած $G = < S >$ խումբ որևէ այնպիսի ազատ խմբի հոմոմորֆ պատկեր է, որի ծնիչների բազմության հզորությունը համընկնում S բազմության հզորության հետ:

210. Ապացուցել, որ ցանկացած խումբ իզոմորֆ է որևէ ազատ խմբի ֆակտոր խմբի:

211. Դիցուք F ազատ խումբն ունի a և b ազատ ծնիչները: Գտնել հետևյալ ենթախմբերի ինդեքսները

ա) $H_1 = < a^2, b^2, a b >$,

բ) $H_2 = < a >$,

գ) $H_3 = < a^2, b^2, a^{-1} b^2 a, b^{-1} a^2 b, (a b)^2 >$:

Այդ ենթախմբերից որո՞նք են F խմբի նորմալ բաժանարարներ:

212. Դիցուք F խումբը մեկից մեծ ռանգ ունեցող ազատ խումբ է: Ցույց տալ, որ

ա) F խմբի միավորից տարբեր ցանկացած տարր ունի անվերջ կարգ,

բ) F խմբի կենտրոնը միավոր ենթախումբն է:

ԽՄԲԵՐԻ ՈՒՂԻՂ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼ

Կամայական A *և* B *խմբերի* $A \times B$ *ուղիղ արտադրյալ կանվանենք* $a \in A$, $b \in B$ *բոլոր* (a, b) *կարգավորված զույգերի բազմությունը* $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ *գործողությամբ (արտաքին ուղիղ արտադրյալ): Եթե* A *և* B *ենթախմբերը* G *խմբի նորմալ բաժանարարներ են,* $A \cap B = e$ *և* $AB = G$, *ապա* $A \times B$ *խումբը իզոմորֆ է* G *խմբին և ասվում է, որ* G *խումբը վերլուծվել է իր* A *և* B *ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի (ներքին ուղիղ արտադրյալ): Բնականաբար, խմբերի գումարային գրառման դեպքում խոսվելու է ուղիղ գումարի մասին և օգտագործվելու է* $A \oplus B$ *նշանակումը:*

Եթե աբելյան խմբի որևէ ենթախմբի բոլոր տարրերի կարգերը p *պարզ թվի աստիճաններ են, ենթախումբը կոչվում է պրիմար:*

Ցանկացած զրոյից տարբեր վերջավոր աբելյան խումբ վերլուծվում է պրիմար ցիկլիկ ենթախմբերի ուղիղ գումարի (վերջավոր աբելյան խմբերի հիմնական թեորեմ):

Անվերջ ցիկլիկ խմբերի ուղիղ գումարը կոչվում է ազատ աբելյան խումբ, իսկ այդ ցիկլիկ խմբերի ծնիչների բազմությունը՝ ազատ աբելյան խմբի բազիս: Բազիսի տարրերի քանակը կոչվում է ազատ խմբի ռանգ:

213. Ցույց տալ, որ A և B խմբերի ուղիղ արտադրյալը խումբ է:

214. Քլայնի $K_4 = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ խումբը կարելի է վերլուծել երկրորդ կարգի 2 ցիկլիկ խմբերի ուղիղ արտադրյալի: Ապացուցել:

215. Վերլուծվո՞ւմ են արդյոք ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի ա) S_3, բ) A_4, գ) S_4 խմբերը:

216. Ապացուցել, որ Z և Q գումարային խմբերը չեն վերլուծվում այնպիսի ենթախմբերի ուղիղ գումարի, որոնցից ոչ մեկը զրոյական չէ:

217. Ցույց տալ, որ եթե r և s թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ապա rs կարգի ցիկլիկ խումբը կարելի է վերլուծել r և s կարգերի երկու ցիկլիկ ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի:

218. Ապացուցել, որ

ա) կոմպլեքս թվերի գումարային C խումբ կարելի է վերլուծել իրական և կեղծ թվերի գումարային խմբերի ուղիղ գումարի՝ $C = R \oplus Ri$,

բ) կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խումբը կարելի է վերլուծել դրական իրական թվերի և մոդուլով մեկ կոմպլեքս թվերի ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի:

219. Դիցուք p-ն պարզ թիվ է: Ապացուցել, որ p^n կարգի ցիկլիկ խումբը հնարավոր չէ վերլուծել իր ոչ ակներև ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի:

220. Որքա՞ն է

ա) երկու վերջավոր խմբերի ուղիղ արտադրյալի կարգը,

բ) երկու վերջավոր խմբերի ուղիղ արտադրյալի տարրի կարգը:

221. Ապացուցել, որ քվատերնիոնների խումբը հնարավոր չէ ներկայացնել որպես իր ոչ ակներև ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալ (քվատերնիոնների խմբի ոչ ակներև ենթախմբերն են $<-1>$, $<i>$, $<j>$, $<k>$ ընդ որում առաջինն ունի երկու տարր, իսկ մնացածները՝ 4-ական տարր):

222. Ապացուցել, որ զրոյից տարբեր իրական թվերի արտադրյալային խումբը կարելի է վերլուծել դրական թվերի արտադրյալային խմբի և 2 կարգի ցիկլիկ խմբի ուղիղ արտադրյալի:

223. Ապացուցել, որ ուղիղ արտադրյալի կենտրոնը հավասար է արտադրիչների կենտրոնների ուղիղ արտադրյալին:

224. Ապացուցել, որ ուղիղ արտադրյալի կոմուտանտը հավասար է արտադրիչների կոմուտանտների ուղիղ արտադրյալին:

225. Գտնել $\pm 2^n$ տեսքի թվերից կազմված խմբի բոլոր վերլուծություններն ուղիղ արտադրյալի:

226. Ցույց տալ, որ $(Z/2Z)\oplus(Z/2Z)$ և $Z/4Z$ խմբերն իրար իզոմորֆ չեն:

227. Ապացուցել, որ 385 կարգի աբելյան խումբը կարելի է վերլուծել իր 5, 7 և 11 կարգ ունեցող ցիկլիկ ենթախմբերի ուղիղ գումարի:

228. Եթե 28 կարգի G աբելյան խումբը ցիկլիկ չէ, ապա այն կարելի է վերլուծել իր A և B ենթախմբերի ուղիղ գումարի, որտեղ A-ն 4 կարգի ոչ ցիկլիկ ենթախումբ է, իսկ B-ն 7 կարգի ցիկլիկ ենթախումբ: Ապացուցել:

229. Ապացուցել, որ վերջավոր ցիկլիկ խումբը վերլուծվում է պրիմար ցիկլիկ ենթախմբերի ուղիղ գումարի:

230. Ցույց տալ, որ եթե աբելյան խմբում $A_1, A_2, \cdots A_k$ ենթախմբերն ունեն վերջավոր փոխադարձաբար պարզ կարգեր, ապա նրանց գումարն ուղիղ է:

231. Վերլուծել ուղիղ գումարի ա) Z_6, բ) Z_{12}, գ) Z_{60} խմբերը:

232. Ցույց տալ, որ եթե աբելյան խմբի կարգը բաժանվում է p պարզ թվի վրա, ապա խմբում գոյություն ունի p կարգի տարր:

233. Քանի՞ 2 և 6 կարգի ենթախմբեր ունի 12 կարգի ոչ ցիկլիկ աբելյան խումբը:

234. Քանի՞ 3 և 6 կարգի ենթախմբեր ունի 18 կարգի ոչ ցիկլիկ աբելյան խումբը:

235. Նկարագրել 200 կարգի բոլոր 6 (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ) աբելյան խմբերը՝ ներկայացնելով նրանք ցիկլիկ ենթախմբերի ուղիղ գումարի տեսքով:

236. Դիցուք U ազատ աբելյան խումբը ներկայացվել է $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ծնիչներով անվերջ ցիկլիկ խմբերի ուղիղ գումարի տեսքով՝

$$U = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_n \rangle :$$

Ցույց տալ, որ U խմբի յուրաքանչյուր x տարր կարելի է ներկայացնել որպես $u_1, u_2, \ldots, u_n$ բազիսի գծային կոմբինացիա՝

$x = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$, որտեղ բոլոր k_i թվերն ամբողջ են:

237. Ցույց տալ, որ եթե U ազատ աբելյան խմբի համար $u_1, u_2, \ldots, u_n$ բազիս է, և k-ն որևէ ամբողջ թիվ է, ապա $u_1 + k u_2, u_2, \ldots, u_n$ տարրերը նույնպես կազմում են U խմբի բազիս:

238. Եթե ազատ աբելյան խումբն ունի երկուսից ոչ պակաս ծնիչ, ապա այն ունի անվերջ թվով բազիսներ: Ապացուցել:

Աբելյան խմբի $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *տարրերը կոչվում են գծորեն անկախ, եթե* $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_s a_s = 0$, $k_i \in Z$ *հավասարումներից հետևում է, որ* $k_i = 0$:

239. Ցույց տալ, որ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ծնիչներով U ազատ աբելյան խմբում $2u_1, 2u_2, \ldots, 2u_n$ տարրերը գծորեն անկախ են, բայց չեն կազմում բազիս:

240. Ապացուցել, որ n ծնիչ ունեցող ցանկացած աբելյան խումբ իզոմորֆ է n ռանգի որևէ ազատ աբելյան խմբի ֆակտոր խմբի:

241. Ցույց տալ, որ ազատ աբելյան խմբի ենթախմբերն ազատ են, ընդ որում ենթախմբերի ռանգը չի գերազանցում խմբի ռանգին:

242. Դիցուք G-ն x_1, x_2, x_3 ծնիչներով ազատ աբելյան խումբ է, իսկ H-ը y_1, y_2, y_3 ծնիչներով նրա ենթախումբը: G/H ֆակտոր խումբը վերլուծել պրիմար ցիկլիկ և անվերջ ցիկլիկ ենթախմբերի ուղիղ գումարի, եթե

ա) $y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3$
$y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3$

բ) $y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$
$y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3$
$y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3$

գ) $y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3$
$y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3$
$y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3$

դ) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3$
$y_2 = 8x_1 + 7x_2 + 11x_3$
$y_3 = 6x_1 + 5x_2 + 11x_3$

ե) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3$
$y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3$
$y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

զ) $y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3$
$y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3$
$y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 4x_3$

է) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$
$y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3$
$y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3$

ը) $y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$y_2 = 2y_1$
$y_3 = 3y_1$

թ) $y_1 = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$
$y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$

ժ) $y_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$
$y_2 = 5x_1 + 5x_2 + 6x_3$

$y_3 = 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \qquad y_3 = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3$

243. G աբելյան ազատ խումբն ունի x_1, x_2, x_3 բազիսը, իսկ նրա H ենթախմբի ծնիչներն են $x_1 + x_2 + 4x_3$, $2x_1 - x_2 + 2x_3$ տարրերը: Ցույց տալ, որ $(x_1 + 2x_3) + H$ հարակից դասի կարգը 3 է:

244. Ապացուցել, որ եթե G աբելյան խմբում a տարրի կարգը փոխադարձաբար պարզ է տրված n թվի հետ, ապա $nx = a$ հավասարումը G խմբում ունի լուծում:

ԽՄԲԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Դիցուք տրված է M *բազմությունը և* G *խումբը:* G *խումբն ազդում է* M *բազմության վրա ձախից, եթե յուրաքանչյուր* $x \in M$ *և* $g \in G$ *տարրերի համար սահմանված է* $gx \in M$ *տարրը, ընդ որում* $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ *և* $ex = x$ *բոլոր* $x \in M$ *և* $g_1, g_2 \in G$ *համար,* e*-ն* G *խմբի միավոր տարրն է:*

M *բազմության* $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ *ենթաբազմությունը կոչվում է* $x \in M$ *տարրի ուղեծիր:* G *խմբի տարրերի բազմությունը, որոնք* M *բազմության որևէ* x_0 *կետ թողնում են անշարժ,* G *խմբի ենթախումբ է, որը կոչվում է* $x_0 \in M$ *կետի ստացիոնար (կամ ստաբիլ) ենթախումբ*

$$St(x_0) = \{g \in G \mid g x_0 = x_0\}:$$

G *խմբի գործողությունը* M *բազմության վրա կոչվում է տրանզիտիվ, եթե ցանկացած* $x, y \in M$ *համար գոյություն ունի այնպիսի* $g \in G$ *տարր, որ* $gx = y$*: Երբ* G*-ն* M *բազմության արտապատկերումների խումբ է և բավարարում է այդ պայմաններին, այն կոչվում է տրանզիտիվ խումբ:*

Եթե n *տարր ունեցող բազմության* a *տեղադրությունը վերլուծվում է* i *երկարությամբ* b_i *հատ ցիկլերի արտադրյալի* $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *ասվում է, որ* a *տեղադրությունն ունի* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *տիպ: Եթե* G*-ն* n *տարր ունեցող բազմության տեղադրությունների որևէ խումբ է, ապա*

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$$

բազմանդամը, որտեղ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ g *տեղադրության տիպն է, կոչվում է* G *խմբի ցիկլային ինդեքս:*

Եթե G*-ն տեղադրությունների խումբ է,* $\Psi(g)$*-ն* $g \in G$ *տեղադրության անշարժ կետերի քանակը,* $\omega(G)$*-ն* G *խմբի ուղեծրերի քանակը, ապա ըստ Բերնսայդի լեմմայի,* $\omega(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\Psi(g)$*:*

Մասնավոր դեպքում, երբ G*-ն տեղադրությունների որևէ* n *կարգի ցիկլիկ խումբ է, ինչպես օրինակ անիվի ներկման (մանյակներ կազմելու) խնդրում, ուղեծրերի քանակը կարելի է հաշվել* $\omega(G) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Psi(a^k)$ *բանաձևով, որտեղ* a*-ն խմբի ծնիչն է: Եթե* q *գույնի ուլունքներից կազմում են այնպիսի մանյակներ, որոնց համար օգտագործվում է* n *ուլունք, իրարից տարբեր մանյակների թիվը կարելի է հաշվել նաև* $\omega(G) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)q^d$ *բանաձևով (տես նաև 50 և 395 խնդիրները):*

245. Դիցուք G-ն խորանարդի պտույտների խումբն է: Գտնել նրա գագաթներից որևէ մեկի ստացիոնար ենթախմբի կարգը: Ո՞ր պտույտներից է կազմված այդ ենթախումբը:

246. Նկարագրել կանոնավոր հնգաթև աստղի համաչափությունների խումբը, գտնել այդ խմբի կարգը և աստղի որևէ գագաթի ստացիոնար ենթախումբը:

247. Գտնել երկչափ հարթության չվերասերված գծային ձևափոխությունների խմբի բոլոր ուղեծրերը:

248. Գտնել G խմբի բոլոր ուղեծրերը, եթե
   ա) G-ն երկչափ հարթության օրթոգոնալ ձևափոխությունների խումբն է,
   բ) G-ն երկչափ հարթության այն ձևափոխությունների խումբն է, որոնց մատրիցը e_1, e_2 օրթոնորմալ բազիսում անկյունագծային է,
   գ) G-ն երկչափ հարթության այն ձևափոխությունների խումբն է, որոնց մատրիցը e_1, e_2 օրթոնորմալ բազիսում վերին եռանկյուն է:

249. Գտնել $a = e_1 + e_2$ վեկտորի ստացիոնար ենթախումբը նախորդ խնդրի բ) և գ) խմբերի համար:

250. Գտնել $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ տեղադրությամբ առաջացած և $\{1, 2, \ldots, 10\}$ բազմության վրա գործող խմբի բոլոր ուղեծրերը և բոլոր ստացիոնար ենթախմբերը:

251. Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգում տրված է $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $C(0, -1)$ և $D(-2, 0)$ գագաթներով շեղանկյունը: Պահանջվում է

ա) գտնել հարթության այն օրթոգոնալ ձևափոխությունների մատրիցները, որոնք ինքնահամատեղում են շեղանկյունը,

բ) ցույց տալ, որ այդ մատրիցները կազմում են Քլայնի K_4 խմբին (խնդիր 4) իզոմորֆ խումբ,

գ) գտնել G խմբի շեղանկյան գագաթների վրա գործողության ուղեծրերը և ստացիոնար ենթախմբերը:

252. Ցույց տալ, որ ցանկացած G խմբի համար

ա) համալուծը վերցնելու գործողությունը՝ $a \mapsto gag^{-1}$ G խմբի գործողություն է G բազմության վրա,

բ) նման գործողության դեպքում կետի ստացիոնար ենթախումբը (այն կոչվում է a տարրի նորմալիզատոր կամ կենտրոնացնող) համընկնում է G խմբի a տարրի հետ տեղափոխելի տարրերի բազմության հետ:

253. Գտնել $a=(1\ 2)(3\ 4)$ տարրի նորմալիզատորը S_4 խմբում:

254. Գտնել $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ տարրի նորմալիզատորը S_n խմբում:

255. Գտնել համալուծության դասերի քանակը ա) S_4, բ) S_5, գ) S_6 խմբերում, օգտվելով 113 խնդրի արդյունքից:

256. Ցույց տալ, որ ցանկացած n-ի համար S_n և A_n խմբերը տրանզիտիվ են:

257. Հետևյալ խմբերից որո՞նք են տրանզիտիվ.

ա) $G_1 = \langle (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6), (1\ 3\ 4\ 6) \rangle$,

բ) $G_2 = \langle (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6), (1\ 2\ 3) \rangle$,

գ) $G_3 = \langle (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6), (1\ 2\ 3)(5\ 6\ 7) \rangle$,

որտեղ G_1 և G_2 խմբերը S_6-ի, իսկ G_3-ը՝ S_7-ի ենթախմբեր են:

258. Դիցուք G-ն M բազմության արտապատկերումների տրանզիտիվ խումբ է և $a \in M$: Ապացուցել, որ

ա) $St(a)$ ենթախումբ է G խմբում,

բ) եթե $ga = b$ $(g \in G)$ ապա $gSt(a)$ դասը բաղկացած է G-ի բոլոր այն արտապատկերումներից, որոնք $a \in M$ տարրը տանում են $b \in M$ տարրին:

259. Դիցուք G-ն n տարր ունեցող M բազմության արտապատկերումների տրանզիտիվ խումբ է: Ապացուցել, որ $St(a)$ $(a \in M)$ ենթախմբի ինդեքսը G խմբում հավասար է n-ի:

260. Ապացուցել, որ n տարր ունեցող բազմության արտապատ–կերումների տրանզիտիվ խմբի կարգը բաժանվում է n-ի վրա:

261. Պարզել, թե հարթության հետևյալ ձևափոխությունների խմբերից որո՞նք են տրանզիտիվ.

ա) բոլոր չվերասերված ձևափոխությունների խումբը,

բ) բոլոր զուգահեռ տեղաշարժերի խումբը,

գ) որևէ կետի շուրջը հարթության պտույտների խումբը:

262. Մի՞շտ է արդյոք տեղադրությունների տրանզիտիվ խումբը պարունակում n կարգի տարր:

263. Ապացուցել, որ եթե G-ն M բազմության արտապատկերումների տրանզիտիվ խումբ է և $a \in M$, $b \in M$, ապա $St(a)$ և $St(b)$ ենթախմբերն իրար համալուծ են:

264. Ցույց տալ, որ n տարր ունեցող բազմության տեղադրությունների տրանզիտիվ խումբը պարունակում է անշարժ կետ չունեցող $(n-1)$-ից ոչ պակաս տեղադրություն:

265. n տարր ունեցող բազմության տեղադրությունների ցիկլիկ խումբը տրանզիտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա ծնիչը n երկարությամբ ցիկլ է: Այդպիսի խմբի կարգը n է և այն բաղկացած է n երկարությամբ $n-1$ ցիկլից և նույնական տեղադրությունից: Ապացուցել:

266. Ապացուցել, որ S_n խմբում

ա) n երկարությամբ ցիկլերի քանակը $(n-1)!$ է,

բ) n կարգի ցիկլիկ խմբում n կարգի տարրերի քանակը (այսինքն՝ ծնիչների քանակը) հավասար է $\varphi(n)$, որտեղ $\varphi(n)$-ը էյլերի ֆունկցիան է,

գ) n տարր ունեցող բազմության տեղադրությունների տրանզիտիվ ցիկլիկ խմբերի քանակը հավասար է $\frac{(n-1)!}{\varphi(n)}$:

267. Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը, եթե G-ն քառակուսու պտույտներով ստացվող նրա գագաթների տեղադրությունների խումբն է:

268. Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը, եթե G-ն կանոնավոր վեցանկյան պտույտներով ստացվող նրա գագաթների տեղադրությունների խումբն է:

269. Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը, եթե G-ն կանոնավոր քառանիստի պտույտներով ստացվող նրա գագաթների տեղադրությունների խումբն է:

270. Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը, եթե G-ն կանոնավոր քառանիստի պտույտներով ստացվող նրա բոլոր կողերի տեղադրությունների խումբն է:

271. Դիցուք G-ն կանոնավոր քառանիստի պտույտներով ստացվող նրա բոլոր նիստերի տեղադրությունների խումբն է: Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը:

272. Դիցուք G-ն խորանարդի գագաթների այն բոլոր տեղադրությունների խումբն է, որոնք ստացվում են նրա պտույտներով: Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը:

273. Դիցուք G-ն խորանարդի կողերի այն բոլոր տեղադրություններն են, որոնք ստացվում են նրա պտույտներով: Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը:

274. Դիցուք G-ն խորանարդի նիստերի այն բոլոր տեղադրություններն են, որոնք ստացվում են նրա պտույտներով: Գտնել G խմբի ցիկլային ինդեքսը:

275. Դիցուք $S=\{a, b, c, d\}$ և $G=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, որտեղ

$$u_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \ u_4=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}:$$

S բազմության վրա համարժեքության հարաբերությունը սահմանվում է G խմբի միջոցով, այն է՝ $x \in S$ և $y \in S$ երկու տարրեր համարժեք են, եթե գոյություն ունի $g \in G$, որ $gx=y$: Գտնել համարժեքության դասերի քանակը և ստացված արդյունքը ստուգել Բերնսայդի լեմմայի օգնությամբ:

276. a և b տառերից կազմվում են երեք տառանի բառեր: Բառերը համարվում են համարժեք, եթե նրանք ստացվում են մեկը մյուսից

եզրային տառերի տեղերը փոխելով, օրինակ, $aab \sim baa$: Օգտվելով Բերնսայդի լեմմայից, գտնել համարժեքության դասերի քանակը:

277-285 խնդիրներում արտացոլումները չեն դիտարկվում:

277. Խորանարդի նիստերը ներկվում են կարմիր և դեղին գույներով:Ներկման իրարից տարբեր քանի՞ հնարավորություն կա:
278. Քանի՞ իրարից տարբեր մանյակ կարելի է պատրաստել կապույտ, սպիտակ և դեղին ուլունքներից, եթե օգտագործվում է հինգ ուլունք:
279. Քանի՞ իրարից տարբեր ձևերով է կարելի խորանարդի գագաթները ներկել կարմիր կամ դեղին գույներով:
280. Քանի՞ ձևով է հնարավոր խորանարդի նիստերը ներկել չորս տարբեր գույներով:
281. Քանի՞ իրարից տարբեր մանյակ կարելի է պատրաստել, եթե օգտագործվում է երեք գույնի յոթ ուլունք:
282. Քառակուսու գագաթները ներկված են կարմիր,դեղին կամ սպիտակ գույներից որևէ մեկով: Քանի՞ այդպիսի իրար հետ չհամատեղվող քառակուսիներ կան:
283. Կանոնավոր վեցանկյան յուրանքանչյուր գագաթ նշված է կարմիր, դեղին կամ սպիտակ գույներից որևէ մեկով: Քանի՞ այդպիսի իրար հետ չհամատեղվող վեցանկյուններ կան:
284. Սեղանի շուրջը նստելու են n մարդ: Քանի՞ տարբեր եղանակով է դա հնարավոր, եթե միանման են համարվում այն դեպքերը, որոնք ստացվում են ժամսլաքի շարժման ուղղությամբ բոլոր մարդկանց միևնույն թվով տեղերով տեղաշարժելուց:
285. Խորանարդի գագաթները նշվում են կարմիր, դեղին կամ սպիտակ գույներից որևէ մեկով: Քանի՞ այդպիսի չհամատեղվող խորանարդներ կան:

ՍԻԼՈՎԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

Դիցուք $|G| = p^n m$, *որտեղ* p*-ն պարզ թիվ է, իսկ* m *ամբողջ թիվը չի բաժանվում* p*-ի:* G *խմբի* p^n *կարգի ենթախումբը կոչվում է* G *խմբի սիլովյան* p*-ենթախումբ: Ճիշտ են Սիլովի հետևյալ թեորեմները.*

1. *Ցանկացած խմբի սիլովյան* p*-ենթախմբեր գոյություն ունեն:*
2. *Եթե* P_1 *և* P_2 *սիլովյան երկու* p*-ենթախմբեր են, ապա գոյություն ունի* $a \in G$ *տարր, որ* $P_2 = aP_1a^{-1}$, *այսինքն՝ սիլովյան բոլոր* p*-ենթախմբերն իրար համալուծ են:*

3. *Եթե սիլովյան* p*-ենթախմբերի թիվը* G *խմբում հավասար է* N_p, *ապա* N_p*-ն* G *խմբի կարգի բաժանարար է և* $N_p \equiv 1 \pmod p$:

286. Ապացուցել, որ S_4 խմբում սիլովյան 2-ենթախմբերն են

$$K_4 \cup \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4)\},$$

$$K_4 \cup \{(1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\},$$

$$K_4 \cup \{(2\ 3), (1\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2\ 4\ 3)\}:$$

287. Ապացուցել որ S_4 խմբում սիլովյան 3-ենթախմբերն են $<(1\ 2\ 3)>, <(1\ 2\ 4)>, <(1\ 3\ 4)>, <(2\ 3\ 4)>$:

288. Քանի՞ իրարից տարբեր սիլովյան p-ենթախմբեր կան A_5 խմբում, եթե ա) $p=2$, բ) $p=3$, գ) $p=5$:

289. Քանի՞ իրարից տարբեր սիլովյան p-ենթախմբեր կան S_p խմբում, եթե p-ն պարզ թիվ է:

290. Ապացուցել, որ սիլովյան p-ենթախումբը G խմբում միակն է, եթե այն նորմալ է:

291. Ապացուցել, որ 100 կարգի խմբի սիլովյան բոլոր ենթախմբերն աբելյան են:

292. Քանի՞ իրարից տարբեր սիլովյան 2-ենթախումբ և 5-ենթախումբ կա 20 կարգի ոչ աբելյան խմբում:

293. Ցույց տալ, որ S_3 խումբը 6 կարգի միակ ոչ աբելյան խումբն է:

294. Նկարագրել $2p$ կարգի բոլոր խմբերը, որտեղ p-ն պարզ թիվ է:

295. Ապացուցել, որ 15 կարգի ցանկացած խումբ ցիկլիկ է:

296. Ցույց տալ, որ գոյություն ունեն 8 կարգի ոչ աբելյան միայն երկու ոչ իզոմորֆ խմբեր՝ քվատերնիոնների Q_8 խումբը և դիեդրի D_4 խումբը:

297. Ապացուցել որ եթե վերջավոր խմբի կարգը բաժանվում է p պարզ թվի վրա,ապա խումբն ունի p կարգի տարր:

298. Նկարագրել pq կարգի բոլոր խմբերը, որտեղ p և q պարզ թվեր են:

299. Ապացուցել, որ եթե խմբի բոլոր սիլովյան ենթախմբերը նորմալ են, խումբը կարելի է ներկայացնել որպես նրանց ուղիղ արտադրյալ:

300. Ցույց տալ, որ գոյություն չունեն ա) 36, բ) 80, գ) 56 կարգի պարզ խմբեր:

301. Ստուգել ստորև բերված աղյուսակի ճշտությունը, որտեղ գրված են տված կարգի հնարավոր բոլոր խմբերը (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ):

տարրերի քանակը	աբելյան խմբերը	ոչ աբելյան խմբերը
2	Z_2	--
3	Z_3	--
4	Z_4, $Z_2 \oplus Z_2$	--
5	Z_5	--
6	Z_6	$D_3 \cong S_3$
7	Z_7	--
8	Z_8, $Z_4 \oplus Z_2$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$	D_4, Q_8
9	Z_9, $Z_3 \oplus Z_3$	--
10	Z_{10}	D_5

302. Ստորև բերված աղյուսակում նշված է տված կարգի իրարից տարբեր խմբերի քանակը (իզոմորֆիզմի ճշտությամբ):

կարգ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
խմբերի թիվը	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2
այդ թվում ոչ աբելյան	0	0	0	0	0	1	0	2	0	1

կարգ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
խմբերի թիվը	1	5	1	2	1	14	1	5	1	5
այդ թվում ոչ աբելյան	0	3	0	1	0	9	0	3	0	3

Ստուգել այդ աղյուսակի ճշտությունը, բացառությամբ 16 կարգի խմբի: Բերել 16 կարգի 6 իրարից տարբեր խմբերի օրինակներ,

որոնցից առնվազն երկուսը՝ ոչ աբելյան: Այդուսակը մինչև ո՞ր կարգի խմբերը կարող եք շարունակել:

ԼՈՒԾԵԼԻ ԽՄԲԵՐ

Հիշեցնենք (տես 191-195 խնդիրներ), որ $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ *տարրը կոչվում է* G *խմբի* a *և* b *տարրերի կոմուտատոր (տեղափոխիչ): Եթե* a *և* b *տարրերը տեղափոխելի են,* $[a, b] = e$*, իսկ ընդհանրապես* $ab = ba[a, b]$*:*

Դիցուք M*-ը* G *խմբի տարրերի կոմուտատորների բազմությունն է:* G *խմբի կոմուտանտ կանվանենք* M *բազմությամբ առաջացած ենթախումբը, այսինքն* M*-ը պարունակող բոլոր ենթախմբերի հատումը: Խմբի կոմուտատորն ընդունված է անվանել նաև ածանցյալ ենթախումբ կամ պարզապես խմբի ածանցյալ և նշանակել* $G' = G^{(1)}$*:* $G^{(1)}$ *ածանցյալ ենթախումբը նորմալ է* G *խմբում և* $G/G^{(1)}$ *ֆակտոր խումբն աբելյան է ցանկացած* G *խմբի համար (տես խնդիր 191):*

Կարելի է դիտարկել նաև $G^{(1)}$*-ի ածանցյալ ենթախումբը* $G^{(2)} = \left(G^{(1)}\right)'$*, որը կոչվում է երկրորդ ածանցյալ ենթախումբ* G *խմբի երկրորդ կոմուտանտ: Նման ձևով,* $G^{(k+1)}$ *ածանցյալ ենթախումբը սահմանվում է որպես* $G^{(k)}$ *ենթախմբի ածանցյալ ենթախումբ: Արդյունքում ստացվում է իրար մեջ ներդրված նորմալ ենթախմբերի շարք՝*

$$G \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots \supset G^{(k)} \supset G^{(k+1)} \supset \ldots,$$

ընդ որում բոլոր $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ *ֆակտոր խմբերն աբելյան են:*

G *խումբը կոչվում է լուծելի, եթե գոյություն ունի* $n \geq 1$ *բնական թիվ, որ* $G^{(n)} = e$*: Ամենափոքր այդպիսի* n *թիվը կոչվում է* G *խմբի լուծելիության աստիճան:*

Լուծելի խմբի գաղափարը մեծ դեր է խաղում արմատանշանների օգնությամբ հանրահաշվական հավասարումների լուծելիության Գալուայի տեսության մեջ: S_4 *խմբի և նրա բոլոր ենթախմբերի լուծելիությամբ է պայմանավորված* $n \leq 4$ *աստիճանի հանրա-*

հաշվական հավասարումների լուծման հնարավորությունն արմատանշանների օգնությամբ (տես նաև խնդիր 315):

303. Ապացուցել, որ խմբի ցանկացած a, b, c տարրերի համար

ա) $[a,b]^{-1}=[b,a]$,

բ) $[ba,c]=a^{-1}[b,c]a[a,c]$,

գ) $[c,ab]=[c,b]b^{-1}[c,a]b$,

304. Ցույց տալ, որ S_3 խմբի ցանկացած a, b, c տարրերի համար

ա) $[[a,b],c]=e$, բ) $[a^2,b^2]=e$:

305. Երկրորդ կարգի չվերասերված մատրիցների արտադրյալային խմբում գտնել

$$a_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\ a_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{bmatrix}$$

տարրերի $[a_1,a_2]$, $[a_2,a_3]$, $[a_3,a_1]$ կոմուտատորները:

306. Գտնել ա) S_3, բ) A_4, գ) S_4, դ) Q_8 խմբերի ածանցյալ ենթախմբերը և ըստ նրանց ֆակտոր խմբերի կարգերը:

307. Գտնել ա) S_n, բ) D_n խմբերի ածանցյալ ենթախմբերը:

308. Ցույց տալ, որ հետևյալ խմբերը լուծելի են և գտնել նրանց լուծելիության աստիճանը. ա) S_3, բ) A_4, գ) S_4, դ) Q_8, ե) D_n:

309. Ապացուցել, որ եթե p թիվը պարզ է, p^n կարգի ցանկացած խումբ լուծելի է:

310. Ապացուցել, որ ա) pq, բ) p^2q կարգի խմբերը, որտեղ p և q իրարից տարբեր պարզ թվեր են, լուծելի են:

311. Ստուգել, որ հետևյալ կարգի խմբերը լուծելի են. ա) 20, բ) 12, գ) 42, դ) $n<60$:

312. Ցույց տալ, որ

ա) եթե աբելյան խմբում a և b տարրերը կապված են

$a^3=b^5=(ab)^7=e$ առնչությամբ, ապա $a=b=e$,

բ) S_7 խմբում $a=(1\,2\,3)$ և $b=(1\,4\,5\,6\,7)$ տեղադրություններով առաջացած ենթախումբն անլուծելի է:

313. Ապացուցել, որ

ա) լուծելի խմբի ցանկացած ենթախումբ լուծելի է,

բ) լուծելի խմբի ցանկացած ֆակտոր խումբ լուծելի է,

գ) եթե A և B խմբերը լուծելի են, ապա $A \times B$ ուղիղ արտադրյալը նույնպես լուծելի է,

դ) եթե H-ը նորմալ ենթախումբ է G խմբում, H և G/H խմբերը լուծելի են, ապա G խումբը նույնպես լուծելի է:

314. Ցույց տալ, որ երրորդ կարգի վերին եռանկյուն մատրիցների արտադրյալային խումբը լուծելի է:

315. Ապացուցել, որ հետևյալ խմբերը անլուծելի են.

ա) A_5 խումբը,

բ) A_n խումբը $n > 5$ դեպքում,

գ) S_n խումբը $n \geq 5$ դեպքում:

ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

$n \times n$ չափերի քառակուսի աղյուսակը, որը լրացված է n տարբեր տարրերով այնպես, որ յուրաքանչյուր տարր ամեն մի տողում և սյունում գրված է մեկ անգամ, կոչվում է լատինական քառակուսի: Երկու (a_{ij}) և (b_{ij}) լատինական քառակուսիներ կոչվում են իրար օրթոգոնալ, եթե (a_{ij}, b_{ij}) զույգերն իրարից տարբեր են:

316. Ապացուցել, որ վերջավոր խմբի բազմապատկման Կելիի աղյուսակը լատինական քառակուսի է:

317. Ենթադրենք G-ն 9 կարգի ոչ ցիկլիկ աբելյան խումբ է: Ըստ այդ խմբի բազմապատկման աղյուսակի կազմենք բազմապատկման նոր աղյուսակ, փոխարինելով $a \cdot b = c$ առնչությունը $a \cdot c = b$ առնչությամբ: Ցույց տալ, որ ստացվում է լատինիկան քառակուսի, որն օրթոգոնալ է նախորդին:

318. Դիցուք G-ն 2 կարգի 3 ցիկլիկ խմբերի ուղիղ գումար հանդիսացող 8 կարգի աբելյան խումբ է և H-ը նրա այն ավտոմորֆիզմների խումբն է, որոնք անշարժ են թողնում միայն G խմբի միավորը (բացառությամբ նույնական ավտոմորֆիզմի): Օգտվելով H խմբից, կառուցել 8 կարգի 7 իրարից տարբեր լատինական քառակուսիներ:

319. Դիցուք G-ն p կարգի k ցիկլիկ խմբերի ուղիղ գումար է և ունի $n = p^k$ կարգը, p-ն պարզ թիվ է: Ապացուցել որ գոյություն ունեն $n-1$ հատ իրար օրթոգոնալ լատինական քառակուսիներ, որոնք իրարից տարբերվում են միայն տողերի (սյուների) դասավորությամբ:

Երկու փոփոխականներից կախված Լորենցի ձևափոխություններն ունեն

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

տեսքը, որտեղ t*-ն ժամանակն է,* x*-ը կետի կոորդինատը,* v*-ն արագությունը,* c*-ն լույսի արագությունը: Սահմանային դեպքում, երբ* $\frac{v}{c} \to 0$*, ստացվում են կլասիկ մեխանիկայի հարաբերական շարժման* $x' = x - vt$, $t' = t$ *սովորական բանաձևերը:*

Լորենցի ձևափոխություններն ստացվում են, երբ հարաբերականության հատուկ տեսության մեջ որպես աքսիոմ ընդունվում է, որ որոշակի c *արագություն, այն է լույսի արագությունը հարաբերական շարժման դեպքում մնում է անփոփոխ: Լորենցի ձևափոխությունները կազմում են խումբ: Այդ խումբը մեծ դեր է խաղում ֆիզիկայի այն բաժիններում, որոնք առնչվում են հարաբերականության սկզբունքի հետ:*

320. Լուծելով (1) հավասարություններից ստացվող

$$\begin{cases} x - vt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, x' \\ -\frac{v}{c^2}x + t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t' \end{cases}$$

համակարգը, ցույց տալ, որ Լորենցի ձևափոխության հակադարձը նորից Լորենցի ձևափոխություն է - v պարամետրով:

321. Ապացուցել, որ v_1 և v_2 պարամետրերով Լորենցի երկու ձևափոխությունների արտադրյալը նորից Լորենցի ձևափոխություն

է $v_3 = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$ պարամետրով (արագությունների գումարման բանաձևը հարաբերականության հատուկ տեսությունում):

322. Օգտվելով նախորդ խնդրից, ցույց տալ, որ հարաբերականության հատուկ տեսությունում լույսի արագությանը ցանկացած արագություն գումարելիս այն մնում է անփոփոխ:

323. Ստուգել, որ $x^4 = e$ հավասարումը S_3 խմբում ունի ճիշտ չորս լուծում, որոնք ենթախումբ չեն կազմում:

324. Դիցուք G վերջավոր խմբի կարգը բաժանվում է 12-ի վրա և $x^{12} = e$ հավասարումը G խմբում ունի ճիշտ 12 լուծում: Ցույց տալ, որ այդ լուծումները կազմում են G խմբի նորմալ ենթախումբ:

325. Դիցուք G խմբի կարգը p^2qr է, որտեղ p, q և r իրարից տարբեր պարզ թվեր են: Ցույց տալ, որ G խումբը լուծելի է, եթե չի համընկնում A_5 խմբի հետ:

326. Ապացուցել, որ եթե H նորմալ ենթախումբը և G/H ֆակտոր խումբը պարբերական են, ապա G խումբը նույնպես պարբերական է:

327. Դիցուք G-ն դրական ռացիոնալ թվերի արտադրյալային խումբն է, H-ը երկու դրական կենտ թվերի հարաբերություն հանդիսացող թվերի ենթախումբը: Ցույց տալ, որ $G/H \simeq Z$:

328. Դիցուք S_n խումբն արտապատկերվում է n-րդ կարգի չվերասերված մատրիցների արտադրյալային խմբի մեջ հետևյալ ձևով. $a \in S_n$ համար $\varphi(a) = (a_{ij})$,

որտեղ $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ երբ } a(i) = j, \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում:} \end{cases}$

Ցույց տալ, որ φ արտապատկերումը իզոմորֆիզմ է S_n և 16 խնդրի խմբերի միջև:

329. Խումբն առաջացել է a և b տարրերով, որոնք կապված են $a^5 = e$, $b^2 = e$, $abab = e$ որոշող առնչություններով: Քանի՞ տարր ունի այդ խումբը:

330. Խումբն առաջացել է a և b տարրերով, որոնք կապված են $a^4 = e$, $b^2 = e$, $abab = e$ առնչություններով: Քանի՞ տարր ունի այդ խումբը:

331. Ապացուցել, որ ոչ աբելյան պարզ խումբը չի կարող ունենալ 30-ից ցածր կարգ:

332. Ցույց տալ, որ S_n խմբի կենտրոնը բաղկացած է միայն միավոր տարրից, իսկ n-րդ կարգի չվերասերված մատրիցների խմբի կենտրոնի տարրերը λE տեսքի մատրիցներն են, $\lambda \neq 0$:

333. $(Z/2Z) \oplus (Z/2Z)$ և $Z/4Z$ խմբերն իզոմորֆ արտապատկերել S_4 խմբի մեջ, այսինքն գտնել S_4 խմբի տրված խմբերին իզոմորֆ ենթախմբեր:

334. Ապացուցել, որ եթե G խմբի H և K ենթախմբերն ունեն m և n կարգերը, որոնք փոխադարձաբար պարզ են, ապա $H \cap K = e$:

335. Ցույց տալ, որ a և b ծնիչներով և $a^2 = b^2 = e$ որոշող առնչություններով խումբն իզոմորֆ է $\begin{bmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցների խմբին $(n \in Z)$:

336. Ցույց տալ, որ $D_n = < a, b \mid a^n = e, b^2 = e, (ab)^2 = e >$:

337. Ցույց տալ, որ $Q_8 = < a, b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} >$:

338. Դիցուք $G = < a, b \mid aba = ba^2b, a^3 = e, b^{2n-1} = e >$, որտեղ $n \in N$: Ապացուցել, որ $n = 1$, այսինքն $G = < a \mid a^3 = e >$:

339. Ապացուցել, որ $A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ և $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ մատրիցներով առաջացած արտադրյալային խումբն ազատ խումբ է:

340. Գտնել կանոնավոր քսանանիստի (իկոսաէդր) և տասներկուանիստի (դոդեկաէդր) պտույտների խմբերի կարգը և ցույց տալ, որ այդ խմբերն իզոմորֆ են իրար (կանոնավոր քսանանիստի նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են, իսկ կանոնավոր տասներկուանիստի նիստերը կանոնավոր հնգանկյուններ):

341. Ցույց տալ, որ եթե H-ը G խմբի ոչ ակներև ենթախումբ է, ապա H-ին համալուծ ենթախմբերը չեն պարունակում G խմբի բոլոր տարրերը:

342. Բերել պրիմար աբելյան խմբի օրինակ, որն ունի ճիշտ p^2+p+1 ենթախումբ:

343. Դիցուք A-ն a և b ծնիչներով և $p^2a=0$, $pb=0$ որոշող առնչություններով աբելյան խումբ է: Ապացուցել, որ եթե $K=<pa+b>$, ապա չի կարելի ընտրել A-ի և K-ի այնպիսի բազիսներ, որ K-ի բազիսային տարրը լինի A-ի բազիսային տարրերի բազմապատիկ:

344. Քանի՞ 7 կարգի տարր է պարունակում 168 կարգի ցիկլիկ խումբը:

345. Ցույց տալ, որ D_8 խումբն իզոմորֆ է իր ավտոմորֆիզմների խմբին:

346. Ցույց տալ, որ եթե խմբի կարգը բաժանվում է p պարզ թվի քառակուսու վրա, ապա նրա ավտոմորֆիզմների խմբի կարգը բաժանվում է p-ի:

347. Նկարագրել բոլոր վերջավոր խմբերը, որոնցում գոյություն ունեն առավելագույն ոչ ակներև ենթախմբեր:

348. Ապացուցել, որ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ամբողջաթիվ մատրիցների բազմությունը $ad-bc=1$, $a\equiv d\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, $b\equiv c\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ պայմանների դեպքում կազմում է $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ և $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ծնիչներով ազատ խումբ:

349. Ապացուցել, որ վերջավոր ինդեքսի ենթախմբերի հատումը ունի վերջավոր ինդեքս:

350. Նշել $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցների խմբում ($\alpha\neq 0$, α, β ռացիոնալ թվեր են), ենթախումբ, որը համալուծ է իր ոչ ակներև որևէ ենթախմբի:

351. Գտնել երկրորդ կարգի չվերասերված մատրիցների խմբի կոմուտանտը:

352. Եթե G խմբի կարգը մեծ է երկուսից, $\mathrm{Aut}\,G\neq e$: Ապացուցել:

353. Խումբը կոչվում է կատարյալ, եթե նրա կենտրոնը միավոր տարրն է և նրա բոլոր ավտոմորֆիզմները ներքին են: Ապացուցել, որ S_3, S_4, S_5 խմբերը կատարյալ են, իսկ S_2 և S_6 խմբերը ոչ:

354. Ապացուցել, որ եթե նորմալ ենթախումբը կատարյալ է, այն միշտ կարող է ծառայել որպես խմբի ուղիղ արտադրիչ:

355. Ո՞ր m բնական թվերի համար ստորև բերված խմբերում կգտնվեն m կարգի տարրեր ա) S_4, բ) S_5, գ) S_6: Յուրաքանչյուր m-ի համար գտնել m կարգի տարրերի քանակն այդ խմբերում:

356. Քվատերնիոնների խմբի տարրերը բաշխել իրար համալուծ տարրերի դասերի:

357. Դիցուք k-ն իրար համալուծ տարրերի որևէ դասի տարրերի քանակն է n կարգի վերջավոր խմբում: Խմբի կենտրոնի կարգը c է: Ապացուցել, որ k-ն բաժանարար է $\frac{n}{c}$ ամբողջ թվի համար:

358. Դիցուք n կարգի G վերջավոր խմբում x տարրի կարգը m է և x-ին համալուծ տարրերի դասը պարունակում է k տարր: Ապացուցել, որ k-ն $\frac{n}{m}$ ամբողջ թվի բաժանարարն է:

359. Գտնել բոլոր վերջավոր խմբերը, որոնք ունեն իրար համալուծ տարրերի
   ա) երկու դաս,
   բ) երեք դաս,
   գ) չորս դաս:

360. Նկարագրել $2m$ կարգի խմբերը, որոնք ունեն խմբի տարրերի կեսը պարունակող իրար համալուծ տարրերի դաս:

361. Պարզել, թե հետևյալ մատրիցներից որո՞նք են իրար համալուծ երկրորդ կարգի չվերասերված մատրիցների արտադրյալային խմբում.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}:$$

362. Ապացուցել, որ հետևյալ խմբերը լուծելի են.
   ա) հարթության բոլոր զուգահեռ տեղաշարժերի խումբը,
   բ) տված կետի շուրջը հարթության բոլոր պտույտների խումբը,
   գ) հարթության բոլոր կետերի շուրջը պտույտների և բոլոր զուգահեռ տեղաշարժերի խումբը:

363. Թվարկել 72 կարգի բոլոր ոչ իզոմորֆ աբելյան խմբերը:

364. Ցույց տալ, որ 100 և 275 կարգի խմբերը լուծելի են:

365. Ապացուցել, որ վերջավոր աբելյան A խմբում խմբի կարգի ցանկացած d բաժանարարի համար գոյություն ունի d կարգի ենթախումբ, այսինքն Լագրանժի թեորեմն աբելյան խմբերի համար հակադարձելի է:

366. Ապացուցել, որ A_5 խումբը չունի 30 կարգի ենթախումբ:

367. Ընտրելով եռաչափ տարածության հարմար բազիս, հետևյալ խմբերի տարրերը ներկայացնել մատրիցների տեսքով.

ա) դիեդրի D_n (մասնավորապես $n = 3$ և $n = 4$),

բ) կանոնավոր քառանիստի համաչափությունների,

դ) խորանարդի պտույտների,

ե) կանոնավոր քսանանիստի պտույտների:

368. Դիցուք p-ն պարզ թիվ է: Մեկից p^n աստիճանի արմատները $(n = 1, 2, \ldots)$ կազմում են արտադրյալային խումբ, որը կոչվում է p^∞ տիպի քվազիցիկլիկ խումբ: Ցույց տալ, որ այդ խմբում գոյություն ունի p^k կարգի միայն մեկ ցիկլիկ ենթախումբ:

369. Եթե G-ն n կարգի ցիկլիկ խումբ է, ապա $\mathrm{Aut}\, G$ խումբը $\varphi(n)$ կարգի աբելյան խումբ է, որտեղ $\varphi(n)$-ը էյլերի ֆունկցիան է: Ապացուցել:

370. Գտնել 1000 կարգի ցիկլիկ խմբի ավտոմորֆիզմների խմբի կարգը:

371. G խմբի H ենթախումբը կոչվում է բնութագրիչ, եթե $\varphi(H) = H$ ցանկացած $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$ համար: Ապացուցել, որ

ա) S_4 խմբում A_4 ենթախումբը բնութագրիչ է,

բ) Z և Z_m խմբերում բոլոր ենթախմբերը բնութագրիչ են,

գ) Q գումարային խումբը չունի ոչ ակներև բնութագրիչ ենթախումբ,

դ) խմբի կենտրոնը բնութագրիչ ենթախումբ է:

372. Կարո՞ղ է արդյոք Q գումարային խումբն ունենալ ծնիչների վերջավոր բազմություն:

373. Ապացուցել, որ A աբելյան խմբի A/B ֆակտոր խումբն ըստ նրա B պարբերական (վերջավոր կարգի տարրերից կազմված) ենթախմբի առանց ոլորման է, այսինքն՝ չունի վերջավոր կարգի տարրեր:

374. Ապացուցել, որ վերջավոր տարրերով առաջացած (վերջավորածին) առանց ոլորման աբելյան խումբն ազատ է:

375. Եթե A-ն վերջավորածին աբելյան խումբ է, B-ն նրա պարբերական մասը, ապա A խմբում գոյություն ունի C ազատ ենթախումբ այնպես, որ $A = B \oplus C$: Ապացուցել:

376. Ցույց տալ, որ p^n կարգի ոչ իզոմորֆ աբելյան խմբերի քանակը հավասար է n թվի $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_i$ հնարավոր տրոհումների քանակին, որտեղ $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

377. Կառուցել դրական ռացիոնալ թվերի արտադրյալային խմբի հոմոմորֆիզմ ամբողջ թվերի գումարային խմբի վրա:

378. n մարդ նստում են կլոր սեղանի շուրջը, ընդ որում երկու տեղավորումը համարվում է համարժեք, եթե յուրաքանչյուրի հարևանները չեն փոխվում: Տեղավորման քանի՞ իրարից տարբեր հնարավորություն կա:

379. Գտնել $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ տիպի տեղադրությունների քանակը:

380. Եթե n տարրերի $(n > 2)$ տեղադրությունների խումբը պարզ է, ապա այն պարունակվում է A_n խմբում: Ապացուցել:

381. Գտնել m_i երկարությամբ k_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, անկախ ցիկլեր ունեցող (հաշված նաև 1 երկարությամբ ցիկլերը) տեղադրության հետ տեղափոխելի տեղադրությունների քանակը:

382. Ցույց տալ, որ տված H ենթախմբի հետ տեղափոխելի (բայց ոչ անպայման H-ի տարրերի հետ տեղափոխելի) G խմբի տարրերի $N(H)$ բազմությունը ենթախումբ է (այն կոչվում է H ենթախմբի նորմալիզատոր):

383. Ապացուցել, որ

ա) H ենթախումբը $N(H)$-ում նորմալ է,

բ) H-ի հետ համալուծ ենթախմբերի քանակը G խմբում հավասար է $N(H)$ ենթախմբի ինդեքսին:

384. Գտնել S_n խմբի այն տեղադրությունների քանակը, որոնք համալուծ են տվածին:

385. Դիցուք G_n-ը n չափանի գծային տարածության գումարային խումբն է, H_k-ն k-չափանի որևէ ենթատարածություն (ենթախումբ), $0 \leq k \leq n$: Ապացուցել, որ $G_n / H_k \simeq H_{n-k}$:

386. Ապացուցել, որ կանոնավոր քսանանիստի խումբն անլուծելի է:

387. Խմբի անտիավտոմորֆիզմ է կոչվում նրա տարրերի բազմության այնպիսի փոխմիարժեք արտապատկերումն ինքն իր վրա, որի

դեպքում $\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a)$: Ցույց տալ, որ երկուսից ավելի կարգ ունեցող ցանկացած խմբի համար գոյություն ունի անտիավտոմորֆիզմ:

388. Եթե φ-ն G խմբի որևէ ավտոմորֆիզմ է, ապա $\varphi(G^{(1)})=G^{(1)}$: Ապացուցել:

389. Իզոմո՞րֆ են արդյոք $Z_{36}\oplus Z_{168}$ և $Z_{84}\oplus Z_{72}$ խմբերը:

390. Զրոյից տարբեր կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խումբն արտապատկերվում է զրոյից տարբեր իրական թվերի արտադրյալային խմբի մեջ: Հետևյալ արտապատկերներից որո՞նք են հոմոմորֆիզմ.

ա) $f(z)=|z|$, բ) $f(z)=2|z|$,

գ) $f(z)=\dfrac{1}{|z|}$,

դ) $f(z)=1+|z|$,

ե) $f(z)=|z|^2$ զ) $f(z)=1$,

է) $f(z)=2$:

391. Ապացուցել, որ G խմբի k ինդեքս ունեցող H նորմալ ենթախումբը պարունակում է G խմբի այն բոլոր տարրերը, որոնց կարգը փոխադարձաբար պարզ է k թվի հետ:

392. Ապացուցել, որ պրիմար խմբի կենտրոնը տարբեր է միավորից (խումբը կոչվում է պրիմար, եթե նրա բոլոր տարրերի կարգերը որևէ p պարզ թվի աստիճաններ են):

393-395 խնդիրներում, օգտագործելով խմբերի տեսության հասկացությունները, պահանջվում է ապացուցել էյլերի ֆունկցիայի արտադրյալային հատկությունը և ստանալ այդ ֆունկցիայի արժեքը կանոնական տեսքով տրված թվի համար:

393. Դիցուք $G=\langle a\rangle$ km կարգի ցիկլիկ խումբ է, որտեղ k և m թվերը փոխադարձաբար պարզ են և դիցուք $B=\langle a^m\rangle$ և $C=\langle a^k\rangle$: Ցույց տալ, որ

ա) B-ն k կարգի ենթախումբ է, C-ն m կարգի,

բ) եթե $b\in B$ ունի k կարգ, իսկ $c\in C$ ունի m կարգ, ապա bc տարրն ունի km կարգ,

գ) գոյություն ունեն bc տեսքի ընդամենը $\varphi(k)\varphi(m)$ տարրեր, որոնք ունեն km կարգ:

394. Դիցուք a և a^s տարրերը $G=<a>$ խմբում ունեն km կարգ: Ցույց տալ, որ եթե k և m թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ապա գոյություն ունեն u և v ամբողջ թվեր այնպես, որ

ա) $a^s=\left(a^m\right)^{sv}\cdot\left(a^k\right)^{su}$,

բ) $\left(a^m\right)^{sv}$ տարրի կարգը k է, իսկ $\left(a^k\right)^{su}$ տարրի կարգը m,

գ) G խմբի km կարգի ցանկացած տարր կարելի է ներկայացնել $b\in B=<a^m>$ և $c\in C=<a^k>$ տարրերի bc արտադրյալային տեսքով:

395. Ապացուցել, որ

ա) փոխադարձաբար պարզ k և m թվերի համար $\varphi(km)=\varphi(k)\varphi(m)$,

բ) $\varphi(k_1k_2\ldots k_s)=\varphi(k_1)\varphi(k_2)\ldots\varphi(k_s)$, եթե $k_1,k_2,\ldots,k_s$ թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են,

գ) p^α թվի հետ (p-ն պարզ թիվ է) փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը $p^\alpha-p^{\alpha-1}$ է,

դ) եթե $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$ n թվի կանոնական վերլուծությունն է, ապա

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_s-1):$$

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1. ա) այո, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) ոչ, զ) այո, է) ոչ: 2. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո, ե)այո, զ) ոչ, է) այո: 3. ա) ոչ, բ) ոչ, գ) այո: Գործողությունը օժտված է զուգորդական և տեղափոխական հատկություններով, որպես զրո տարր է ծառայում $\frac{1}{k}$ թիվը՝ $a*\frac{1}{k}=a\cdot\frac{1}{k}\cdot k=a$, իսկ a տարրի հակադիր տարր՝ $\frac{1}{k^2a}$ տարրը, քանի որ $a*\frac{1}{k^2a}=a\cdot\frac{1}{k^2a}\cdot k=\frac{1}{k}$: Խումբն աբելյան է: 5. ա) այո, բ)այո, ցույց տալ, որ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ մատրիցը

ծառայում է որպես միավոր, իսկ $\frac{1}{4a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ մատրիցը $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ մատրիցի հակադարձ, գ) ոչ: 6. ա) այո, բ) ոչ: 7. գ) օգտվել խմբի գործողության զուգորդական հատկությունից: 9. Այո: 10. Հավասարումների երկու մասը համապատաս-խանաբար ձախից և աջից բազմապատկել a^{-1} տարրով: 13. Օգտվել նախորդ խնդրից: Երկրորդ խմբի ոչ աբելյան լինելը ստուգելու համար դիտարկել պտույտի և արտացոլման արտադրյալը: 17. ա) ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) այո, եթե $\lambda < 0$: 18. Ստուգումը կարելի է հեշտացնել, տված կոտորակագծային ձևափոխության հետ միասին դիտարկելով $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ չվերասերված մատրիցը: Ձևափոխությունների արտադրյալին համապատասխանում է նրանց մատրիցների արտադրյալը: 19. 2: 20. Ուղղի համաչափությունների խմբի տարրերն են զուգահեռ տեղաշարժերը և ուղղի կամայական կետի շուրջը 180^0 անկյան տակ պտույտները: 21. Դիտարկել զուգահեռ տեղաշարժի և պտույտի արտադրյալը: 22. Օրինակ, բոլոր պտույտները կարելի է ստանալ $\frac{2\pi}{n}$ անկյան տակ պտույտը մի քանի անգամ կատարելով: Տված խմբում կա $\varphi(n)$ հատ այդպիսի տարր, որտեղ $\varphi(n)$-ը էյլերի ֆունկցիան է n-ը չգերազանցող և n-ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը: 23. Կարելի է խմբի տարրերը գրել շեղանկյան գագաթների բազմության տեղադրությունների տեսքով: Խմբի կարգը 4 է: Քլայնի խումբը և շեղանկյան համաչափությունների խումբն ունեն բազմապատկման միևնույն աղյուսակը: 24. 12: Ցույց տալ, որ խմբի կարգը հավասար է գագաթների թվի և մեկ գագաթից ելնող կողերի թվի արտադրյալին: 25. 24: 26. ա) Տես 24 խնդրի ցուցումը: Կարելի է նաև խորանարդի 4 անկյունագծերը համարակալել և պտույտները դիտարկել որպես 4 տարր ունեցող բազմության տեղադրություններ: Խումբն ունի $4!$ տարր: բ) 48: 27. 4 պտույտ քառակուսու կենտրոնի շուրջը 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ անկյունների տակ և 4 արտացոլում քառակուսու համաչափության 4 առանցքների նկատմամբ: Տեղադրությունների միջոցով խմբի տարրերը ներկայացնելու համար քառակուսու գագաթները համարակալել:

$\{e, (1\,3), (2\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2)\}$: **28.** Երեք պտույտ խորանարդի այդ գագաթով անցնող անկյունագծի շուրջը և երեք արտացոլում այդ գագաթին կից կողերից յուրաքանչյուրով և նրան հանդիպակաց կողով անցնող հարթության նկատմամբ: **29.** Կանոնավոր ութանիստը ներգծել խորանարդին այնպես, որ ութանիստի գագաթները համընկնեն խորանարդի նիստերի կենտրոնների հետ: **30.** $2n$: Տես **27** խնդրի ցուցումը: Համարակալելով բազմանկյան գագաթները $1, 2, \ldots, n$ թվերով, դիտարկենք

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$ պտույտը և

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix}$ արտացոլումը: Պարզ է, որ $a^n = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{-1}b$: Խմբի բոլոր տարրերը կարելի է ներկայացնել a^k կամ $a^k b$ տեսքով: **32.** $S_3 = \{e, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$, $A_4 = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2\,3),$ $(1\,3\,2), (2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (1\,2\,4), (1\,4\,2)\}$:

34. $x = a^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$y = ba^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$: **35.** $a^2 = (3\,5\,4)$, $a^3 = (1\,2)$, $a^4 = (3\,4\,5)$, $a^5 = (1\,2)(3\,4\,5)$, $a^6 = e$, $a^{100} = (3\,4\,5)$: **37.** Այդ տեղադրության բոլոր աստիճանները: **38.** $a_n^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1^{-1}$: **39.** $abab = e$ հավասարությունը ձախից բազմապատկել a տարրով, իսկ աջից՝ b տարրով: **40.** Ցույց տալ, որ եթե թիվը պատկանում է այդպիսի խմբին, ապա նրա մոդուլը մեկ է, իսկ արգումենտն ունի $\frac{\pi m}{n}$ տեսքը, $m, n \in Z$: Կամ օգտվել այդ խմբի տարրերի համար ճիշտ $a^n = 1$ հավասարությունից: **41.** ա) $abab \ldots ab = e$ հավասարությունը ձախից բազմապատկել a^{-1} տարրով, իսկ աջից՝ a տարրով: գ) դիտարկել $a = (1\,2\,3)$, $b = (1\,2)$, $c = (1\,3)$ տեղադրությունները կամ կառուցել

նման որևէ օրինակ երկրորդ կարգի մատրիցների արտադրյալային խմբում: 42. k թիվը ներկայացնել $k = mq + r$ տեսքով, $0 \le r \le m - 1$ և ցույց տալ, որ $r = 0$: 43. Ցույց տալ, որ տարբեր զույգության տեղադրությունների արտադրյալը կենտ, իսկ միևնույն զույգության տեղադրությունների արտադրյալը զույգ տեղադրություն է: 44. $n|d$, որտեղ d-ն k և n թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է: 45. ա) օգտվել նախորդ խնդրից, բ) a^k տարրի կարգը n է, գ) խմբում ընտրել մեկ այլ ծնիչ: 46. Եթե k-ն ab տարրի կարգն է, դիտարկել $(ab)^{kr}$ և $(ab)^{ks}$ տարրերը: 47. 12 և 5: 48. ա) 15, $8!/(5\cdot 3)$=2688, բ) 20,18144 : 49. 60: 50. $a^k = (\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, երբ $k < n$: $a^n = e$: Եթե $m > n$ և $m = nq + k$, ապա $a^m = a^k$: Եթե n-ը պարզ թիվ է, ցանկացած $0 < k < n$-ի համար a^k-ն n երկարությամբ ցիկլ է: Իսկ եթե $d \ne 1$ թիվը n և k թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, a^k-ն $\frac{n}{d}$ երկարությամբ d ցիկլերի արտադրյալ է: 51. Տես 36 և 46 խնդիրները: 52. $(ab)^k = a^k b^k = e$ հավասարությունից հետևում է, որ $a^k = b^{-k}$ և, $b^k = e$, այսինքն m և n թվերը k թվի բաժանարարներ են (տես 42 խնդիրը): 53.Ոչ: 54. Ցույց տալ, որ ցանկացած n բնական թվի համար $(3 + 4i)^n$ թիվն իրական չէ: 55. ա) յուրաքանչյուր տարրին համապատասխանեցնել նրա հակադարձը, բ) եթե $n = 2k + 1$, ապա $a^{2k+1} = e$ և $a = a^{2k+2} = (a^{k+1})^2$: 56. Եթե 4 կարգի խմբում գոյություն ունի 4 կարգի տարր, այն ցիկլիկ է: Եթե այդպիսի տարր գոյություն չունի, օգտվել 39 խնդրից: 60. Այո: 61. Ոչ, քանի որ գործողությունները տարբեր են: 62. Ստուգել, որ միավոր տարրը և G_1-ի ցանկացած տարրի հակադարձը պատկանում են G_1-ին: 63. $\{e\}$, $\{e, (1\,2)\}$, $\{e, (1\,3)\}$, $\{e, (2\,3)\}$, $\{e, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$, S_3: 65. Ցույց տալ, որ ենթախմբում գտնվող խմբի ծնիչի ամենափոքր բնական աստիճանով տարրն այդ ենթախմբի ծնիչն է: 66. Տարրի կարգը խմբի կարգի բաժանարար է: 67. Տես խնդիր 2բ: 68. Եթե a-ն խմբի ծնիչն է, a^m տարրն առաջացնում է ցիկլիկ ենթախումբ: 71. $2^n n!$: 72. Դիցուք $a \ne e$, $b \ne e, a$ և $c \ne e, a, b, ab$: Խմբի տարրերն են e, a, b,

c, ab, ac, bc և abc: Խումբն ունի հետևյալ 16 ենթախմբերը. $\{e\}$, $\{e,a\}$, $\{e,b\}$, $\{e,c\}$, $\{e,ab\}$, $\{e,ac\}$, $\{e,bc\}$, $\{e,abc\}$, $\{e,a,b,ab\}$, $\{e,a,c,ac\}$, $\{e,b,c,bc\}$, $\{e,a,bc,abc\}$, $\{e,b,ac,abc\}$, $\{e,c,ab,abc\}$, $\{e,ab,ac,bc\}$ և ամբողջ խումբը:

73. Ենթախմբերը ցիկլիկ են և ունեն a^{p^m} ծնիչը, որտեղ $m \le k$: 74. ա) e, a, a^2, a^3 տարրերից յուրաքանչյուրով առաջանում է մեկ ենթախումբ, բ) 40: 75. $\{a_0\}$, $\{a_0, a_1\}$, $\{a_0, a_2\}$, $\{a_0, a_3\}$, $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$: 76. Դիտարկել քառանիստի պտույտները յուրաքանչյուր գագաթը հանդիպակաց նիստի կենտրոնի հետ միացնող և երկու հակադիր կողերի միջնակետերը միացնող առանցքների շուրջը: Ընդամենը 10 ենթախումբ: Բացի միավորից և ամբողջ խմբից, 2 կարգի երեք ենթախումբ, 3 կարգի չորս ենթախումբ և 4 կարգի մեկ ենթախումբ:

77. ա) $\{1,-1,i,-i\}$, բ) $\left\{1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$,

գ) $\left\{1,-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,i,-i,-1\right\}$,

դ) $\{2^{4k}, 2^{4k+1}i, -2^{4k+2}, -2^{4k+3}i\}$, $k \in Z$ ե) $\{(-1)^n 2^k 5^n\}$, $k \in Z$, $n \in Z$: Իրական թվերի ենթախմբի հետ հատումները. ա) $\{1,-1\}$, բ) $\{1\}$, գ) $\{1,-1\}$, դ) $\{2^{4k}, -2^{4k+2}\}$, $k \in Z$, ե) $\{(-1)^n 2^k 5^n\}$, $k \in Z$, $n \in Z$: 78. ա) 2, բ) ∞, գ) 4, դ) ∞, ե) ∞: 79. ա) խումբը բաղկացած է միավոր տարրից, բ) խմբի կարգը պարզ թիվ է, գ) խումբը ցիկլիկ է, որի կարգը որևէ պարզ թվի քառակուսի է: 85. Ոչ, տես 53 խնդիրը: 86. Ոչ: 87. Ենթախմբերն առաջանում են g^k տարրերով, որտեղ k-ն խմբի կարգի բաժանարար է: 4 կարգի տարրերի քանակը. ա)2, բ) 2, գ) 2, դ) 0, ե) 1: 88. ա) D_4, բ) S_4-ի այն տեղադրությունները, որոնք 4 թիվը թողնում են տեղում, գ) $\{e,(12),(34),(12)(34)\}$, դ) S_4, ե) $\{e,(24)\}$:

89. A_3 և $S_3 \setminus A_3$, այո: 90. Օրինակ, ըստ $H=\{e,(12)\}$ ենթախմբի

$S_3 = H \cup H(1\,3) \cup H(2\,3)$ և $S_3 = H \cup (1\,3)H \cup (2\,3)H$: Աջ և ձախ վերլուծությունները չեն համընկնում: Ոչ մեկը: 91. $y \in xH$ հետևում է, որ $y = xh$, $h \in H$, որտեղից $y^{-1} = h^{-1}x^{-1}$, $h^{-1} \in H$, $x^{-1} \in G$: 92. H և $G \setminus H$ բազմությունները միաժամանակ աջ և ձախ հարակից դասեր են: 93. Աջ և ձախ հարակից դասերի համընկնումը ապահովվում է գործողության տեղափոխական հատկությամբ: 94. Ցույց տալ, որ a^s և a^r տարրերը պատկանում են միևնույն հարակից դասին, որտեղ $s = mq + r$, $0 \le r \le m - 1$: 95. A_n ենթախումբը S_n խմբում ունի 2 ինդեքս: 96. Ստուգել, որ $xF \cdot yF = xyF$: Հետևաբար $xF \cdot x^{-1}F = F$: 99. n հարակից դաս: Երկու թվեր ընկած են նույն հարակից դասում, եթե n-ի վրա բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը: 100. Երկու իրական թվեր ընկած են միևնույն հարակից դասում, եթե նրանց կոտորակային մասերը նույնն են: 101. Տես նախորդ խնդիրը: 102. ա) Նույն հարակից դասում ընկած վեկտորների ծայրակետերը գտնվում են OX առանցքին զուգահեռ որևէ ուղղի վրա: բ) Նույն հարակից դասում ընկած կոմպլեքս թվերի մոդուլները հավասար են: գ) Նույն հարակից դասում ընկած կոմպլեքս թվերի արգումենտները հավասար են: դ) Նույն հարակից դասում ընկած տարրերը գտնվում են սկզբնակետով անցնող որևէ ուղղի վրա: 103. Միևնույն դասի մեջ ընկած են այն տեղադրությունները, որոնցում n-ը արտապատկերվում է նույն թվին: Ընդամենը n հարակից դաս: 104. Դիցուք K-ն G խմբի այն տարրերի բազմությունն է, որոնք չեն պատկանում H ենթախմբին, իսկ $a \in K$ ցանկացած տարր է: Ցույց տալ, որ H-ի բոլոր տարրերը բազմապատկելով a տարրով, կստանանք K-ի բոլոր տարրերը, իսկ K-ի բոլոր տարրերը բազմապատկելով a տարրով, կստանանք H-ի բոլոր տարրերը: Հետևաբար 2 կարգի ենթախումբ է, $a^2 \in H$: 105. ա) Երկու հարակից դաս զույգ թվերը և կենտ թվերը: բ) $S_3 = \{e, (1\,2)\} \cup$ $\cup \{(1\,3\,2), (1\,3)\} \cup \{(1\,2\,3), (2\,3)\}$: գ) H-ը 4 կարգի ցիկլիկ ենթախումբ է: Միևնույն հարակից դասի մեջ այն պտույտներն են, որոնք տված նիստը տանում են մեկ այլ նիստի: Ընդամենը 6 հարակից դաս: դ) Նույն հարակից դասի մեջ ընկած մատրիցների որոշիչները հավասար են: 106. $A_4 = \{e, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\} \cup \{(124), (13)(24),$

$\cup\{(142),(143),(14)(23)\}\cup\{(234),(134),(12)(34)\}$: **107.** Եթե $H=<a^2>4$ կարգի ենթախումբ է, ապա $G=\{e,a^2,a^4,a^6\}\cup\{a,a^3,a^5,a^7\}$: Եթե $H=<a^4>$ 2 կարգի ենթախումբ է, $G=\{e,a^4\}\cup\{a,a^5\}\cup\{a^2,a^6\}\cup\{a^3,a^7\}$: Դիտարկել նաև $H=e$ և $H=G$ դեպքերը: **108.** Եթե $H=<a^2>$ 5 կարգի ենթախումբ է, $G=\{e,a^2,a^4,a^6,a^8\}\cup\{a,a^3,a^5,a^7,a^9\}$: Եթե $H=<a^5>$ 2 կարգի ենթախումբ է,
$G=\{e,a^5\}\cup\{a,a^6\}\cup\{a^2,a^7\}\cup\{a^3,a^8\}\cup\{a^4,a^9\}$:
Դիտարկել նաև $H=e$ և $H=G$ դեպքերը: **109.** ա) $G=H\cup aH\cup a^2H$: Տես նաև 94 խնդիրը: **110.** $S_3=\{e\}\cup\{(1\,2),(1\,3),(2\,3)\}\cup\{(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$: **112.** 6: **113.** Եթե
$a=(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k)(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_s)\ldots$
և $b=(\alpha_1'\alpha_2'\ldots\alpha_k')(\beta_1'\beta_2'\ldots\beta_s')\ldots$, ապա $b=x^{-1}ax$, որտեղ
$$x=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\beta_1\beta_2\ldots\beta_s\ldots\\ \alpha_1'\alpha_2'\ldots\alpha_k'\beta_1'\beta_2'\ldots\beta_s'\ldots\end{pmatrix}:$$
114. ա) $\{(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}$,
բ) $\{(123),(132),(124),(142),(134),(143),\ (2\,3\,4),(2\,4\,3)\}$: **115.** Նախորդ խնդրի երկու դասերը և $\{e\}$, $\{(1\,2)(1\,3),(1\,4)(2\,3),(2\,4),(3\,4)\}$ $\{(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\}\ \cup\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$:
116. $A_4=\{e\},\{(1\,2\,3),\ (134),(142),(234)\}\cup\{(124),(132),(143),(234)\}$ $\cup\{(124),(132),(143),(234)\}$ **117.** Միավոր տարրը, $\frac{2}{3}\pi$ անկյան տակ պտույտները քառանիստի գագաթները հանդիպակաց նիստի կենտրոնի հետ միացնող 4 առանցքների շուրջը, $\frac{4}{3}\pi$ անկյան տակ պտույտները այդ նույն առանցքների շուրջը, π անկյան տակ պտույտները քառանիստի հանդիպակաց կողերի միջնակետերը

միացնող երեք առանցքների շուրջը: 118. Տես խնդիր 104: Քլայնի խումբը: 119. ա) Դիտարկել 1, $\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$ թվերը և ցույց տալ, որ նրանց հնարավոր չէ բաշխել երկու հարակից դասերի: 120. Եթե $K = xH$, ապա $y = xh_1$ և $z = xh_2$, $h_1, h_2 \in H$: Մնում է ցույց տալ, որ $xy^{-1}z \in xH$: 121. K_1, K_3, K_5 ենթաբազմությունները հարակից դասեր են: Տես խնդիր 120: 122. Այդ մատրիցների բազմությունը միաժամանակ աջ և ձախ հարակից դաս է ըստ 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախմբի: 123. 81: 125. Ոչ: 127. Այո: Քլայնի խմբի ցանկացած ենթախումբ նորմալ է այդ խմբում, բայց նորմալ չէ A_4 կամ S_4 խմբերում (տես խնդիր 125): 128. Այդ խմբերը ցիկլիկ են և իզոմորֆիզմը կարելի է ստանալ, համապատասխանության մեջ դնելով ծնիչները: 129. Կանոնավոր եռանկյան գագաթները համարակալել և դիտարկել գագաթների բազմության տեղադրությունները: 130. Եթե 4 կարգի խումբն ունի 4 կարգի տարր, այն ցիկլիկ է և իզոմորֆ է քառակուսու պտույտների խմբին: Եթե չունի 4 կարգի տարր, այն ունի a և b տարրեր այպես, որ $a^2 = b^2 = e$, ընդ որում $ab = ba$ ըստ 39 խնդրի: Խմբի տարրերն են e, a, b, ab և այդ խումբն իզոմորֆ է Քլայնի խմբին: 131. Եթե $a_1, a_2, \ldots, a_n$ վերջավոր խմբի տարրերն են, a_i տարրին համապատասխանության մեջ դնել $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1a_i & a_2a_i & \ldots & a_na_i \end{pmatrix}$ տեղադրությունը: 132. Օրինակ, $\{e, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ և $\{e, (1\,2\,3\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,4\,2\,3)\}$, $\{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$: 133. A_4: 134. $\varphi(a^n) = b^n$, որտեղ a և b այդ խմբերի ծնիչներն են: 135. Ենթադրենք $\varphi(2) = a$ և $\varphi(b) = \frac{a}{2}$: Ցույց տալ, որ $\varphi(b^2) = a$, որտեղից՝ $b^2 = 2$: 136. Ընդունել $\varphi(a) = \ln a$: 137. Ցույց տալ, որ Z_m-ը m կարգի ցիկլիկ խումբ է: 138. Ընդունել $\varphi(2k) = 3k$: Տես նաև 134 խնդիրը:

139. Ընդունել $\varphi(a)=\frac{a}{3}$: 141. ա) Հավասարասրուն (բայց ոչ հավասարակողմ) եռանկյուն կամ կետերի զույգ, բ) $[KB]\cup[LC]\cup[MA]$, որտեղ K, L և M կետերը ABC կանոնավոր եռանկյան կողմերի միջնակետերն են, գ) շեղանկյուն կամ ուղղանկյուն: 144. Դիտարկել այդ խմբերի ծնիչները: 145. Օգտվելով 131 խնդրից, ցույց տալ, որ n կարգի խմբերի քանակը ավելի քիչ է, քան $\binom{n!}{n}$ թիվը: 146. գ) արտապատկերումը:

147. ա) 2 կարգի ցիկլիկ խումբ, բ) $\varphi(a)=a^k$, որտեղ a-ն n կարգի ցիկլիկ խմբի ծնիչն է, k և n թվերը փոխադարձաբար պարզ են: 12 կարգի ցիկլիկ խմբինը Քլայնի խումբն է, 14 կարգի ցիկլիկ խմբինը 6 կարգի ցիկլիկ խումբ է: 149. Քլայնի խմբի միավորից տարբեր տարրերի ցանկացած տեղադրությանը համապատասխանում է այդ խմբի որևէ ավտոմորֆիզմ: 150. Տես խնդիր 147բ): 152. Տես խնդիր 94: 153. Ընդունել $\varphi(k)=(-1)^k$: $\operatorname{Ker}\varphi=\{2k \mid k\in Z\}$: 154. Z գումարային խումբն աբելյան է: 155. Իզոմորֆիզմի միջուկը պտույտների ենթախումբն է: 157. Քվատերնիոնների խմբի ոչ ակներև ենթախմբերն են. 2 կարգի $<-1>$, 4 կարգի $<i>$, $<j>$, $<k>$ ենթախմբերը: 158. բ) Քվատերնիոնների խմբի կենտրոնը $<-1>$ ենթախումբն է: գ) Եթե $G/C=<a>$, ապա $\forall x,y\in G$ ունեն $x=a^k z_1$, $y=a^m z_2$ տեսքը, որտեղից բխում է, որ $xy=yx$: 159. ա) Տրոհենք G խմբի տարրերի բազմությունն իրար համալուծ տարրերի դասերի: Յուրաքանչյուր դասի տարրերի քանակը p^2 թվի բաժանարար է: Եթե միավորը կենտրոնի միակ տարրն է, ապա $p^2=1+kp$, որը հանարավոր չէ: Տես նաև 158 գ) խնդիրը: 160. G' խումբն իզոմորֆ է G խմբի որևէ ֆակտոր խմբի: 161. Հոմոմորֆիզմը որոշվում ծնիչի կերպարով: Ծնիչի կերպար կարող են լինել ա) e, b^3, b^9, b^{12}, b^{15}, բ) e, b^5, b^{10}, գ) e, b, b^2, b^3, b^4, b^5 տարրերը, դ) e տարրը, ե) խմբի ցանկացած տարր (հոմոմորֆիզմների քանակը՝ n): 162. Ենթադրելով, որ $\varphi(a)=1$, գտնել $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$ տարրը:163. Յուրաքանչյուր մատրիցին կարելի է

համապատասխանեցնել նրա որոշիչը: 164. A_n ենթախմբի տարրերի քանակը $\frac{1}{2}n!$ է: 165. Ըստ 26 ա) խնդրի S_4 խումբը հոմոմորֆ է խորանարդի պտույտների խմբին: Համարակալել խորանարդի երեք հակադիր նիստերի զույգերը 1, 2, 3 թվերով և խորանարդի պտույտների խումբն արտապատկերել այդ նիստերի զույգերի տեղադրությունների խմբի վրա: Ցույց տալ, որ հոմոմորֆիզմի միջուկը K_4 խումբն է, կամ S_4 խումբը վերլուծել ըստ K_4 խմբի: Յուրաքանչյուր դասի համապատասխանեցնել այդ դասի այն տեղադրությունը, որը 4 թիվը թողնում է տեղում: 166. ա) n կարգի ցիկլիկ խումբ, բ) 5 կարգի ցիկլիկ խումբ, գ) 6 կարգի ցիկլիկ խումբ: 167. 2 կարգի ցիկլիկ խումբ: 168. ա) H-ը աբելյան խմբի ենթախումբ է, բ) միևնույն հարակից դասի մեջ ընկած են սկզբնակետով անցնող երկու փոխուղղահայաց ուղիղների վրա ընկած կոմպլեքս թվերը: 169. ա) Յուրաքանչյուր մատրիցին համապատասխանեցնելով նրա որոշիչը, կստանանք հոմոմորֆիզմ: Ցույց տալ, որ այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների նորմալ ենթախումբն է: 170. Ցանկացած կենտ տեղադրության քառակուսին զույգ տեղադրություն է: Տես նաև խնդիր 92: 171. Կոմպլեքս թվերը բազմապատկելիս նրանց արգումենտները գումարվում են: Միջուկը բաղկացած է $2\pi k$, $k \in Z$ տեսքի թվերից: 172. Ապացուցել, որ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ իրարից տարբեր կետերում ունեցած արժեքներով $n-1$ աստիճանի բազմանդամը որոշվում է միարժեքորեն: 173. միջուկը բաղկացած է այն բազմանդամներից, որոնց համար $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվերը արմատ են: 174. Ցույց տալ, որ խմբի միավորը $(0,0,0)$ տարրն է, իսկ (k_1, k_2, k_3) տարրի հակադարձը՝ $((-1)^{k_3+1}k_1, -k_2, -k_3)$ տարրը: Համոզվել, որ խումբը ոչ աբելյան է և դիտարկել աջ և ձախ հարակից դասերն ըստ տրված ենթախմբի: 175. Օգտվել 119 բ) խնդրից: 176. Հոմոմորֆիզմի միջուկը mk տեսքի ամբողջ թվերն են: 177. A_n ենթախումբը: 178. Յուրաքանչյուր $g \in G$ տարրին կարելի է համապատասխանեցնել $x \mapsto gxg^{-1}$ ավտոմորֆիզմը: Կենտրոնին պատկանող g տարրին կհամապատասխանի նույնական ավտոմորֆիզմ: 180. Ենթադրելով, որ G/N խումբը պարզ չէ,

դիտարկել G խմբի հոմոմորֆիզմ G/N խմբի ֆակտոր խմբի վրա: 181. ա) S_4, բ) A_3, գ) A_4: Նորմալ են S_4 և A_4 ենթախմբերը: 184. Նշանակելով պտույտների ենթախումբը H-ով, ցույց տալ, որ ցանկացած $g \in D_n$ և $h \in H$ համար $g^{-1}hg \in H$: 185. Պարզ կարգի ցիկլիկ խմբերը և միայն նրանք: 186. G/Z ֆակտոր խմբի յուրաքանչյուր տարր ունի $\frac{m}{n} + Z$ տեսքը, որով էլ առաջանում է n կարգի միակ ենթախումբը: 187. Ցույց տալ, որ G-ում H-ի հետ համալուծ բոլոր ենթախմբերի N հատումը նորմալ ենթախումբ է: 188. Ցույց տալ, որ G/N ֆակտոր խումբն (տես 187 խնդիր) իզոմորֆ է S_n խմբի որևէ ենթախմբի: 189. Բոլոր բազմություններն էլ խումբ են: Օրինակ, կարելի է 1) Φ-ը հոմոմորֆ արտապատկերել Φ_1-ի վրա Φ_2 միջուկով, 2) Φ-ը հոմոմորֆ արտապատկերել Φ_2-ի վրա Φ_1 միջուկով, 3) Φ_1-ը հոմոմորֆ արտապատկերել Φ_2-ի վրա հաստատուն ֆունկցիաների միջուկով, 4) Φ_2-ը իզոմորֆ արտապատկերել Φ_1-ի վրա: Իրոք, ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ տեսքով, որտեղ $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ֆունկցիան զույգ է, իսկ $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիան կենտ: 1) $f(x) \mapsto f_1(x)$, 2) $f(x) \mapsto f_2(x)$, 3) եթե $f(x)$ ֆունկցիան զույգ է, $f(x) = f(-x)$: Ածանցելով, կստանանք $f'(-x) = -f'(x)$, այսինքն զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ է: $f'(x) = 0$ հետևում է, որ $f(x) = \text{const}$: 4) $f(-x) = -f(x)$ հավասարությունը ածանցելով, կստանանք $f'(-x) = f'(x)$, այսինքն կենտ ֆունկցիայի ածանցյալը զույգ է: Հոմոմորֆիզմի միջուկը բաղկացած է միայն 0 տարրից: Հոմոմորֆիզմը իզոմորֆիզմ է: 190. ա) $a^{-1}(b^{-1}ab) \in H_1$ և $(a^{-1}b^{-1}a)b \in H_2$, բ) $a^{-1}b^{-1}ab = e$: 191. բ) Ստուգելով

$[a,b]^{-1}=[b,a]$ և $x^{-1}[a,b]x=[x^{-1}ax,x^{-1}bx]$ հավասարությունը, ցույց տալ, որ եթե $z\in K$ և ունի $z=[a_1,b_1]\ldots[a_n,b_n]$ տեսքը, ապա $x^{-1}zx= \quad =[x^{-1}a_1x,x^{-1}b_1x]\ldots[x^{-1}a_nx,x^{-1}b_nx]\in K$: գ) ենթադրենք $G\mapsto G/K=H$, $x\mapsto u$, $y\mapsto v$, $u,v\in H$: Այդ դեպքում $x^{-1}y^{-1}xy\mapsto u^{-1}v^{-1}uv$: Բայց $x^{-1}y^{-1}xy\in K$, որտեղից բխում է, որ $x^{-1}y^{-1}xy\mapsto e=u^{-1}v^{-1}uv$: դ) դիցուք $G\mapsto G/N$ և G/N աբելյան է: $x\mapsto u$, $y\mapsto v$ հետևում է, որ $x^{-1}y^{-1}xy\mapsto u^{-1}v^{-1}uv=e$: Այսինքն՝ $x^{-1}y^{-1}xy\in N$ և $K\subset N$: **192.** $[x_1,x_2]=(1\,3\,2)$, $[x_1,x_3]=(1\,4\,2)$, $[x_1,y]=(1\,2)(3\,4)$, $[x_2,x_1]=(1\,2\,3)$, $[x_3,x_1]= \quad =(1\,2\,4)$, $[y,x_1,]=(1\,2)(3\,4)$: **193.** $[x,y]=\begin{bmatrix}7&4\\-2&-1\end{bmatrix}$, $[y,z]=\begin{bmatrix}5&-3\\-3&2\end{bmatrix}$, $[z,x]=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$: **194.** Ցանկացած $a,b\in S_n$ համար $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$ զույգ տեղադրություն է: Ուստի $K\subset A_n$: Մյուս կողմից $(i\,j)^{-1}(i\,k)^{-1}(i\,j)(i\,k)=(i\,j)(i\,k)(i\,j)(i\,k)=(k\,j\,i)$, իսկ A_n ենթախմբի ցանկացած տեղադրություն կարելի է ներկայացնել $(i\,j\,k)$ տեսքի 3-ցիկլերի արտադրյալի տեսքով, քանի որ $(i\,j)(j\,k)=(k\,j\,i)$ և $(i\,j)(k\,l)=(i\,k\,j)(i\,k\,l)$: **195.** $\{1,-1\}$ ենթախումբը, որը համընկնում է կենտրոնի հետ: **197.** ա) Ստուգել, որ $(1\,i)(1\,j)(1\,i)=(i\,j)$, իսկ ցանկացած տեղադրություն կարելի է ստանալ $(i\,j)$ տեսքի դիրքափոխումների միջոցով: բ) Դիտարկել $a=(1\,2)$ տարրի համալուծները $b=(1\,2\ldots n)$ ցիկլի աստիճանների միջոցով, այսինքն՝ $b^{-k}ab^{k}$ տարրերը: **198.** Դիցուք G-ն տրված 3-ցիկլերով առաջացած A_n-ի ենթախումբ է և i, j, k երկուսից մեծ իրարից տարբեր թվեր են ($n=3$ դեպքը դիտարկել առանձին): $(1\,2\,i)$ ցիկլի հետ միասին G-ն պարունակում է նրան

հակադարձ $(i\,2\,1)$ տարրը և $(j\,2\,1)(i\,2\,1)(1\,2\,j)=(2\,i\,j)$ տարրերը: $n=4$ դեպքում G-ն արդեն պարունակում է բոլոր 3-ցիկլերը, իսկ $n>4$ դեպքում $(1\,2\,k)(1\,i\,j)(k\,2\,1)=(i\,j\,k)$: Տես նաև 194 խնդրի ցուցումը: 199. $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)=(1\,2)(1\,3)(1\,4)(1\,5)(1\,6)(1\,7)=(1\,2\,3)(1\,4\,5)(1\,6\,7)$: 209. Ազատ խմբի ծնիչներին կարելի է համապատասխանեցնել S բազմության տարրերը: 210. Տես նախորդ խնդիրը: 211. ա) 2, բ) ∞, գ) 4: H_1 և H_3 նորմալ ենթախմբեր են, իսկ H_2-ը՝ ոչ: 215. Ոչ. S_3, A_4 և S_4 խմբերը չունեն նորմալ ենթախմբեր, որոնց հատումը միավորն է: 216. ա) $z=M\oplus N$ և $m\in M$, $n\in N$ հետևում է, որ $mn\in M\cap N$: 217. Ցույց տալ, որ r և s կարգի ենթախմբերի հատումը միավորն է: 218. ա) հետևում է $z=a+ib$ գրելածևից, $R\cap Ri=0$, բ) հետևում է $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ գրելածևից և այն պնդումից, որ գրոյից տարբեր իրական թվերի և 1 մոդուլ ունեցող թվերի ենթախմբերի հատումը 1 թիվն է: 219. Վերլուծության հնարավորությունը հակասում է 52 խնդրի արդյունքին: 220. ա) հավասար է արտոգրիչների արտադրյալին, բ) արտոգրիչների արտադրյալի անհամեմատելիությունից հետևում է գծամանատելիությունը: Տես խնդիր 52: 221. -1 տարրը պատկանում է բոլոր ենթախմբերին (ենթախմբերի հատումը միայն միավորը չէ): 225. $<-1>\times<-2>$ կամ $<-1>\times<-2>$: 226. Այդ խմբերի տարրերի առավելագույն կարգերը տարբեր են: 227. Ապացուցել, որ խումբը ցիկլիկ է և ցույց տալ, որ $<a>=<a^{77}>\oplus<a^{55}>\oplus\quad\oplus<a^{35}>$: 231. ա) $Z_3\oplus Z_4$, բ) $Z_3\oplus Z_4$, գ) $Z_3\oplus Z_4\oplus Z_5$: 232. Նախ ապացուցել ցիկլիկ խմբի հատար: Ոչ ցիկլիկ խմբի դեպքում կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ դիտարկելով այդ խմբի որևէ ցիկլիկ ենթախումբ և ըստ այդ ենթախմբի ֆակտոր խումբը: 233. 3: 234. 4: 235. $Z_{25}\oplus Z_8$, $Z_{25}\oplus Z_4\oplus Z_2$, $Z_{25}\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2$, $Z_5\oplus Z_5\oplus Z_8$, $Z_5\oplus Z_5\oplus Z_4\oplus Z_2$, $Z_5\oplus Z_5\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2$: 242. x_1, x_2, x_3 ծնիչների գործակիցներից կազմված մատրիցը տարրական ձևափոխություններով բերել անկյունագծային տեսքի (տողերից մեկը բազմապատկել որևէ ամբողջ թվով և գումարել մեկ այլ տողի, տողերի տեղերը փոխել, տողը բազմապատկել -1 թվով): Նույնը՝

սյուների նկատմամբ: Օրինակ, ա) դեպքում տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ ստացվում է $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ մատրիցը: Ուղիղ գումարելիներն են $< x_1 >$, $< x_2 >$, և $< x_3 >$ խմբերի ֆակտոր խմբերն ըստ $< 2x_1 >$, $< 2x_2 >$, $< 3x_3 >$, ենթախմբերի: ա) $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3$, բ) $Z_3 \oplus Z_4$, գ) $Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3$, դ) $Z_2 \oplus Z_4$, ե) $Z_4 \oplus Z$, զ) $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z$, է) Z_3, ը) $Z \oplus Z$, թ) Z, ժ) $\{0\}$: 245. 3, տես խնդիր 28: 246. Հնգաթև աստղը ներգծելով կանոնավոր հնգանկյանը, համոզվել, որ նրա համաչափությունների խումբը D_5 խումբն է: Որևէ գագաթի ստացիոնար ենթախումբը բաղկացած է այդ գագաթով անցնող համաչափության առանցքի նկատմամբ արտացոլումից և միավորից: 247. Երկու ուղեծիր զրո վեկտորը և զրոյից տարբեր բոլոր վեկտորները: 248. ա) Յուրաքանչյուր ուղեծիր բաղկացած է նույն երկարությունն ունեցող վեկտորներից, բ) 4 ուղեծիր, բաղկացած $\{0,0\}$, $\{x_1,0\}$, $\{0,x_2\}$, $\{x_1,x_2\}$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ տեսքի վեկտորներից, գ) երեք ուղեծիր, բաղկացած $\{0,0\}$, $\{x_1,0\}$, $\{x_1,x_2\}$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ տեսքի վեկտորներից: 249. բ) $St(a) = \{e\}$, գ) վերին եռանկյուն այն մատրիցների ենթախումբը, որոնց տողերի տարրերի գումարը 1 է: 250. 4 ուղեծիր $\{1,4,5,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3\}$, $\{6,7,10\}$: $St(1) = St(4) = St(5) = St(9) =< g^4 >$ ունեն 3 կարգ, $St(2) = \ = St(8) =< g^2 >$ ունեն 6 կարգ, $St(3) = G$ ունի 12 կարգ, $St(6) = St(7) = St(10) =< g^3 >$ ունեն 4 կարգ: 251. գ) երկու ուղեծիր $\{A,C\}$ և $\{B,D\}$: $St(A) = St(C) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$, $St(B) = St(D) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$: 253. Քլայնի ենթախումբը, տես խնդիր 125: 254. Այդ տեղադրությամբ առաջացած ցիկլիկ ենթախումբը: 255. ա) 5, բ) 7, գ) 11: 257. G_1 խումբը: 261. Տրանզիտիվ են ա) և բ) խմբերը: 262. Այո: 267. Այդ

խմբի տարրերն են $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ տեղադրությունները, որոնցից առաջինը ունի $(4,0,0,0)$ տիպ, երկրորդը և չորրորդը $(0,0,0,1)$ տիպ, իսկ երրորդը $(0,2,0,0)$ տիպ: $P_G=(x_1^4+x_2^2+2x_4)/4$:

268. $P_G=$ $=(x_1^6+2x_2^3+x_3^2+2x_6)/6$: **269.** $P_G=(x_1^4+3x_2^2+8x_1x_3)/12$, տես 32 խնդիրը: **270.** $P_G=(x_1^6+8x_3^2+3x_1^2x_2^2)/12$: **271.** $P_G=(x_1^4+3x_2^2+8x_1x_3)/12$:

272. Խորանարդի պտույտները տրոհել 5 մասի՝ ա) նույնական, բ) 3 պտույտ հակադիր նիստերի կենտրոնները միացնող ուղիղների շուրջը 180^0 անկյան տակ, գ) 6 պտույտ հակադիր նիստերի կենտրոնները միացնող ուղիղների շուրջը 90^0 և 270^0 անկյան տակ, դ) 6 պտույտ հակադիր կողերի միջնակետերը միացնող ուղիղների շուրջը 180^0 անկյան տակ, ե) 8 պտույտ հակադիր գագաթները միացնող ուղիղների շուրջը 120^0 և 240^0 անկյան տակ: ա) տեսակի տեղադրությունն ունի $(8,0,0,0,0,0,0,0)$ տիպ, բ) և դ) տեսակի տեղադրությունները՝ $(0,4,0,0,0,0,0,0)$ տիպ, գ) տեսակի տեղադրությունը՝ $(0,0,0,2,0,0,0,0)$ տիպ, ե) տեսակի տեղադրությունը՝ $(2,0,2,0,0,0,0,0)$ տիպ: Խմբի ցիկլային ինդեքսն է $P_G=(x_1^8+9x_2^4+6x_4^2+8x_1^2x_3^2)/24$: **273.** $P_G=(x_1^{12}+$ $+3x_1^6+6x_4^3+6x_1^2x_2^5+8x_3^4)/24$:

274. $P_G=(x_1^6+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2)/24$: **275.** Համարժեքության երկու դաս՝ $\{a,b\}$ և $\{c,d\}$: $\Psi(u_1)=4$, $\Psi(u_2)=2$, $\Psi(u_3)=2$, $\Psi(u_4)=0$: Համարժեքության դասերի քանակը՝ $(4+2+2+0)/4=2$: **276.** Եթե e-ն նույնականն է, իսկ a-ն եզրային տառերի տեղերը փոխելը, համարժեքության դասերի

քանակը հավասար է $(\Psi(e)+\Psi(a))/2=(8+4)/2=6$: 277. 10: 278. 51: 279. 23: 280. 240: 281. 315: 282. 24: 283. 130: 284. $(n-1)!$: 285. 333: 288. ա) 5, բ) 10, գ) 6: 289. $(p-2)!$: $p!$ թիվը չի բաժանվում p^2 թվի վրա: Սիլովյան p-ենթախումբը կազմված է որևէ $(i_1\, i_2 \ldots i_p)$ ցիկլի աստիճաններից: 292. Հինգ սիլովյան 2-ենթախումբ և մեկ սիլովյան 5-ենթախումբ: 294. $2p$ կարգի ցիկլիկ խումբը և դիէդրի D_p խումբը: 296. Խումբը չունի 8 կարգի տարր և նրա բոլոր տարրերը չեն կարող ունենալ 2 կարգ (ինչո՞ւ): Ուստի խումբն ունի 4 կարգի a տարր: Եթե $b \overline{\in} <a>=A$, ապա $G=A+Ab$ և $b^2 \in A$: $b^2=a$ կամ $b^2=a^3$ հնարավոր չէ, քանի որ b-ն կունենա 8 կարգ: Ուրեմն՝ $b^2=e$ կամ $b^2=a^2$: A-ն նորմալ է, $b^{-1}ab \in A$ և $b^{-1}ab$ ունի 4 կարգ: Այստեղից $b^{-1}ab=a$ կամ $b^{-1}ab=a^3$: Հնարավոր է միայն երկրորդ դեպքը: $a^4=e$, $b^2=e$, $b^{-1}ab=a^3$ պայմաններով ստացվում է D_4 խումբը, իսկ $a^4=e$, $b^2=a^2$, $b^2ab=a^3$ պայմաններով Q_8 խումբը: 298. pq կարգի ցիկլիկ խումբ, եթե $1+kp$ թիվը բաժանարար է q թվի համար միայն $k=0$ դեպքում: Հակառակ դեպքում pq կարգի աբելյան ցիկլիկ խումբ և ոչ աբելյան մեկ խումբ $a^p=e$, $b^q=e$, $a^{-1}ba=b^r$ որոշող առնչություններով, որտեղ $r^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$: Դիցուք $p<q$: Ըստ Սիլովի 3-րդ թեորեմի, q կարգի ենթախմբերի քանակը $1+kp$ է: Այդ թիվը p թվի բաժանարար է, ուստի $k=0$: q կարգի $<b>$ ենթախումբը միակն է և այն նորմալ է, $b^q=e$: p կարգի ենթախմբերի քանակը $1+kp$ է: Այդ թիվը բաժանարար է q-ի համար, այսինքն 1 է կամ q: եթե 1 է, ապա գոյություն ունի $<a>$ նորմալ ենթախումբ, $a^p=e$ և $G=<a>\times<b>$ ցիկլիկ խումբ է: Եթե q է, p կարգի ենթախումբը նորմալ չէ: Ունենք՝ $a^p=e$, $b^q=e$, $a^{-1}ba=b^r$: Եթե $r=1$, G-ն աբելյան ցիկլիկ խումբ է, իսկ եթե $r \neq 1$, $a^{-1}b^ia=b^{ir}$: Ուրեմն՝ $a^{-1}b^ra=b^{r^2}$: Այստեղից ստացվում է, որ $a^{-2}ba^2=a^{-1}b^ra=b^{r^2}$ և $a^{-k}ba^k=b^{r^k}$: Մասնավորապես, երբ

$k=p$, $b=a^{-p}ba^{p}=b^{r^{p}}$, այսինքն՝ $r^{p}\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$: 306. ա) A_3, բ) K_4, գ) A_4, դ) $\{1,-1\}$: Ֆակտոր խմբերի կարգերն են՝ ա) 2, բ) 3, գ) 2, դ) 4: 307. ա) A_n, բ) եթե D_n-ի a տարրը $\frac{2\pi}{n}$ անկյան տակ պտույտն է, ապա $D_n^{(1)}=<a>$, երբ n-ը կենտ է և $D_n^{(1)}=<a^2>$, երբ n-ը զույգ է: 308. ա) $S_3^{(1)}=A_3$, $A_3^{(1)}=e$, 2, բ) $A_4^{(1)}=K_4$, $K_4^{(1)}=e$, 2, գ) $S_4^{(1)}=A_4$, $A_4^{(1)}=K_4$, $K_4^{(1)}=e$, 3, դ) $Q_8^{(1)}=\{1,-1\}$, $Q_8^{(2)}=1$, 2, ե) տես խնդիր 307 բ): 312. բ) ab արտադրյալը 7 երկարությամբ ցիկլ է: Խումբը համընկնում է իր կոմուտանտի հետ: 313. ա) ենթախմբի կոմուտանտը պարունակվում է խմբի կոմուտանտի մեջ: բ) ցույց տալ, որ φ հոմոմորֆիզմի դեպքում $\varphi([a,b])=[\varphi(a),\varphi(b)]$ և $\varphi(G)'=\varphi(G')$, գ) հետևում է $[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]= =([a_1,a_2],[b_1,b_2])$ հավասարությունից, դ) եթե $(G/H)^{(k)}=e$, ապա $G^{(k)}\subseteq H$ և $G^{(k+m)}=e$, քանի որ $H^{(m)}=e$: 315. ա) G խմբի ցանկացած նորմալ ենթախումբ նրա որոշ համալուծ դասերի միավորում է, քանի որ այն իր տարրերի հետ միասին պարունակում է նաև նրանց համալուծները: A_5 խումբը բաշխենք համալուծության դասերի e, $(12)(34)$, (123), (12345), (12354) ներկայացուցիչներով և համապատասխանաբար 1, 15, 20, 12, 12 տարրերով: A_5-ի նորմալ ենթախումբը կարող է ունենալ $m=1+15k_1+20k_2+12k_3+12k_4$ տարր, որտեղ $k_i=0$ կամ $k_i=1$: A_5 խմբի կարգը 60 է և $m|60$: Կա միայն երկու հնարավորություն $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ և $k_1=k_2=k_3=k_4=1$: Այսինքն՝ A_5 խումբն ունի միայն ակներև նորմալ ենթախմբեր, բ) կիրառել ինդուկցիայի մեթոդը, գ) լուծելի խմբի ենթախումբը պետք է լինի լուծելի: 320. Կարելի է նաև

դիտարկել ծևափոխության 1 որոշիչով $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{bmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{bmatrix}$ մատրիցը և ցույց տալ, որ $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{bmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2} & 1 \end{bmatrix}$ մատրիցը նրա հակադարձն է: 321. Համառոտության համար նշանակելով $\frac{v_1}{c}=\beta_1$, $\frac{v_2}{c}=\beta_2$, հաշվել $\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 c \\ -\frac{\beta_2}{c} & 1 \end{bmatrix}$ և $\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 c \\ -\frac{\beta_1}{c} & 1 \end{bmatrix}$ մատրիցների արտադրյալը, մտցնել $v_3=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$ նոր պարամետրը և օգտվել հեշտ ստուգվող $\frac{v_3}{\sqrt{1-\beta_2^2}\cdot\sqrt{1-\beta_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_3^2}}$ առնչությունից, որտեղ $\beta_3=\frac{v_3}{c}$: 322. v_3-ի համար ստացված բանաձևի մեջ տեղադրելով $v_1=c$, կստանանք $v_3=c$: 327. Ցանկացած ռացիոնալ թիվ ներկայացնել $2^k\cdot\frac{m}{n}$ տեսքով, որտեղ m և n թվերը կենտ են: 329. 10: 330. 8: 333. Օգտվել Կելիի թեորեմից (տես խնդիր131): 338. $aba=ba^2b=ba^{-1}b$ հետևում է, որ $ab^2=aba\cdot a^{-1}b=ba^{-1}b\cdot a^{-1}b=ba^{-1}\cdot aba=b^2a$: Այստեղից՝ $ab=ba$ և $b=e$: 339. Ցույց տալ, որ խմբի $A^{k_1}B^{m_1}\ldots A^{k_s}B^{m_s}$ տարրը միավոր տարր չէ, եթե k_i և m_i ամբողջ թվերը միաժամանակ զրո չեն: 344. 6: 347. Z_{p^k}, p-ն պարզ թիվ է: 350.

Օրինակ, $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցների ենթախումբը համալուծ է $\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ տեսքի մատրիցների ենթախմբին: 351. 1 որոշիչ ունեցող մատրիցների ենթախումբը: 359. Դիցուք խմբի կարգը n է: ա) Միավորը առանձին դաս է: Միավորից տարբեր բոլոր տարրերը, որոնց քանակը $n-1$ է, ընկած են միևնույն դասում: Հետևաբար $n-1$ թիվը n թվի բաժանարար է: Իսկ դա հնարավոր է միայն $n=2$ դեպքում: բ) պարզ է, որ $n=1+k_1+k_2$, $k_1 \le k_2$: k_1 և k_2 թվերը n թվի բաժանարարներ են: Հնարավոր դեպքերն են՝ 1) $k_1=k_2=1$: 3 կարգի ցիկլիկ խումբ: 2) $n=4$, $k_1=1$, $k_2=2$: Այդպիսի խումբը աբելյան է (խնդիր 56) և չի բավարարում խնդրի պայմանին (ունի համալուծ տարրերի 4 դաս): 3) $n=6$, $k_1=2$, $k_2=3$: Միակ ոչ աբելյան 6 կարգի խումբը S_3-ն է (խնդիր 293): գ) 4 կարգի երկու ոչ իզոմորֆ խմբերը, D_{10} և A_4 խմբերը: 360. Եթե K-ն համալուծ տարրերի այդ դասն է, $H=G\setminus K$ ենթաբազմությունը կենտ կարգի աբելյան խումբ է: 361. Համալուծ են A և C մատրիցները: 363. 6 ոչ իզոմորֆ խմբեր: Համեմատել 235 խնդրի պատասխանի հետ: 366. 30 կարգի ենթախումբը A_5 խմբում կունենար 2 ինդեքս և կհանդիսանար նորմալ բաժանարար, իսկ A_5-ը պարզ խումբ է (տես խնդիր 315): 369. Ավտոմորֆիզմի դեպքում խմբի ծնիչը անցնում է մեկ այլ ծնիչի: 370. 400: 372. Ոչ: Ցույց տալ, որ ծնիչների վերջավոր բազմությամբ առաջացած ենթախումբը ցիկլիկ է: 377. Ռացիոնալ թիվը ներկայացնել $2^k m/n$ տեսքով, որտեղ m և n թվերը կենտ են և ընդունել $\varphi(2^k m/n)=k$: Տես նաև խնդիր 327: 378. $n!/2n$: 379. $n!\Big/\prod_{i=1}^{n}(i^{b_i}b_i!)$: 381. $\prod_{i=1}^{r}(k_i!)m_i^{k_i}$: 384. Տես 113 և 379 խնդիրները: 386. Կանոնավոր քսանանիստի խումբն իզոմորֆ է A_5 խմբին: 389. Այո: 390. ա), ե), զ): 392. Տես նաև խնդիր 45: 393. Տես նաև խնդիր 46: 394. Եթե k և m թվերը փոխադարձաբար պարզ են, գոյություն ունեն u և v ամբողջ թվեր այնպես, որ $ku+mv=1$ և $s=s(ku+mv)$: 395. գ) p^α թվի հետ փոխադարձաբար պարզ չեն

$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots, p^{\alpha-1}\cdot p$ թվերը, որոնց քանակը $p^{\alpha-1}$ է: Մնացած $p^{\alpha}-p^{\alpha-1}$ թվերը p^{α} թվի հետ փոխադարձաբար պարզ են:

Հիմնական նշանակումները

A_n - n աստիճանի նշանափոխ խումբը ($\{1,2,\ldots,n\}$ բազմության զույգ տեղադրությունների խումբը)

$|A|$ - A բազմության տարրերի քանակը

$[a,b]$ - խմբի a և b տարրերի կոմուտատորը

$\mathrm{Aut}\,G$ - G խմբի ավտոմորֆիզմների խումբը

$<a>$ - a ծնիչով ցիկլիկ խումբ

C - կոմպլեքս թվերի բազմությունը

D_n - կրկնակի n անկյուն կանոնավոր բուրգի (դիեդրի) համաչափությունների խումբը

$G(a)$ - a տարրի ուղեծիրը

G' - G խմբի կոմուտանտը

K_4 - Քլայնի խումբը

N - բնական թվերի բազմությունը

$N(H)$ - H ենթախմբի նորմալիզատորը

nZ - n թվին բազմապատիկ ամբողջ թվերը

Q - ռացիոնալ թվերի բազմությունը

R - իրական թվերի բազմությունը

$<S>$ - ծնիչների S բազմությամբ առաջացած ենթախումբը

S_n - n աստիճանի սիմետրիկ խումբը ($\{1,2,\ldots,n\}$ բազմության տեղադրությունների խումբը)

$St(a)$ - a տարրի ստացիոնար ենթախումբը

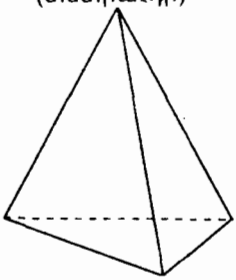
Z - ամբողջ թվերի բազմությունը

Z_n - n կարգի ցիկլիկ խումբ, ըստ n մոդուլի մնացքների դասերը

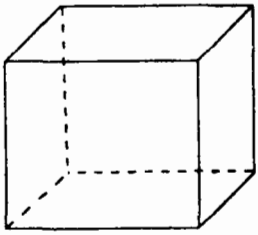
Q_8 - քվատերնիոնների խումբը

$\varphi(n)$ - էյլերի ֆունկցիան (n-ը չգերազանցող և n-ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը, $\varphi(1)=1$)

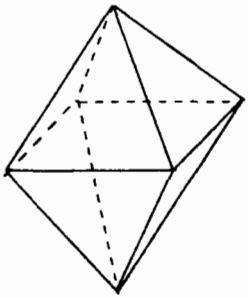
Կանոնավոր քառանիստ
(տետրաեդր)



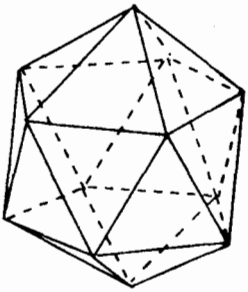
Խորանարդ
(հեքսաեդր)



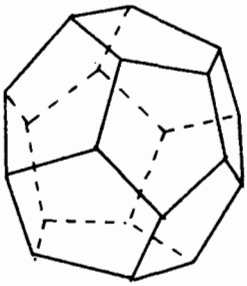
Կանոնավոր ութանիստ
(օկտաեդր)



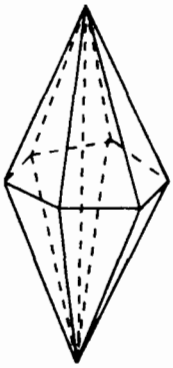
Կանոնավոր քսանանիստ
(իկոսաեդր)



Կանոնավոր տասներկուանիստ
(դոդեկաեդր)



Կրկնակի բուրգ
(դիեդր)



Գրականություն

. Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977.
. Курош А. Г., Теория групп, М.,1967.
. Холл М., Теория групп, М.,1962.
. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М., 1982.
. Биркгоф Г., Барти Т., Современная прикладная математика, М., 1976.
. Александров П. С., Введение в теорию групп, М., 1980.
. Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, М., 1974.
. Сборник задач по алгебре (под редакцией Кострикина А. И.), М. 1987.
. Ляпин Е. С., Айзенштейн А. Я., Лесохин М.М., Упражнения по теории групп, М., 1967.
0. Фадеев Д. К., Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, М., 1977.
1. Комбинаторный анализ, Задачи и упражнения (под редакцией Рыбникова К. И.), М., 1982.
2. Մովսիսյան Յու. Մ., Բարձրագույն հանրահաշիվ, Ե., 1983:
3. Դալալյան Ս. Հ., Վերջավոր ծնված աբելյան խմբեր, Ե. 1984:
4. Միքաելյան Հ. Ս., Հովհաննիսյան Հ. Հ., Խմբի տեսության տարրերը, Ե. 1980:

25018218 22